Дискретная математика

В.Е. Алексеев

http://vmk.ucoz.net/

Комбинаторика

Лекция 4

Основные принципы подсчета

1. Правило равенства.

2. Правило суммы

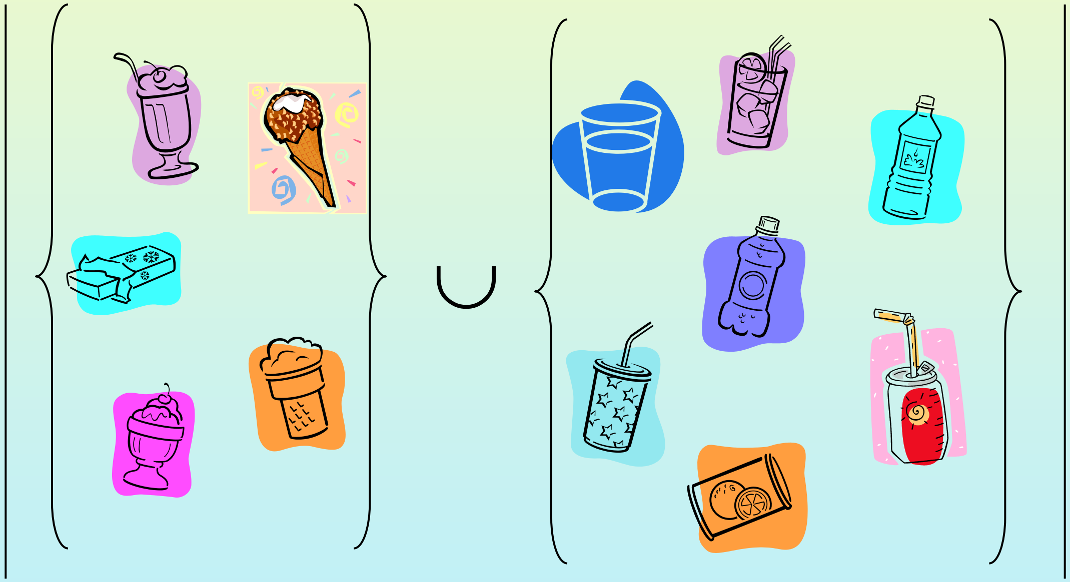
Имеется 5 сортов мороженого

и 7 видов напитков

Каким числом способов можно выбрать что-нибудь одно?

Правило суммы:

Если A *и* B *– непересекающиеся конечные множества, то* $|A \cup B| = |A| + |B|$.



$= 5 + 7 = 12$

2. Правило произведения

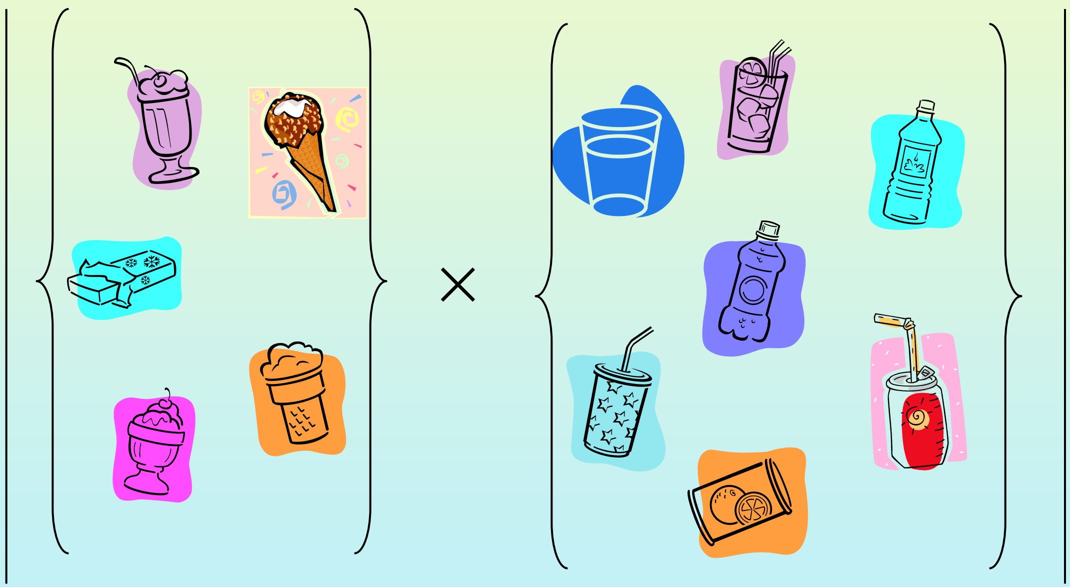
Имеется 5 сортов мороженого

и 7 видов напитков

Каким числом способов можно выбрать и мороженое и напиток?

Правило произведения

Если A *и* B *– конечные множества, то* $|A \times B| = |A||B|.$



$= 5 \cdot 7 = 35$

Для обоснования правила произведения рассмотрим два множества

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$

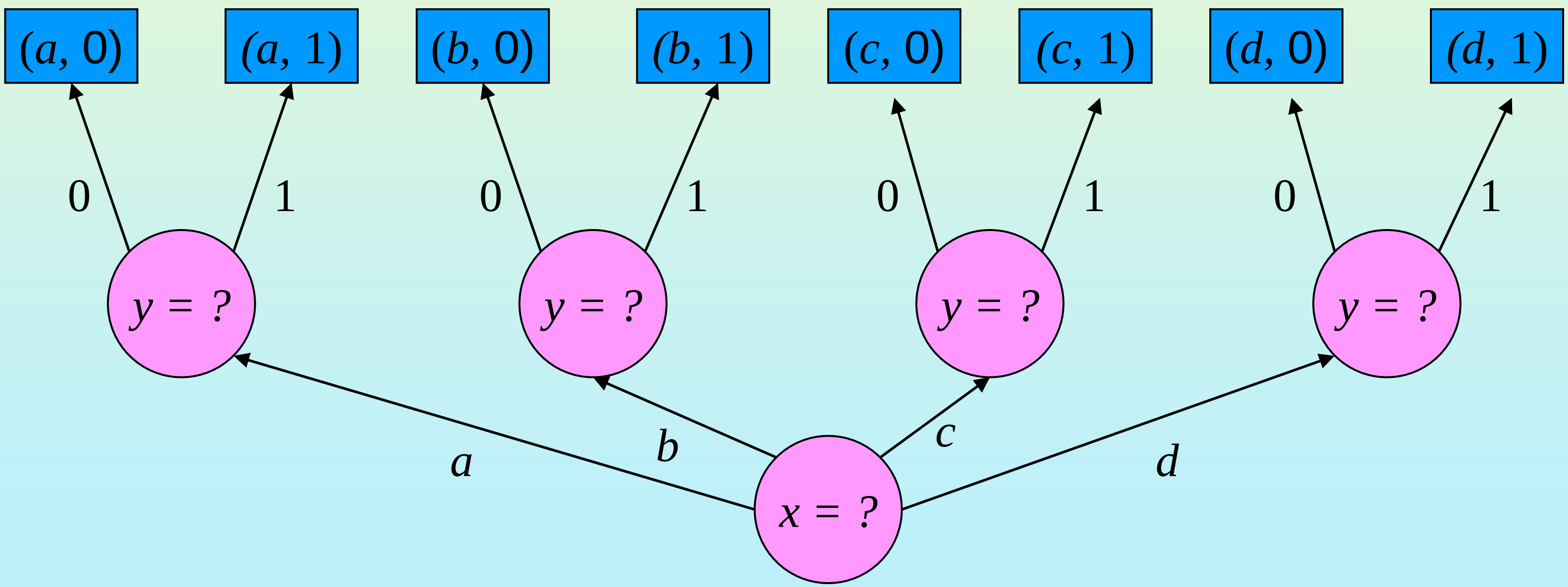
Построим дерево решений для выбора пары $(x, y) \in A \times B.$

Корневой узел содержит вопрос “чему равен x?”
Из него выходят n стрелок, соответствующих возможным ответам $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Они ведут в узлы 1-го уровня.
Каждый узел 1-го уровня содержит вопрос:
“чему равен y?” Из каждого из этих узлов выходят k стрелок, соответствующих возможным ответам $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Эти стрелки ведут в узлы 2-го уровня, листья.

Каждый лист соответствует некоторой паре из $A \times B$.

Имеется n 1-го уровня, из каждого из них выходят k стрелок. Значит, в дереве nk листьев.
Имеется взаимно однозначное соответствие между листьями и парами из $A \times B$. Следовательно, число пар равно $nk = |A||B|$.

Пример: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{0, 1\}$



Оба правила распространяются на любое число множеств.

Если $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *– конечные попарно непересекающиеся множества, то*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ \ldots + |A_k|.$$

Если $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *– конечные множества, то*

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1||A_2| \ldots |A_k|.$$

Как частный случай правила произведения при $A_1 = A_2 = \ldots = A_k$ получаем

Теорема. *Число последовательностей длины* n, *состоящих из элементов множества* A *мощности* k *равно* k^n.

Слова

Алфавит – это множество *букв* (*символов*).
Выписывая буквы в некотором порядке, получаем *слово*.

Например, из букв алфавита $A = \{a, b, c\}$ можно образовать слова: acb, $aaaa$, bab, cca, b, и т.д.
Существует *пустое* слово, не содержащее ни одной буквы.
Оно обозначается λ.

Фактически *слово* есть *набор* символов, записанный без скобок и запятых.

Иногда вместо термина *слово* употребляют термин *строка*.

Длина слова – это число букв в нем.

Множество всех слов длины n в алфавите A обозначается A^n.

В частности, $A^0 = \{\lambda\}$, $A^1 = A$.

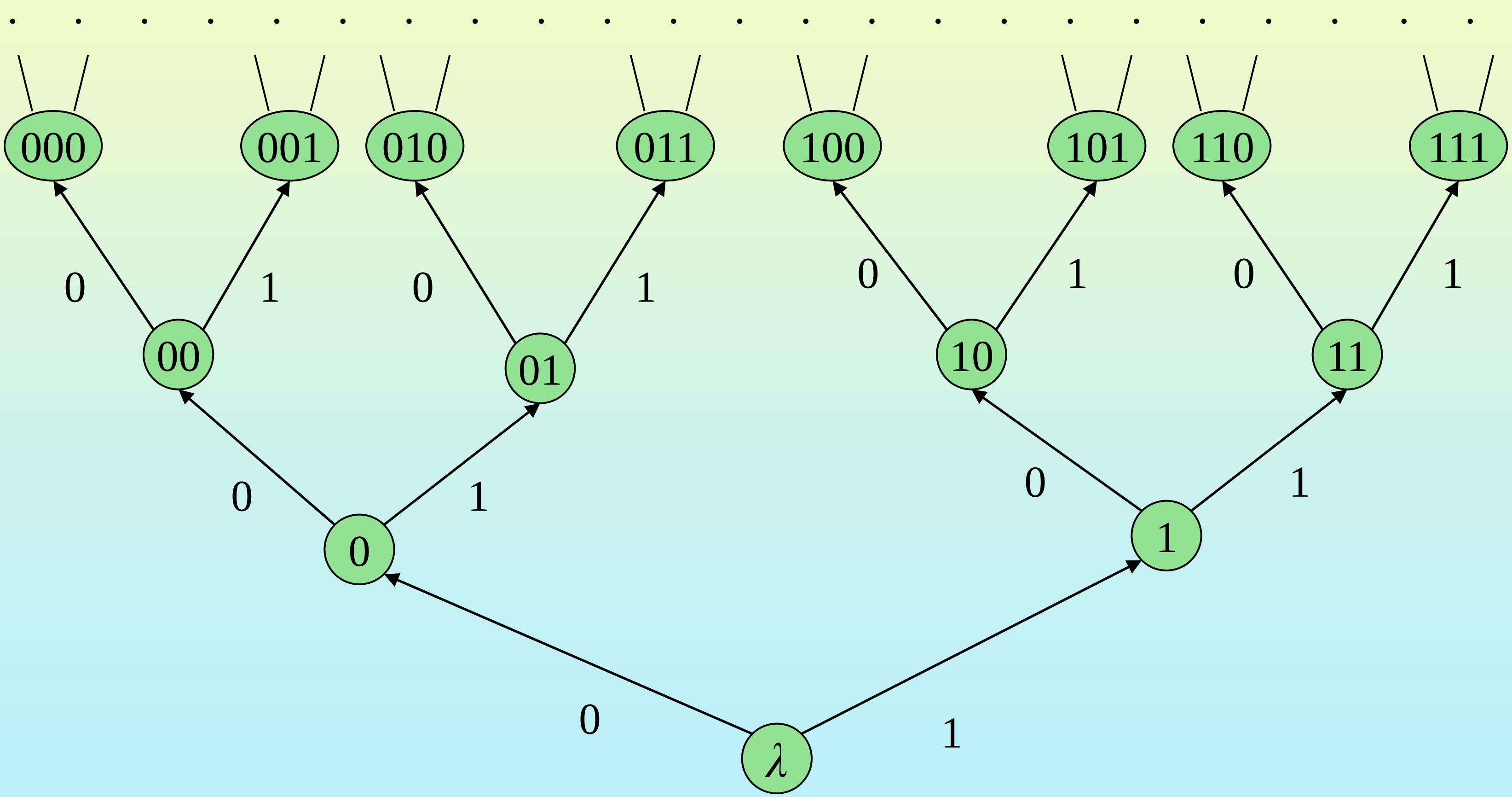
Число слов длины n в алфавите мощности k равно числу соответствующих наборов, т.е. k^n.

Множество всех слов в алфавите A обозначается A^*.

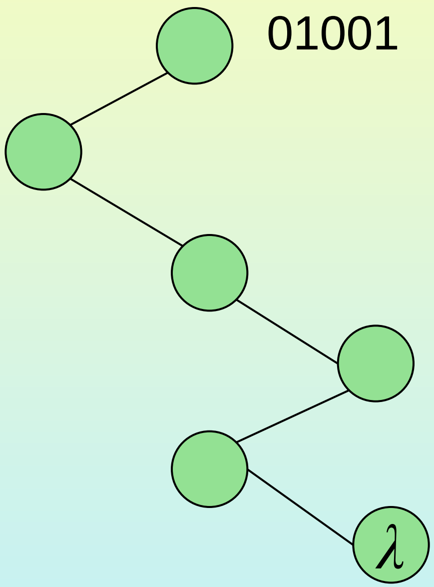
Таким образом, $A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots \cup A^n \cup \ldots$

<u>Представление бинарных слов</u>

Слова в алфавите {0,1} (*бинарные слова*) можно представлять с помощью бинарного дерева. Буквы 0, 1 сопоставляются двум стрелкам, выходящим из узла.



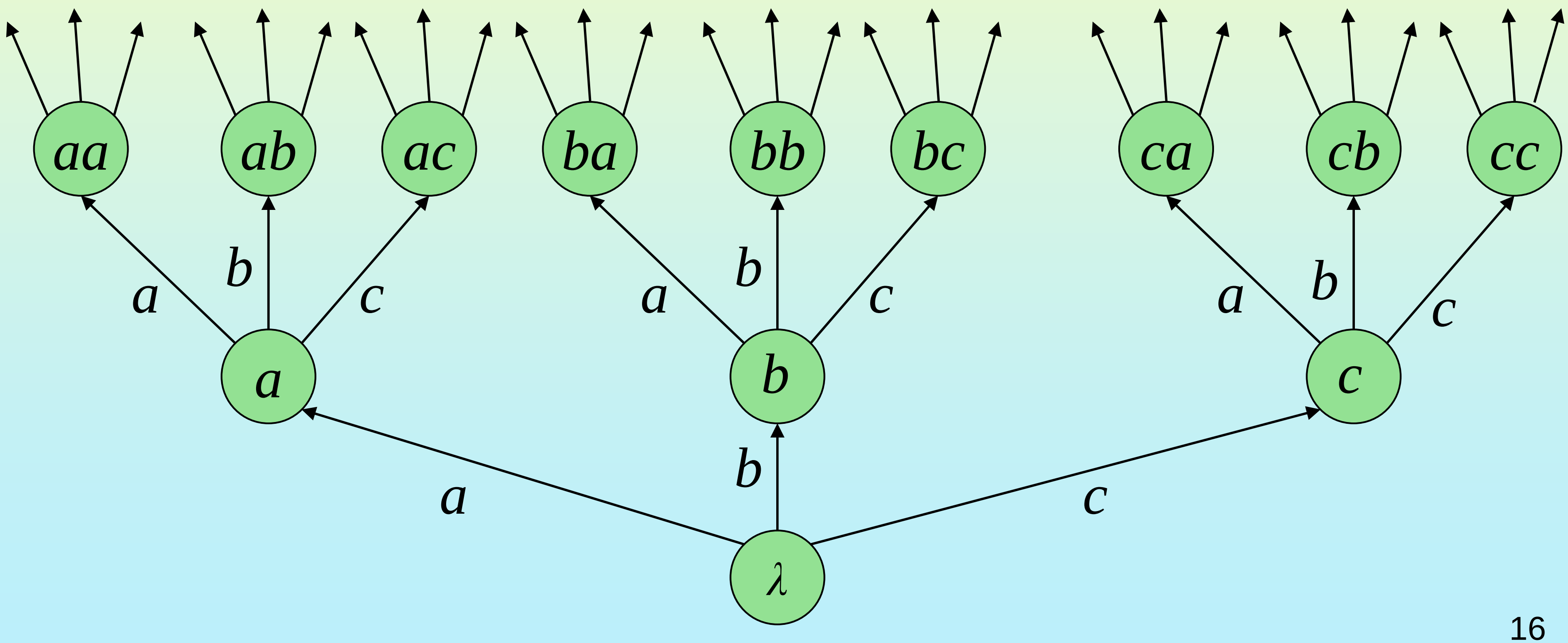
Левая стрелка – всегда 0, правая – 1. Двигаясь вдоль пути из корня в какой-нибудь узел, Можно прочитать некоторое слово. Это слово представляется данным узлом.



Множество всех бинарных слов представляется бесконечным бинарным деревом. Для каждого слова в дереве имеется единственный узел, представляющий это слово.

С помощью дерева можно представлять в любом алфавите. Если алфавит состоит из *k* букв, то используется *k-арное* дерево, в котором из каждого узла выходят *k* стрелок, помеченных различными буквами.

$$A = \{a, b, c\}$$



Лексикографический порядок

Почему в списке стран мира Австралия располагается раньше, чем Австрия?

Потому что список составлен в *алфавитном порядке.*

Что это значит?

Пусть A – конечный алфавит с заданным на нем линейным порядком (*алфавитный порядок на A*). Этот порядок будем обозначать $\leq$.

Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то пишем $x < y$.

Лексикографический порядок – это распространение алфавитного порядка на множество A^*.

Для лексикографического порядка применяем те же обозначения $\leq$, $<$.

Сначала определим лексикографический порядок для слов одинаковой длины.

Пусть $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$ и $\beta = b_1 b_2 \ldots b_n$ – слова из A^n.

Слово α *лексикографически меньше* слова β,

$$\alpha < \beta ,$$

если для некоторого i

$$a_1 = b_1, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1},$$

$$a_i < b_i .$$

Доказательство транзитивности: $\alpha \le \beta,\ \ \beta \le \gamma \ \Rightarrow\ \alpha \le \gamma$

Если $\alpha = \beta$ или $\beta = \gamma$, утверждение очевидно.
Пусть $\alpha \ne \beta$ и $\beta \ne \gamma$.

Пусть $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n, \quad \beta = b_1 b_2 \dots b_n, \quad \gamma = c_1 c_2 \dots c_n$.

Тогда

$\alpha \le \beta \ \Rightarrow$ существует такое i, что $a_1 a_2 \dots a_{i\text{-}1} = b_1 b_2 \dots b_{i\text{-}1}$ и
$a_i < b_i$,

$\beta \le \gamma \ \rightarrow$ существует такое k, что $b_1 b_2 \dots b_{k\text{-}1} = c_1 c_2 \dots c_{k\text{-}1}$
$b_k < c_k$.

Рассмотрим два случая: $i \le k$ и $i > k$.

- $i \le k$:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = b_1 = c_1,\\
&\vdots\\
&a_{i-1} = b_{i-1} = c_{i-1},\\
&a_i < b_i \le c_i,
\end{aligned}
$$

таким образом, $a_1 = c_1, \ldots, a_{i\text{-}1} = c_{i\text{-}1},\ a_i < c_i$,
следовательно, $\alpha < \gamma$.

- $i > k$ аналогично:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = b_1 = c_1,\\
&\vdots\\
&a_{k-1} = b_{k-1} = c_{k-1},\\
&a_k = b_k < c_k,
\end{aligned}
$$

и опять $\alpha < \gamma$.

Лексикографический порядок является *линейным*.

Перечислим бинарные слова длины 3 в лексикографическом порядке:

Слово	Номер
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

$$Номер(a_1 a_2 a_3) = 4a_1 + 2a_2 + a_3$$

$$= 2^2 a_1 + 2^1 a_2 + 2^0 a_3$$

Общий случай: бинарные слова длины n

Со словом $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$ ассоциируем целое число

$$N(\alpha) = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} a_2 + \ldots + 2^1 a_{n-1} + 2^0 a_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} a_i .$$

Наименьшее значение есть

$$N(00\ldots0) = 0,$$

а наибольшее

$$N(11\ldots1) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^0 = 2^n - 1.$$

Теорема. *Функция* N *является биекцией из* $\{0,1\}^n$ *в* $\{0,1,\ldots,2^n-1\}$.

Доказательство. Докажем сначала инъективность.

Точнее, докажем, что из $\alpha < \beta$ следует $N(\alpha) < N(\beta)$.

Действительно, пусть $\alpha = a_1a_2\ldots a_n$, $\beta = b_1b_2\ldots b_n$ и $\alpha < \beta$. Тогда существует такое k, что $a_1a_2\ldots a_{k\text{-}1} = b_1b_2\ldots b_{k\text{-}1}$, $a_k < b_k$, то есть $a_k = 0$, $b_k = 1$.

Тогда

$$N(\alpha) - N(\beta) = (2^{n-1}a_1 + \ldots + 2^0 a_n) - (2^{n-1}b_1 + \ldots + 2^0 b_n) =$$

$$= (2^{n-k-1}a_{k+1} + \ldots + 2^0 a_n) - (2^{n-k} + 2^{n-k-1}b_{k+1} + \ldots + 2^0 b_n) \leq$$

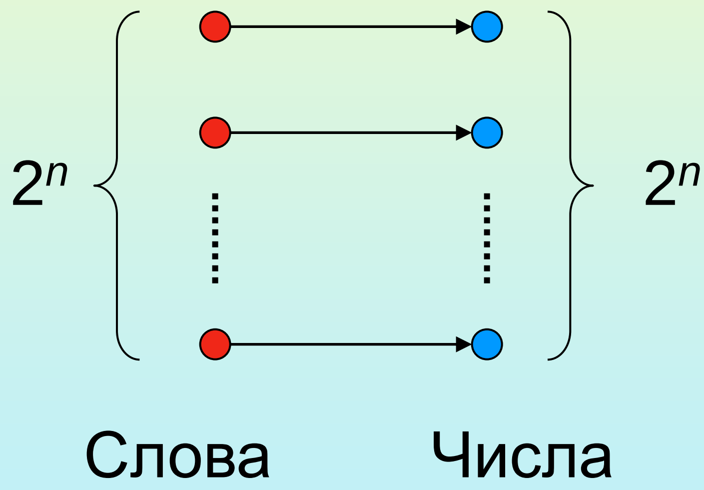
$$\leq (2^{n-k-1} + \ldots + 2^0) - 2^{n-k} = 2^{n-k} - 1 - 2^{n-k} = -1.$$

Следовательно, $N(\alpha) < N(\beta)$.

Итак, функция N инъективна.

Множества $\{0,1\}^n$ и $\{0,1,\ldots,2^n-1\}$ имеют одинаковую мощность 2^n.

Отсюда следует, что эта функция сюръективна.



Общее определение лексикографического порядка

Для слов произвольной (возможно, различной) длины лексикографический порядок определяется следующим образом.

Слово $\alpha = a_1a_2\ldots a_n$ *лексикографически меньше* слова $\beta = b_1b_2...b_m$, если
существует такое i, что $a_1 = b_1,\ldots, a_{i\text{-}1} = b_{i\text{-}1}, a_i < b_i$
или $n < m$ и $a_1 = b_1,\ldots, a_n = b_n$.

Пример: $A = \{a, b, c\}$, $a < b < c$. Тогда

$bcabc < bcccaab$,
$acca < accabca$.

Дискретная математика

Лекция 5

Перестановки

Государственный флаг одной страны состоит из трех цветных полос:

Переставляя полосы, можно получить другие флаги:

или

Сколько различных флагов можно получить таким образом из этих трех полос?

Перестановка элементов множества A – это последовательность, в которой каждый элемент из A встречается точно один раз.

Иначе говоря, перестановка – это расположение всех элементов множества в некотором порядке.

Подсчитаем число перестановок из n элементов.

Пусть $A = \{1, 2, \ \ldots, n\}$.

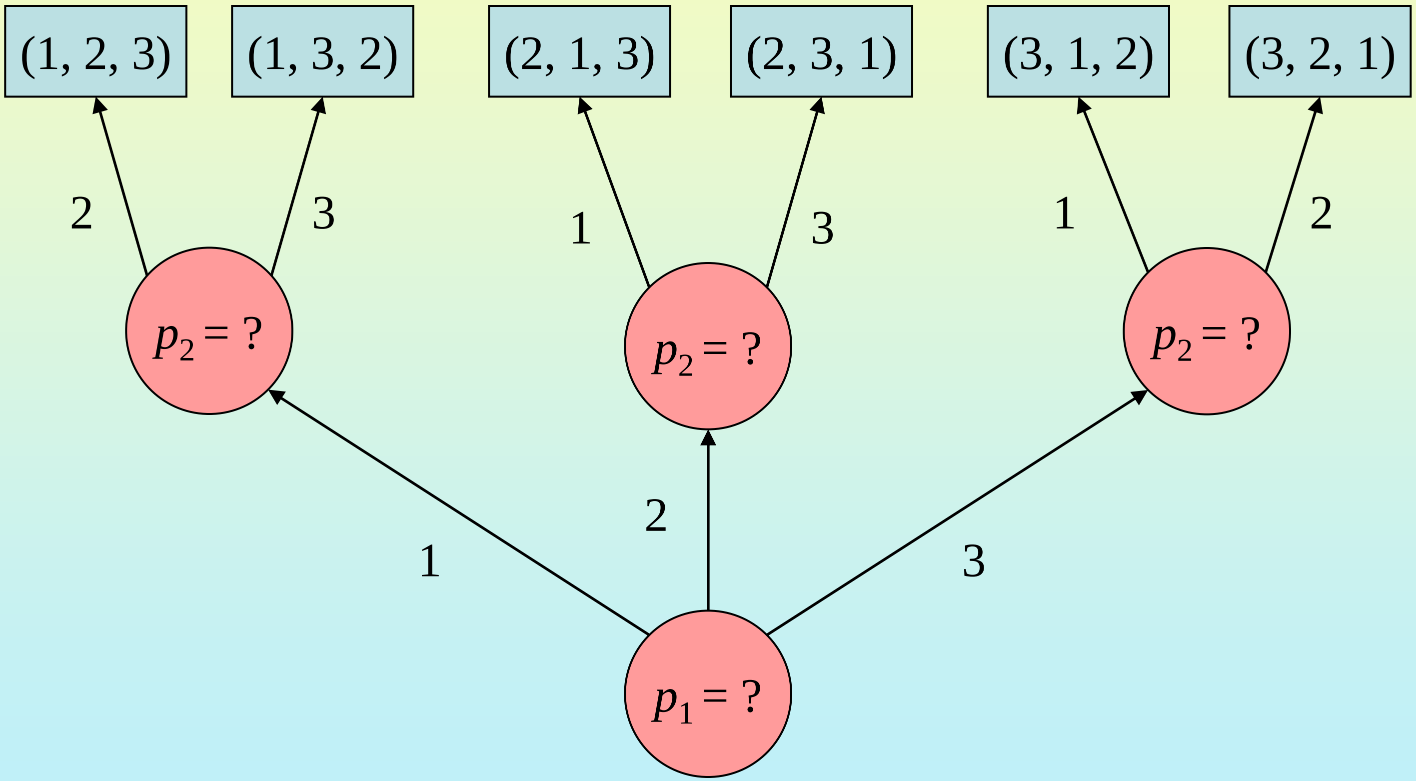
- Два элемента можно расположить в последовательность двумя способами:

(1, 2)   и   (2, 1)

- Для $n = 3$ имеется 6 перестановок:

(1, 2, 3)
(1, 3, 2)
(2, 1, 3)
(2, 3, 1)
(3, 1, 2)
(3, 2, 1)

Можно построить дерево решений для выбора перестановки (p_1, p_2, p_3):



Дерево решений для выбора перестановки $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$ имеет n уровней.

Корень дерева (нулевой уровень) содержит вопрос: "чему равно p_1?".

Из корня выходит n стрелок, соответствующих n возможным ответам. Они ведут в вершины первого уровня.

Каждая вершина 1-го уровня содержит вопрос: "чему равно p_2?".

Из каждой вершины 1-го уровня выходят $n - 1$ стрелка (так как p_2 должно отличаться от p_1).

Каждая вершина уровня k содержит вопрос: “чему равно p_{k+1}?”. Имеется $n - k$ возможных ответов (так как p_{k+1} должно отличаться от $p_1, \ldots, p_k$), им соответствуют $n - k$ выходящих стрелок.

После того, как на $(n - 2)$-м уровне будет выбран элемент $p_{n\text{-}1}$, элемент p_n определяется однозначно. Вершины $(n - 1)$-го уровня являются листьями дерева, каждая из них содержит некоторую перестановку.

Число перестановок равно числу листьев дерева. Сколько их?

Первый уровень состоит из n вершин.

Из каждой вершины первого уровня выходят $n-1$ стрелок, значит, на втором уровне будет $n(n-1)$ вершин.

На третьем уровне число вершин увеличивается в $n-2$ раз и так далее.

Итог: число перестановок n элементов равно

$$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1.$$

Это произведение обозначается $n!$ и называется n *факториал*.

Теорема. *Число перестановок n элементов равно $n!$*

Замечание. Этот результат не может быть получен с помощью правила произведения:

Если $p_1 = 1,$ то p_2 выбирается из множества $\{2, 3, \ldots, n\},$ а если $p_1 = 2,$ то p_2 выбирается из множества $\{1, 3, \ldots, n\}.$

Поэтому здесь мы не имеем дело с декартовым произведением каких-либо множеств.

Однако можно сформулировать обобщенное правило произведения, которое применимо и в этом случае.

Общее правило произведения

Пусть набор $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *образуется путем последовательного выбора элементов* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем

- *элемент* x_1 *можно выбрать* n_1 *способами;*
- *при любом* x_1 *элемент* x_2 *можно выбрать* n_2 *способами;*
- *при любых* x_1, x_2 *элемент* x_3 *можно выбрать* n_3 *способами;*

...

- *при любых* $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ *элемент* x_k *можно выбрать* n_k *способами.*

Тогда весь набор можно выбрать $n_1 n_2 \ldots n_k$ *способами.*

Доказать можно с помощью дерева решений.

k-перестановки

k-*перестановка* элементов множества A – это набор длины k, в который каждый элемент из A входит не более одного раза.

Например, имеется 12 2-перестановок из 4 элементов:

(1, 2)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 2)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 3)

Число k-перестановок из n элементов обозначается $P(n, k)$.

Это число легко найти с помощью обобщенного правила произведения :

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

Умножив и разделив правую часть на $(n-k)!$, получаем формулу:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Сочетания

Студент хочет выбрать 3 дня из 5 (от понедельника до пятницы) для работы в библиотеке. Каким числом способов это можно сделать?

Нужно выбрать 3-подмножество из множества мощности 5. Имеется 10 таких подмножеств (дни недели занумерованы числами 1,…,5):

{1, 2, 3}	{1, 4, 5}
{1, 2, 4}	{2, 3, 4}
{1, 2, 5}	{2, 3, 5}
{1, 3, 4}	{2, 4, 5}
{1, 3, 5}	{3, 4, 5}

Сочетания из n по k (k-*сочетания*)
– это k -подмножества множества мощности n.

Все сочетания из 4 элементов $\{a, b, c, d\}$:

$k =$	0	1	2	3	4
	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c,d\}$
		$\{b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,d\}$	
		$\{c\}$	$\{a,d\}$	$\{a,c,d\}$	
		$\{d\}$	$\{b,c\}$	$\{b,c,d\}$	
			$\{b,d\}$		
			$\{c,d\}$		
	1	4	6	4	1

перестановка – упорядоченная совокупность, набор.

сочетание – неупорядоченная совокупность, множество.

Из одного k-сочетания можно получить $k!$ различных k-перестановок:

(1,2,3)
(1,3,2)
(2,1,3)
{1,2,3}
(2,3,1)
(3,1,2)
3-сочетание
(3,2,1)

3-permutations

Число сочетаний из n по k обозначим через $C(n,k)$.

(в литературе используются обозначения $\binom{n}{k}$, C_n^k).

Элементы каждого k-сочетания можно упорядочить $k!$ способами, получатся $k!$ различных k-перестановок. Поэтому

$$C(n,k)\,k! = P(n,k).$$

Так как $P(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$,

получается формула для числа сочетаний:

$$\boxed{C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Некоторые простые свойства чисел $C(n,k)$

1) $C(n,0) = C(n,n) = 1.$

2) $C(n,1) = n.$

3) $C(n,k) = C(n,n-k).$

4) $C(n,k) = \dfrac{n}{k} C(n-1,k-1).$

5) $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1).$

Все эти тождества легко доказываются с помощью факториальной формулы. Докажем, например, последнее.

$$C(n-1,k)+C(n-1,k-1)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\frac{n}{k(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C(n,k).$$

Это тождество можно использовать для построения таблицы чисел $C(n,k)$, известной как *треугольник Паскаля.*

$$C(0,0)$$

$$C(1,0) \qquad C(1,1)$$

$$C(2,0) \qquad C(2,1) \qquad C(2,2)$$

$$C(3,0) \qquad C(3,1) \qquad C(3,2) \qquad C(3,3)$$

$$C(4,0) \qquad C(4,1) \qquad C(4,2) \qquad C(4,3) \qquad C(4,4)$$

. . . .

Крайние элементы (левый и правый) в каждой строке равны 1. Каждый из остальных элементов вычисляется как сумма двух расположенных над ним элементов предшествующей строки:

$$C(n-1,k-1) \quad + \quad C(n-1,k)$$

$$C(n,k)$$

Треугольник Паскаля

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

. . . .

Бинарные слова с заданным распределением

Задача. Сколько имеется слов длины n в алфавите $\{0,1\}$, в которых символ 1 встречается ровно k раз?

Решение. Представим, что слово вписано в таблицу из n клеток, как в примере (здесь $n = 8, k = 3$):

0	1	1	0	0	0	1	0

1 2 3 4 5 6 7 8

Клетки пронумерованы $1, 2, \ldots, n$.

Чтобы указать слово с k единицами, нужно выбрать k клеток из n.
Иначе говоря, нужно выбрать подмножество $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$
(в примере выбирается подмножество $\{2, 3, 7\}$).

Это можно сделать $C(n,k)$ способами.

Теорема. *Число слов длины n в алфавите $\{0,1\}$, содержащих ровно k единиц, равно $C(n,k)$.*

Биномиальная теорема

Хорошо известны формулы: $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Нетрудно также вывести

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Если выписать коэффициенты в правых частях:

1, 2, 1
1, 3, 3, 1
1, 4, 6, 4, 1
1, 5, 10, 10, 5, 1

то оказывается, что эти строки совпадают со строками треугольника Паскаля. Случайно ли это? Конечно, нет!

Для вывода тождества $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

мы раскрываем скобки в выражении $(a + b)(a + b)$.
Если при этом не группировать сомножители и слагаемые, получим

$$(a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb.$$

Слагаемые в правой части – это всевозможные слова длины 2 в алфавите $\{a,b\}$.

После группирования получаем доказываемое тождество.

Аналогично для $n = 3$:

$$(a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aab + aba + abb +$$
$$+ baa + bab + bba + bbb.$$

В правой части получились все слова длины 3.

Это верно для любого n: если раскрыть скобки в выражении

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\ldots(a+b),$$

не группируя сомножителей и слагаемых, то получится сумма, в которой слагаемыми являются все слова длины n.

Это можно доказать индукцией по n.

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b).$$

Если сначала раскрыть скобки в $(a + b)^{n-1}$, то, по предположению индукции, получатся все слова длины $n - 1$.

Когда мы умножим эту сумму на $(a + b)$ и раскроем скобки, из каждого слова длины $n - 1$ получатся два слова длины n добавлением букв a и b.

Ясно, что получатся все слова длины n.

Группируя сомножители, получим слагаемые вида

$$a^k b^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\ldots n.$$

Такое слагаемое входит в сумму столько раз, сколько имеется слов, в которые буква a входит k раз, а буква b $n-k$ раз, то есть $C(n,k)$.

Следовательно, после группирования слагаемых получим сумму

$$C(n,0)a^0b^n + C(n,1)a^1b^{n-1} + C(n,2)a^2b^{n-2} + \ldots + C(n,n)a^nb^0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k b^{n-k}.$$

Теорема (Бином Ньютона).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k b^{n-k}$$

для любого натурального n *и вещественных* a, b.

Числа $C(n,k)$ называют *биномиальными коэффициентами*.

Из биномиальной теоремы можно вывести много тождеств для биномиальных коэффициентов.

<u>Примеры:</u>

- При $a = b = 1$ получаем

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = C(n,0) + C(n,1) + \ldots + C(n,n) = 2^n.$$

- Пусть $a = -1, b = 1$. Тогда

$$\sum_{k+0}^{n} (-1)^k C(n,k) = C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - \ldots + (-1)^n C(n,n) = 0.$$

Дискретная математика

Лекция 6

Разбиения с заданной спецификацией

$C(n,k)$ – число подмножеств мощности k у множества мощности n.

$C(n,k)$ можно рассматривать также как число разбиений множества из n на две части, первая из которых состоит из k элементов, а вторая – из n-k элементов.

Рассмотрим теперь разбиения на s частей.

Пусть A – множество мощности n,

$k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbf{N}_0$ и $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$.

Разбиение $A = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_s$ называется *разбиением со спецификацией* $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$, если

$$|P_1| = k_1, \quad |P_2| = k_2, \quad \ldots, \quad |P_s| = k_s.$$

Подсчитаем число таких разбиений.

Применим обобщенное правило произведения.

Множество P_1 можно выбрать $C(n,k_1)$ способами.

После того, как P_1 выбрано, остается $n-k_1$ элементов и множество P_2 можно выбрать $C(n - k_1 , k_2)$ способами.

Когда выбраны P_1 и P_2, осталось $n-k_1-k_2$ элементов и множество P_3 можно выбрать $C(n-k_1-k_2, k_3)$ способами.

…

Когда выбраны $P_1, P_2, \ldots, P_{s\text{-}1}$, множество P_s определяется однозначно – оно состоит из оставшихся $k_s = n-k_1-k_2-\ldots-k_{s\text{-}1}$ элементов.

Все разбиение $(P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_s)$ может быть выбрано

$$C(n,k_1)C(n-k_1,k_2)C(n-k_1-k_2,k_3)\ldots C(n-k_1-\ldots-k_{s-1},k_s)$$

способами. Применяя факториальную формулу, получаем

$$\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!}\cdots\frac{(n-k_1-\ldots-k_{s-1})!}{k_s!(n-k_1-\ldots-k_s)!}=$$

$$=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}.$$

Это число называется *полиномиальным коэффициентом* и обозначается

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!}.$$

.

Слова с заданным распределением букв

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ – алфавит, $n \in \mathbf{N}$,
$k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbf{N}_0$ и $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$.

Задача. Сколько имеется слов длины n в алфавите A, в которые буква a_1 входит k_1 раз, буква a_2 – k_2 раз, ..., буква a_s – k_s раз?

Решение. Так же, как в бинарном случае, считаем, что слово вписано в таблицу с n пронумерованными клетками.

Чтобы указать слово с данным распределением букв, мы должны выделить k_1 клеток для буквы a_1, k_2 клеток для буквы $a_2, \ldots,$ k_s клеток для буквы a_s.

Это равносильно разбиению множества $\{1, 2, \ldots n\}$ всех клеток на s частей со спецификацией $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$.

Теорема. *Число слов длины* n *в алфавите* $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, *в которые буква* a_1 *входит* k_1 *раз*, *буква* a_2 *входит* k_2 *раз,…, буква* a_s *входит* k_s *раз, равно*

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_s}.$$

Полиномиальная теорема

Полиномиальная теорема – обобщение бинома Ньютона.

Она утверждает, что

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots k_s=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_s} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s}$$

Суммирование здесь производится по всем наборам

$(k_1, k_2, \ldots, k_s)$, таким, что $0 \le k_i \le n$ для каждого i и

$k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$.

Эта теорема может быть доказана таким же способом, как биномиальная теорема.

Пример

$$(a+b+c)^3 = \binom{3}{0,0,3}c^3 + \binom{3}{0,1,2}bc^2 + \binom{3}{0,2,1}b^2c + \binom{3}{0,3,0}b^3 +$$

$$+\binom{3}{1,0,2}ac^2 + \binom{3}{1,1,1}abc + \binom{3}{1,2,0}ab^2 + \binom{3}{2,0,1}a^2c +$$

$$+\binom{3}{2,1,0}a^2b + \binom{3}{3,0,0}a^3 =$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 +$$

$$+3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b +$$

$$+6abc.$$

Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями – это мультимножества, составленные из элементов данного множества.

Размер мультимножества есть общее число вхождений элементов. Например, размер мультимножества

$$\{a,a,b,b,b,b,c,c,c\}$$

равен 9.

Из трех элементов a, b, c можно образовать 10 мультимножеств размера 3:

$$\begin{array}{ll} \{a,a,a\} & \{a,c,c\} \\ \{a,a,b\} & \{b,b,b\} \\ \{a,a,c\} & \{b,b,c\} \\ \{a,b,b\} & \{b,c,c\} \\ \{a,b,c\} & \{c,c,c\} \end{array}$$

Пусть A – множество мощности n.

Задача. Сколько существует мультимножеств размера k, состоящих из элементов множества A?

Решение.

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Мультимножество можно задать набором чисел $(k_1, k_2, ..., k_n)$, где k_i есть число вхождений элемента a_i, $i = 1, 2, ..., n$ (заметим, что $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$).

Каждому мультимножеству поставим в соответствие бинарное слово. Это слово будет состоять из s групп нулей, разделенных единицами (число таких разделяющих единиц равно $s-1$) .

- Первая группа состоит из k_1 нулей;
- вторая группа состоит из k_2 нулей;

…

- последняя s-тая группа состоит из k_s нулей.

Например, пусть k = 9, n = 5. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

мультимножество	слово
$\{a_1, a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_4, a_4, a_4\}$	0000100110001

В общем случае получится слово из k нулей и $n-1$ единиц.
Каждое бинарное слово с такими параметрами соответствует некоторому мультимножеству.
Таким образом, имеется биекция между множеством всех мультимножеств размера k и множеством всех бинарных слов длины $n+k-1$, содержащих ровно k нулей.
Имеется $C(n+k-1, k)$ таких слов.

Остается применить правило равенства.

Теорема. *Число мультимножеств размера* k, *состоящих из элементов множества мощности* n, *равно* $C(n+k-1, k)$.

Принцип включения и исключения

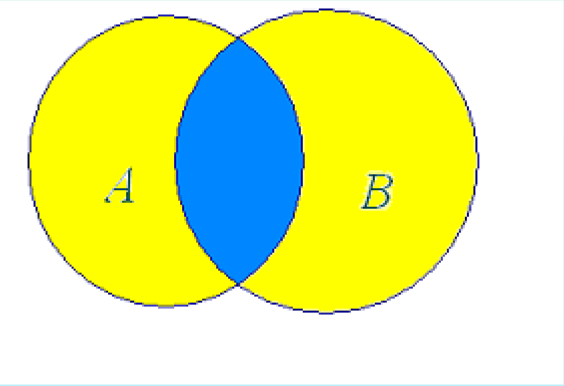
Правило суммы: для любых непересекающихся конечных множеств A и B справедливо равенство

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Если $A \cap B \neq \varnothing$, то это равенство неверно, но его можно легко исправить.

Элементы множества $A \cap B$ считаются дважды в сумме $|A| + |B|$. Чтобы получить правильное значение, достаточно вычесть $|A \cap B|$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Это верно для любых конечных множеств A and B.

Мы сначала *включаем* A и B,

а затем *исключаем* $A \cap B$.

Пусть теперь есть три множества. Как можно вычислить мощность их объединения?

Если мы напишем $|A| + |B| + |C|,$ то некоторые элементы считаются дважды или трижды. Будет ли правильным вычесть (*исключить*) все попарные пересечения?

Рассмотрим получающееся равенство:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$

Правильно ли оно? Проверим.

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$$

Если элемент x принадлежит точно одному из множеств $A, B, C,$ скажем, $x\in A$ и $x\notin B\cup C$, то x считается один раз.

Если x принадлежит точно двум множествам, скажем, $x\in A\cap B$ и $x\notin C$, то x считается $1 + 1 - 1 = 1$ раз.

Если x принадлежит всем трем множествам, то x считается $1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$ раз, то есть x не сосчитан.

Значит, это равенство верно не всегда.

Чтобы его исправить, необходимо *включить* элементы из $A \cap B \cap C$. *Получаем равенство*

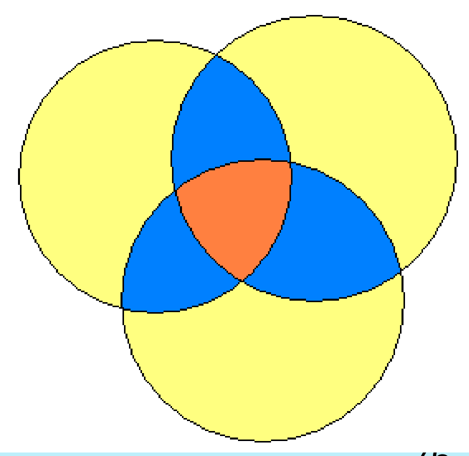
$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - \\ &- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + \\ &+ |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Проверим его.

$x \in$ $\longrightarrow$ x сосчитан 1 раз.

$x \in$ $\longrightarrow$ x сосчитан 1 + 1 – 1 = 1 раз.

$x \in$ $\longrightarrow$ x сосчитан
1 + 1 + 1 – 1 – 1 – 1 + 1
= 1 раз.



Равенство верно для любых A, B, C.

Можно написать аналогичное равенство для 4 множеств:

$$|A\cup B\cup C\cup D| \;=\; |A|+|B|+|C|+|D|-$$

$$-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|+$$

$$+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|-$$

$$-|A\cap B\cap C\cap D|$$

и доказать его аналогичными рассуждениями.

Заметим:

- правая часто содержит всевозможные пересечения множеств из семейства $\{A, B, C, D\}$;
- пересечения нечетного числа множеств входят со знаком $+$;
- пересечения четного числа множеств входят со знаком –.

Сформулируем и докажем формулу включений и исключений в общем виде.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечные множества.

Пересечение k из этих множеств будем называть k-*пересечением.*

Оно является *четным* или *нечетным* пересечением в зависимости от четности или нечетности числа k.

Теорема. $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \Sigma_1 - \Sigma_0$,
где Σ_1 *есть сумма мощности всех нечетных пересечений,* Σ_0 – *сумма мощностей всех четных пересечений.*

Доказательство.

Пусть $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Обозначим через $S(x)$ общий вклад элемента x в $\Sigma_1 - \Sigma_0$.

Покажем, что $S(x) = 1$ для каждого $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Пусть x принадлежит точно m из множеств $A_1,\ A_2,\ \dots,A_n$. Тогда

- имеется m 1-пересечений, содержащих x;
- имеется $C(m,2)$ 2-пересечений, содержащих x;
- имеется $C(m,3)$ 3-пересечений, содержащих x;

...

вообще, для любого $i = 1, 2, ..., m$ имеется ровно $C(m,i)$ i-пересечений, содержащих x (заметим, что $m = C(m,1)$).

Следовательно,

$$S(x) = C(m,1) + C(m,3) + \ldots - C(m,2) - C(m,4) - \ldots$$

Переставляя слагаемые, порлучаем

$$S(x) = C(m,1) - C(m,2) + C(m,3) - C(m,4) + \ldots + (-1)^{m-1} C(m,m).$$

Одно из полученных ранее следствий бинома Ньютона гласит:

$$C(m,0) - C(m,1) + C(m,2) - C(m,3) + \ldots + (-1)^{m} C(m,m) = 0.$$

Поэтому

$$S(x) = C(m,1) - C(m,2) + C(m,3) - \ldots + (-1)^{m-1} C(m,m) = C(m,0) = 1.$$

Эта теорема часто формулируется несколько иначе.

Пусть S_k обозначает сумму мощностей всех *k*-пересечений множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда

$$\boxed{|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{n-1} S_n.}$$

Рассмотрим два применения метода включений и исключений.

Беспорядки

Перестановка $(p_1, p_2, ..., p_n)$ элементов множества $\{1, 2, ..., n\}$ называется *беспорядком*, если $p_i \neq i$ для всех $i = 1, 2, ..., n.$

Иначе говоря, в беспорядок ни один элемент не остается на своем месте, т.е. не остается неподвижным.

Среди перестановок трех элементов имеется два беспорядка:

(1, 2, 3)
(1, 3, 2)
(2, 1, 3)
(2, 3, 1)
(3, 1, 2)
(3, 2, 1)

Эадача. Сколько имеется беспорядков из n элементов?

Обозначим это число через D_n.

Решение. Применяем метод включений и исключений.

Обозначим через A_i множество всех перестановок n элементов, в которых элемент i неподвижен: $p_i = i$.

Тогда $D_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$.

Пример: $n = 4$, $i = 2$,

$A_2 = \{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (3, 2, 1, 4)$
$(3, 2, 4, 1), (4, 2, 1, 3), (4, 2, 3, 1)\}$.

k-пересечение этих множеств A_i – это множество всех перестановок, имеющих (или больше) неподвижных элементов.

Перестановка, оставляющая неподвижными данные k элементов, определяется перестановкой остальных $n-k$ элементов. Имеется ровно $(n-k)!$ таких перестановок.

Число различных k-пересечений равно числу способов выбрать k множеств из n множеств, то есть $C(n,k)$.

Поэтому сумма S_k содержит $C(n,k)$ слагаемых, каждое из которых равно $(n-k)!$ Следовательно,

$$S_k = (n-k)!C(n,k) = \frac{n!}{k!}.$$

Получаем

$$D_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!} =$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) =$$

$$= n!\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

(Заметим, что по определению $0!=1$)

Разбиения

Каким числом способов можно разбить множество из n элементов на части?
Прежде, чем отвечать, необходимо кое-что уточнить.

1. Порядок частей важен? Например, разбиения

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1,3\} \cup \{5\} \cup \{2, 4\}$$

и

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 4\} \cup \{1,3\} \cup \{5\}$$

считаются различными?

Если “да”, то мы рассматриваем *упорядоченные* разбиения, в противном случае *неупорядоченные*.

2. Пустое множество может быть частью разбиения?

Рассмотрим сначала упорядоченные разбиения,
в которых допускаются пустые части.

Задача. Сколько имеется упорядоченных разбиений множества мощности m на n частей, некоторые из которых могут быть пустыми?

Решение. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ – разбиваемое множество. Разбиение можно выбрать, последовательно выбирая части для элементов $a_1, a_2, ..., a_m$. Для каждого элемента имеется n возможностей. Применяя правило произведения, получаем число таких разбиений:

$$n^m.$$

Теперь запретим пустые части.

Задача. Сколько имеется упорядоченных разбиений множества мощности m на n непустых частей?

Решение. Применяем метод включения и исключения.

Пусть $P_1, P_2, ..., P_n$ – части разбиения множества мощности m, среди которых могут быть пустые. Обозначим через A_i множество всех разбиений, у которых $P_i = \varnothing$.

Тогда искомое число равно

$$n^m - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|.$$

k-пересечение этих множеств A_i – это множество всех разбиений, имеющие (или больше) пустых частей.

Разбиение, у которого пусты некоторые фиксированные k частей определяется разбиением всех m элементов на оставшиеся $n-k$ частей. Имеется $(n-k)^m$ таких разбиений.

Поэтому сумма S_k в формуле включений и исключений содержит $C(n,k)$ слагаемых, каждое из которых равно $(n-k)^m$, и получаем

$$S_k = (n-k)^m C(n,k).$$

Следовательно, искомое число равно

$$n^m - (n-1)^m C(n,1) + (n-2)^m C(n,2) - \ldots + (-1)^m (n-n)^m C(n,n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m C(n,k).$$

Теорема. *Число упорядоченных разбиений множества мощности* m *на* n *непустых частей равно*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m C(n,k).$$

Каждое неупорядоченное разбиение на n непустых частей можно упорядочить $n!$ способами. Поэтому число неупорядоченных разбиений равно числу упорядоченных, деленному на $n!$

Число неупорядоченных разбиений множества мощности m на n непустых частей обозначается $S(m,n)$.

Теорема. $$S(m,n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n-k)^m C(n,k).$$

Числа $S(m,n)$ называются *числами Стирлинга второго рода*.

Применяя факториальную формулу для $C(n,k)$, получаем

$$S(m,n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n-k)^m}{k!(n-k)!}.$$

Если просуммировать все числа $S(m,n)$ по n при фиксированном m, получим число всех неупорядоченных разбиений множества мощности m.

Это число обозначается B_m и называется *числом Белла*.

Теорема.

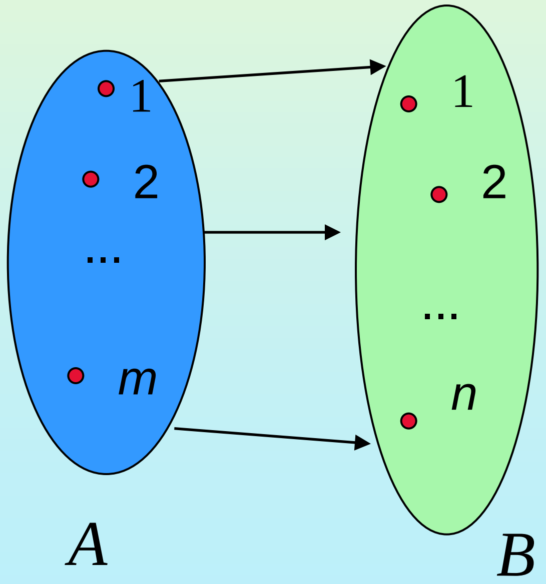
$$B_m = \sum_{n=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(n-k)^m}{k!(n-k)!}.$$

По теореме факторизации B_m есть число различных отношений эквивалентности на множестве мощности m.

Функции

Пусть $A = \{1, 2, ..., m\}$,
$B = \{1, 2, ..., n\}$.

Подсчитаем число функций $f : A \to B$ различных типов.



1. Все функции

Любая функция $f : A \to B$ может быть задана последовательностью ее значений:

$$(f(1), f(2), \ldots f(m)).$$

Каждое $f(i)$ может быть произвольным элементом из B. Имеется

$$n^m$$

таких последовательностей, это и есть число всех функций.

2. Инъекции $(m \le n)$

Если f – инъекция, то все элементы последовательности

$$(f(1), f(2), \ldots f(m)).$$

различны. Значит, эта последовательность является m–перестановкой из n элементов. Следовательно, число инъекций из A в B равно

$$P(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

3. Биекции

Инъекция $f : A \to B$ является биекцией в том и только том случае, если $n = m$.
Поэтому имеется точно

$$P(n,n) = n!$$

биекций множества размера n на другое множество размера n.

4. Сюръекции $(m \geq n)$

Пусть f – сюръекция множества A на множество B. Определим для каждого $y \in B$ множество

$$P(y) = \{x \in A\colon\ f(x) = y\}.$$

Семейство $\{P(1), P(2), ..., P(n)\}$ есть упорядоченное разбиение множества A и не содержит пустых частей (так как f сюръекция). Число сюръекций равно числу таких разбиений:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m C(n,k).$$

5. Строго монотонные функции

Рассмотрим возрастающие функции, т.е. $f(x_1) < f(x_2)$

при $x_1 < x_2$.

Чтобы задать такую функцию, достаточно выбрать некоторое m-подмножество множества B в качестве области значений функции. Затем располагаем элементы этого подмножества в возрастающем порядке:

$$s_1 < s_2 < \ldots s_m$$

и полагаем

$$f(1) = s_1, \quad f(2) = s_2, \quad \ldots, f(m) = s_m.$$

Следовательно, число таких функций равно числу m-подмножеств множества B, т.е.

$$\binom{n}{m}.$$

5. <u>Нестрого монотонные функции</u>

Рассмотрим неубывающие функции, т.е. $f(x_1) \le f(x_2)$ при $x_1 < x_2$.

Рассуждаем как в предыдущем случае, но теперь нужно выбрать в качестве области значений функции f мультимножество размера m.

Число функций равно числу таких мультимножеств, т.е.

$$\binom{n+m-1}{m}.$$

Дискретная математика

Лекция 7

Рекуррентные уравнения

Пусть $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ – бесконечная последовательность чисел, в которой несколько начальных элементов $x_0, x_1, \ldots, x_k$ заданы, а каждый из последующих вычисляется по предыдущим в соответствии с некоторым правилом.

Если это правило задано в виде уравнения, то оно называется *рекуррентным уравнением* (*рекуррентным соотношением*).

Рассмотрим *линейные рекуррентные уравнения с постоянными коэффицентами*.

Примеры

1) Начальный элемент: $x_0 = 1$,
рекуррентное уравнение: $x_n = x_{n-1} + 1$ для $n > 0$.

Находим:

$$x_1 = x_0 + 1 = 2,$$
$$x_2 = x_1 + 1 = 3,$$
$$x_3 = x_2 + 1 = 4,$$
$$\ldots$$

Очевидно, получается последовательность натуральных чисел.

2) Начальный элемент: $x_0 = 1$,

рекуррентное уравнение: $x_n = 2x_{n-1}$ для $n > 0$.

Находим: $x_1 = 2x_0 = 2$,

$x_2 = 2x_1 = 4$,

$x_3 = 2x_2 = 8$,

...

Очевидно, это последовательность степеней числа 2:

$$x_n = 2^n.$$

Линейные рекуррентные уравнения первого порядка

Общий вид: $$\boxed{x_n = ax_{n-1} + b,}$$

где a и b – заданные константы, $n > 0$.

Если задан начальный элемент x_0, то можно последовательно вычислять другие элементы:

$$x_1 = ax_0 + b,$$

$$x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2 x_0 + ab + b,$$

...

Любой элемент x_n, $n > 0$, однозначно определен числами a, b, x_0.

Нельзя ли найти общую формулу для x_n?

Рассмотрим сначала два простейших случая:

1. $a = 1$.

2. $b = 0$.

1. $a = 1.$

Уравнение имеет вид $\boxed{x_n = x_{n-1} + b.}$

Находим
$$x_1 = x_0 + b,$$
$$x_2 = x_1 + b = x_0 + 2b,$$
$$x_3 = x_2 + b = x_0 + 3b,$$
$$\ldots$$

Очевидно, $\boxed{x_n = x_0 + nb}$ для любого n.

(это легко доказать индукцией по n).

Это не что иное, как *арифметическая прогрессия*.

2. $b = 0$.

Уравнение имеет вид $\boxed{x_n = ax_{n-1}.}$

Находим $x_1 = ax_0,$

$$x_2 = ax_1 = a^2 x_0,$$

$$x_3 = ax_2 = a^3 x_0,$$

...

Очевидно, $\boxed{x_n = a^n x_0}$ для любого n.

Это *геометрическая прогрессия*.

Теперь рассмотрим общий случай

$$x_n = ax_{n-1} + b. \qquad (1)$$

Сначала упростим уравнение с помощью замены

$$x_n = y_n + s, \qquad (2)$$

где y_n – новое неизвестное, s – константа, значение которой определим позже.

Подставляя (2) в (1), получаем

$$y_n + s = a(y_{n-1} + s) + b,$$

или

$$y_n = ay_{n-1} + as + b - s.$$

Теперь выберем s так, чтобы выполнялось равенство

$$as + b - s = 0,$$

т.е.

$$s = \frac{b}{1-a}.$$

При $a = 1$ это выражение не определено.
Но случай $a = 1$ был рассмотрен раньше.

Далее предполагаем, что $a \neq 1$.

Получаем уравнение

$$y_n = ay_{n-1}.$$

Это уравнение одного из простейших типов, его решение

$$y_n = a^n y_0.$$

Так как $x_n = y_n + s$, получаем

$$x_n - s = a^n (x_0 - s)$$

и остается подставит выражение для s:

$$\boxed{x_n = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.}$$

Итак, решение достигается в три шага:

1. Приведение уравнения к простейшему виду путем замены $x_n = y_n + s$ и выбора подходящего значения для s.

2. Решения полученного простейшего уравнения.

3. Возвращения к первоначальной неизвестной x_n.

Отметим, что решение имеет вид

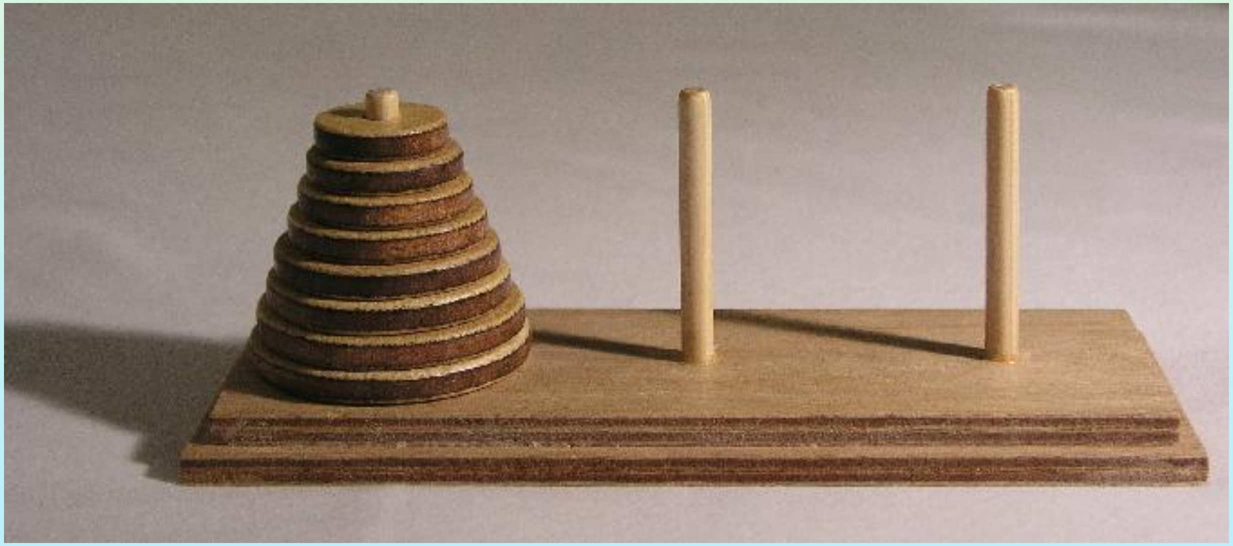
$$x_n = c_1 a^n + c_2,$$

где c_1 и c_2 – некоторые константы.

Таким образом, зависимость x_n от n выражается экспоненциальной функцией.

Пример: Ханойские башни

Французский математик Люка предложил в 1883 г. следующую задачу. Восемь дисков различного диаметра нанизаны на один из трех стержней в порядке убывания диаметра. Нужно переместить их в том же порядке на другой стержень. Разрешается перекладывать по одному диску, при этом нельзя класть больший диск на меньший. За сколько шагов это можно сделать? (Шаг – перекладывание одного диска)

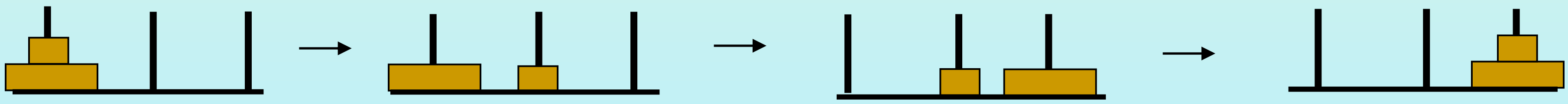


Рассмотрим задачу в общем виде, когда имеется n дисков.

Пусть T_n – минимальное число шагов, необходимое для перемещения n дисков с одного стержня на другой.

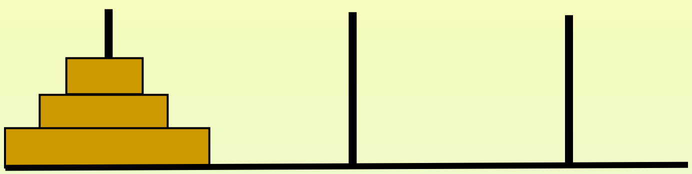
Очевидно, $T_1 = 1$.

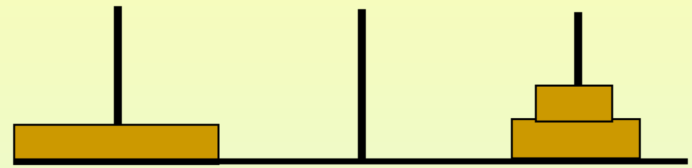
Легко видеть, что $T_2 = 3$:



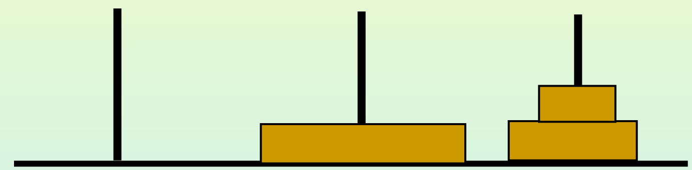
Три диска можно переместить так:

1) перемещаем два верхних диска (3 шага))

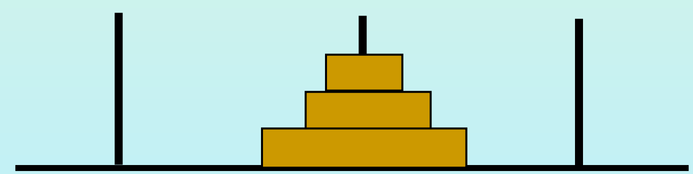




2) перекладываем самый большой диск (1 шаг)



3) снова перемещаем два меньших диска (3 шага)



Таким образом, $T_3 = 3 + 1 + 3 = 7$.

В общем случае $n-1$ меньших дисков должны быть перемещены на другой стержень прежде, чем мы сможем переложить самый большой диск.
Это требует T_{n-1} шагов.

После перекладывания наибольшего диска нужно снова переместить $n-1$ меньших дисков.
Это опять требует T_{n-1} шагов.

Получаем рекуррентное уравнение

$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \quad n > 1.$$

Если положить $T_0 = 0,$

то это равенство верно и при $n = 1.$

Решаем это уравнение:

1. Упрощение. Полагаем $T_n = Y_n + s,$

тогда $Y_n + s = 2Y_{n-1} + 2s + 1.$

Возьмем $s = -1,$ получим уравнение $Y_n = 2Y_{n-1}.$

2. Решаем простейшее уравнение: $Y_n = 2^n Y_0.$

3. Возвращаемся к первоначальной неизвестной:

$Y_n = T_n + 1,$ $Y_0 = T_0 + 1 = 1.$

Ответ: $T_n = 2^n - 1.$

Линейные рекуррентные уравнения второго порядка

Общий вид л. р. у. второго порядка:

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + c,$$

где a, b, c – заданные константы, $n > 1$.

Сначала рассмотрим *однородное* уравнение ($c = 0$):

$$\boxed{x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}.} \qquad (3)$$

Если известны два первых элемента, x_0 и x_1, то можно последовательно вычислять следующие элементы:

$$x_2 = ax_1 + bx_0,$$

$$x_3 = ax_2 + bx_1 = a(ax_1 + bx_0) + bx_1 = (a^2 + b)x_1 + abx_0$$

и т. д.

Можно получить и общую формулу для x_n.

Ищем решение в виде:

$$x_n = \alpha^n,$$

где α – пока неизвестная константа (эта идея навеяна видом решения уравнения первого порядка).

Подставляя это выражение в уравнение (3), получаем

$$\alpha^n = a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2},$$

а после сокращения на α^{n-2}

$$\alpha^2 = a\alpha + b.$$

Таким образом, α должно быть корнем уравнения

$$\alpha^2 - a\alpha - b = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением*.

Имеются две возможности:

A. Характеристическое уравнение имеет два различных корня α_1 и α_2.

B. Имеется только один корень $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ (дискриминант равен нулю: $a^2 + 4b = 0$).

A. Хароактеристическое уравнение имеет два различных
B. корня α_1 и α_2.

Тогда обе последовательности

$$x_n' = \alpha_1^n \qquad \text{и} \qquad x_n'' = \alpha_2^n$$

удовлетворяют уравнению (3).

Но нам нужно найти решение с данными x_0, x_1.

Можно ли этого добиться?

Однородное линейное уравнение имеет два важных свойства:

1) Если последовательность

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$$

удовлетворяет уравнению (3) и d – любая константа, то последовательность

$$dx_0, dx_1, \ldots, dx_n, \ldots$$

тоже удовлетворяет этому уравнению.

2) Если каждая из последовательностей

$$x_0', x_1', \ldots, x_n', \ldots \qquad \text{and} \qquad x_0'', x_1'', \ldots, x_n'', \ldots$$

удовлетворяет уравнению (3), то последовательногсть

$$x_0' + x_0'', x_1' + x_1'', \ldots, x_n' + x_n'', \ldots$$

тоже удовлетворяет уравнению

(подставляя в уравнение $x_n' + x_n''$ вместо x_n,

получаем $x_n' + x_n'' = ax_{n-1}' + ax_{n-1}'' + bx_{n-2}' + bx_{n-2}''$,

и это равенство верно, так как $x_n' = ax_{n-1}' + bx_{n-2}'$

и $x_n'' = ax_{n-1}'' + bx_{n-2}''$)

Поэтому можно утверждать, что последовательность

$$c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n$$

удовлетворяет уравнению (3) при любых константах c_1, c_2. Эта последовательность называется *общим решением* уравнения (3).

Можно ли подобрать c_1, c_2 так, чтобы два первых элемента этой последовательности были x_0 и x_1? Попробуем:

$$n=0 \qquad x_0 = c_1\alpha_1^0 + c_2\alpha_2^0 = c_1 + c_2,$$

$$n=1 \qquad x_1 = c_1\alpha_1^1 + c_2\alpha_2^1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2.$$

Мы получили систему двух линейных уравнений с неизвестными c_1, c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0, \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = x_1. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0, \quad \text{так как} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Следовательно, существует единственное решение c_1, c_2, и мы получаем решение уравнения (3) с данными начальными значениями x_0, x_1.

В. Характеристическое уравнение имеет один корень α.

В этом случае нетрудно проверить, что последовательность

$$n\alpha^n$$

тоже является решением и общее решение имеет вид

$$x_n = (c_1 + c_2 n)\alpha^n.$$

Константы c_1 и c_2 опять находятся по начальным значениям:

$$n = 0 \qquad x_0 = c_1,$$

$$n = 1 \qquad x_1 = (c_1 + c_2)\alpha.$$

Неоднородное уравнение

Неоднородное линейное рекуррентное уравнение второго порядка

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + c$$

можно свести к однородному так же, как это делалось для уравнения первого порядка.

Введем новую неизвестную y_n :

$$x_n = y_n + s$$

и подберем такое s, чтобы константное слагаемое исчезло :

$$s = \frac{c}{1-a-b}.$$

Если $a + b \neq 1$, то s существует и получаем однородное уравнение.

Если $a + b = 1$, то s не существует. В этом случае можно сделать другую замену:

$$x_n = y_n + sn$$

и опять выбрать такое s, чтобы уравнение превратилось в однородное.

Числа Фибоначчи

Леонардо Фибоначчи (1170 – 1250), известный также как **Леонардо Пизанский**.

Сыграл важную роль в продвижении в Европу арабской десятичной системы записи чисел.

Открыл числа, названные его именем.

Числами Фибоначчи называются элементы последовательности

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots ,$$

в которой каждый элемент, начиная с третьего, равен сумме двух предшествующих элементов:

$$1 = 1 + 0,$$
$$2 = 1 + 1,$$
$$3 = 2 + 1,$$
$$5 = 3 + 2,$$
$$\dots$$

Если обозначить элемент с номером n через F_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$, то получаем соотношение

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Это линейное рекуррентное уравнение второго порядка. Имеются также начальные значения

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

и можно найти общую формулу для чисел Фибоначчи.

Характеристическое уравнение

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

имеет два корня

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Общее решение имеет вид

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Применяя начальные значения, получаем систему для c_1 и c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Находим

$$c_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

и получаем формулу для чисел Фибоначчи:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Пример: Разреженные слова

Слово из букв 0, 1, в котором не встречаются две единицы подряд, называется *разреженным* словом.

Слово 0100101000101 разреженное, а слова 0101100011 и 0011110 – не разреженные.

Обозначим число разреженных слов длины n через U_n.

Для малых n имеем:

n	0	1	2	3	4
Разреженные слова	λ	0 1	00 01 10	000 001 010 100 101	0000 0001 0010 0100 0101 1000 1001 1010
U_n	1	2	3	5	8

Чему равно U_5?

Если α – разреженное слово длины 5, начинающееся буквой 0, то

$$\alpha = 0\beta,$$

где β – разреженное слово длины 4.
Имеется 8 таких слов:

00000
00001
00010
00100
00101
01000
01001
01010

Если же α начинается буквой 1, то вторая буква обязательно 0 и

$$\alpha = 10\gamma,$$

где γ – разреженное слово длины 3.
Имеется 5 таких слов:

10000
10001
10010
10100
10101

В целом получаем

$$U_5 = U_4 + U_3 = 8 + 5 = 13.$$

В общем случае пусть α – разреженное слово длины n.

- Если α начинается буквой 0, то $\alpha = 0\beta$, где β – разреженное слово длины $n-1$.

  Имеется U_{n-1} таких слов.

- Если α начинается буквой 1, то вторая буква должна быть 0 и $\alpha = 10\gamma$, где γ – разреженное слово длины $n-2$.

  Имеется U_{n-2} таких слов.

Получаем рекуррентное уравнение:

$$\boxed{U_n = U_{n-1} + U_{n-2}}$$

для $n \geq 2.$

Это то же уравнение, что для чисел Фибоначчи, но начальные значения теперь другие: $U_0 = 1,\ U_1 = 2.$

Можно заметить, что U_0 и U_1 совпадают с двумя последовательными числами Фибоначчи:

$$U_0 = F_2, \quad U_1 = F_3.$$

Следовательно,

$$U_n = F_{n+2} \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots .$$