Дискретная математика

В.Е. Алексеев

http://vmk.ucoz.net/

Множества и отношения

Лекция 1

Множества

- *Множество* – это соединение в одно целое каких-либо объектов.
- Объекты, составляющие множество, называют *элементами.* Все элементы множества отличаются друг от друга.
- Порядок элементов в множестве не имеет значения.

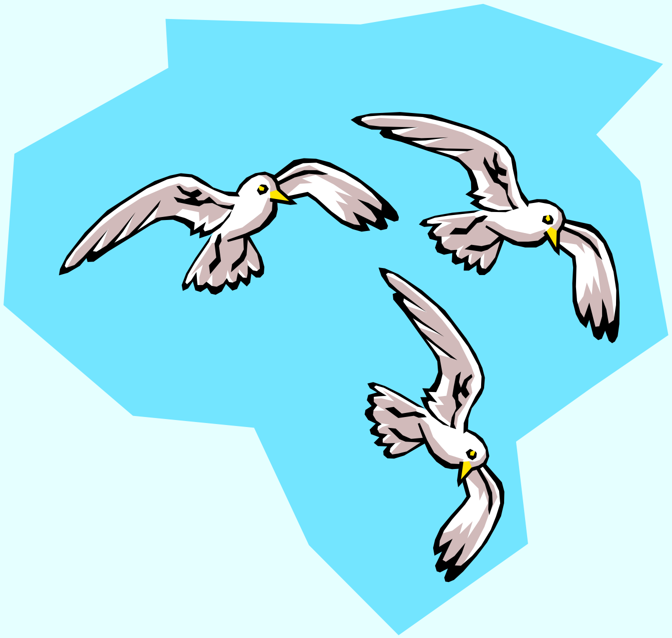
Понятие множества – одно из фундаментальных математических понятий. Оно используется в любой математической теории.

Понятие множества не определяется, а поясняется указанием (приблизительных) синонимов: коллекция, класс, совокупность, ансамбль, собрание.

Создатель теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845-1918).

Футбольная команда – множество людей

Созвездие – множество звезд



Стая – множество птиц

Множества, рассматриваемые в математике, состоят из математических объектов (чисел, функций, точек, линий и т. д.)

Обозначения:

- $x \in A$ означает "элемент x принадлежит множеству A"

- $x \notin A$ означает "элемент x не принадлежит множеству A"

Пустое множество не имеет ни одного элемента, оно обозначается знаком $\varnothing$.

Множества бывают *конечные* и *бесконечные*.

Конечное множество может быть задано перечислением его элементов. Элементы перечисляются в фигурных скобках:

$A = \{1, 2, 4, 8\}$,

$B = \{x, y, z\}$,

C = {красный, желтый, зеленый},

D = {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}.

Число элементов в конечном множестве называется его *мощностью*.

Мощность множества X обозначается $|X|$.

$$|\{a,b,c\}| = 3,$$

$$|\{-2, -1, 0, 1, 2\}| = 5,$$

$$|\varnothing| = 0,$$

$$|\{\varnothing\}| = 1.$$

Примеры бесконечных множеств:

- **N** – множество натуральных чисел, его элементы 1, 2, 3, …;
- $\mathbf{N}_0$ – множество натуральных чисел с добавленным элементом 0;
- **Z** – множество всех целых чисел, его элементы 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 … ;
- **R** – множество всех вещественных чисел;
- множество всех точек плоскости.

Подмножество

Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент из A принадлежит B.

Отношение “A является подмножеством B” символически записывается так:

$$A \subseteq B.$$

Это можно прочитать также как “A включено в B”.

Подмножество мощности k называют *k-подмножеством*.

Некоторые свойства отношения включения

- $\varnothing \subseteq A$ для любого множества A.
- $A \subseteq A$ для любого множества A.
- Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$.
- Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

Иногда полезно считать, что есть некоторое универсальное множество (*универсум*) U, содержащее все элементы, которые нас интересуют.

Например, если мы изучаем свойства натуральных чисел, то можно положить $U = \mathbf{N}$.

Если нас интересуют геометрические объекты на плоскости, то можно взять в качестве универсума множество всех точек плоскости.

Часто множество задают указанием свойства P, выделяющего элементы этого множества среди всех элементов универсума U.

Тот факт, что элемент x имеет свойство P записывают так: $P(x)$.

Множество всех элементов из U, имеющих свойство P, представляется в форме:

$$\{x \in U: \ P(x)\}$$

или

$$\{x: \ x \in U \ \text{ и } \ P(x)\}$$

или просто

$$\{x: \ P(x)\},$$

если ясно, о каком универсуме идет речь.

Примеры:

$$\{x \in \mathbf{N} : \; x \quad \text{четно}\}$$

$$\{x \in \mathbf{Z} : x > 0\} = \mathbf{N}$$

$$\{x \in \mathbf{R} : \; 1 < x < 4\}$$

$$\{x: \; x \in \mathbf{R} \; \text{ и } \; x^2 - 2 = 0\} = \quad \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

Операции над множествами

Объединение множеств A и B определяется как множество

$$A \cup B = \{\ x\!:\ x \in A \ \text{ or } \ x \in B\}.$$

Пример:

$$A = \{0, 1, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 4\},$$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}.$$

Пересечение множеств A и B определяется как множество

$$A \cap B = \{\, x : \; x \in A \; \text{and} \; x \in B\}$$

Пример:

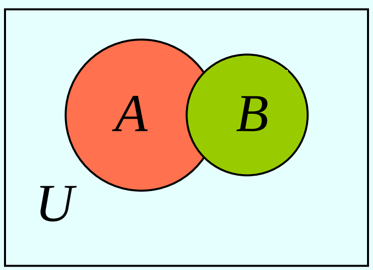
$$A = \{0, 1, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 4\},$$

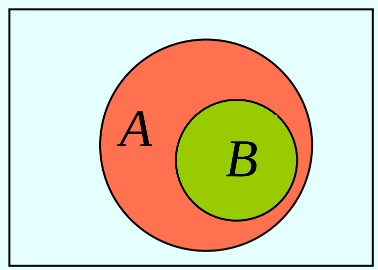
$$A \cap B = \{1, 4\}.$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B *не пересекаются*.

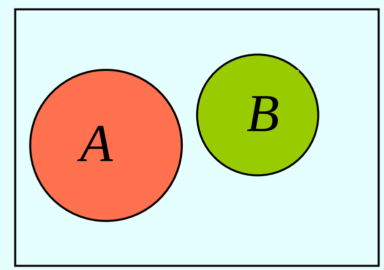
Диаграмма Венна

Диаграмма Венна – это способ графического представления взаимоотношений между множествами. Универсум изображается в виде прямоугольника, а его подмножества – в виде кругов или других фигур, расположенных внутри этого прямоугольника.

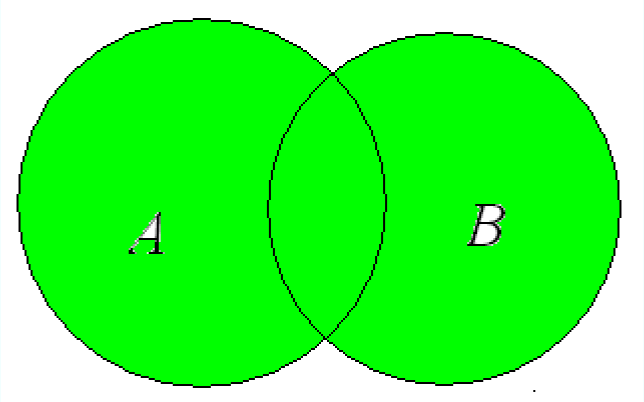




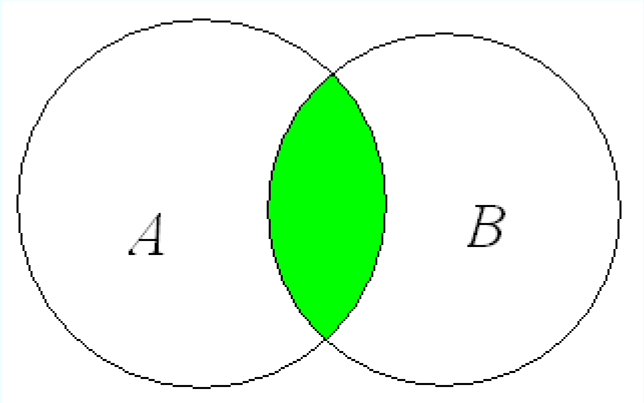
$$B \subseteq A$$



$$A \cap B = \varnothing$$



$A \cup B$



$A \cap B$

Свойства операций объединения и пересечения

Следующие равенства верны для любого множества A:

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

$$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup U = U \qquad A \cap U = A$$

- Обе операции *коммутативны*:

$A \cup B = B \cup A,$

$A \cap B = B \cap A$ для любых множеств $A, B.$

- Обе операции *ассоциативны*:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ для любых множеств $A, B.$

Благодаря ассоциативности можно опускать скобки и писать просто

$$A \cup B \cup C, \qquad A \cap B \cap C.$$

Можно записывать объединение или пересечение любого числа множеств, не указывая порядок действий:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \qquad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

Сокращенные обозначения:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Операции объединения и пересечения связаны между собой двумя *дистрибутивными законами*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

для любых множеств $A, B, C.$

Вывод новых тождеств

Из основных тождеств можно с помощью эквивалентных преобразований выводить новые.

Рассмотрим, например, выражение $A \cup (A \cap B)$.

Так как $A = A \cap U$, можно первое вхождение A заменить на $A \cap U$:

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B).$$

Теперь применяем дистрибутивный закон

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$$

и получаем

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B).$$

Применяя тождества $U \cup B = U$, $A \cap U = A$, получаем

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A.$$

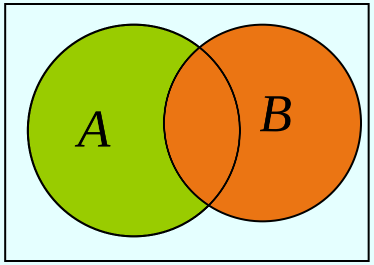
Тождество $A \cup (A \cap B) = A$ называют *законом поглощения*.

Имеется второй закон поглощения: $A \cap (A \cup B) = A$, он может быть доказан аналогично.

Другие операции

Разность множеств A и B есть множество

$$A - B = \{ x: \quad x \in A \quad \text{and} \quad x \notin B\}.$$



$A - B$

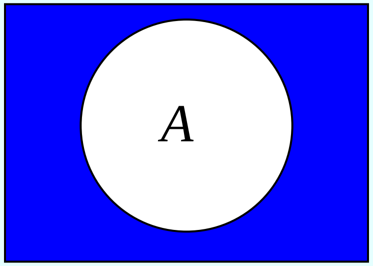
Пример:

$$A = \{0, 1, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 4\},$$

$$A - B = \{0\}.$$

Дополнение множества A до универсума U – это множество

$$\overline{A} = U - A.$$



$\overline{A}$

Пример:

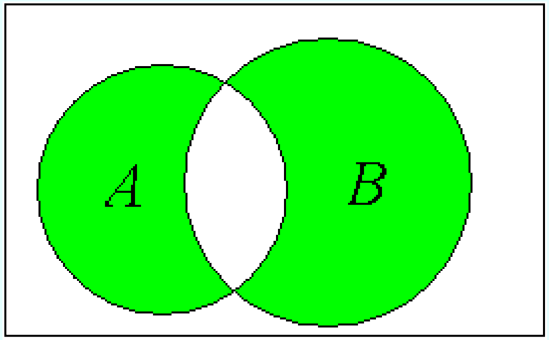
$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\},$$

$$\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Симметрическая разность множеств A и B определяется как множество

$$A \otimes B = (A - B) \cup (B - A).$$



$A \otimes B$

Пример:

$$A = \{0, 1, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 4\},$$

$$A \otimes B = \{0,2\}.$$

Операции объединения, пересечения и дополнения связаны двумя *законами де Моргана*:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Для строгого доказательства любого из приведенных тождеств нужно показать, что любой элемент множества, записанного в левой части равенства, содержится в множестве из правой части, и наоборот.

Пример: доказательство первого закона де Моргана .

$$x \in \overline{A \cup B} \quad \leftrightarrow$$

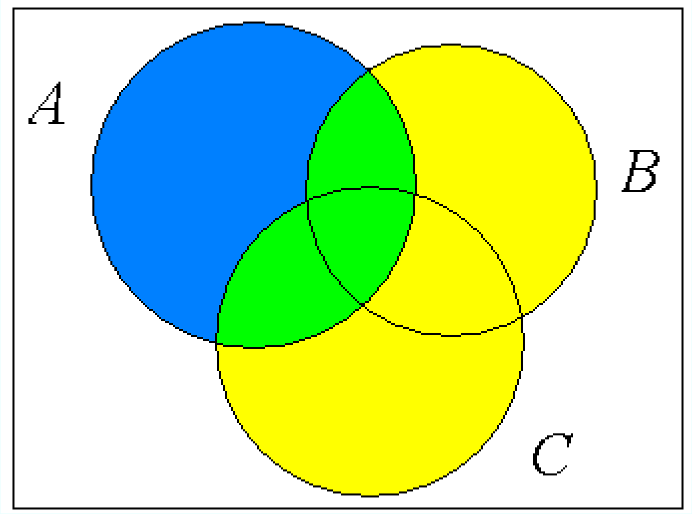
$$\leftrightarrow \quad x \notin A \cup B \quad \leftrightarrow$$

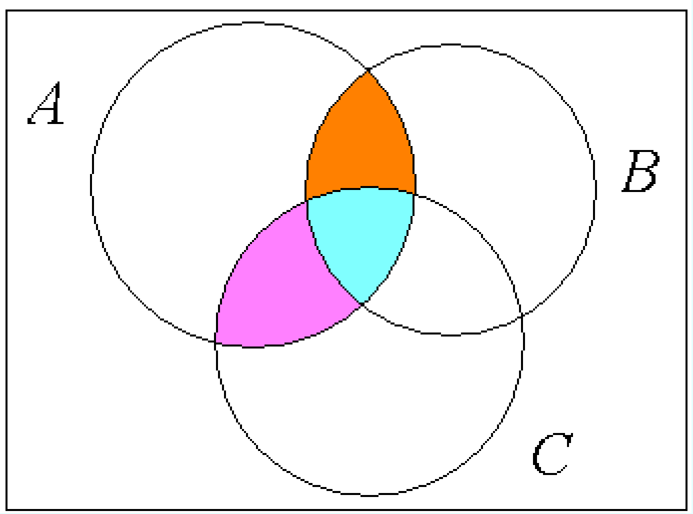
$$\leftrightarrow \quad x \notin A \ \text{ and } \ x \notin B \quad \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \ \text{ and } \ x \in \overline{B} \quad \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

В справедливости тождеств можно также убедиться с помощью диаграмм Венна. Например, для дистрибутивного закона:





A $\qquad$ $B \cup C$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A \cap C$

вся окрашенная область

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Еще несколько тождеств

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

$$A \cup \overline{A} = U$$

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

$$A \otimes B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Отношения включения и равенства множеств могут быть выражены в терминах операций:

$$A \subseteq B \quad \leftrightarrow \quad A \cap B = A$$

$$A \subseteq B \quad \leftrightarrow \quad A \cup B = B$$

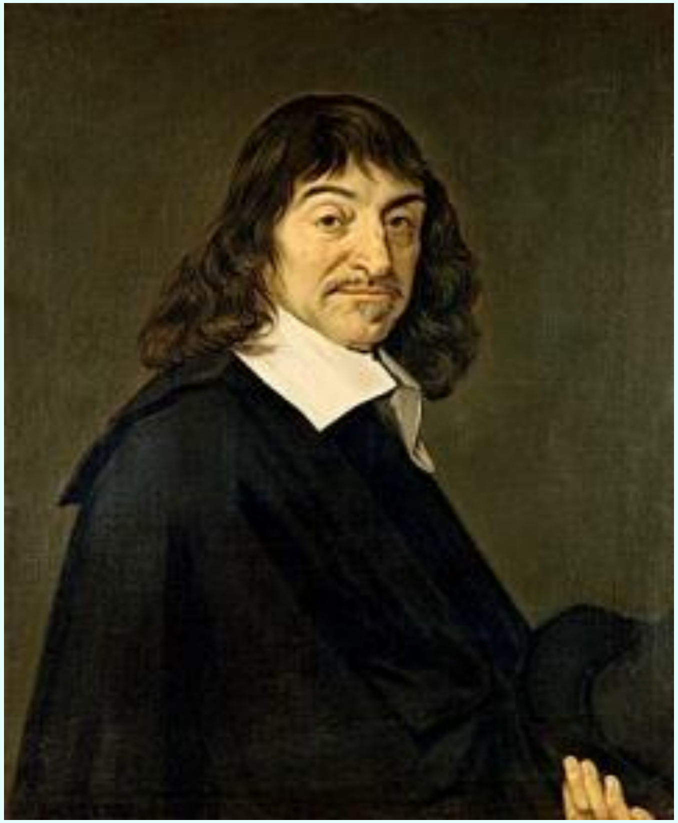
$$A \subseteq B \quad \leftrightarrow \quad A - B = \varnothing$$

$$A = B \quad \leftrightarrow \quad A \otimes B = \varnothing$$

Дискретная матемаика

Лекция 2

Декартово произведение



Рене Декарт (1596-1650), французский философ и математик.

Его именем названы декартова система координат и декартово произведение.

Набор – это коллекция элементов, расположенных в некотором порядке.

Для записи набора используем круглые скобки:

$$(a_1, a_2, \ldots , a_n)$$

– набор длины n.

Имеются два отличия между понятиями набора и множества.

1. Порядок элементов в наборе важен:
   (a, b, c) и (b, c, a) – разные наборы, но
   $\{a, b, \mathrm{c}\}$ и $\{b, c, a\}$ – одно и то же множество.

2. Один и тот же элемент может входить в набор несколько раз:
   (1, 2, 1, 3, 2, 1) – набор, состоящий из элементов множества {1, 2, 3}.

Пара – это набор длины 2.

Прямое (*декартово*) *произведение* двух множеств A и B – это множество всех пар (a, b), где $a \in A, b \in B$.

Символическая запись:

$$A \times B = \{(a,b): \quad a \in A, b \in B\}.$$

Если $A = B$, то $A \times A = A^2$ есть *декартов квадрат* множества A.

Примеры

- $A = \{a, b, c\}, \quad B = \{0,1\},$

  $A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1),$

  $A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}.$

- $A = \{1, 2, \ldots, 31\}, \quad B = \{$*январь, февраль, …, декабрь*$\}$

  $A \times B$ – множество дат типа (3 марта).

Декартово произведение n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ определяется как

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): \quad x_1 \in A_1,\, x_2 \in A_2,\, \ldots,\, x_n \in A_n\}.$$

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то это произведение есть n-ая декартова степень, A^n.

Пример:

$A = \{0,1\}$,

$A^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$.

Семейство подмножеств множества

Элемент множества сам может быть множеством.
Например, множество
$X = \{\{a, b\}, \{a\}, \varnothing, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ состоит из 5 элементов.

Если элементами множества X являются подмножества множества A, то говорят, что X есть *семейство* подмножеств множества A.

Приведенное выше множество X есть семейство подмножеств множества $A = \{a, b, c\}$.

Множество всех подмножеств

Семейство всех подмножеств множества A обозначается через 2^A.

Какова мощность множества 2^A?

Если $A = \varnothing$, то имеется единственное подмножество $\varnothing$.
Если $A = \{a\}$, то есть 2 подмножества: $\varnothing$, $\{a\}$.
Если $A = \{a, b\}$, то есть 4 подмножества: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$.
Если $A = \{a, b, c\}$, то есть 8 подмножеств: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Сколько подмножеств у множества $A = \{a, b, c, d\}$?

Теорема. *Если* $|A| = n$, *то* $|2^A| = 2^n$.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение верно. Покажем, что при увеличении мощности на 1 число подмножеств возрастает вдвое.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$, $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$.

$$X \subseteq A \begin{cases} a_n \notin X \longleftrightarrow & X - \textit{подмножество множества } B \qquad 2^{n-1} \textit{ подмножеств} \\ a_n \in X \longleftrightarrow & X - \textit{подмножество множества } B + \textit{элемент } a_n \qquad 2^{n-1} \textit{ подмножеств} \end{cases}$$

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$$

Характеристический вектор

Пусть U – конечный универсум, элементы которого пронумерованы числами от 1 до n:

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Подмножество $A \subseteq U$ можно задать набором

$$h(A) = (h_1, h_2, \ldots, h_n),$$

где $h_i = 1$, если $u_i \in A$ и $h_i = 0$, если $u_i \notin A$.

Этот набор называется *характеристическим вектором* множества A.

Примеры

$$U=\{a,b,c,d,e\}$$

$$A=\{a,c,e\},\qquad h(A)=(1,0,1,0,1);$$

$$B=\{d,e\},\qquad h(B)=(0,0,0,1,1);$$

$$C=\{a\},\qquad h(C)=(1,0,0,0,0);$$

$$h(\varnothing)=(0,0,0,0,0);$$

$$h(U)=(1,1,1,1,1).$$

Мультимножества

Мультимножество – это коллекция элементов, в которую каждый элемент может входить больше одного раза.

$\{a, a, b, c, c, c\}$ – мультимножество, состоящее из элементов множества $\{a, b, c\}$;
$\{a, b, b, b, c, c\}$ – другое мультимножество.

Из одного элемента можно построить бесконечно много мультимножеств:

$\{1\}, \{1, 1\}, \{1, 1, 1\}, \ldots$

Отношения

Пусть A и B – множества. *Отношением* *между A и B называется любое подмножество множества $A \times B$.*

Отношение между A и A называют отношением *на* множестве A.

Если R – отношение и $(x,y) \in R$, то говорят
“x находится отношении R с y”.
Это записывают также так: $x\,R\,y$.

Примеры (отношения в жизни)

- A: множество людей,
  B: множество стран,
  отношение R между A и B:
  $x\,R\,y$ означает, что x бывал в стране y.

- A: множество городов,
  отношение R на A:
  $x\,R\,y$ означает, что имеется прямая авиалиния между x и y.

- A: множество служащих некоторой компании,
  отношение R на A:
  $x\,R\,y$ означает, что x – начальник y.

Примеры (отношения в математике)

- $<$ является отношением на **N** (а также на **Z** и на **R**).
  Число 2 находится в отношении $<$ с числом 5,
  но 5 не находится в этом отношении с 2.

- $=$ является отношением на любом множестве A.
  x находится в отношении $=$ с y тогда и только тогда,
  когда x – тот же самый элемент, что и y.

- Если A – множество, то $\in$ есть отношение между A и 2^A.

- Если A – множество, то $\subseteq$ есть отношение на 2^A.

- Отношение *делимости* на **N** определяется следующим образом:

  x делит y, если существует такое $k \in$ **N**, что $xk = y$.

  Это отношение обозначается так: $x \mid y$.

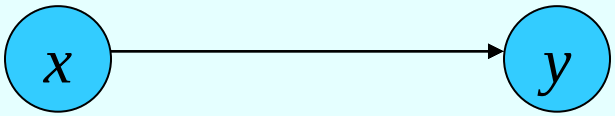
- Пусть A – множество всех прямых на плоскости. Можно определить отношение $\|$ на A:
  $l_1 \| l_2$ означает, что прямая l_1 параллельна прямой l_2.

- Пусть A – множество всех прямых на плоскости. Можно определить отношение $\times$ на A:
  $l_1 \times l_2$ означает, что прямая l_1 пересекается с прямой l_2.

Графическое представление отношений

Граф отношения дает визуальное представление отношения. Он строится следующим образом.

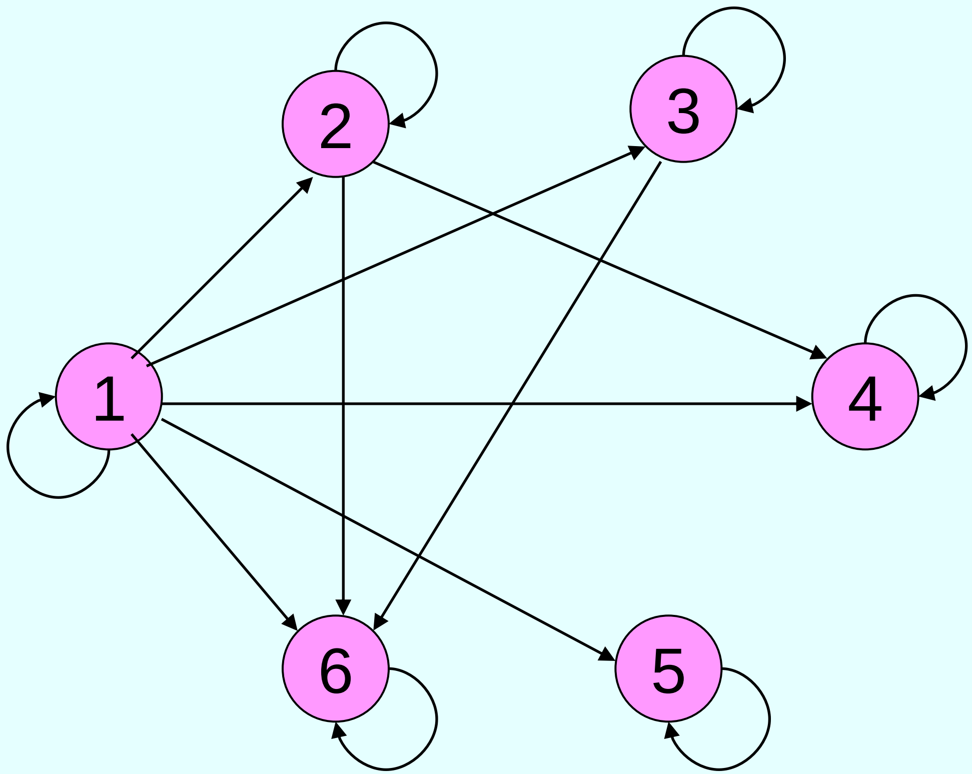
Пусть R – отношение между множествами A и B. Элементы множества $A \cup B$ представляются кружками или другими фигурами. Эти фигуры называются *вершинами* графа. Если $x\,R\,y$, то рисуем стрелку от x к y:



Эти стрелки называются *ребрами* графа.

Пример:

граф отношения делимости на множестве $A = \{1,2,3,4,5,6\}$:



Операции над отношениями

1. Так как отношение есть множество (пар), то любые операции над множествами можно применять к отношениям.

Если R_1 и R_2 – отношения между A и B (или на A), то $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ и т.д. – тоже отношения между A и B (на A).

Если R – отношение между A и B (на A), то $\overline{R}$ – дополнение R до множества $A \times B$ (A^2).

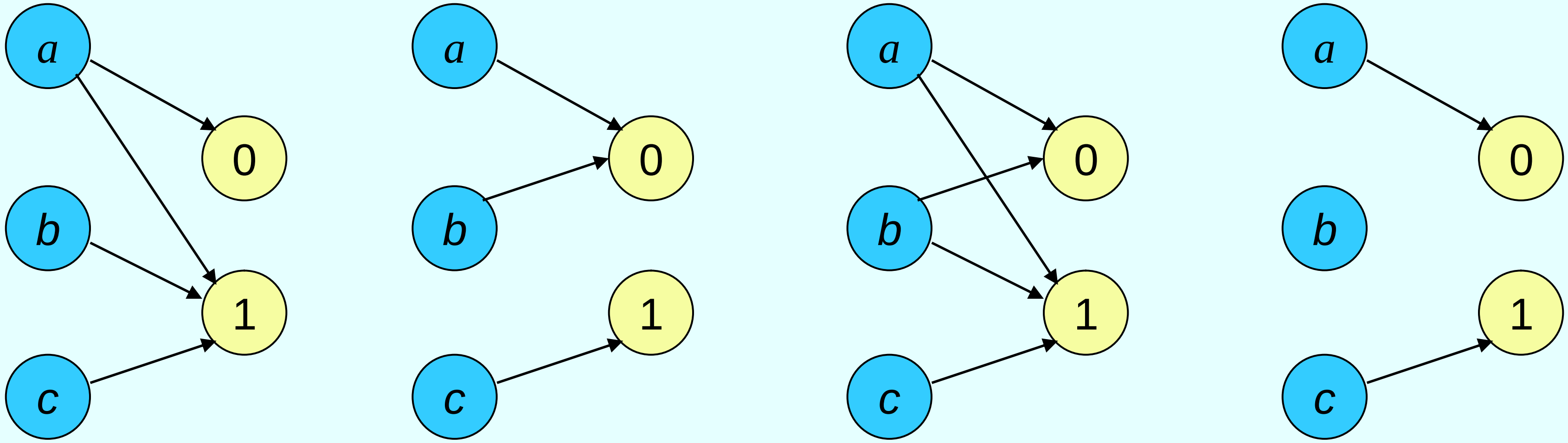
Примеры

$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{0,1\}$$

$$R_1 = \{(a,0),\ (a,1),\ (b,1),\ (c,1)\} \qquad R_2 = \{(a,0),\ (b,0),\ (c,1)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(a,0),\ (a,1),\ (b,0),\ (b,1),\ (c,1)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(a,0),\ \ (c,1)\}$$



R_1 $\qquad$ R_2 $\qquad$ $R_1 \cup R_2$ $\qquad$ $R_1 \cap R_2$

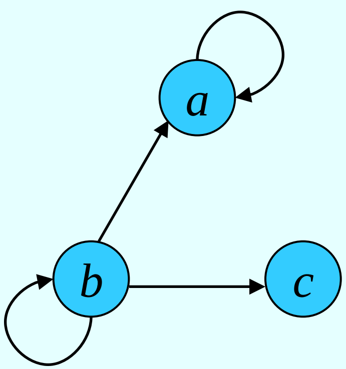
$$A = \{a, b, c\}$$

$$R_1 = \{(a,a), (b,a), (b,b), (b,c)\}$$

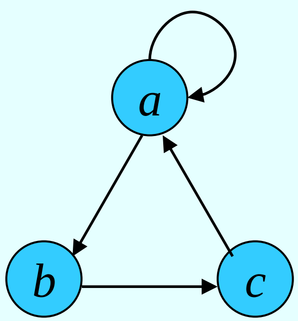
$$R_2 = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,a)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a)\}$$

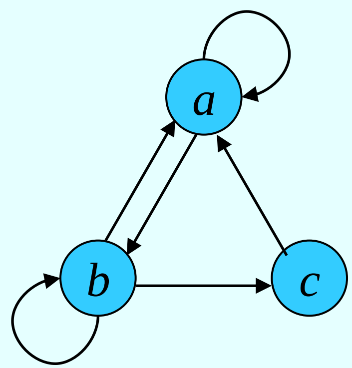
$$R_1 \cap R_2 = \{(a,a),\ (b,c)\}$$



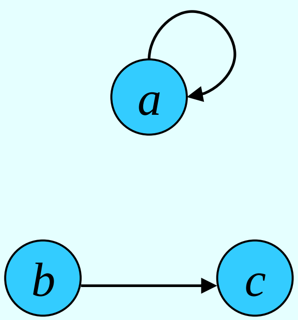
R_1



R_2



$R_1 \cup R_2$

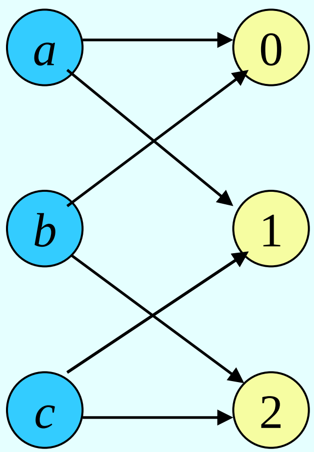


$R_1 \cap R_2$

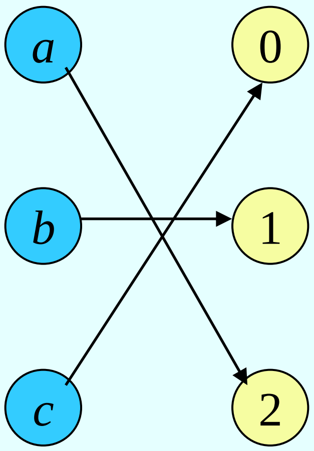
$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{0,1,2\}$$

$$R = \{(a,0), (a,1), (b,0), (b,2), (c,1), (c,2)\}$$

$$\overline{R} = \{(a,2), (b,1), (c,0)\}$$



R

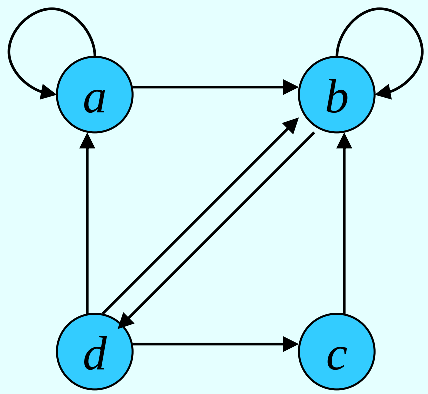


$\overline{R}$

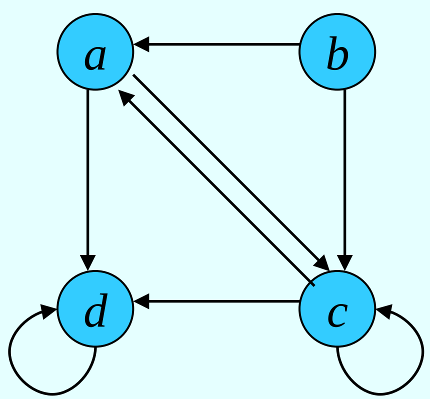
$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$R = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,d), (c,b), (d,a), (d,b), (d,c)\}$$

$$\overline{R} = \{(a,c), (a,d), (b,a), (b,c), (c,a), (c,c), (c,d), (d,d)\}$$



R

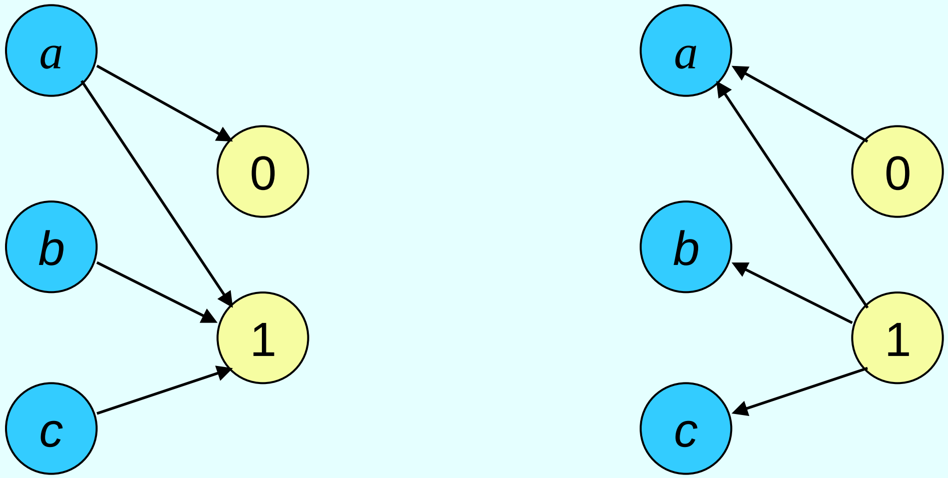


$\overline{R}$

2. Пусть R – отношение между A и B. Обратное отношение R^{-1} определяется следующим образом:

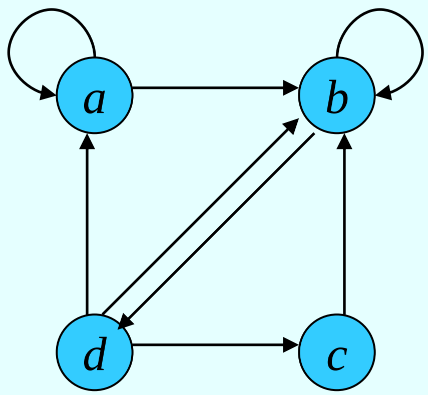
$$R^{-1} = \{(x, y): \quad (y, x) \in R\}.$$

Пример:

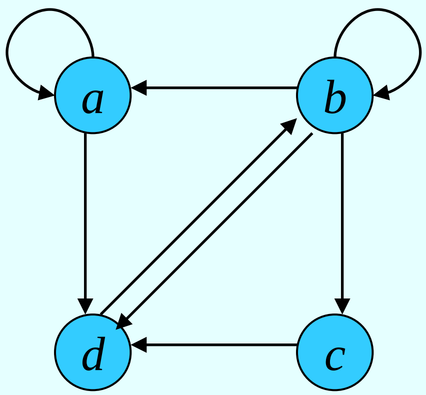


R $\qquad$ R^{-1}

Если R – отношение на A, то R^{-1} – тоже отношение на A:



R



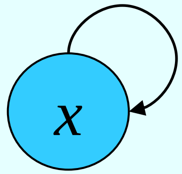
R^{-1}

Свойства отношений

Пусть R – отношение на множестве A.

1. R *рефлексивно*, если $x\,R\,x$ для каждого $x \in A$.

В графе рефлексивного отношения у каждой вершины имеется *петля*:

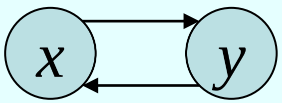


Какие из этих отношений рефлексивны?

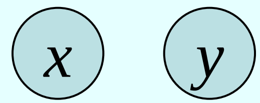
$=,\quad <,\quad \leq,\quad \|,\quad |,\quad \subseteq,\quad \times$

2. Отношение R *симметрично*, если для любых $x, y \in A$ из $x\,R\,y$ следует $y\,R\,x$.

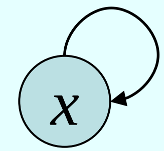
В графе симметричного отношения может быть так:



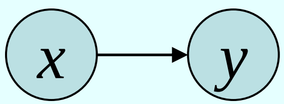
или так:



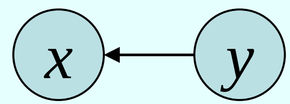
или так:



А так:



или так:



быть не может.

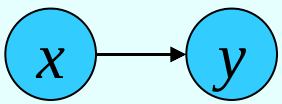
Какие из этих отношений симметричны?

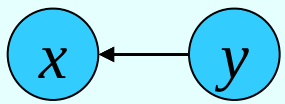
$$=,\quad <,\quad \leq,\quad \|,\quad |,\quad \subseteq\,,$$

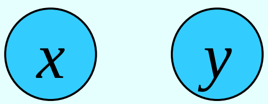
3. Отношение R *антисимметрично*, если для любых $x, y \in A$ из $x\,R\,y$ и $y\,R\,x$ следует $x = y$.

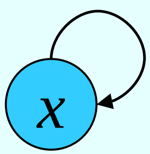
Иначе говоря, если $(x, y) \in R$ и $x \neq y$, то $(y,x) \notin R$.

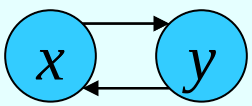
В графе асимметричного отношения может быть так:



или так:


или так:


или так:


. А так:


быть не может.

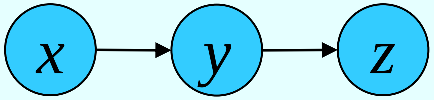
Какие из этих отношений антисимметричны?

$=$, $<$, $\leq$, $\|$, $|$, $\subseteq$, $\times$

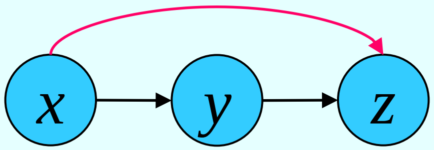
4. Отношение R *транзитивно*, если для любых $x, y, z \in A$ из $x\,R\,y$ и $y\,R\,z$ следует $x\,R\,z$.

В графе транзитивного отношения:

если есть два ребра, составляющие цепочку,



то есть и третье ребро



Какие из этих отношений транзитивны?

$=, \quad <, \quad \leq, \quad ||, \quad |, \quad \subseteq, \quad \times$

Отношения эквивалентности

Отношение R *на множестве* A *называется* ***отношением эквивалентности****, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Какие из этих отношений являются отношениями эквивалентности?

$$=,\quad <,\quad \leq,\quad \|,\quad |,\quad \subseteq,\quad \times$$

Пример

Рассмотрим следующее отношение R на **Z**:
$x\,R\,y$ тогда и только тогда, когда $x - y$ четно.

R является отношением эквивалентности.
Доказательство транзитивности:

$$x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 2k$$
$$y\,R\,z \quad \Leftrightarrow \quad y - z = 2m$$
$$x - z = 2(k + m) \quad \Rightarrow \quad x\,R\,z$$

Если $x\,R\,y$, то говорят, что x сравнимо с y по модулю 2, и пишут

$$x \equiv y \pmod 2.$$

Разбиения

Семейство $\mathscr{P}$ *подмножеств множества* A *называется* ***разбиением*** A, *если*
1) подмножества, составляющие $\mathscr{P}$, *попарно не пересекаются*;
2) объединение всех подмножеств из $\mathscr{P}$ *равно* A.

Другими словами:
семейство $\mathscr{P}$ является разбиением множества A, если каждый элемент A принадлежит точно одному множеству из $\mathscr{P}$.

Элементы семейства $\mathscr{P}$ называются ***частями*** разбиения.

Пример $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$$P_1 = \{0,3,6,9\},$$

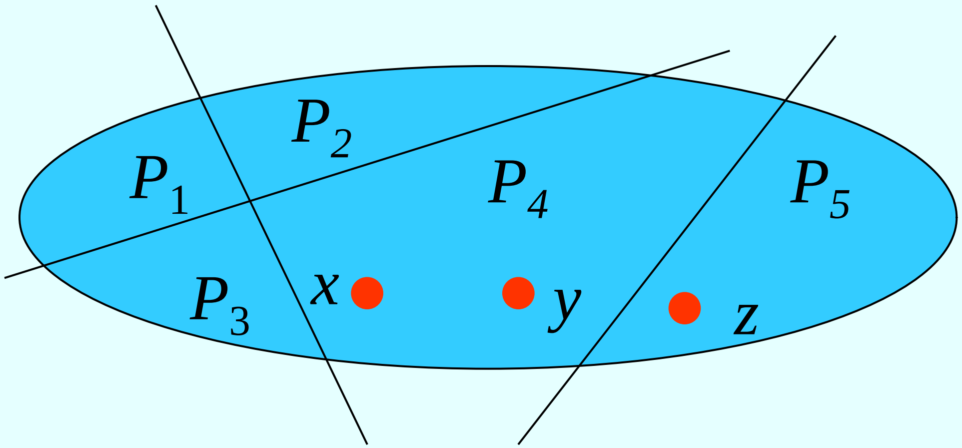
$$P_2 = \{1,2,4\},$$

$$P_3 = \{5\},$$

$$P_4 = \{7,8\}.$$

$\mathscr{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ – разбиение множества A на четыре части.

Пусть $\mathscr{P}$ – разбиение множества A.
Определим отношение R на A:
$x\,R\,y \;\Leftrightarrow\; x$ и y принадлежат одной части разбиения.
R является отношением эквивалентности.



$(x, y) \in R$

$(x, z) \notin R$

Все отношения эквивалентности устроены подобным образом!

Теорема. *Пусть* R *– отношение эквивалентности на множестве* A*. Существует такое разбиение* $\mathscr{P}$ *множества* A*, что элементы* x *и* y *находятся в отношении* R *тогда и только тогда, когда они принадлежат одной части разбиения* $\mathscr{P}$*.*

Доказательство проведем в три этапа:

1. Построим семейство $\mathscr{P}$ подмножеств множества A.

2. Покажем, что $\mathscr{P}$ является разбиением множества A.

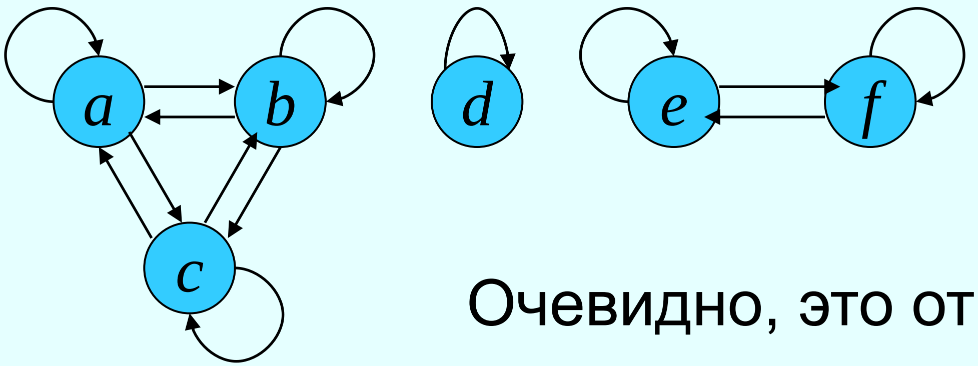
3. Покажем, что $x\,R\,y \Leftrightarrow x$ и y принадлежат одной части разбиения $\mathscr{P}$.

1. Положим $P(x) = \{y: x\,R\,y\}$ для каждого $x \in A$,

$$\mathscr{P} = \{P(x) : x \in A\}.$$

Замечание: может быть $x \neq y$, но $P(x) = P(y)$.

Например, пусть R – отношение, представленное графом:



Очевидно, это отношение эквивалентности.

Здесь $P(a) = P(b) = P(c) = \{a, b, c\}$, $P(d) = \{d\}$,
$P(e) = P(f) = \{e, f\}$,

$$\mathscr{P} = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e, f\}\}.$$

2. Покажем, что это семейство $\mathscr{P}$ есть разбиение множества A.

1) Так как отношение R рефлексивно, то $x \in P(x)$ для всех $x \in A$.
Поэтому каждый элемент $x \in A$ принадлежит хотя бы одному подмножеству из $\mathscr{P}$, т.е. объединение всех множеств из $\mathscr{P}$ равно A:

$$\bigcup_{x \in A} P(x) = A.$$

2) Теперь покажем, что если $P(x) \neq P(y)$, то $P(x)$ и $P(y)$ не пересекаются.

Предположим, что $P(x) \cap P(y) \neq \varnothing$. Тогда существует $z \in P(x) \cap P(y)$, т.е. $z\,R\,x$ и $z\,R\,y$. Так как отношение R симметрично и транзитивно, то отсюда следует, что $x\,R\,y$. Теперь для любого $u \in A$ имеем:

$$u \in P(x) \quad \Rightarrow \quad u\,R\,x \quad \Rightarrow \quad u\,R\,y \quad \Rightarrow \quad u \in P(y)$$

и обратно. Следовательно, $P(x) = P(y)$.

3. Осталось доказать, что $x\,R\,y \Leftrightarrow x$ и y принадлежат одной части разбиения $\mathscr{P}$.

Если $x\,R\,y$, то $y \in R(x)$. Но $x \in R(x)$, поэтому x и y оба принадлежат $R(x)$.

Обратно, если $x \in R(z)$ и $y \in R(z)$ для некоторого z, то $x\,R\,z$ и $y\,R\,z$. Отсюда следует, что $x\,R\,y$.

Итак, если на множестве A задано отношение эквивалентности R, то множество A разбивается на части так, что любые два элемента из одной части находятся в отношении R, а любые два элемента из разных частей не находятся в этом отношении.

Эти части называются *классами эквивалентности*.

Семейство классов эквивалентности называется *фактор-множеством* множества A по отношению R и обозначается A/R.

Доказанную теорему называют *теоремой о факторизации*.

Пример 1

Пусть $n \in \mathbf{N}$. Определим следующее отношение R на $\mathbf{N}_0$:
$x\,R\,y$ означает, что n делит $x - y$, т.е. существует такое целое k, что $x - y = kn$.

(ранее был рассмотрен частный случай $n = 2$).

R является отношением эквивалентности для любого n.

Если $x\,R\,y$, то говорят, что x сравнимо с y по модулю n и пишут

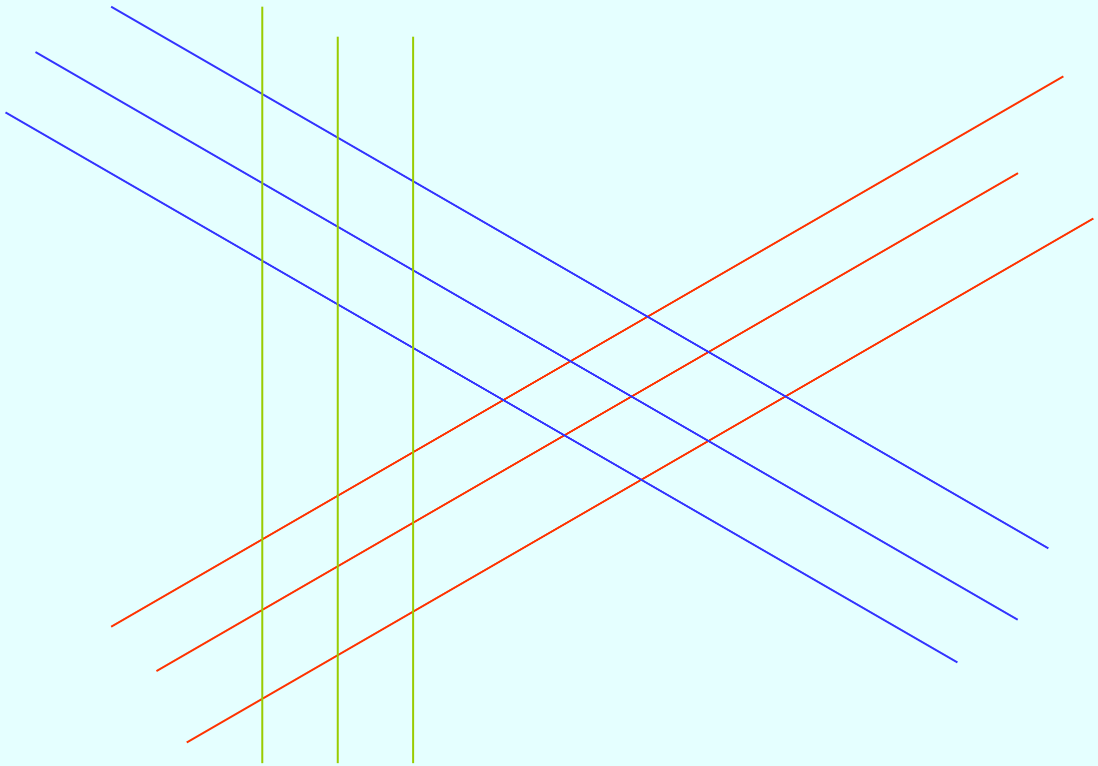
$$x \equiv y \pmod{n}.$$

Два целых числа сравнимы по модулю n тогда и только тогда, когда они дают одинаковые остатки при делении на n. Поэтому имеется ровно n классов эквивалентности:

$$
\begin{aligned}
&C_0 = \{0,\ n,\ 2n,\ 3n,\ \ldots\},\\
&C_1 = \{1,\ n+1,\ 2n+1,\ 3n+1,\ \ldots\},\\
&C_2 = \{2,\ n+2,\ 2n+2,\ 3n+2,\ \ldots\},\\
&\vdots\\
&C_{n-1} = \{n-1,\ 2n-1,\ 3n-1,\ 4n-1,\ \ldots\}.
\end{aligned}
$$

Пример 2

Отношение $\parallel$ является отношением эквивалентности. Каждый класс эквивалентности состоит из всех прямых одного направления.



Дискретная математика

Лекция 3

Отношения порядка

Отношение R на множестве A *называется* *отношением порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Если R есть отношение порядка и $x\,R\,y$, то говорят "x предшествует y" или "x меньше y".

Какие из этих отношений являются отношениями порядка?

$$=,\quad <,\quad \leq,\quad |,\quad \in,\quad \subseteq,\quad \|$$

Строгий порядок

Отношение R на множестве A *антирефлексивно*, если для каждого $x \in A$ выполняется $(x, x) \notin R$.

Строгий порядок – это антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение.

Сравните отношения $<$ и $\leq$.

Замечание: строгий порядок не является частным случаем порядка.

Является ли отношение $|$ порядком или строгим порядком?

Упорядоченное множество

Множество A с заданным на нем отношением порядка R называется *упорядоченным множеством*.

Точнее, упорядоченное множество – это пара (A, R).

Примеры: $(\mathbf{Z}, \leq)$;

$(2^A, \subseteq)$ для любого множества A;

$(\mathbf{N}, \mid)$.

Есть важное различие между $(\mathbf{Z}, \leq)$ и $(2^A, \subseteq)$.

Для любых $x, y \in \mathbf{Z}$ выполняется хотя бы одно из неравенств $x \leq y$, $y \leq x$.

Для $X, Y \in 2^A$ может быть $X \not\subseteq Y$ и $Y \not\subseteq X$. Например:

$$X = \{a, b\}, \qquad Y = \{a, c\}.$$

Пусть (A, R) – упорядоченное множество и $x, y \in A$.
x и y *сравнимы*, если $x\,R\,y$ или $y\,R\,x$,
иначе они *несравнимы.*

В $(\mathbf{Z}, \leq)$ любые два элемента сравнимы.

В $(2^A, \subseteq)$ имеются несравнимые элементы.

Порядок R на множестве A называется *линейным порядком*, если любые два элемента сравнимы, иначе он называется *частичным порядком*.

В первом случае (A, R) есть *линейно упорядоченное множество*,
во втором оно является *частично упорядоченным множеством*.

$(\mathbf{Z}, \leq)$ – линейно упорядоченное множество,

$(2^A, \subseteq)$ – частично упорядоченное множество.

Упорядоченное множество $(\mathbf{N}, \mid)$ линейно или частично упорядочено?
А множество $(\mathbf{Z}, \mid)$?

Непосредственное предшествование

Пусть (A, R) – упорядоченное множество, xRy и $x \neq y$.

Элемент x *непосредственно предшествует* элементу y, если не существует такого элемента z, отличного от x и y, что xRz и zRy.

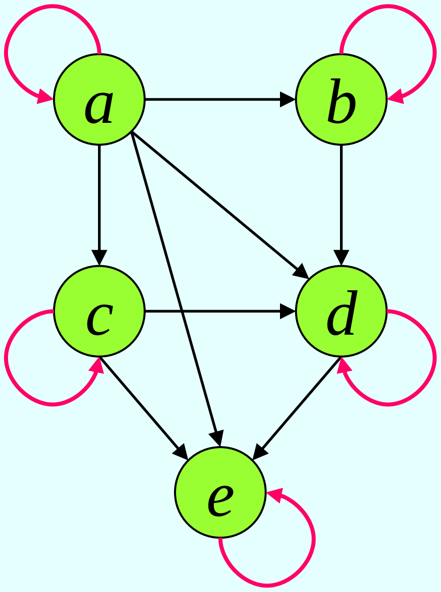
Отношение непосредственного предшествования для отношения R будем обозначать R^*.

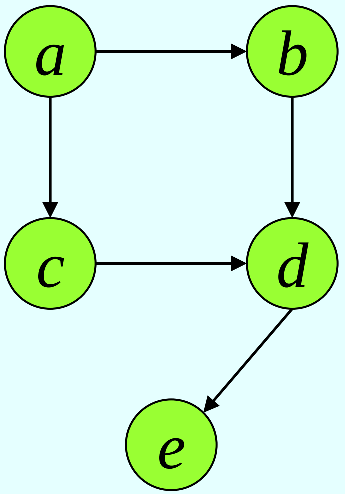
Примеры

1. ($\mathbf{Z}$, $\leq$)

2. ($\mathbf{R}$, $\leq$)

3.





R R^*

aRe $aR^*c,\ cR^*d,\ dR^*e$

Теорема. *Пусть* (A, R) *– конечное упорядоченное множество,* a и b *– различные элементы множества* A *и* aRb. *Существует последовательность* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *элементов множества* A *такая, что* $z_1 = a$, $z_n = b$ *и* $z_k R^* z_{k+1}$ *для* $k = 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Обозначим

$$M(a,b) = \{x: \; x \neq a, \; x \neq b, \; aRx, \; xRy\}.$$

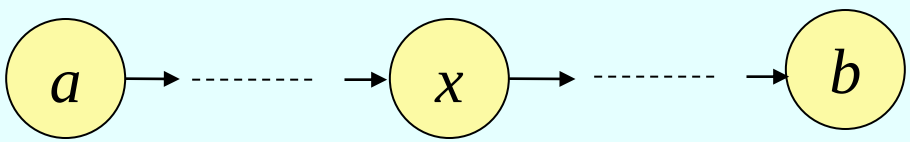
Пусть $|M(a,b)| = m.$ Проведем индукцию по $m.$

1) $m = 0.$ Тогда aR^*b и полагаем $z_1 = a$, $z_2 = b$.

2) $m > 0$. Возьмем какой-нибудь элемент $x \in M(a,b)$.

Тогда $|M(a,x)| < m$ и $|M(x,b)| < m$.

По предположению индукции существуют последовательности элементов, связанных отношением R^*, соединяющие a с x и x с b.
Соединяя их в одну, получим последовательность, соединяющую a с b.



Граф отношения R^* называется *диаграммой Хассе* отношения R.

Обычно вершины на диаграмме располагают так, чтобы меньший элемент находился ниже большего. Тогда отношение между элементами можно изображать линией, а не стрелкой.

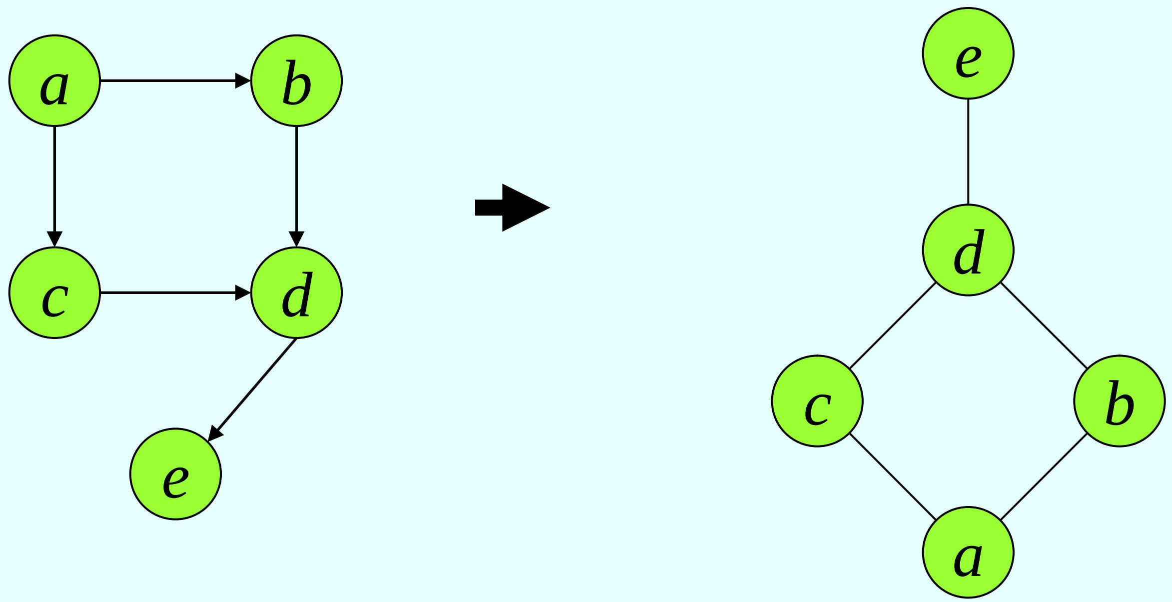
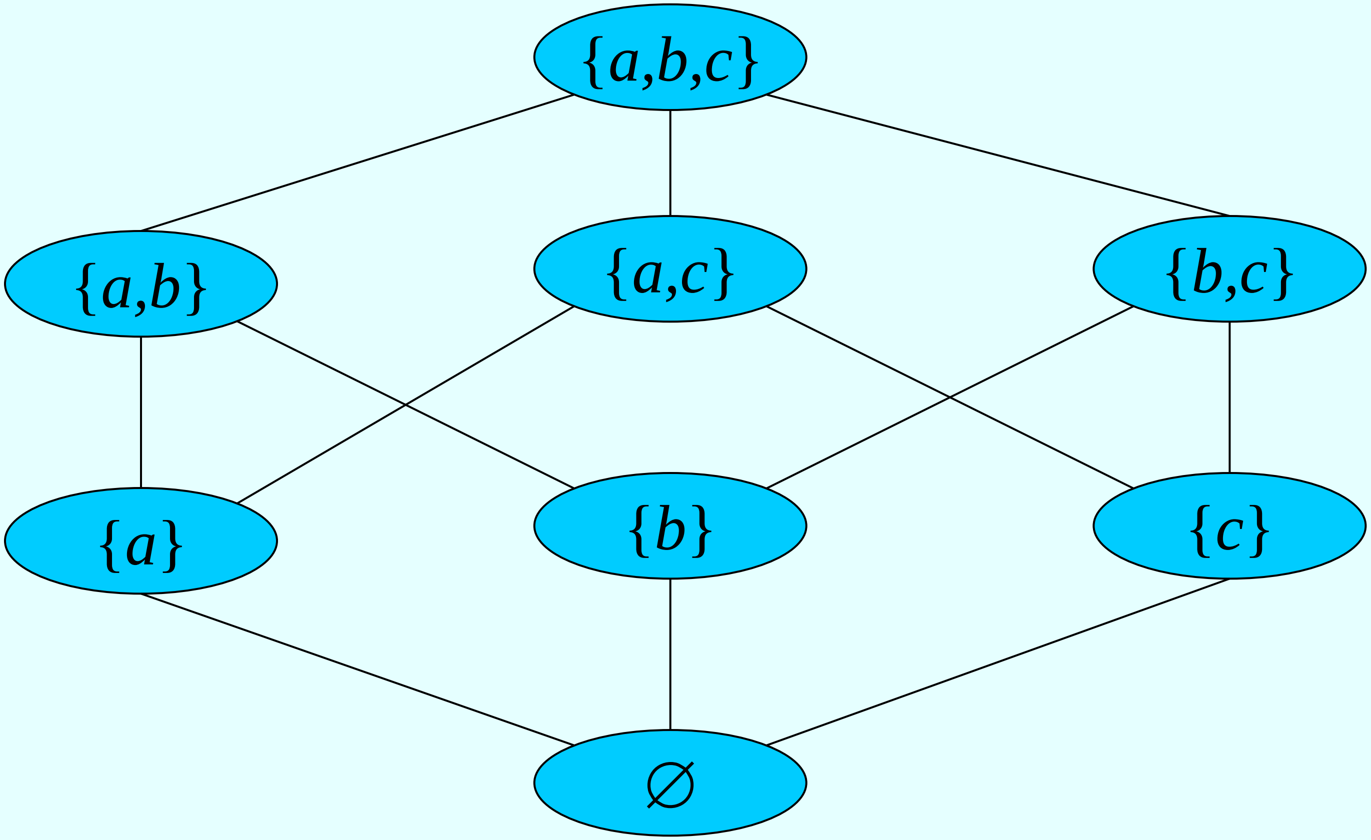


Диаграмма Хассе упорядоченного множества $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$



Максимальные и минимальные элементы

$x \in A$ называется *максимальным* элементом упорядоченного множества (A, R), если не существует такого y, что $y \neq x$ и $x\,R\,y$.

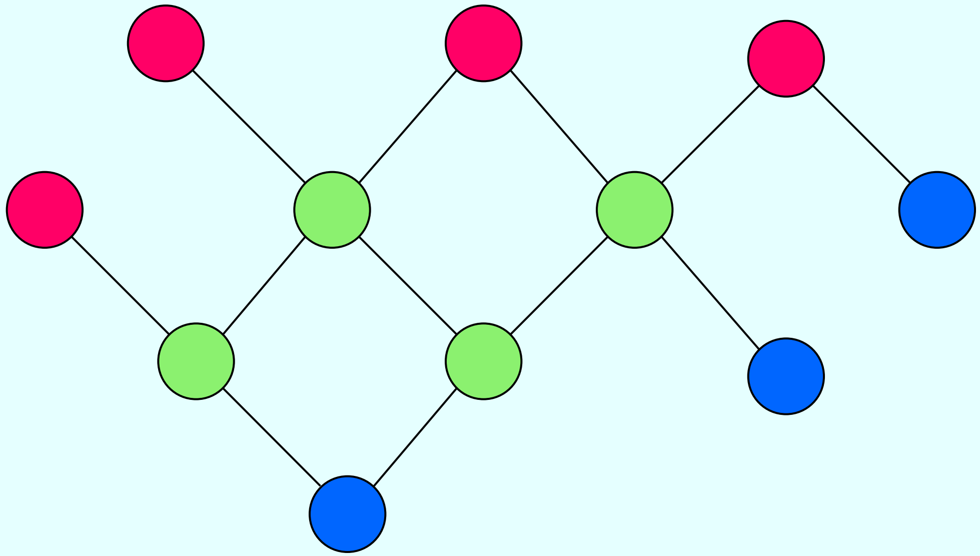
Иначе говоря, не существует элемента больше x.

x – *минимальный* элемент, если не существует элемента меньше x.

(**Z**, $\leq$) не имеет ни максимальных, ни минимальных элементов.

(N, $\leq$) имеет один минимальный элемент и ни одного максимального.

Каждое конечное упорядоченное множество имеет максимальные и минимальные элементы.



Теорема. *Если* (A, R) *– упорядоченное множество и* $x \in A$, *то существует максимальный элемент* y *такой, что* $x\, R\, y$.

Доказательство.

x максимальный $\Longrightarrow$ полагаем $y = x$

x не максимальный $\Longrightarrow$ существует y_1, больший x

y_1 максимальный $\Longrightarrow$ полагаем $y = y_1$

y_1 не максимальный $\Longrightarrow$ существует y_2, больший y_1

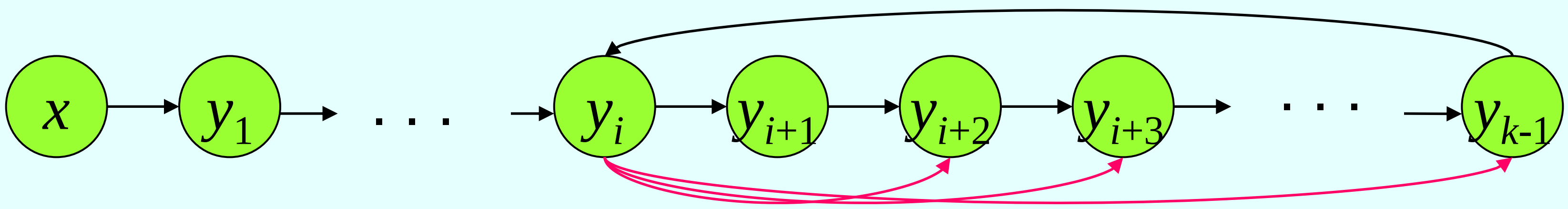
…

и т.д.

Получаем последовательность элементов

$$x, y_1, y_2, \ldots,$$

в которой каждый следующий элемент больше предыдущего. Могут элементы в этой последовательности повторяться? Допустим, $y_i = y_k$, $i < k$.



Ввиду транзитивности должно быть

$$y_i \, R \, y_{i+2}, \quad y_i \, R \, y_{i+3}, \ldots, \quad y_i \, R \, y_{k-1}.$$

Так как $y_i = y_k$, то $y_k \, R \, y_{k\text{-}1}$. Но в то же время $y_{k\text{-}1} \, R \, y_k$.

Это противоречит антисимметричности.

Таким образом, все элементы последовательности

$$x, y_1, y_2, \ldots,$$

различны. Так как множество A конечно, то и эта последовательность конечна:

$$x, y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Но тогда y_n – максимальный элемент и полагаем $y = y_n$.

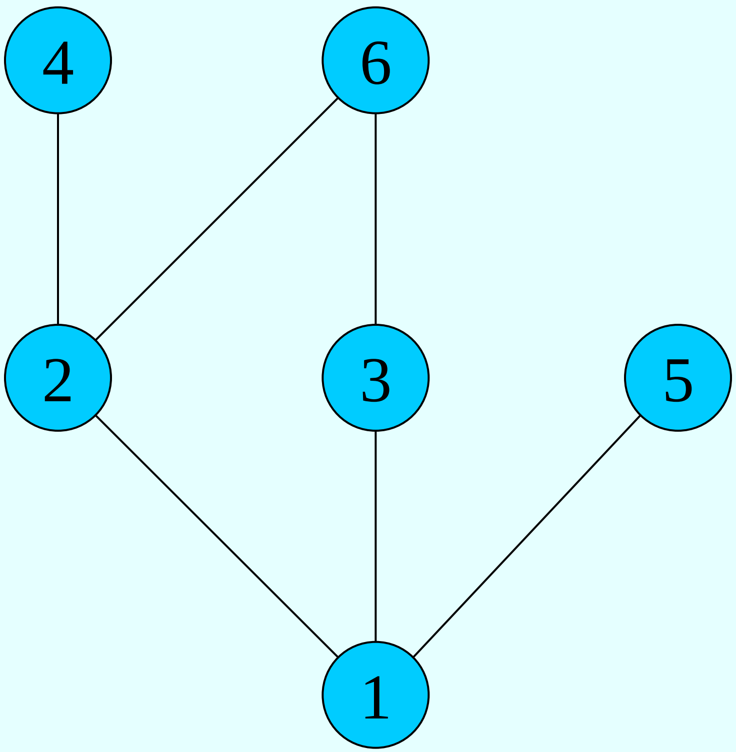
Наибольшие и наименьшие элементы

$x \in A$ называется *наибольшим* элементом упорядоченного множества (A, R), если для каждого $y \in A$ выполняется $y\,R\,x$.

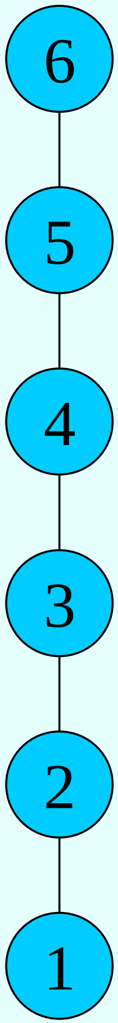
Иначе говоря x больше любого другого элемента из A.

x – *наименьший* элемент, если он меньше любого другого элемента из A.

Частично упорядоченное множество
$(\{1,2,3,4,5,6\},\ |\ )$

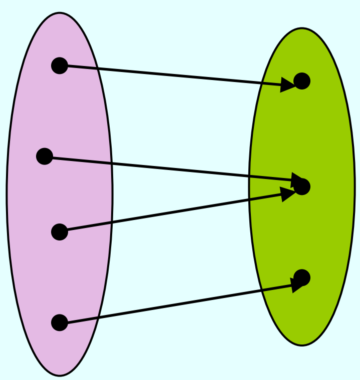


Линейно упорядоченное множество
$(\{1,2,3,4,5,6\},\ \leq)$

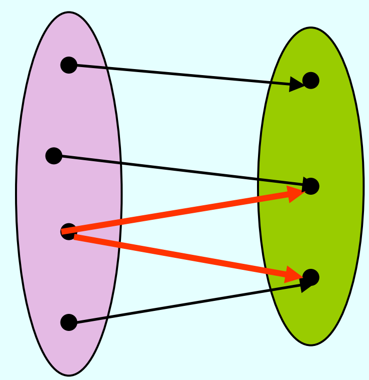


Функциональные отношения

Отношение R *между множествами* A *и* B *называется* функциональным *отношением, если для любого* $x \in A$ *существует единственный* $y \in B$ *такой, что* $x\,R\,y$.



функциональное



не функциональное

Функции

С каждым функциональным отношением R между A и B можно связать *функцию* $y = f(x)$.

Здесь x – аргумент, он принимает значения из множества A.

y – значение функции, это тот элемент из множества B, для которого выполняется $x\,R\,y$.

Говорят, что f есть функция из A в B и пишут

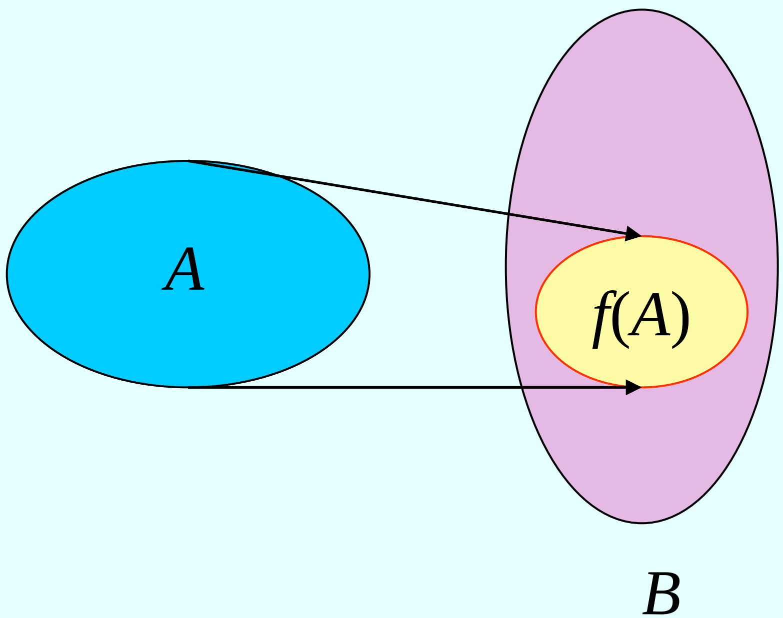
$$f : A \to B.$$

Синонимы: отображение, соответствие.

Множество A – *область определения* функции.

Если $X \subseteq A$, то $f(X)$ обозначает множество всех $y \in B$, для которых существует $x \in X$ такой, что $y = f(x)$.

Множество $f(A)$ – *область значений* функции.

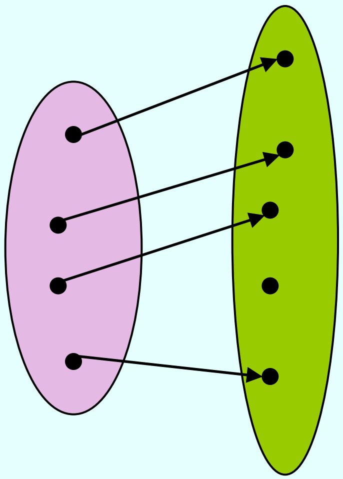


Свойства функций

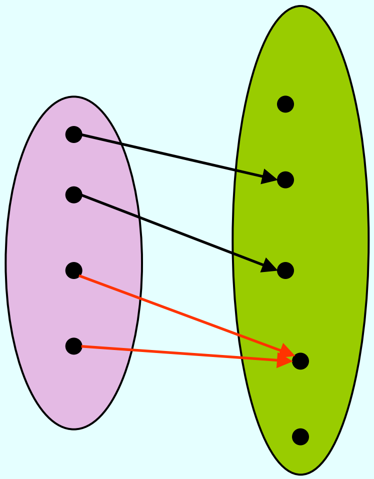
1. Инъективность

Функция $f : A \to B$ называется *инъективной* (*инъекцией*), если для любых $x_1, x_2 \in A$

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$



инъекция



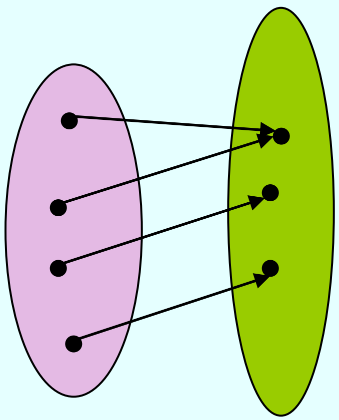
не инъекция

Если A и B – конечные множества и существует инъекция из A в B, то

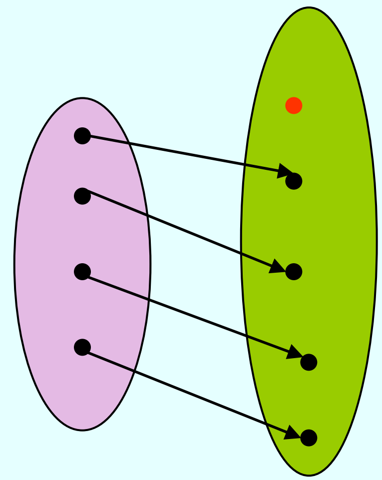
$$|A| \leq |B|.$$

2. Сюръективность

Функция $f : A \to B$ *сюръективна* (*surjection*), если область ее значений есть все множество B, т.е. для любого $y \in B$ существует $x \in A$ такой, что $y = f(x)$.



сюръекция



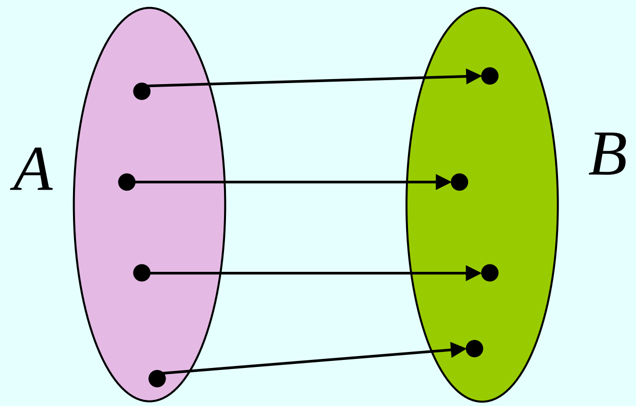
не сюръекция

Если A и B – конечные множества и существует сюръекция из A в B, то

$$|A| \geq |B|.$$

3. Биекции

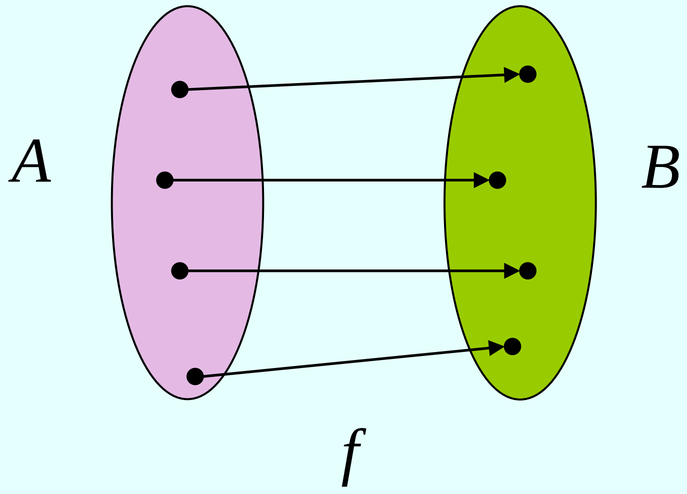
Функция $f : A \to B$ называется *биективной* (*биекцией*), если она инъективна и сюръективна.

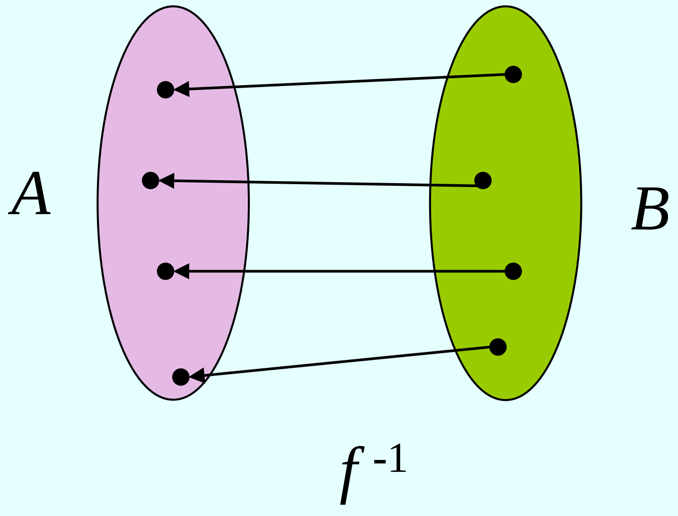


биекция

Биекцию называют также *взаимно однозначным соответствием* или 1-1-*соответствием.*

Если $f : A \to B$ – биекция, то существует *обратная* функция $f^{-1}: B \to A$ такая, что $f^{-1}(f(x)) = x$ для всех $x \in A$.





Если A и B – конечные множества и существует биекция из A в B, то

$$|A| = |B|$$

(“*правило равенства*”).

Пример

Пусть $h(A)$ – функция, которая каждому подмножеству конечного универса U ставит в соответствие его характеристический вектор.

$h(A)$ есть биекция множества 2^U в множество $\{0, 1\}^n$, где $n = |U|$.

По правилу равенства, число подмножеств множества мощности n равно числу наборов длины n, составленных из элементов $0, 1$ (и равно 2^n).

Счетные и несчетные множества

Понятия инъекции и биекции позволяют сравнивать бесконечные множества. Если есть инъекция из A в B, то естественно считать, что мощность A не больше, чем мощность B. Если есть биекция между A и B, то считают, что мощности этих множеств равны.

Множество A называется *счетным*, если имеется биекция между A и **N**, в противном случае оно *несчетное*.

Если A счетно и $f : \mathbf{N} \to A$ – биекция, то элементы множества A можно расположить в бесконечную последовательность $f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots$. Обратно, если существует такая последовательность, содержащая каждый элемент множества A один раз, то A счетно.

Примеры

- $\mathbf{N}_0$ счетно.

  $f(x) = x + 1$ есть биекция из $\mathbf{N}_0$ в $\mathbf{N}$.

- $\mathbf{Z}$ счетно.

  Все целые числа можно расположить в последовательность:

  0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, … .

Теорема 1. Каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Теорема 2. Любое бесконечное подмножество счетного множества само счетно.

Таким образом, счетные множества – это “наименьшие” бесконечные множества.

Существуют ли несчетные множества?

Теорема 3. *Множество* **R** *несчетно.*

Докажем, что подмножество множества **R**, интервал [0,1], несчетно.

Предположим, что существует биекция $f : \mathbf{N} \to [0,1]$.
Каждое вещественное число из [0,1] можно представить бесконечной десятичной дробью: $0,x_1x_2x_3\ldots$.
Выберем для каждого $n = 1, 2, \ldots,$ десятичную цифру c_n, отличную от n-ой цифры десятичной записи числа $f(n)$.
Тогда $0,c_1c_2c_3\ldots$ есть вещественное число, отличное от всех элементов последовательности $f(1), f(2), \ldots$.

Теорема 4 (теорема Кантора). *Для любого множества A мощность множества 2^A больше мощности множества A.*

Доказательство.
Отображение, ставящее в соответствие каждому $x \in A$ множество $\{x\}$, является инъекцией из A в 2^A.

Значит, мощность 2^A не меньше мощности A.

Докажем, что не существует биекции из A в 2^A.

Допустим, $f: A \to 2^A$ – такая биекция.

Рассмотрим множество

$$M = \{x \in A:\ x \notin f(x)\}.$$

Так как f – биекция, то существует такой элемент $m \in A$, что $f(m) = M$.
Тогда

$$m \in M \quad \Rightarrow \quad m \notin M,$$

$$m \notin M \quad \Rightarrow \quad m \in M.$$

Противоречие.

Более общие отношения

До сих пор мы рассматривали бинарные отношения, отношения между двумя объектами.
В жизни и в математике часто встречаются отношения между несколькими объектами.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – множества. *n-арное* (*n-местное*) отношение между этими множествами – это любое подмножество множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Пример 1.

Пусть $A_1 = A_2$ – множество городов,
A_3 – множество видов транспорта.

Можно определить следующее отношение :

$(x, y, z) \in R \quad \Leftrightarrow$ из x в y можно попасть посредством z.

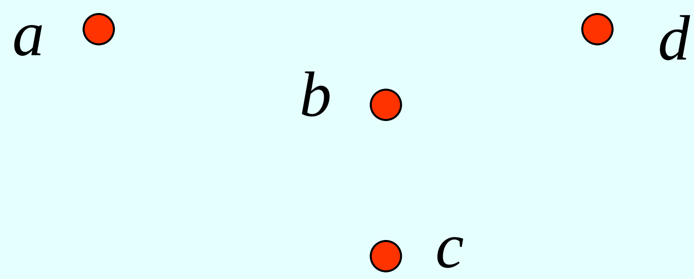
$$(\textit{Москва}, \textit{Н. Новгород}, \textit{самолет}) \in R$$

$$(\textit{Москва}, \textit{Нью-Йорк}, \textit{поезд}) \notin R$$

Пример 2.

Пусть A – множество всех точек плоскости.
Можно определить следующее отношение R на A^4:

$(x, y, z, u) \in R \iff$ точка x расположена внутри треугольника yzu.



$$(a, b, c, d) \notin R$$

$$(b, a, c, d) \in R$$

$$(b, c, d, a) \in R$$