НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической логики и высшей алгебры

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

(Пособие для студентов заочного отделения)

Составитель В.Е.Алексеев

2002

## 1. Начальные понятия

## Определение графа

Термин «граф» неоднозначен и это легко обнаружить, сравнивая определения графа, приводимые в разных книгах по теории графов. Однако во всех этих определениях есть и общее. В любом случае *граф* состоит из двух множеств – множества *вершин* и множества *ребер*, причем для каждого ребра указана пара вершин, которые это ребро *соединяет*. Здесь будут рассматриваться только *конечные* графы, то есть такие, у которых оба множества конечны. Чтобы получить законченное определение графа того или иного типа, необходимо уточнить еще следующие три момента.

1.Ориентированный или неориентированный?

Прежде всего нужно договориться, считаем ли мы пары $(a,b)$ и $(b,a)$ различными. Если да, то говорят, что рассматриваются упорядоченные пары (порядок элементов в паре важен), если нет – неупорядоченные. Если ребро $e$ соединяет вершину $a$ с вершиной $b$ и пара $(a,b)$ считается упорядоченной, то это ребро называется *ориентированным*, вершина $a$ – его *началом*, вершина $b$ – *концом*. Если же эта пара считается неупорядоченной, то ребро называется *неориентированным*, а обе вершины – его *концами*. Заметим, что неориентированное ребро, соединяющее $a$ с $b$, соединяет и $b$ с $a$, для ориентированного же это неверно. Чаще всего рассматривают графы, в которых все ребра имеют один тип – либо ориентированные, либо неориентированные. В соответствии с этим и весь граф называют ориентированным или неориентированным.

2. Кратные ребра.

Следующий пункт, требующий уточнения – могут ли два разных ребра соединять одну и ту же пару вершин? Если да, то говорят, что в графе допускаются *кратные ребра*. Граф с кратными ребрами называют также *мультиграфом*.

3. Петли.

Ребро, которому поставлена в соответствие пара вида $(a,a)$, то есть ребро, соединяющее вершину $a$ с нею же самой, называется *петлей*. Если такие ребра не допускаются, то говорят, что рассматриваются *графы без петель*.

Комбинируя эти три признака, можно получить разные варианты определения понятия графа. Особенно часто встречаются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Такие графы называют *обыкновенными*, или *простыми*. Если в графе нет кратных ребер, то есть для каждой пары вершин имеется не более одного соединяющего их ребра, то можно просто отождествить ребра с соответствующими парами вершин – считать, что ребро это и есть пара вершин. Чтобы исключить петли, достаточно оговорить, что вершины, образующие ребро, должны быть различны. Это приводит к следующему определению обыкновенного графа.

**Определение.** *Обыкновенным графом* называется пара $G=(V,E)$, где $V$ – конечное множество, $E$ – множество неупорядоченных пар различных элементов из $V$. Элементы множества $V$ называются *вершинами* графа, элементы множества $E$ – его *ребрами*.

Определения других типов графов без кратных ребер легко получить из этого: если заменить слово «неупорядоченных» на «упорядоченных», получится определение ориентированного графа без петель, если убрать слово «различных», получится определение графа с петлями. Ориентированный граф коротко называют *орграфом*.

**В дальнейшем термин «граф» будем употреблять в смысле «обыкновенный граф», а рассматривая другие типы графов, будем специально это оговаривать.**

Множество вершин графа $G$ будем обозначать через $VG$, множество ребер – $EG$, число вершин – $n(G)$, число ребер – $m(G)$.

Из определения видно, что для задания обыкновенного графа достаточно перечислить его вершины и ребра, причем каждое ребро должно быть парой вершин. Положим, например, $VG = \{a,b,c,d,e,f\}$, $EG = \{(a,c), (a,f), (b,c), (c,d), (d,f)\}$. Тем самым задан граф $G$ с $n(G) = 6$, $m(G) = 5$. Если граф не слишком велик, то более наглядным способом представить его является рисунок, на котором вершины изображаются кружками или иными значками, а ребра – линиями, соединяющими вершины. Заданный выше граф $G$ показан на рисунке 1. Мы будем часто пользоваться именно этим способом представления графа, при этом обозначения вершин иногда будут помещаться внутри кружков, изображающих вершины, иногда рядом с ними, а иногда, когда имена вершин не существенны, и вовсе опускаться.

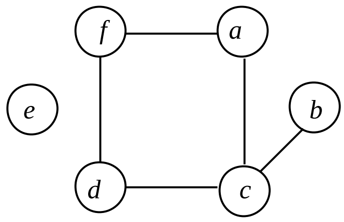



Рис.1

## Графы и бинарные отношения

Напомним, что *бинарным отношением* на множестве $A$ называется любое подмножество $R$ множества $A^2$, состоящего из всевозможных упорядоченных пар элементов множества $A$. Сравнивая с тем, что говорилось выше об определениях различных типов графов, видим, что понятие бинарного отношения эквивалентно понятию ориентированного графа с петлями. Другие типы графов без кратных ребер – это частные виды бинарных отношений. Отношение $R$ называется *рефлексивным*, если для любого $x \in A$ пара $(x,x)$ принадлежит $R$, и *антирефлексивным*, если ни одна такая пара не принадлежит $R$. Оно называется *симметричным*, если для любых $x, y \in A$ из $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \in R$. Обыкновенный граф – не что иное, как антирефлексивное симметричное отношение.

## Откуда берутся графы

Легко найти примеры графов в самых разных областях науки и практики. Сеть дорог, трубопроводов, электрическая цепь, структурная формула химического соединения, блок-схема программы – в этих случаях графы возникают очень естественно и видны «невооруженным глазом».

Немало поводов для появления графов и в самой математике. Наиболее очевидный пример – любой многогранник в трехмерном пространстве. Вершины и ребра многогранника можно рассматривать как вершины и ребра графа. При этом надо ясно осознавать, что рассматривая многогранник как граф, мы теряем собственно геометрическую информацию о расположении его элементов в пространстве: на рисунке 2 показаны три способа изобразить один и тот же граф трехмерного куба.

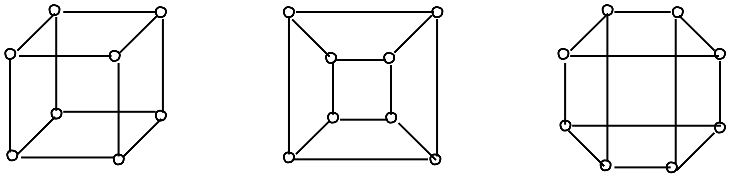


Рис. 2

Еще один способ образования графов из геометрических объектов иллюстрирует рисунок 3. Слева показаны восемь кругов на плоскости, а справа – граф, в котором каждая вершина соответствует одному из этих кругов и две вершины соединены ребром в том и только том случае, когда соответствующие круги пересекаются. Такие графы называют графами пересечений. Можно построить граф пересечений семейства интервалов на прямой, или дуг окружности, или параллелепипедов.

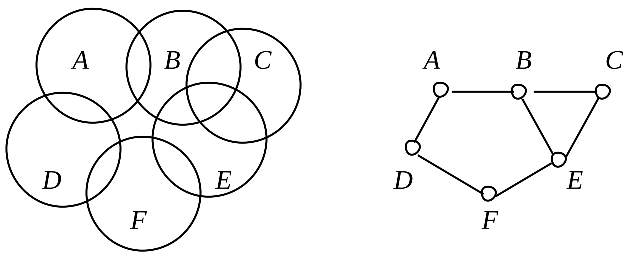



Рис.3

## Число графов

Возьмем какое-нибудь множество $V$, состоящее из $n$ элементов, и будем рассматривать всевозможные (обыкновенные!) графы с множеством вершин $V$. Обозначим число таких графов через $g_n$. Эти графы различаются только множествами ребер, а каждое ребро – это неупорядоченная пара различных элементов из $V$. В комбинаторике такие пары называются сочетаниями из $n$ по 2, их число равно $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Каждая пара может быть включена или не включена в множество ребер графа. Применяя правило произведения, приходим к следующему результату.

**Теорема 1.** $g_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

## Смежность, инцидентность, степени

Если в графе имеется ребро $e = (a, b)$, то говорят, что вершины $a$ и $b$ *смежны* в этом графе, ребро $e$ *инцидентно* каждой из вершин $a$, $b$, а каждая из них *инцидентна* этому ребру.

Множество всех вершин графа, смежных с данной вершиной $a$, называется *окрестностью* этой вершины и обозначается через $V(a)$. Число этих вершин называется *степенью* вершины $a$ и обозначается через $\deg(a)$. Если сложить степени всех вершин некоторого графа, то каждое ребро внесет в эту сумму вклад, равный 2, поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** $\sum\limits_{a \in VG} \deg(a) = 2m(G)$.

Это равенство известно как «лемма о рукопожатиях». Из него следует, что число вершин нечетной степени в любом графе четно.

Вершину степени 0 называют *изолированной*. Граф называют *регулярным* степени $d$, если степень каждой его вершины равна $d$.

*Набор степеней* графа – это последовательность степеней его вершин, выписанных в неубывающем порядке.

## Подграф

Граф $G'$ называется *подграфом* графа $G$, если $VG' \subseteq VG$, $EG' \subseteq EG$. Всякий подграф может быть получен из графа удалением некоторых вершин и ребер. На рисунке 4 изображены граф $G$ и его подграфы $G_1, G_2, G_3$.

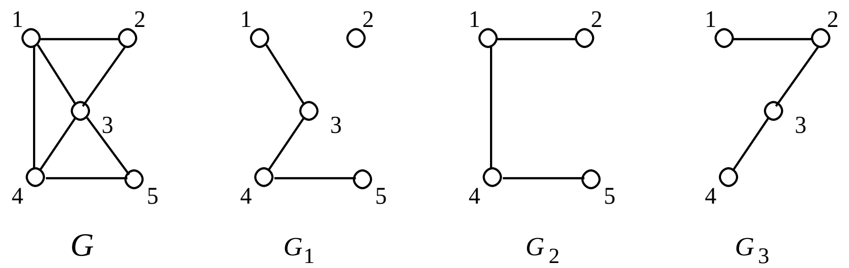



Рис. 4

Подграф $G'$ графа $G$ называется *остовным*, если $VG' = VG$. Остовный подграф может быть получен из графа удалением некоторых ребер, вершины же остаются в неприкосновенности. На рисунке 4 $G_1$ – остовный подграф графа $G$, а $G_2$ и $G_3$ не являются остовными подграфами.

Другая важная разновидность подграфов – *порожденные* подграфы. Пусть задан граф $G = (V, E)$ и в нем выбрано множество вершин $U \subseteq V$. Рассмотрим подграф $G' = (U, E')$, где $E'$ состоит из всех тех ребер графа $G$, у которых оба конца принадлежат $U$. Говорят, что этот подграф *порожден множеством вершин* $U$. Он обозначается через $G\langle U \rangle$. Порожденный подграф может быть получен из графа удалением «лишних» вершин, т.е. вершин, не принадлежащих $U$, причем при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей ребра.

На рисунке 4 $G_2$ – подграф графа $G$, порожденный множеством вершин $\{1,2,4,5\}$, т.е. $G_2 = G\langle\{1,2,4,5\}\rangle$, а подграф $G_3$ не является ни остовным, ни порожденным.

## Некоторые специальные графы

Рассмотрим некоторые особенно часто встречающиеся графы.

*Пустой граф* – граф, не содержащий ни одного ребра. Пустой граф с множеством вершин $\{1,2,...,n\}$ обозначается через $O_n$.

*Полный граф* – граф, в котором каждые две вершины смежны. Полный граф с множеством вершин $\{1,2,...,n\}$ обозначается через $K_n$. Граф $K_1$, в частности, имеет одну вершину и ни одного ребра.

*Цепь* (*путь*) $P_n$ – граф с множеством вершин $\{1,2,...,n\}$ и множеством ребер $\{(1,2),(2,3),\dots,(n-1,n)\}$.

*Цикл* $C_n$ – граф, который получается из $P_n$ добавлением ребра $(1,n)$.

## Дополнительный граф

*Дополнительным графом* (или *дополнением*) к обыкновенному графу $G$ называется граф $\overline{G}$, у которого множество вершин то же, что у $G$, и две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в $G$. Например, $\overline{O_n} = K_n$. Другой пример показан на рисунке 5. Очевидно, всегда $\overline{\overline{G}} = G$.

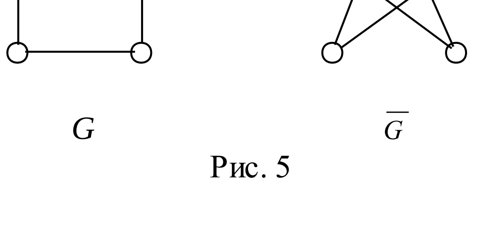



Рис. 5

## Изоморфизм

На рисунке 6 изображены два графа с одним и тем же множеством вершин $\{a,b,c,d\}$. При внимательном рассмотрении можно обнаружить, что это разные графы – в левом имеется ребро $(a,c)$, в правом же такого нет. В то же

$G_1$ $G_2$

Рис. 6

время, если не обращать внимания на наименования вершин, то эти графы явно одинаково устроены: каждый из них – цикл из четырех вершин. Во многих случаях при исследовании строения графов имена или номера вершин не играют роли и такие графы, один из которых получается из другого переименованием вершин, можно считать одинаковыми. Для того, чтобы это можно было делать «на законном основании», вводится понятие изоморфизма графов.

**Определение.** Графы $G_1$ и $G_2$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция $f$ множества $VG_1$ на множество $VG_2$, что $(a,b) \in EG_1$ тогда и только тогда, когда $(f(a), f(b)) \in EG_2$. Отображение $f$ в этом случае называется *изоморфизмом* $G_1$ в $G_2$.

Тот факт, что графы $G_1$ и $G_2$ изоморфны, записывается так: $G_1 \cong G_2$.

Для графов, изображенных на рисунке 6, изоморфизмом является, например, отображение, задаваемое таблицей:

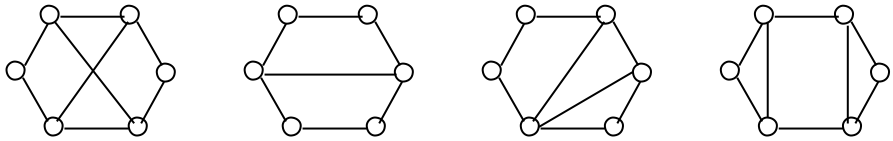
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ (вершина графа $G_1$) | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $f(x)$ (вершина графа $G_2$) | $a$ | $b$ | $d$ | $c$ |

Заметим, что в этом примере есть и другие изоморфизмы первого графа во второй.

Это определение изоморфизма годится и для ориентированных графов, нужно только обе упоминаемые в нем пары вершин считать упорядоченными.

Изоморфизм – бинарное отношение на множестве графов. Очевидно, это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности называются *абстрактными графами*. Когда говорят, что рассматриваются абстрактные графы, это означает, что изоморфные графы считаются одинаковыми. Абстрактный граф можно представлять себе как граф, у которого стерты имена (пометки) вершин, поэтому абстрактные графы иногда называют также *непомеченными* графами.

В общем случае узнать, изоморфны ли два графа, достаточно сложно. Если буквально следовать определению, то нужно перебрать все биекции множества вершин одного из них в множество вершин другого и для каждой из этих биекций проверить, является ли она изоморфизмом. Для $n$ вершин имеется $n!$ биекций и эта работа становится практически невыполнимой уже при не очень больших $n$ (так, 10! = 3628800, $20! > 2 \cdot 10^{18}$). Однако для многих конкретных пар графов их неизоморфность устанавливается довольно легко. Рассмотрим, например, графы, изображенные на рисунке 7. Так как при изоморфизме пара смежных вершин переходит в пару смежных, а пара несмежных – в пару несмежных, то ясно, что число ребер у двух изоморфных графов должно быть одинаковым. Поэтому сразу можно сказать, что графы $G_1$ и $G_2$, у которых разное количество ребер, неизоморфны. У графов $G_1$ и $G_3$ одинаковое число ребер, но они тоже неизоморфны. Это можно установить, сравнивая степени вершин. Очевидно, при изоморфизме каждая вершина переходит в вершину той же степени. Но если выписать степени всех вершин графа $G_1$ в неубывающем порядке, то получится последовательность (2,2,3,3,3,3), а для графа $G_3$ получится последовательность (2,2,2,3,3,4). Из того, что эти последовательности различны, следует неизоморфность двух графов. С графами $G_1$ и $G_4$ дело обстоит немного сложнее – у них и наборы степеней одинаковы. Все же и эти графы неизоморфны: можно заметить, что в $G_4$ есть подграф, являющийся циклом длины 3, а в $G_1$ таких нет. Ясно, что при изоморфизме каждый подграф одного графа переходит в изоморфный ему подграф другого.



$G_1$ $G_2$ $G_3$ $G_4$

Рис.7

Характеристики графов, которые сохраняются при изоморфизме, называются *инвариантами*. В этом примере мы видели некоторые простые инварианты – число ребер, набор степеней, число циклов заданной длины, в дальнейшем будут введены еще многие другие. Если удается установить, что для двух исследуемых графов некоторый инвариант принимает разные значения, то эти графы неизоморфны. Изоморфность же двух графов можно доказать, только предъявив соответствующую биекцию.

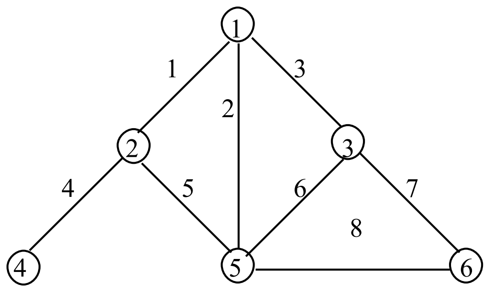
## Графы и матрицы

Пусть $G$ – граф с $n$ вершинами, причем $VG = \{1,2,\ldots,n\}$. Построим квадратную матрицу $A$ порядка $n$, в которой элемент $A_{ij}$, стоящий на пересечении строки с номером $i$ и столбца с номером $j$, определяется следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,j) \in EG, \\ 0, & \text{если } (i,j) \notin EG. \end{cases}$$

Она называется *матрицей смежности* графа. Матрицу смежности можно построить и для ориентированного графа, и для неориентированного, и для графа с петлями. Для обыкновенного графа она обладает двумя особенностями: из-за отсутствия петель на главной диагонали стоят нули, а так как граф неориентированный, то матрица симметрична относительно главной диагонали. Обратно, каждой квадратной матрице порядка $n$, составленной из нулей и единиц и обладающей двумя указанными свойствами, соответствует обыкновенный граф с множеством вершин $\{1,2,\ldots,n\}$.

Другая матрица, ассоциированная с графом – это *матрица инцидентности*. Для ее построения занумеруем вершины графа числами от $1$ до $n$, а ребра – числами от $1$ до $m$. Матрица инцидентности $I$ имеет $n$ строк и $m$ столбцов, а ее элемент $I_{ij}$ равен $1$, если вершина с номером $i$ инцидентна ребру с номером $j$, в противном случае он равен нулю. На рисунке 8 показан граф с занумерованными вершинами и ребрами и его матрицы смежности и инцидентности.




$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 8

Для ориентированного графа матрица инцидентности определяется несколько иначе: ее элемент $I_{ij}$ равен 1, если вершина $i$ является началом ребра $j$, он равен -1, если она является концом этого ребра, и он равен 0, если эта вершина и это ребро не инцидентны друг другу.

### Взвешенные графы

Часто, особенно когда графы используются для моделирования реальных систем, их вершинам, или ребрам, или и тем и другим приписываются некоторые числа. Природа этих чисел может быть самая разнообразная. Например, если граф представляет собой модель железнодорожной сети, то число, приписанное ребру, может указывать длину перегона между двумя станциями, или наибольший вес состава, который допустим для этого участка пути, или среднее число поездов, проходящих через этот участок в течение суток и т.п. Что бы ни означали эти числа, сложилась традиция называть их *весами*, а граф с заданными весами вершин и/или ребер – *взвешенным графом*.

## 2. Маршруты, связность, расстояния

### Маршруты, пути, циклы

*Маршрут* в графе – это последовательность вершин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такая, что для каждого $i = 1,2,\ldots,n-1$ вершины $x_i$ и $x_{i+1}$ соединены ребром. Эти $n-1$ ребер называются *ребрами маршрута*, говорят, что маршрут *проходит* через них, а число $n-1$ называют *длиной* маршрута. Говорят, что маршрут *соединяет* вершины $x_1$ и $x_n$, они называются соответственно *началом* и *концом* маршрута, вершины $x_2, \ldots, x_{n-1}$ называются *промежуточными*. Маршрут называется *замкнутым*, если $x_1 = x_n$.

*Путь* – это маршрут, в котором все ребра различны. Путь называется *простым*, если и все вершины в нем различны.

*Цикл* – это замкнутый путь. Цикл $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1$ называется *простым*, если вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ все попарно различны.

В графе на рисунке 9 последовательность вершин
2,3,5,4 – не маршрут;
2,3,4,5,1,4,3 – маршрут, но не путь;
3,1,4,5,1,2 – путь, но не простой;
2,3,1,4,3,1,2 – замкнутый маршрут, но не цикл;
2,3,1,4,5,1,2 – цикл, но не простой;
2,3,4,5,1,2 – простой цикл.

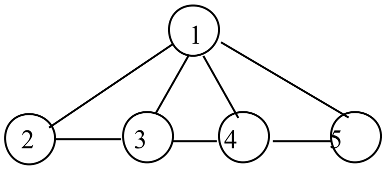



Рис. 9

Установим некоторые простые свойства путей и циклов.

**Лемма 1.** *В любом маршруте, соединяющем две различные вершины, содержится простой путь, соединяющий те же вершины.*

**Доказательство.** Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – маршрут. Если все его вершины различны, то это уже простой путь. В противном случае, пусть $x_i = x_j$, $i < j$. Тогда последовательность $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n$, полученная из этого маршрута удалением отрезка последовательности от $x_{i+1}$ до $x_j$, тоже является маршрутом. Новый маршрут соединяет те же вершины и имеет меньшую длину. Продолжая действовать таким образом, после конечного числа «спрямлений» получим простой путь, соединяющий $x_1$ и $x_n$. □

**Лемма 2.** *Во всяком цикле, проходящем через некоторое ребро, содержится простой цикл, проходящий через это ребро.*

**Доказательство.** Пусть имеется цикл, проходящий через ребро $(a, b)$. Если удалить это ребро из графа, то в полученном подграфе останется маршрут, соединяющий $a$ и $b$. По лемме 1.3 существует простой путь $x_1, x_2, \dots, x_n$, соединяющий эти вершины, то есть пара $(a, b)$ совпадает (как неупорядоченная пара) с парой $(x_n, x_1)$. Но тогда $x_1, x_2, \dots, x_n, x_1$ – простой цикл в исходном графе, проходящий через ребро $(a, b)$. □

Отметим, что в формулировке леммы 2 нельзя заменить слово «цикл» словами «замкнутый маршрут». Действительно, если $(a, b)$ – ребро графа, то последовательность $a, b, a$ – замкнутый маршрут, проходящий через это ребро, но никакого цикла в нем нет.

**Лемма 3.** *Если в графе степень каждой вершины не меньше* 2, *то в нем есть цикл.*

**Доказательство.** Найдем в графе простой путь наибольшей длины (он существует, так как длина простого пути не может превышать $n-1$). Пусть это $x_1, x_2, \dots, x_n$. Вершина $x_n$ смежна с $x_{n-1}$, а так как ее степень не меньше двух, то она смежна еще хотя бы с одной вершиной, скажем, $y$. Если $y$ была бы отлична от всех вершин пути, то последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, y$ была бы простым путем большей длины. Следовательно, $y$ – это одна из вершин пути, $y = x_i$, причем $i < n-1$. Но тогда $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_i$ – цикл. □

## Связность и компоненты

Граф называется *связным*, если в нем для любых двух вершин имеется маршрут, соединяющий эти вершины. Заметим, что ввиду леммы 1 можно в этом определении заменить слово «маршрут» словами «простой путь».

Для произвольного графа определим на множестве вершин *отношение соединимости*: вершина $a$ соединима с вершиной $b$, если существует соединяющий их маршрут. Легко видеть, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности называются *областями связности*, а порождаемые ими подграфы – *компонентами связности* графа. В связном графе имеется только одна компонента связности – весь граф. Компоненты связности можно определить также как максимальные по включению связные подграфы данного графа.

Ребро, при удалении которого увеличивается число компонент связности, называется *перешейком*.

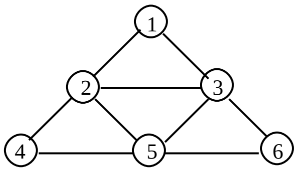
**Лемма 4.** *Ребро является перешейком в том и только том случае, если через него не проходит никакой цикл.*

**Доказательство.** Если через ребро $(a,b)$ проходит цикл, то после удаления этого ребра вершины $a$ и $b$ останутся соединимыми, значит, число компонент связности не увеличится. Обратно, если после удаления ребра $(a,b)$ число компонент связности не увеличивается, то вершины $a$ и $b$ останутся в одной компоненте, то есть существует соединяющий их маршрут, не проходящий через это ребро. По лемме 1 в нем имеется простой путь $x_1$, $x_2,\ldots,x_n$, соединяющий $a$ и $b$, но тогда $x_1$, $x_2,\ldots,x_n$, $x_1$– цикл, проходящий через $(a,b)$. □

## Эйлеровы циклы

Первая теорема теории графов была доказана задолго до того, как стало употребляться словосочетание «теория графов». В 1736 г. появилась работа Эйлера, в которой не только была решена предложенная ему задача о кенигсбергских мостах, но и сформулировано общее правило, позволяющее решить любую задачу такого рода. Интересно, что в одном из писем Эйлер писал по этому поводу: «...это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека...».

На языке теории графов задача состоит в том, чтобы определить, имеется ли в графе путь, проходящий через все его ребра (напомним, что путь, по определению, не может дважды проходить по одному ребру). Такой путь называется *эйлеровым путем*, а если он замкнут, то *эйлеровым циклом*. Граф, в котором есть эйлеров цикл, называют *эйлеровым графом*. В графе, изображенном на рисунке 10а, эйлеров цикл существует, – например, последовательность вершин 1,2,4,5,2,3,5,6,3,1 образует такой цикл. В графе же на рисунке 10б эйлерова цикла нет, но есть эйлеровы пути, например, 2,4,5,2,1,3,5,6,3.



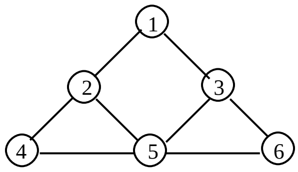




Рис. 10

Рассмотрим сначала условия существования эйлерова цикла в обыкновенном графе. Ясно, что в несвязном графе эйлеров цикл может существовать только в том случае, когда все его ребра принадлежат одной компоненте связности, а все остальные компоненты – просто изолированные вершины. Поэтому достаточно рассматривать связные графы.

**Теорема 3.** С*вязный граф эйлеров тогда и только тогда, когда в нем степени всех вершин четны.*

**Доказательство.** Необходимость условия очевидна, так как при каждом прохождении цикла через какую-либо вершину используются два ребра – по одному из них маршрут входит в вершину, по другому выходит (это относится и к стартовой вершине – в нее ведь придется вернуться). Докажем его достаточность.

Пусть $G$ – связный граф, в котором больше одной вершины и степени всех вершин четны. Значит, степень каждой вершины не меньше 2 и, по лемме 3, в графе $G$ имеется цикл $Z_1$. Если удалить все ребра этого цикла из графа $G$, то получится граф $G_1$, в котором степени вершин также четны. Если в $G_1$ нет ни одного ребра, то $Z_1$ – эйлеров цикл. В противном случае, применяя ту же лемму 3 к графу, полученному из $G_1$ удалением всех изолированных вершин, заключаем, что в $G_1$ имеется цикл $Z_2$. Удалив из $G_1$ все ребра цикла $Z_2$, получим граф $G_2$. Продолжая действовать таким образом, пока не придем к пустому графу, получим в итоге систему циклов $Z_1,\dots,Z_k$, причем каждое ребро графа принадлежит в точности одному из них. Покажем теперь, что из этих циклов можно составить один цикл. Действительно, из того, что исходный граф связен, следует, что хотя бы один из циклов $Z_1,\dots,Z_{k-1}$ имеет общую вершину с $Z_k$. Допустим, для определенности, что таков цикл $Z_{k-1}$. Пусть $Z_k = x_1,x_2,\dots,x_p$, $Z_{k-1} = y_1,y_2,\dots,y_q$, и $x_i = y_j$ для некоторых $i$ и $j$. Тогда последовательность вершин

$$Z'_{k-1} = x_1,x_2,\dots,x_i,y_{j+1},y_{j+2},\dots,y_q,y_2,\dots,y_j,x_{i+1},\dots,x_p$$

очевидно, является циклом, а множество ребер этого цикла есть объединение множеств ребер циклов $Z_{k-1}$ и $Z_k$. Таким образом, получаем систему из меньшего числа циклов, по-прежнему обладающую тем свойством, что каждое ребро графа принадлежит в точности одному из них. Понятно, что продолжая действовать таким образом, в конце концов получим один цикл, который и будет эйлеровым. □

Теперь нетрудно получить и критерий существования эйлерова пути.

**Теорема 4.** *Эйлеров путь в связном графе существует тогда и только тогда, когда в нем имеется не более двух вершин с нечетными степенями.*

**Доказательство.** Если в графе нет вершин с нечетными степенями, то, по предыдущей теореме, в нем имеется эйлеров цикл, он является и эйлеровым путем. Не может быть точно одной вершины с нечетной степенью – это следует из «леммы о рукопожатиях». Если же имеются точно две вершины с нечетными степенями, то построим новый граф, добавив ребро, соединяющее эти вершины. В новом графе степени всех вершин четны и, следовательно, существует эйлеров цикл. Так как циклический сдвиг цикла – тоже цикл, то существует и такой эйлеров цикл, в котором добавленное ребро – последнее. Удалив из этого цикла последнюю вершину, получим эйлеров путь в исходном графе. □

## Метрические характеристики графов

*Расстоянием* между двумя вершинами графа называется длина кратчайшего пути, соединяющего эти вершины. Расстояние между вершинами $a$ и $b$ обозначается через $d(a,b)$. Если в графе нет пути, соединяющего $a$ и $b$, то есть эти вершины принадлежат разным компонентам связности, то расстояние между ними считается бесконечным. Легко видеть, что функция $d(x,y)$ обладает свойствами:

1) $d(x,y) \geq 0$, причем $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $d(x,y) = d(y,x)$;
3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (неравенство треугольника).

В математике функцию двух переменных, определенную на некотором множестве и удовлетворяющую условиям 1)–3), называют *метрикой*, а множество, на котором задана метрика – *метрическим пространством*. Таким образом, множество вершин любого графа можно рассматривать как метрическое пространство.

Расстояние от данной вершины $a$ до наиболее удаленной от нее вершины называется *эксцентриситетом* вершины $a$ и обозначается через $e(a)$. Таким образом,

$$e(a) = \max_{x \in VG} d(a, x).$$

Вершину с наименьшим эксцентриситетом называют *центральной*, а вершину с наибольшим – *периферийной*. Множество всех центральных вершин называется *центром* графа. Сама величина наименьшего эксцентриситета называется *радиусом* графа и обозначается через $rad(G)$, а величина наибольшего – *диаметром* и обозначается $diam(G)$. Иначе говоря,

$$rad(G) = \min_{x \in VG} \max_{y \in VG} d(x, y),$$

$$diam(G) = \max_{x \in VG} \max_{y \in VG} d(x, y).$$

Наименьший диаметр имеет полный граф – его диаметр равен 1. Среди связных графов с $n$ вершинами наибольший диаметр, равный $n-1$, имеет цепь $P_n$.

Если расстояние между двумя вершинами равно диаметру графа, то кратчайший путь, соединяющий эти вершины, называется *диаметральным путем*, а подграф, образованный вершинами и ребрами этого пути, – *диаметральной цепью*.

Для графа, изображенного на рисунке 11, эксцентриситеты вершин приведены в таблице:

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *e (x)* | 5 | 4 | 4 | 3 | 5 | 3 | 3 | 4 | 5 |

Центр этого графа составляют вершины 4, 6, 7; периферийные вершины – 1, 5 и 9; радиус его равен 3, а диаметр 5. Одна из диаметральных цепей порождается множеством вершин {1,3,6,7,8,9}.

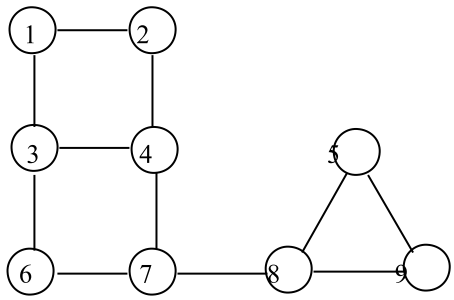



Рис.11

## 3. Деревья

Определение и элементарные свойства

*Деревом* называется связный граф, не имеющий циклов. В графе без циклов, таким образом, каждая компонента связности является деревом. Такой граф называют *лесом*.

Рассмотрим некоторые свойства деревьев. Отметим сначала, что в дереве всякий путь – простой, так как в пути, не являющимся простым, обязательно содержится цикл.

**Лемма 5.** *В дереве для любых двух вершин существует единственный соединяющий их простой путь.*

**Доказательство.** Существование пути следует из связности дерева. Допустим, что в некотором дереве существуют два различных простых пути, соединяющих вершины $a$ и $b$. Начальные отрезки этих путей совпадают (оба пути начинаются в одной и той же вершине $a$). Пусть $x$ – последняя вершина этого совпадающего начала, а после $x$ в одном пути следует вершина $y_1$, а в другом – $y_2$. Рассмотрим ребро $(x, y_1)$. Если его удалить из графа, то в оставшемся подграфе вершины $y_1$ и $x$ будут соединимыми – соединяющий их маршрут можно построить так: взять отрезок первого пути от $y_1$ до $a$ и к нему присоединить отрезок второго от $x$ до $a$, взятый в обратном порядке. Но это означает, что ребро $(x, y_1)$ не является перешейком. Однако из леммы 4 следует, что в дереве каждое ребро является перешейком. □

Из леммы 5 следует, что во всяком дереве, в котором не меньше двух вершин, имеется вершина степени 1. Такие вершины называют *висячими вершинами*, или *листьями*. В действительности легко доказать, что в каждом дереве не меньше двух листьев, а цепь $P_n$ – пример дерева, в котором точно два листа.

**Теорема 5.** *В любом дереве с* $n$ *вершинами имеется ровно* $n-1$ *ребро.*

**Доказательство.** Индукция по числу вершин. При $n = 1$ утверждение очевидно. При $n \geq 2$ в дереве имеется хотя бы один лист. Если из дерева удалить лист, то снова получится дерево, так как циклов не появится, а связность сохранится. В этом новом дереве $n-1$ вершина и, по предположению индукции, $n-2$ ребра. Следовательно, в исходном дереве было $n-1$ ребро. □

Если к дереву добавить новое ребро, то, поскольку вершины, соединяемые этим ребром, уже были соединены путем, образуется цикл. Таким образом, деревья – это графы, экстремальные по обоим свойствам из их определения: с одной стороны, это минимальные связные графы (при удалении любого ребра нарушается связность), с другой – максимальные графы без циклов (при добавлении любого нового ребра появляется цикл).

### Центр дерева

Центр графа может состоять из одной вершины (как, например, в графе $K_{1,q}$), а может включать все его вершины (полный граф). Для дерева, как мы увидим, имеется гораздо более ограниченный диапазон возможностей.

**Лемма 6.** *В дереве для каждой вершины $a$ имеется не более одной смежной с ней вершины $b$ такой, что $e(b) \le e(a)$.*

**Доказательство.** Пусть $x$ – вершина, наиболее удаленная от $a$, то есть $e(a) = d(a,x)$. Единственный путь из $a$ в $x$ проходит через одну из вершин, смежных с $a$, пусть это вершина $b$. Если $c$ – другая вершина, смежная с $a$, то единственный путь из $c$ в $x$ проходит через $b$ и его длина на единицу больше длины пути из $a$ в $x$. Следовательно, $e(c) \ge d(c,x) > d(a,x) = e(a)$. □

**Теорема 6.** *Центр дерева состоит из одной вершины или двух смежных вершин.*

**Доказательство.** Допустим, что в некотором дереве существуют две несмежные центральные вершины $a$ и $b$. Рассмотрим путь, соединяющий эти вершины, и найдем на этом пути промежуточную вершину $x$ с максимальным эксцентриситетом. Так как $a$ и $b$ – вершины с наименьшим эксцентриситетом в дереве, то эксцентриситет $x$ также не меньше эксцентриситета этих вершин. Но тогда оказывается, что $e(x)$ не меньше эксцентриситетов двух смежных с ней вершин – предшествующей ей и следующей за ней на пути, а это противоречит лемме 6. Следовательно, любые две центральные вершины смежны, а так как в дереве не может быть трех попарно смежных вершин, то в нем не больше двух центральных вершин. □

## 4. Двудольные графы

Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно так разбить на два подмножества, чтобы концы каждого ребра принадлежали разным подмножествам. Эти подмножества называются *долями*. Таким образом, каждая из долей порождает пустой подграф. Примером двудольного графа является простая цепь $P_n$ при любом $n$: одна доля порождается вершинами с четными номерами, другая – с нечетными. Граф $K_3$ – пример графа, не являющегося двудольным: при любом разбиении множества его вершин на два подмножества в одном из этих подмножеств окажутся две смежных вершины.

**Теорема 7 (теорема Кенига).** *Следующие утверждения для графа $G$ равносильны*:

(1) $G$ – *двудольный граф*;

(2) *в $G$ нет циклов нечетной длины*;

(3) *в $G$ нет простых циклов нечетной длины*.

**Доказательство.** (1)$\Rightarrow$(2). Пусть $G$ – двудольный граф, в котором выбрано некоторое разбиение на доли, $C = x_1, x_2, \dots, x_k, x_1$ – цикл длины $k$ в графе $G$. При любом $i = 1, \dots, k-1$ вершины $x_i$ и $x_{i+1}$ смежны и, следовательно, принадлежат разным долям. Таким образом, одна доля состоит из всех вершин с нечетными индексами, т.е. $x_1, x_3, \dots$ , другая – из всех вершин с четными индексами. Но вершины $x_k$ и $x_1$ тоже смежны и должны принадлежать разным долям. Следовательно, $k$ – четное число.

Импликация (2)$\Rightarrow$(3) очевидна, докажем (3)$\Rightarrow$(1). Рассмотрим граф $G$, в котором нет простых циклов нечетной длины. Ясно, что граф, в котором каждая компонента связности – двудольный граф, сам двудольный. Поэтому можно считать, что граф $G$ связен. Зафиксируем в нем некоторую вершину $a$ и докажем, что для любых двух смежных между собой вершин $x$ и $y$ имеет место равенство $|d(a,x) - d(a,y)| = 1$. Действительно, допустим, что $d(a,x) = d(a,y) = t$. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_t$ – кратчайший путь из $a$ в $x$, $y_1, y_2, \dots, y_t$ – кратчайший путь из $a$ в $y$. Эти пути начинаются в одной вершине: $x_1 = y_1 = a$, а оканчиваются в разных: $x_t = x$, $y_t = y$. Поэтому найдется такое $k$, что $x_k = y_k$ и $x_i \neq y_i$ при всех $i > k$. Но тогда последовательность $x_k, x_{k+1}, \dots, x_t, y_t, \dots, y_{k+1}, y_k$ является простым циклом длины $2(t-k)+1$. Следовательно, $d(a,x) \neq d(a,y)$. Предположим, что $d(a,x) < d(a,y)$. Если $x_1, x_2, \dots, x_t$ – кратчайший путь из $a$ в $x$, то, очевидно, $x_1, x_2, \dots, x_t, y$ – кратчайший путь из $a$ в $y$, следовательно, $d(a,y) = d(a,x) + 1$. Итак, расстояния от двух смежных вершин до вершины $a$ различаются ровно не единицу. Поэтому, если обозначить через $A$ множество всех вершин графа, расстояние от которых до вершины $a$ четно, а через $B$ множество всех вершин с нечетными расстояниями до $a$, то для каждого ребра графа один из его концов принадлежит множеству $A$, другой – множеству $B$. Следовательно, граф $G$ –двудольный. ☐

Пусть $C$ – цикл в графе $G$. Множество вершин цикла $C$ порождает в $G$ подграф, который содержит все ребра этого цикла, но может содержать и ребра, ему не принадлежащие. Такие ребра называют *хордами* цикла $C$. Простой цикл, не имеющий хорд, – это порожденный подграф, изоморфный простому циклу, будем его коротко называть *порожденным простым циклом*. В графе, изображенном на рисунке 12, хордами цикла 4,1,2,6,5,4 являются ребра (1,5), (1,6) и (2,5), а цикл 2,3,7,6,2 – порожденный простой цикл. Заметим, что любой цикл длины 3 является порожденным простым циклом.

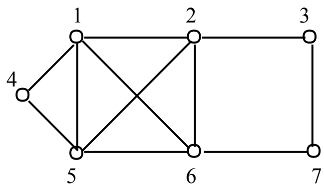



Рис. 12

Пусть $C$ – простой цикл длины $k$ в некотором графе, $(x,y)$ – хорда этого цикла. Ребро $(x,y)$ вместе с ребрами цикла $C$ образует два цикла меньшей длины, $C_1$ и $C_2$ (см. рисунок 13), сумма длин которых равна $k+2$.

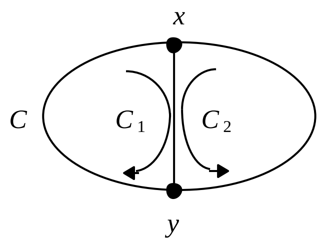



Рис. 13.

Значит, если $C$ – цикл нечетной длины, то один из циклов $C_1$, $C_2$ тоже имеет нечетную длину. Отсюда следует, что в графе, в котором есть цикл нечетной длины, имеется и порожденный простой цикл нечетной длины. Поэтому критерий двудольности справедлив и в следующей формулировке.

**Следствие.** *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нем нет порожденных простых циклов нечетной длины.*

## 6. Планарные графы

*Геометрический граф* – это плоская фигура, состоящая из вершин – точек плоскости и ребер – линий, соединяющих некоторые пары вершин. Всякий граф можно многими способами представить геометрическим графом и мы уже не раз пользовались этой возможностью. На рисунке 14 показаны два геометрических графа $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, представляющих, как нетрудно проверить, один и тот же обыкновенный граф. Простое устройство этого графа, очевидное на левом изображении, не так легко обнаружить, рассматривая правое.

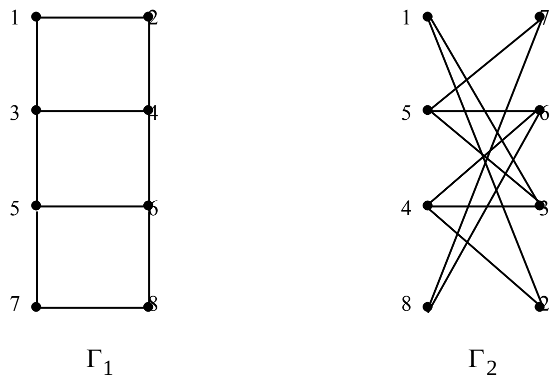



Рис. 14

Главная причина этого – в том, что в $\Gamma_1$ ребра не имеют «лишних» пересечений. Геометрический граф, в котором никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины, называют *плоским графом*, а по отношению к представляемому им обыкновенному графу – его *плоской укладкой*. Не каждый граф допускает плоскую укладку. Граф, для которого существует плоская укладка, называется *планарным графом*. Кроме удобства визуального анализа, есть немало поводов, в том числе и сугубо практических, для интереса к планарным графам и их плоским укладкам.

Если плоскость разрезать по ребрам плоского графа, она распадется на связные части, которые называют *гранями*. Всегда имеется одна неограниченная *внешняя* грань, все остальные грани называются *внутренними*. Если в плоском

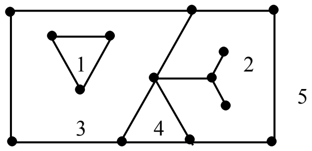



Рис. 15

графе нет циклов, то у него имеется только одна грань. Если же циклы есть, то граница каждой грани содержит цикл, но не обязательно является циклом. На рисунке 15 показан плоский граф с пятью занумерованными гранями. Граница грани с номером 3 состоит из двух циклов, а граница грани с номером 2 кроме цикла длины 5 включает еще дерево из трех ребер. Множества ребер, образующие границы граней, могут быть разными для разных плоских укладок одного и того же графа. На рисунке 16 показаны две плоские укладки одного графа. В левой есть две грани, границы которых являются простыми циклами длины 5, в правой же таких нет, но есть грани, ограниченные циклами длины 4

Рис. 16

и 6. Однако число граней, как показывает следующая теорема, не зависит от укладки, т.е. является инвариантом планарного графа.

**Теорема 8 (формула Эйлера).** *Количество граней в любой плоской укладке планарного графа, имеющего* $n$ *вершин,* $m$ *ребер и* $k$ *компонент связности, равно* $m - n + k + 1$.

**Доказательство.** Докажем сначала утверждение теоремы при $k = 1$. Рассмотрим связный плоский граф $G$. Если в нем нет циклов, то имеется единственная грань, а $m = n - 1$, и формула верна. Если же есть хотя бы один цикл, то возьмем какое-нибудь ребро $e$, принадлежащее простому циклу $C$. Это ребро принадлежит границе двух граней, одна из которых целиком лежит внутри цикла $C$, другая – снаружи. Если удалить ребро $e$ из графа, эти две грани сольются в одну. Граф $G_1$, полученный из графа $G$ удалением ребра $e$, очевидно, будет плоским и связным, в нем на одно ребро и на одну грань меньше, чем в $G$, а число вершин осталось прежним. Если в $G_1$ еще есть циклы, то, удалив еще одно цикловое ребро, получим граф $G_2$. Будем продолжать удаление цикловых ребер до тех пор, пока не получится связный плоский граф $G_r$ без циклов, т.е. дерево. У него $n-1$ ребро и единственная грань. Значит, всего было удалено $r = m - n + 1$ ребер, а так как при удалении каждого ребра число граней уменьшалось на единицу, то в исходном графе было $m - n + 2$ грани. Таким образом, формула верна для любого связного плоского графа. Если граф не связен, то в компоненте связности, имеющей $n_i$ вершин и $m_i$ ребер, по доказанному, будет $m_i - n_i + 1$ внутренняя грань. Суммируя по всем компонентам и прибавляя 1 для учета внешней грани, убеждаемся в справедливости формулы в общем случае. □

**Следствие 1.** *Если в планарном графе* $n$ *вершин,* $n \geq 3$, *и* $m$ *ребер, то* $m \leq 3(n-2)$.

**Доказательство.** Если в графе нет циклов, то $m = n - k$ и неравенство выполняется при $n \geq 3$. Рассмотрим плоский граф $G$ с $r$ гранями, в котором имеются циклы. Занумеруем грани числами от 1 до $r$ и обозначим через $a_i$ количество ребер, принадлежащих грани с номером $i$. Так как граница каждой грани содержит цикл, то $a_i \geq 3$ для каждого $i$, следовательно, $\sum_{i=1}^{r} a_i \geq 3r$. С другой стороны, каждое ребро принадлежит границе не более чем двух граней, поэтому $\sum_{i=1}^{r} a_i \leq 2m$. Из этих двух неравенств следует, что $3r \leq 2m$. Применяя формулу Эйлера, получаем $m \leq 3n - 3k - 3 \leq 3n - 6$. □

Следствие 1 дает необходимое условие планарности, которое в некоторых случаях позволяет установить, что граф не является планарным. Рассмотрим, например, полный граф $K_5$. У него $n = 5$, $m = 10$ и мы видим, что неравенство из следствия 1 не выполняется. Значит, этот граф не планарен. В то же время существуют графы, не являющиеся планарными, для которых неравенство следствия 1 выполняется. Пример – полный двудольный граф $K_{3,3}$. У него 6 вершин и 9 ребер. Неравенство выполняется, но мы сейчас установим, что он не планарен. Заметим, что в этом графе нет циклов длины 3 (так как он двудольный, в нем вообще нет циклов нечетной длины). Поэтому граница каждой грани содержит не менее четырех ребер. Повторяя рассуждения из доказательства следствия 1, но используя неравенство $a_i \geq 4$ вместо $a_i \geq 3$, получаем следующий результат.

**Следствие 2.** *Если в планарном графе* $n$ *вершин,* $n \geq 3$*,* $m$ *ребер и нет циклов длины* 3*, то* $m \leq 2(n-2)$.

Для графа $K_{3,3}$ неравенство следствия 2 не выполняется, это доказывает, что он не планарен.

Известно несколько критериев планарности, сформулируем без доказательства один из них. Операция *подразбиения ребра* $(a,b)$ состоит в выполнении следующих действий:

- ребро $(a,b)$ удаляется из графа;
- добавляется новая вершина $c$;
- добавляются ребра $(a,c)$ и $(b,c)$.

Два графа называют *гомеоморфными,* если из них с помощью подразбиения ребер можно получить изоморфные графы. На рисунке 17 изображены гомеоморфные графы.

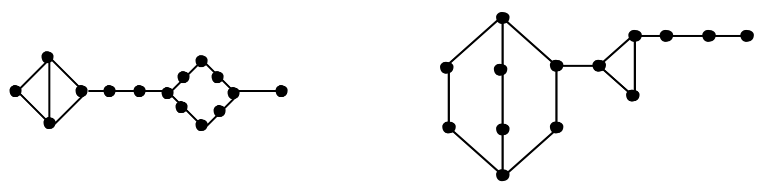


Рис.17

**Теорема 9 (теорема Понтрягина–Куратовского).** *Граф планарен тогда и только тогда, когда у него нет подграфов, гомеоморфных* $K_5$ *или* $K_{3,3}$.

## 7. Экстремальные задачи на графах

### Независимые множества, клики, вершинные покрытия

*Независимым множеством* вершин графа называется любое множество попарно не смежных вершин, т.е. множество вершин, порождающее пустой подграф. Независимое множество называется *максимальным*, если оно не является собственным подмножеством другого независимого множества, и *наибольшим*, если содержит наибольшее количество вершин. Число вершин в наибольшем независимом множестве графа $G$ обозначается через $\alpha(G)$ и называется *числом независимости* графа. Задача о независимом множестве состоит в нахождении наибольшего независимого множества .

*Кликой* графа называется множество вершин, порождающее полный подграф, т.е. множество вершин, каждые две из которых смежны. Число вершин в клике наибольшего размера называется *кликовым числом* графа и обозначается через $k(G)$. Очевидно, задача о независимом множестве трансформируется в задачу о клике и наоборот простым переходом от данного графа $G$ к дополнительному графу $\overline{G}$, так что $\alpha(G) = k(\overline{G})$.

*Вершинное покрытие* графа – это такое множество вершин, что каждое ребро графа инцидентно хотя бы одной из этих вершин. Наименьшее число вершин в вершинном покрытии графа $G$ обозначается через $\beta(G)$ и называется *числом вершинного покрытия* графа. В графе на рисунке 18 наибольшим независимым множеством является множество $\{1,2,5,7\}$, наибольшей кликой – множество $\{3,4,5,6\}$, наименьшим вершинным покрытием – множество $\{3,4,6\}$.

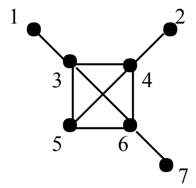



Рис. 18

Между задачами о независимом множестве и о вершинном покрытии тоже имеется простая связь благодаря следующему легко устанавливаемому факту.

**Теорема 10.** *Подмножество $U$ множества вершин графа $G$ является вершинным покрытием тогда и только тогда, когда $VG - U$ – независимое множество.*

В частности, отсюда следует, что $\alpha(G) + \beta(G) = n$ для любого графа $G$ с $n$ вершинами.

Таким образом, все три задачи тесно связаны друг с другом. Далее рассмотрим задачу о независимом множестве.

Пусть $G$ – граф, в котором требуется найти наибольшее независимое множество. Выберем в нем произвольную вершину $a$ и пусть $A$ – множество всех вершин графа, смежных с $a$, $B$ – множество всех вершин, не смежных с $a$. Обозначим через $G_1$ подграф, получающийся удалением из графа $G$ вершины $a$, а через $G_2$ подграф, получающийся удалением из $G$ всех вершин множества $A \cup \{a\}$. Иначе говоря, $G_1$ – подграф графа $G$, порожденный множеством $A \cup B$, а $G_2$ – подграф, порожденный множеством $B$ (см. рисунок 19).

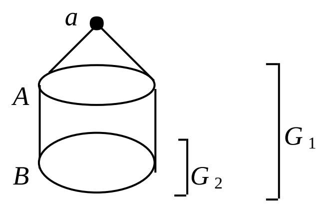



Рис. 19

Пусть $X$ – какое-нибудь независимое множество графа $G$. Если оно не содержит вершину $a$, то оно является независимым множеством графа $G_1$, если же $a \in X$, то множество $X - \{a\}$ является независимым множеством графа $G_2$. Таким образом, задача о независимом множестве для графа $G$ свелась к решению той же задачи для двух графов меньшего размера. Это приводит к рекуррентному уравнению для числа независимости:

$$\alpha(G) = \max\{\alpha(G_1), \alpha(G_2) + 1\}$$

и к рекурсивному алгоритму для нахождения наибольшего независимого множества графа $G$: найдем наибольшее независимое множество $X_1$ графа $G_1$, затем наибольшее независимое множество $X_2$ графа $G_2$ и выберем большее из множеств $X_1$ и $X_2 \cup \{a\}$. В целом процесс решения задачи можно при этом интерпретировать как исчерпывающий поиск в возникающем дереве подзадач, т.е. подграфов. Каждой вершине этого дерева соответствует некоторый граф, сыновьям вершины – два подграфа этого графа, корню – исходный граф. Листьям дерева соответствуют графы, для которых задача решается непосредственно, без сведения к подзадачам. В простейшем случае это могут быть графы с пустым множеством вершин, но при этом количество листьев будет максимальным. Можно доводить разложение на подзадачи до графов с пустым множеством ребер, при этом листьев в дереве станет меньше, но потребуется для каждого встречающегося графа проверять наличие в нем ребер. Число листьев зависит от того, в каком порядке рассматриваются вершины графа, но оно во всяком случае не меньше, чем число максимальных независимых множеств у графа, так как каждое из этих множеств будет соответствовать некоторому листу. Так, для графа $pK_2$, т.е. графа, состоящего из $p$ компонент связности, каждая из которых изоморфна графу $K_2$, в дереве подзадач будет в лучшем случае $2^p$ листьев.

## Паросочетания

*Паросочетанием* в графе называется множество ребер, попарно не имеющих общих вершин. Задача о паросочетании состоит в том, чтобы в данном графе найти паросочетание с наибольшим числом ребер. Это число для графа $G$ будем обозначать через $\pi(G)$. *Реберным покрытием* графа называется такое множество ребер, что всякая вершина графа инцидентна хотя бы одному из этих ребер. Наименьшее число ребер в реберном покрытии графа $G$ обозначим через $\rho(G)$. Заметим, что реберное покрытие существует только для графов без изолированных вершин.

Определение паросочетания похоже на определение независимого множества вершин, паросочетание иногда так и называют – независимое множество ребер. Эта аналогия усиливается еще тесной связью между реберными покрытиями и паросочетаниями, подобно тому, как связаны между собой вершинные покрытия и независимые множества. Даже равенство, количественно выражающее эту связь, имеет точно такой же вид (напомним, что числа независимости $\alpha(G)$ и вершинного покрытия $\beta(G)$ связаны равенством $\alpha(G)+\beta(G)=n$). Приведем доказательство этого факта, так как оно имеет алгоритмическое значение – показывает, как каждая из двух задач сводится к другой.

**Теорема 11.** *Для любого графа* $G$ *с* $n$ *вершинами, не имеющего изолированных вершин, справедливо равенство* $\pi(G)+\rho(G)=n$.

**Доказательство.** Пусть $M$ – наибольшее паросочетание в графе $G$. Обозначим через $W$ множество всех вершин графа, не покрытых ребрами этого паросочетания. Тогда $|W|=n-2\pi(G)$. Очевидно, $W$ – независимое множество (иначе $M$ не было бы наибольшим). Выберем для каждой вершины из $M$ какое-нибудь инцидентное ей ребро. Пусть $F$ – множество всех выбранных ребер. Тогда $M\cup F$ – реберное покрытие и $|M\cup F|=n-\pi(G)$, следовательно, $\rho(G)\le n-\pi(G)$.

Обратно, пусть $C$ – наименьшее реберное покрытие графа $G$. Рассмотрим подграф $H$ графа $G$, образованный ребрами этого покрытия. В графе $H$ один из концов каждого ребра является вершиной степени 1 (ребро, каждая вершина которого инцидентна по крайней мере еще одному ребру, можно было бы удалить из $C$, оставшиеся ребра по-прежнему покрывали бы все вершины). Отсюда следует, что каждая компонента связности графа $H$ является звездой (звезда – это дерево, у которого не более одной вершины степени больше 1). Так как в любом лесе сумма количеств ребер и компонент связности равна числу вершин, то число компонент связности в графе $H$ равно $n-\rho(G)$. Выбрав по одному ребру из каждой компоненты, получим паросочетание. Отсюда следует, что $\pi(G)\ge n-\rho(G)$. □

Пусть $G$ – граф, $M$ – некоторое паросочетание в нем. Ребра паросочетания будем называть *сильными,* остальные ребра графа – *слабыми*. Вершину назовем *насыщенной,* если она инцидентна какому-либо ребру паросочетания, в противном случае *ненасыщенной*,. На рисунке 20 слева показан граф и в нем выделены ребра паросочетания $M=\{(2,3),(4,5),(7,8)\}$. Вершины 1 и 5 – ненасыщенные. Заметим, что к этому паросочетанию нельзя добавить ни одного ребра, т.е. оно максимальное. Однако оно не является наибольшим. В этом легко убедиться, если рассмотреть путь 5,6,8,9,10,7,3,4 (показан пунктиром). Он начинается и оканчивается в ненасыщенных вершинах, а вдоль пути чередуются сильные и слабые ребра. Если на этом пути превратить каждое сильное ребро в слабое, а каждое слабое – в сильное, то получится новое паросочетание, показанное на рисунке справа, в котором на одно ребро больше. Увеличение паросочетания с помощью подобных преобразований – в этом и состоит суть метода чередующихся цепей.

Рис.20

Сформулируем необходимые понятия и докажем теорему, лежащую в основе этого метода чередующихся цепей. *Чередующейся цепью* относительно данного паросочетания называется простой путь, в котором чередуются сильные и слабые ребра (т.е. за сильным ребром следует слабое, за слабым – сильное). Чередующаяся цепь называется *увеличивающей*, если она соединяет две ненасыщенные вершины. Если $M$ – паросочетание, $P$ – увеличивающая цепь относительно $M$, то легко видеть, что $M \otimes P$ – тоже паросочетание и $|M \otimes P| = |M| + 1$.

**Теорема 12.** *Паросочетание является наибольшим тогда и только тогда, когда относительно него нет увеличивающих цепей.*

**Доказательство.** Если есть увеличивающая цепь, то, поступая так, как в рассмотренном примере, т.е. заменяя вдоль этой цепи сильные ребра на слабые и наоборот, мы, очевидно, получим большее паросочетание. Для доказательства обратного утверждения рассмотрим паросочетание $M$ в графе $G$ и предположим, что $M$ не наибольшее. Покажем, что тогда имеется увеличивающая цепь относительно $M$. Пусть $M'$ – другое паросочетание и $|M'| > |M|$. Рассмотрим подграф $H$ графа $G$, образованный теми ребрами, которые входят в одно и только в одно из паросочетаний $M, M'$. Иначе говоря, множеством ребер графа $H$ является симметрическая разность $M \otimes M'$. В графе $H$ каждая вершина инцидентна не более чем двум ребрам (одному из $M$ и одному из $M'$), т.е. имеет степень не более двух. В таком графе каждая компонента связности – путь или цикл. В каждом из этих путей и циклов чередуются ребра из $M$ и $M'$. Так как $|M'| > |M|$, то имеется компонента, в которой ребер из $M'$ содержится больше, чем ребер из $M$. Это может быть только путь, у которого оба концевых ребра принадлежат $M'$. Легко видеть, что относительно $M$ этот путь будет увеличивающей цепью. □

Для решения задачи о паросочетании остается научиться находить увеличивающие цепи или убеждаться, что таких нет. Тогда, начиная с любого паросочетания (можно и с пустого множества ребер), можем строить паросочетания со все увеличивающимся количеством ребер до тех пор, пока не получим такое, относительно которого нет увеличивающих цепей. Оно и будет

наибольшим. Известны эффективные алгоритмы, которые ищут увеличивающие цепи для произвольных графов, но они достаточно сложны. Рассмотрим более простой алгоритм, решающий эту задачу для двудольных графов.
Пусть $G = (A, B, E)$ – двудольный граф, $M$ – паросочетание в $G$, $X$ и $Y$ – множества ненасыщенных вершин соответственно в долях $A$ и $B$. Всякая увеличивающая цепь, если такая имеется, соединяет вершину из $A$ с вершиной из $B$. Ориентируем ребра графа $G$ следующим образом: всякое слабое ребро в направлении от $A$ к $B$, а всякое сильное – в направлении от $B$ к $A$. Полученный орграф обозначим через $\vec{G}$. Очевидно, что увеличивающая цепь в графе $G$ существует тогда и только тогда, когда в графе $\vec{G}$ имеется ориентированный путь из какой-либо вершины $x \in X$ в какую-либо вершину $y \in Y$. Такой путь можно найти (или убедиться в его отсутствии) простым поиском в ширину.

## Оптимальные каркасы

Задача об оптимальном каркасе (стягивающем дереве) состоит в следующем. Дан обыкновенный граф $G = (V, E)$ и весовая функция на множестве ребер $w{:}V \to \mathbf{R}$. Вес множества $X \subseteq E$ определяется как сумма весов составляющих его ребер. Требуется в графе $G$ найти каркас максимального веса. Обычно рассматривают задачу на минимум, но это не существенно – она преобразуется в задачу на максимум, если заменить функцию $w$ на $-w$. В этом разделе будем предполагать, что граф $G$ связен, так что решением задачи всегда будет дерево.

Для решения задачи об оптимальном каркасе известно несколько жадных алгоритмов. Рассмотрим один из них, известный под названием *алгоритм Прима*. В этом алгоритме на каждом шаге рассматривается частичное решение задачи, представляющее дерево. Вначале это дерево состоит из единственной вершины, в качестве этой вершины может быть выбрана любая вершина графа. Затем к дереву последовательно добавляются ребра и вершины, пока не получится остовное дерево, т.е. каркас. Для того, чтобы из текущего дерева при добавлении нового ребра опять получилось дерево, это новое ребро должно соединять вершину дерева с вершиной, еще не принадлежащей дереву. Такие ребра будем называть *подходящими* относительно рассматриваемого дерева. «Жадность» алгоритма состоит в том, что на каждом шаге из всех подходящих ребер выбирается ребро наименьшего веса. Это ребро вместе с одно новой вершиной добавляется к дереву. Если обозначить через $U$ и $F$ множества вершин и ребер строящегося дерева, а через $W$ множество вершин, еще не вошедших в это дерево, то алгоритм Прима можно представить следующим образом.

**Алгоритм 1.** *Построение оптимального каркаса методом Прима*

1 $U := \{a\}$, где $a$ – произвольная вершина графа

2 $F := \varnothing$

```
    W := V − {a}
    while W ≠ ∅ do
        найти ребро наибольшего веса e = (x, y) среди всех таких
        ребер, у которых x ∈ U , y ∈ W
        F := F ∪ {e}
        U := U ∪ {y}
        W := W − {y}
```

Докажем, что алгоритм Прима на самом деле строит оптимальный каркас. Дерево $F$ назовем *фрагментом*, если оно является подграфом графа $G$ и существует такой оптимальный каркас $T_0$ графа $G$, что $F$ является подграфом графа $T_0$.

**Теорема 13.** *Если $F$ – фрагмент, $e$ – подходящее ребро наибольшего веса относительно $F$, то $F \cup \{e\}$ – фрагмент.*

**Доказательство.** Пусть $T_0$ – оптимальный каркас, содержащий $F$ в качестве подграфа. Если ребро $e$ принадлежит $T_0$, то $F \cup \{e\}$ – подграф $T_0$ и, следовательно, фрагмент. Допустим, $e$ не принадлежит $T_0$. Если добавить ребро $e$ к дереву $T_0$, то образуется цикл. В этом цикле есть еще хотя бы одно подходящее ребро относительно $F$ (никакой цикл, очевидно, не может содержать единственное подходящее ребро). Пусть $e'$ – такое ребро. Тогда подграф $T_0' = T_0 - e' + e$, получающийся из $T_0$ удалением ребра $e'$ и добавлением ребра $e$, тоже будет деревом. Так как $w(e') \le w(e)$, то $w(T_0') \ge w(T_0)$. Но $T_0$ – оптимальный каркас, следовательно, $w(T_0') = w(T_0)$ и $T_0'$ – тоже оптимальный каркас. Но $F \cup \{e\}$ является подграфом графа $T_0'$ и, следовательно, фрагментом. □

Дерево, состоящее из единственной вершины, очевидно, является фрагментом. Из теоремы 13 следует, что если после некоторого количества шагов алгоритма Прима дерево $F$ является фрагментом, то оно будет фрагментом и после следующего шага. Следовательно, и окончательное решение, полученное алгоритмом, будет фрагментом, т.е. оптимальным каркасом.