Министерство образования Российской Федерации

**Нижегородский государственный университет им.
Н.И. Лобачевского**

Факультет вычислительной математики и кибернетики

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по курсу "Математические основы информатики"
для студентов факультета ВМК
специальность 351400 "Прикладная информатика"

Часть 1

Н. Новгород - 2004

Методическое пособие по курсу "Математические основы информатики" для студентов факультета ВМК, специальность 351400 "Прикладная информатика" Часть 1 / Нижег.гос.ун-т, 2004, с.91.

В методическом пособии излагается материал по курсу лекций "Математические основы информатики", читаемых на факультета ВМК. Первая часть пособия включает материалы курса, связанные с основами теории множеств, бинарных отношений и алгебры высказываний.

Методическое пособие подготовлено д.т.н., профессором М.Х. Прилуцким.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА "МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НФОРМАТИКИ"

Специальность:
"Прикладная информатика" (351400)

Часть первая.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью курса является ознакомление студентов с фундаментальными понятиями, основными определениями и математическими методами информатики - фундаментальной естественной науки, изучающей процессы передачи и обработки информации. В процессе изучения данного курса студенты обучаются законам и методам обработки информации, вопросам построения математических моделей информационных систем для конкретных технических, экономических, социальных и физических систем, изучают линейные оптимизационные

модели, задачи дискретной оптимизации, теорию алгоритмов, автоматов, формальных языков, вопросы вычислительной сложности алгоритмов и задач.
Материалы данного курса будут использоваться в курсах "Прикладная информатика", "Теория вероятности и математическая статистика", "Модели и методы принятия решений", специальных курсах.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

(Вопросы, указанные в скобках являются дополнительными и могу быть пропущены)

МНОЖЕСТВА

Множества. Конечные и бесконечные множества. Способы задания множеств. Подмножества. Множество всех подмножеств данного множества. О числе k-элементных подмножеств n-элементного множества. Определение мощности множества всех подмножеств конечного множества (с использованием формулы бинома Ньютона). Универсальное множество. Алгебраические образования общей алгебры - понятие алгебры, (группоида, моноида, группы, кольца, тела. Примеры алгебраических образований.) Алгебра множеств. Понятия алгебраических и кардинальных операций. Алгебраические операции над множествами. Законы алгебры множеств. Двойственность в алгебре множеств. Уравнения и системы уравнений в алгебре множеств. Основные леммы, используемые при решении уравнений в алгебре множеств. Мощность множества. Понятие счетного множества и континуума. Канторовская диагональная процедура. Примеры счетных множеств. Доказательство счетности множества алгебраических чисел. Свойства счетных множеств.

Необходимые и достаточные условия бесконечности множества. Примеры континуальных множеств. Теорема Кантора-Бернштейна. Доказательство существования иррациональных и трансцендентных чисел. Кардинальные операции над множествами. Прямое произведение множеств. Проекция множеств.

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений. Представления бинарных отношений в виде матриц, орграфов, верхнего и нижнего сечений. Операции над бинарными отношениями. Выражение свойств бинарных отношений через задающие их множества. Отношения порядка. Упорядоченные множества. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Системы различных представителей. Лексикографическое отношение порядка. Мажоранта и миноранта множеств. Максимум и минимум множеств. Точные грани множеств. Понятие графика. Функциональные, инъективные графики. Инверсия графика. Соответствия. Функциональные, инъективные, всюду определенные, сюръективные и биективные соответствия. Общее понятие функции. Биективная функция.

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Высказывания. Операции над высказываниями. Формулы и функции алгебры логики. О числе функций алгебры логики от n переменных. Равносильные формулы. Законы алгебры логики. ДНФ и КНФ. Разложение функций алгебры логики по к переменным. СДНФ и СКНФ. (Логические следствия.) Проблема разрешимости в алгебре логики. Тавтологии и противоречия. (Основные схемы доказательств: если x то y, доказательство от противного, доказательство построением цепочки импликаций, доказательство разбором случаев.) Суперпозиция функций алгебры логики. Полные системы функций. Понятие базиса. Алгебра Жегалкина. Полином Жегалкина. Теорема Жегалкина. Замкнутые классы функций. Линейные функции. Монотонные функции. Теорема о монотонных функциях. Двойственность в алгебре высказываний. Самодвойственные функции. Функции сохраняющие константы 0, 1. Теорема Поста о функциональной полноте.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Множества. Бинарные отношения.
1.1. Понятие множества. Конечные и бесконечные множества. Способы задания множеств. Подмножества. Равенство множеств. Множество всех подмножеств конечного множества. Пустое и универсальное множество.
1.2. Операции над множествами.
1.3. Законы алгебры множеств. Уравнения и системы уравнений.
1.4. Бинарные отношения.
2. Алгебра логики.
2.1. Высказывания. Операции над высказываниями.
2.2. Формулы алгебры логики.
2.3. Истинностные таблицы для сложных высказываний.
2.4. ДНФ и КНФ. Приведение к ДНФ и КНФ.
2.5. СДНФ и СКНФ. Приведение к СДНФ и СКНФ.
2.6. Проверка полноты систем функций алгебры логики.

ЛИТЕРАТУРА (основная)

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, М.,"Наука",1988
2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженеров. М.:Энергоатомиздат,1988.

ЛИТЕРАТУРА (дополнительная)

1. Новиков П.С. Элементы математической логики.М.:Наука,1973.
2. Колмогоров А.Н. Фомин С.В. Введение в теорию функций и функциональный анализ. М.:Наука,1976.
3. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок.М.:Наука,1971.
4. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций. Гостехиздат.1948.

2. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

2.1. Множества. Конечные и бесконечные множества. Способы задания множеств.

Понятие множества нельзя определить через более общие понятия, так как таких понятий в математике нет. Понятие множества является настолько общим, что для него невозможно дать формальное определение. Интуитивно, под множеством понимается совокупность различных объектов, объединенных по какому-то одному или нескольким признаков. Объекты, составляющие множество, называются элементами. Тот факт, что объект x принадлежит множеству A, передается записью $x \in A$ (читается - "элемент x принадлежит множеству A").. Если x не является элементом A, то пишут $x \notin A$. Элементы множеств обычно обозначаются строчными латинскими буквами x, y, a, b, c ; множества часто обозначают прописными латинскими буквами A, B, C, X, Y.

Если множество содержит конечное число элементов, то говорят, что оно **конечно,** в противном случае множество называется **бесконечным.** Число элементов конечного множества A называется **мощностью** множества A и обозначается $|A|$. В дальнейшем мы будем различать общий (текущий) элемент x множества A, т.е. произвольный элемент, характеризующийся единственным свойством “принадлежать множеству A”, и конкретные элементы a, b, c каждый из которых отличен от других. Множество A, состоящее из элементов a,b,c,... записывается $A=\{a,b,c,...\}$.

Способы задания множеств.

1. Перечислением своих элементов.

$A=\{a,b,c,...\}$.

2. Через описание ограничительного свойства.

$A=\{x| \ P(x)\}$ - A множество таких элементов x, которые обладают свойством P(x).

В дальнейшем мы будем пользоваться общепринятыми обозначениями множеств:

N - множество натуральных чисел,

Z - множество целых чисел,

Q - множество рациональных чисел,

C - множество комплексных чисел,

R - множество действительных чисел,

$\varnothing$ - пустое множество.

2.2. Подмножества. Универсальное множество. Множество всех подмножеств данного множества.

Понятие подмножества возникает тогда, когда необходимо рассматривать некоторое множество не самостоятельно, а как часть другого, более широкого множества.

Множество B называется **подмножеством** множества A, если всякий элемент множества B является элементом множества A. Запись $B \subseteq A$ (не исключает, что B=A).

Определённое ранее пустое множество по определению является подмножеством любого множества.
По определению пустое множество является конечным.
По определению множество является подмножеством самого себя, $A \subseteq A$.
Таким образом, у каждого множества (кроме пустого) есть по крайней мере два подмножества - само множество и пустое.
Истинным, строгим или **собственным** подмножеством множества A называется такое его подмножество B, что $B \subseteq A$ и $B \neq A$. Запись $B \subset A$, где $\subset$ - знак строгого включения.
По отношению к множеству A - пустое множество и само множество A называется **несобственным, нестрогим** или **не истинным** подмножествами множества A.
Таким образом, мы имеем следующие свойства множеств:
1. $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \neq B$.
2. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \subset B$ или $A = B$.
3. $A \subset B \rightarrow A \subseteq B$.
4. $A \subset B \rightarrow A \neq B$.
5. $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.
6. $A \subset B$ и $B \subset C \rightarrow A \subset C$.
7. $A \subseteq B$ и $B \subset C \rightarrow A \subset C$.
Первые четыре свойства следуют из введенных ранее определений.
Покажем выполнение остальных свойств.
Свойство 5.
Докажем его методом от противного.
Пусть $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ но $A \not\subset C$ и $A \neq C$.
Тогда существует такой элемент $a \in A$, но $a \notin C$. Тогда, т.к. $B \subseteq C$, то $a \notin B$.
Получили противоречие: $a \in A$, $a \notin B$, но $A \subseteq B$.
Свойство 6.
Так как $A \subset B$ и $B \subset C$, то по свойству 3 $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ и по свойству 5 $A \subseteq C$. Осталось показать, что $A \neq C$. Пусть это не так и $A = C$. Т.е. для любого элемента a, $a \in A \rightarrow a \in C$. Так как $B \subset C$, то $B \neq C$ и найдется элемент в,$в \notin B$. , но $в \in C$. Так как $A \subset B$, то $в \notin A$. Отсюда элемент в присутствует в множестве

С, но отсутствует в множестве А, отсюда эти множества не равны.
Свойство 7.
Так как $B \subset C$, то по свойству 3 $B \subseteq C$ и тогда по свойству 5 $A \subseteq C$. Осталось показать, что $A \neq C$. Действительно, так как $B \subset C$, то найдется элемент a, $a \in C$, но $a \notin B$. Так как $A \subseteq B$, то $a \notin A$. Отсюда $a \in C$, но $a \notin A$, т.е. $A \neq C$.
Если все рассматриваемые в ходе рассуждений множества являются подмножествами некоторого фиксированного множество J, то это множество называют универсальным (для рассматриваемого набора множеств) множеством или **универсом.** Таким образом, универс - это такое множество, что любое рассматриваемое множество является его подмножеством.
Рассмотрим множество A={a,b,c}. Найдем все его различные подмножества. Это: пустое множество $\varnothing$, три одноэлементных подмножества {a}, {b}, {c}, три двухэлементных подмножества {a,b}, {a,c}, {b,c} и одно трёхэлементное множества - само множество A. Множество всех подмножеств множества A будем обозначать как P(A) или 2^{A}.

2.3. О числе k-элементных подмножеств n - элементного множества.

Обозначим через C_n^k - число различных k-элементных подмножеств n-элементного множества.
Теорема.
C_n^k=n!/k!(n-k)!, если $k \leq n$.
Прежде чем доказывать теорему, покажем выполнение следующей **леммы**:
C_n^{k+1}(k+1)= C_n^k(n-k).
Доказательство.
Пусть M={a(1),a(2),...,a(n)}- произвольное n-элементное множество. Перепишем все k-элементные подмножества

этого множества. Их согласно нашим обозначениям C_n^k.
Рассмотрим таблицу 1.

1	{...}	{...,.},{...,.},...,{...,.}
2	{...}	{...,.},{...,.},...,{...,.}
. . .	• • •	• • •
C_n^k	{...}	{...,.},{...,.},...,{...,.}

Здесь слева (во втором столбце) перечислены все k-элементные подмножества n-элементного множества M. Справа (в третьем столбце) приведены k+1 элементные подмножества множества M, которые строятся следующим образом: берется k-элементное множество из соответствующего левого столбца и к нему добавляется элемент из множества M, которого нет в соответствующем k-элементном множестве из левого столбца. Очевидно, что в каждой строке будет по (n-k) (k+1)-элементных множеств, отсюда всех k+1-элементных множеств в правой части таблицы будет (n-k) C_n^k. Лемма будет доказана, если мы покажем, что в правой части таблицы находятся все k+1 - элементные подмножества множества M (их по нашим обозначениям C_n^{k+1}) и каждое из них встречается ровно k+1 раз.

Покажем, что в правой части таблицы есть все k+1 - элементные подмножества множества M. Действительно, рассмотрим произвольное k+1 элементное подмножество множества M, которое обозначим через A={a'(1), a'(2),...,a'(k),a(k+1)}. Обозначим через B={a'(1),a'(2),...,a'(k)} k-элементныое подмножество. По построению это множество есть среди множеств правой части таблицы, т.к. в правой части таблицы присутствуют все k-элементные подмножества множества M. Так как элемент a'(k+1) $\in$M, то при построении k+1 - элементных

множеств в правой части таблицы этот элемент будет обязательно добавлен к множеству B, а тем самым в правой части таблицы будет построено множество A.
Покажем, что в правой части таблицы каждое k+1 -элементное множество присутствует ровно k+1 раз. Действительно, пусть A={a'(1), a'(2),...,a'(k),a(k+1)} - произвольное k+1элементное множество. Рассмотрим совокупность из k+1 его k -элементных подмножеств: C(s), s=1,2,...,k+1, где C(s) - k-элементное множество, которое получается из множества A удалением из него элемента a'(s). Все k-элементные множества C(s) встречаются в левой части таблицы. Пометим строки таблицы, соответствующие этим множествам. Этих строк будет k+1.
Покажем, что в каждой непомеченной строке в правой части нет множества A, а в каждой помеченной строке в правой части присутствует лишь одно множество A.
Если бы в правой части непомеченной строки присутствовало множество A, то это бы означало, что в левой части этой строки было бы одно из множеств C(s), т.е. строка была бы помечена.
Возьмем произвольную помеченную строка, соответствующую множеству C(s). Тогда при построении k+1- элементных множеств в этой строке мы должны были включить в строящееся множество и элемент a'(s), тем самым построить множество A.
Лемма доказана.
Доказательство теоремы.
Теорему будем доказывать индукцией по k. Базис индукции k=0. Имеем C_n^k=n!/n!0!=1, что верно, так как 0-элементное множество лишь одно, а именно пустое множество $\varnothing$.
Пусть утверждение теоремы верно для любого k, 0≤k≤n-1. Покажем, что теорема верна и для k+1.
Действительно,
C_n^{k+1}=(n-k)n!/(k+1)(n-k)k!=n!/(k+1)!(n-k-1)!,
что доказывает теорему.

2.4. Определение мощности множества всех подмножеств конечного множества (с использованием формулы бинома Ньютона).

Пусть А произвольное конечное n- элементное множество. Найдем мощность множества P(A), $|P(A)|= \sum_{i \in S} C_n^i$, где $S=\{0,1,...,n\}$.

Для определения величины |P(A)| воспользуемся формулой бинома Ньютона.

$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$, при условиях, что а=в=1.

Получаем, $2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i$ =|P(A)|.

Замечание.

Множество 2^A называется **булеаном** множества А.

2.5. Понятия алгебраических и кардинальных операций. Алгебраические операции над множествами. Покрытие и разбиение множества.

Алгебраическими операциями называют такие, при выполнении которых результирующее множество либо пусто, либо состоит из элементов, из которых состоят и множества, подвергающиеся операциям.

Кардинальными операциями называют такие операции, при выполнении которых появляются новые элементы.

Основными алгебраическими операциями над множествами являются следующие:

- пересечение множеств,
- объединение множеств.
-разность множеств.

Пусть А и В - произвольные множества. Их **пересечением** называется множество

$A \cap B=\{x|\ x \in A$ и $x \in B\}$.

Объединением множеств А и В называется множество $A \cup B=\{x|x \in A$ или $x \in B\}$.

Разностью множеств A и B называется множество $A\setminus B=\{x|x\in A$, но $x\notin B\}$.

Используя понятие универса, можно ввести еще две операции над множествами - дополнение и симметрическую разность множеств.

Дополнением множества A (до универса J) называется множество $\overline{A}=J\setminus A$, т.е. $\overline{A}=\{x|\ x\in J$, но $x\notin A\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Если $A\cap B=\varnothing$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.

Если X - некоторое множество и $X=A\cup B\cup\ldots\cup C$, то множества A,B,...,C образуют **покрытие** множества X. Если при этом все множества A,B,...,C попарно не пересекаются, то система множеств A,B,...,C называется **разбиением множества** X.

2.6. Поэлементное доказательство теоретико-множественных равенств.

Пусть A и B некоторые множества. Для того, чтобы проверить являются ли они равными, необходимо установить два соответствия : $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$.

Для установления соответствия $A\subseteq B$ необходимо показать, что текущий (т.е. произвольный) элемент множества A принадлежит множеству B. Такое доказательство называется поэлементным.

Покажем, например, справедливость утверждения:

$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Пусть $N=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, $M=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Надо показать, что $N\subseteq M$ и $M\subseteq N$.

Покажем, что $N\subseteq M$.

Пусть $x\in N$, т.е. $x\in(A\cup B)$, но $x\notin(A\cap B)$.

Если $x\notin A$ и $x\in(A\cup B)$, то $x\in B$, а отсюда $x\in B\setminus A$.

Если $x\notin B$ и $x\in(A\cup B)$, то $x\in A$, а отсюда $x\in A\setminus B$.

Получили, что всегда x принадлежит либо (A\B) либо (B\A), т.е. $x \in M$.
Покажем, что $M \subseteq N$.
Пусть $x \in M$, т.е. $x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A$.
Если $x \in A \setminus B$, то $x \in A$ и тем самым $x \in A \cup B$.
Так как $x \notin B$, то $x \notin A \cap B$, а тем самым $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) = N$.
Аналогично доказывается и для случая $x \in B \setminus A$.

2.7. Алгебраические образования общей алгебры - понятие алгебры, группоида, полугруппы, группы, кольца, тела. Примеры алгебраических образований. Алгебра множеств. Законы алгебры множеств. Двойственность в алгебре множеств.

В основе понятий общей алгебры лежит понятие *алгебраической операции.* В самом широком смысле понимания n-местной или n-арной алгебраической операцией мы будем называть *закон, по которому некоторым упорядоченным n-кам элементов некоторого множества M, ставятся в соответствие элементы того же множества M, - один или несколько.* Целое, неотрицательное число n - называется *арностью* операции.

В дальнейшем n-арная алгебраическая операция будет пониматься, как правило, в более узком смысле - закон должен быть определен для любой упорядоченной n-ки элементов и должен быть однозначен.

Универсальной алгеброй (в дальнейшем просто алгеброй) называется упорядоченная пара множеств $A=(M, \Omega)$. Множество M называется *основным* или *несущим* множеством или просто *носителем* алгебры, а множество Ω - множество алгебраических операций, заданных на множестве M - называется *сигнатурой* алгебры. Набор арностей алгебраических операций из Ω называется *типом* алгебры.

Множество S, $S \subseteq M$, называется *замкнутым* относительно n-арной алгебраической операции φ, если значения операции φ на элементах из S принадлежат S.

Если множество S замкнуто относительно всех операций сигнатуры алгебры A=(M, Ω), то совокупность A'=(S, Ω) называется *подалгеброй* алгебры A.

Алгебра Г=(M, Ω), где Ω={φ}, т.е. содержит лишь одну алгебраическую операцию, которая является бинарной, называется *группоидом*.

Будем говорить, что для бинарной алгебраической операции φ выполняется закон *ассоциативности*, если для любых элементов a,b и c из множества M выполняется:

$(a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c)$.

Группоид P=(M, Ω), для бинарной операции которого выполняется закон ассоциативности, называется *полугруппой* или *моноидом*.

Будем говорить, что бинарная алгебраическая операция φ допускает обратную операцию φ^{-1}, если для любых элементов a и b из множества M, каждое из уравнений

$a\varphi x=b$, $y\varphi a=b$

обладает решением, притом единственным.

Полугруппа G=(M,Ω),, в которой выполнимы обратные операции называется *группой*.

В общем случае решения x и y не обязаны совпадать, так как для произвольной алгебраической операции результат ее выполнения может зависеть от порядка следования элементов.

Будем говорить, что для бинарной алгебраической операции φ выполняется закон *коммутативности*, если для любых элементов a и b из множества M выполняется:

$a\varphi b=b\varphi a$.

Группа (полугруппа, группоид) G=(M, Ω), для бинарной операции которой выполняется закон коммутативности, назывется *коммутативной* или *абелевой* группой (полугруппой, группоидом).

Теорема о единице группы.

Всякая группа G=(M, Ω), Ω={φ}, обладает однозначно определяемым элементом e, $e\in M$, таким, что

$a\varphi e = e\varphi a=a$,

для всех элементов a, $a \in M$.

Доказательство.

Единственность решений каждого из уравнений $a\varphi x=b$, $y\varphi a=b$, позволяет производить в группе *левосторонние* и *правосторонние сокращения*: если $a\varphi b=a\varphi c$, или $b\varphi a=c\varphi a$, то $b=c$.

Из определения группы следует, что для любого элемента a, $a \in M$, существует такой элемент e'_a, что $a\varphi e'_a=a$, причем этот элемент e'_a однозначно определен и $e'_a \in M$ - это следует из того, что уравнение $a\varphi x=a$ имеет единственное решение, которое мы и обозначим через $x_0= e'_a$.. Для элементов множества M a,b, y, e'_a и e'_b, таких что $b \neq a$, $e'_a \neq e'_b$ и $y\varphi a=b$, ввиду выполнения для группы закона ассоциативности, имеем:

$b\varphi e'_a=(y\varphi a)\varphi e'_a=y\varphi(a\varphi e'_a)= y\varphi a=b= b\varphi e'_b$, т.е. $b\varphi e'_a= b\varphi e'_b$, а отсюда $e'_a= e'_b$. Таким образом, мы показали, что элемент e'_a не зависит от элемента a. Обозначим этот элемент e'. Таким образом, мы имеем $a\varphi e'=a$ для всех a, $a \in M$.

Аналогично для любого элемента b, $b \in M$, существует такой элемент e'_b, что $e'_b\varphi b=b$, причем этот элемент e'_b однозначно определен и $e'_b \in M$ - это следует из того, что уравнение $y\varphi b=b$ имеет единственное решение, которое мы и обозначим через $y_0= e'_b$. Продолжая доказательство легко показывается существование и единственность элемента e'', $e'' \in M$, такого, что $e''a=a$, для всех a, $a \in M$.

Окончательно получаем:

$e''\varphi e'= e''$ и $e''\varphi e'= e'$, отсюда $e''= e'=e$. Теорема доказана.

Элемент e существование и единственность которого доказаны в вышеприведенной теореме, называется *единицей* группы G и обозначается символом 1.

Теорема об обратных элементах группы.

Для всякого элемента a, $a \in M$, группы $G=(M, \Omega)$, существует такой однозначно определяемый элемент a^{-1}, что $a\varphi a^{-1}=a^{-1}\varphi a=1$.

Доказательство теоремы.

Из определения группы вытекает существование таких однозначно определенных элементов a' и a'', таких, что
$a\varphi a'=1$, $a''\varphi a=1$.
Применяя закон ассоциативности, получим:
$a''\varphi a\varphi a'=a''\varphi\ (a\varphi a')=a''\varphi 1=a''$,
$a''\varphi a\varphi a'=(a''\varphi\ a)\varphi a'=1\varphi a'=a'$,
отсюда $a'=a''$. Обозначим $a'=a''=a^{-1}$.
Мы имеем $a\varphi a'=\ a\varphi a^{-1}=1$, $a''\varphi a=a^{-1}\varphi a=1$, что и доказывает теорему.
Элемент a^{-1} называется обратным элементом для элемента a.
Рассмотрим две бинарные алгебраические операции: первую из них назовем *умножением* и будем обозначать ее через x, а вторую назовем *сложением* и будем обозначать ее через +. Использование операции x при определении группоида, полугруппы и группы предполагает их так называемое *мультипликативное* представление. Выше мы фактически пользовались таким мультипликативным представлением алгебраических образований.
Если при определении алгебраических образований пользоваться операцией вида +, то представление называется *аддитивным*. В этом случае единица группы называется *нулем,* и обозначается символом 0, а обратный элемент в группе называется *противоположным* элементом и обозначается через -a.

Примеры.

1.Аддитивная абелева группа целых чисел: G=(Z, {+}), где Z - множество целых чисел.
Для алгебры G выполняются условия:
G - группоид, так как сигнатура алгебры G содержит лишь одну бинарную операцию +;
группоид G является полугруппой, так как для целых чисел справедливо: (а+в)+с=а+(в+с), а тем самым операция + является ассоциативной;
полугруппа G является группой, т.к. для каждого элемента z, $z\in Z$, существует однозначно определяемый обратный (противоположный) элемент -z, $-z\in Z$;

группа G является абелевой (коммутативной), так как для любых двух элементов x и y, $x,y \in Z$, выполняется коммутативный закон: $x+y=y+x$.
2. Аддитивная абелева группа рациональных чисел.
3.Аддитивная полугруппа натуральных чисел: $G=(N, \{+\})$, где N - множество натуральных чисел.
Для алгебры G выполняются условия:
G - группоид, так как сигнатура алгебры G содержит лишь одну бинарную операцию +;
группоид G является полугруппой, так как для натуральных чисел справедливо: $(a+в)+c=a+(в+c)$, а тем самым операция + является ассоциативной;
полугруппа G не является группой, т.к. не для каждого элемента x, $x \in N$, существует противоположный элемент;
полугруппа G является абелевой (коммутативной), так как для любых двух элементов x и y, $x,y \in N$, выполняется коммутативный закон: $x+y=y+x$.
Алгебра $C=(M, \Omega)$, где $\Omega=\{+,x\}$, которая по бинарной алгебраической операции + (сложение) является абелевой (коммутативной) группой, а операция x (умножение) должна быть связана с операцией + законами *дистрибутивности:*
$a \text{ x } (в+c) = (a \text{ x } в) + (a \text{ x } c)$, $(a+в) \text{ x } c = (a \text{ x } c) + (в \text{ x } c)$, называется *кольцом*.
Таким образом, кольцо - это алгебра с двумя бинарными алгебраическими операциями, для которой одна операция (сложение) определяет *абелеву аддитивную группу кольца*, а другая операция (умножение) - определяет *мультипликативный группоид кольца*. Если операция умножения является ассоциативной, т.е. эта операция образует *мультипликативную полугруппу кольца*, то кольцо называется *ассоциативным*. Если операция умножения является коммутативной, то кольцо называется *коммутативным*.
Примеры.
1.Ассоциативно-коммутативное кольцо целых чисел.
$C=(Z, \{+,x\})$.

Для каждой операции выполняются законы ассоциативности и коммутативности. Для введенных операций выполняются законы дистрибутивности. Для любого элемента из Z по операции сложения существует обратный (противоположный) элемент.

2.Ассоциативное кольцо квадратных матриц порядка не меньше 2 с действительными элементами.

C=(M,Ω), где M - множество квадратных матриц порядка n, а сигнатура включает в себя две бинарные операции: сложение и умножение матриц.

3.Ассоциативно - коммутативное кольцо четных чисел.

C=(M, {+,x}), где M={0,2,-2,4,-4,....}.

Операция + образует аддитивную абелеву (коммутативную) группу, т.е. выполняются:

ассоциативный закон (а+в)+с=а+(в+с),

коммутативный закон а+в=в+а,

для каждого элемента из M существует обратный (противоположный) элемент,

роль единицы группы выполняет число 0.

Операция x образует мультипликативную полугруппу.

Для операции x выполняется ассоциативный закон:

(а x в) x с= а x (в x с)

Для операции x выполняется коммутативный закон: а x в = в x а.

Обратные элементы не существуют.

Для операций + и x выполняются дистрибутивные законы:

а x (в+с) = (а x в) + (а x с), (а+в) x с = (а x с) + (в x с).

Нетрудно показать, что никакое кольцо, основное (несущее) множество которого состоит не только из нуля, не может быть мультипликативной группой. (из-за отсутствия обратного элемента для 0 - действительно, если M={0,e,a...}, где e - единица группы, то из уравнения 0 x y = e следует, что e=0, но тогда a x e =0$\neq$a).

Если все отличные от нуля элементы несущего множества кольца образуют мультипликативную группу, то такое кольцо называется *телом*.

Если тело является коммутативным (абелевым) по операции умножения, то оно называется *полем*.

Примеры.

1.Поле рациональных чисел.

P=(Q,{+,x}).

По операции + алгебра P является аддитивной абелевой (коммутативной) ассоциативной группой.

По операции x алгебра P (без нуля в несущем множестве Q), является мультипликативной абелевой (коммутативной) ассоциативной группой.

Для операций + и x выполняются дистрибутивные законы.

2.Поле действительных чисел.

3. Поле комплексных чисел.

Пусть Σ - универсальное множество. Алгебра B=(M,Ω), где $M=2^{\Sigma}$, а $\Omega=\{\cup, \cap, \neg\}$, называется булевой алгеброй множеств или алгеброй множеств Кантора. Тип этой алгебры (2,2,1), так как операция дополнения $\neg$ является одинарной (унарной) операцией.

Законы алгебры множеств.

1. **Коммутативность.**

относительно операции объединения, относительно операции пересечения.

$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$

2. **Ассоциативность.**

относительно операции объединения, относительно операции пересечения.

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

3. **Дистрибутивность.**

пересечения относительно объединения, объединения относительно пересечения.

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

4. **Закон де Моргана**.

относительно объединения, относительно пересечения.

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

5. **Законы поглощения.**

относительно объединения, относительно пересечения.

$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$

$A\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup B$ $A\cap(\overline{A}\cup B)=A\cap B$

6. $A\cup A=A$ $A\cap A=A$
7. $A\cup\overline{A}=J$ $A\cap\overline{A}=\varnothing$
8. $A\cup\varnothing=A$ $A\cap J=A$
9. $A\cup J=J$ $A\cap\varnothing=\varnothing$

10. **Закон двойного отрицания.**

$\overline{\overline{A}}=A$

11. $A\oplus B=B\oplus A$
12. $A\backslash B = A\cap\overline{B}$
13. $A\oplus B=(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

Все эти законы могут быть доказаны с помощью поэлементной схемы доказательства.

Покажем, например, справедливость закона 12.

Пусть $N= A\backslash B$, $M= A\cap\overline{B}$.

Покажем, что $N\subseteq M$.

Пусть $x\in A\backslash B$, т.е. $x\in A$ и $x\notin B$. Так как $x\notin B$, то $x\in\overline{B}$. Отсюда $x\in A$ и $x\in\overline{B}$, т.е. $x\in A\cap\overline{B}=M$.

Покажем, что $M\subseteq N$.

Пусть $x\in M= A\cap\overline{B}$, т.е. $x\in A$ и $x\in\overline{B}$. Отсюда $x\in A$ и $x\notin B$, т.е. $x\in A\backslash B=N$.

Замечание.

Для сокращения записи в дальнейшем будем считать, что операция пересечение “сильнее” чем объединение, разность, симметрическая разность, поэтому, там где это возможно мы будем опускать скобки. Кроме того, иногда мы будем опускать знак операции пересечения (как в алгебре знак операции умножения). Так, например, запись ABC\B означает $(A\cap B\cap C)\backslash C$. Здесь кроме выше оговоренных правил применен закон ассоциативности, позволяющий опускать скобки при выполнении последовательности операций объединения или пересечения множеств.

Двойственность в алгебре множеств.

Операция объединения является двойственной к операции пересечения и наоборот, операция пересечения является двойственной к операции объединения. Операция дополнение является двойственной сама к себе (самодвойственной). Пустое множество является двойственным к универсальному множеству и наоборот, универсальное множество является двойственным к пустому множеству.

Если в формуле алгебры множеств F используются лишь операции из сигнатуры алгебры, а так же среди множеств могут присутствовать пустое и универсальное множества, то формула F*, получающаяся из формулы F заменой каждого символа на двойственный, называется формулой **двойственной** к F. Принцип двойственности в алгебре множеств заключается в том, что если справедливо тождество F=R, то справедливо и двойственное тождество F*=R*. Выполнимость принципа двойственности иллюстрируют вышеприведенные законы алгебры множеств.

2.8. Уравнения и системы уравнений в алгебре множеств.

Для формализации процесса решения уравнений и систем уравнений в алгебре множеств введем дополнительные определения.

Пусть J - универс и A(1),A(2),...,A(n) - заданные множества этого универса, X - неизвестное множество. Обозначим через F[A(1),A(2),...,A(n),X] и R[A(1),A(2),...,A(n),X] две формулы алгебры множеств. Множество X* называется **частным решением** уравнения

F[A(1),A(2),...,A(n),X] = R[A(1),A(2),...,A(n),X], (1)
если F[A(1),A(2),...,A(n),X*] и R[A(1),A(2),...,A(n),X*] определяют одно и то же множество.

Множество всех частных решений задает **общее решение** уравнения (1).

Путем преобразования (используя законы алгебры множеств и следующие из них результаты) уравнение (1) может быть преобразовано к виду:

$AX \cup B\overline{X} \cup C = \varnothing$. (2)

Пусть задана система уравнений в алгебре множеств. Путем эквивалентных преобразований система уравнений так же может быть преобразована к виду (2). Отсюда, для решения уравнения или системы уравнений в алгебре множеств, необходимо уметь находить общее решение уравнения типа (2).

2.9. Основные леммы, используемые при решении уравнений в алгебре множеств.

Для преобразования уравнений и систем уравнений в алгебре множеств к виду:

$AX \cup B\overline{X} \cup C = \varnothing$, (1)

а так же для нахождения общего решения уравнения (1), используются следующие результаты, получающиеся из законов алгебры множеств.

Лемма 1.

$A \subseteq B$ тогда и только тогда, если $A\overline{B} = \varnothing$.

Доказательство.

Покажем, что из $A \subseteq B$ следует $A\overline{B} = \varnothing$.

Доказательство от противного. Пусть $A \subseteq B$, но $A\overline{B} \neq \varnothing$. Отсюда существует такой элемент а, который одновременно принадлежит и множеству А и множеству $\overline{B}$. Это означает, что этот элемент а принадлежит множеству А и не принадлежит множеству В, что противоречит условию $A \subseteq B$.

Покажем, что из $A\overline{B} = \varnothing$ следует $A \subseteq B$.

Доказательство от противного. Пусть A$\overline{B}$=∅, но множество A не является подмножеством B. Тогда множество A содержит такой элемент a, которого нет в множестве B. Отсюда этот элемент принадлежит и множеству A и множеству $\overline{B}$, что противоречит условию A$\overline{B} \neq \varnothing$.
Лемма доказана.

Лемма 2.

A=B тогда и только тогда, если A⊕B=∅.
Доказательство.
Покажем, что из A=B следует A⊕B=∅.
Если A=B, то A$\overline{B}$=A$\overline{A}$=∅ и B$\overline{A}$=B$\overline{B}$= ∅, отсюда A⊕B=∅.
Покажем, что из A⊕B=∅ следует A=B.
Если A⊕B=∅, то это значит что A$\overline{B}$= ∅, т.е. по лемме 1 A⊆B, и B$\overline{A}$=∅, т.е. по лемме 1 B⊆A, Получили одновременно A⊆B и B⊆A, что соответствует A=B.
Лемма доказана.

Лемма 3.

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$=∅, тогда и только тогда, если A_i=∅, i=1,2,...,n.
Доказательство индукцией по n.

Лемма 4.

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$=J, тогда и только тогда, если A_i=J, i=1,2,...,n.
Доказательство следует из леммы 3 на основании принципа двойственности.
Полученные теоретические результаты позволяют находить общее решение уравнений и систем уравнений.
Рассмотрим уравнение

F[A(1),A(2),...,A(n),X] = R[A(1),A(2),...,A(n),X] (1)

относительно неизвестного множества X.
Из леммы 1 следует, что уравнение (1) эквивалентно уравнению

F[A(1),A(2),...,A(n),X] ⊕ R[A(1),A(2),...,A(n),X]= ∅. (2)

После преобразований (применив, если это надо, закон де Моргана и другие законы алгебры множеств; на основании ассоциативного и дистрибутивного законов раскрыв скобки и приведя подобные члены) уравнение (2) становится эквивалентным уравнению

$A X \cup B\overline{X} \cup C=\varnothing$, (3)

где А,В и С - некоторые множества, полученные в результате проведенных преобразований.

Из (3) по лемме 3 следует, что $AX=\varnothing$, $B\overline{X}=\varnothing$, $C=\varnothing$.

Из того, что $AX=\varnothing$ и $B\overline{X}=\varnothing$, по лемме 1 следует:

$B \subseteq X \subseteq \overline{A}$.

Отсюда, уравнение (3) эквивалентно условиям :

$B \subseteq X \subseteq \overline{A}$, $C=\varnothing$. (4)

Так как Х произвольное множество из универса, то из (3) следует, что условия :

$B \subseteq \overline{A}$, $C=\varnothing$ (5)

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы исходное уравнение (1) имело решение.

Вместо условий (5) можно пользоваться эквивалентными им (на основании лемм1 и 3) условиями :

$AB \cup C=\varnothing$. (6)

Мы получили, что любое множество Х* из универса, удовлетворяющее условиям (4), является частным решением уравнения (1).

Из условий (4) следует, что решение исходного уравнения (1) определяется следующим выражением:

$X^*= B \cup K\overline{A}$, (7)

где К - произвольное множество универса.

Таким образом, мы получили, что при любом К из универса выражение (7) представляет собой частное решение исходного уравнения (1), т.е. (7) определяет общее решение исходного уравнения (1). Из выражения (7) следует и оценка числа решений уравнения (1) $N=2^{|\overline{A}|}$. Проверим полученное решение. Так как Х* решение системы (1), то оно является и решением преобразованного уравнения (2). Подставив в уравнение (2) выражение для Х* из (7), получим:

$A(B \cup K\overline{A}) \cup B(\overline{B \cup K\overline{A}}) \cup C = AB \cup B(\overline{B}\,\overline{K\overline{A}}) \cup C = AB \cup C=\varnothing$.

Здесь последнее равенство следует из условий (6).

Замечание.
Так как система уравнений алгебры множеств может быть приведена на основании выше доказанных лемм к виду (3), то результаты, полученные для случая решения уравнения, справедливы и для случая решения системы уравнений.

2.10. Понятие счетного множества. Примеры счетных множеств. Свойства счетных множеств. Канторовская диагональная процедура.

Говоря, что множество бесконечно, мы имеем в виду, что из него можно взять элемент, два элемента и т.д., причем после каждого такого шага в этом множестве ещё останутся элементы.
“Простейшим” среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел.
Счетным множеством называется всякое множество, элементам которого можно поставить во взаимно однозначное соответствие множество натуральных чисел.
Отсюда, счетное множество - это бесконечное множество, элементы которого можно перенумеровать натуральными числами.
Примерами счетных множеств, кроме множества натуральных чисел, являются:
- множество целых чисел Z,
- множество всех четных положительных (отрицательных) чисел,
- множество натуральных степеней числа 2,
- множество рациональных чисел Q,
- множество алгебраических чисел и т.д.

Покажем, например, счетность множества алгебраических чисел.
Число **a** называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами.
Так как множество целых чисел счетно, то занумеруем их, например, следующим образом:

если целое число n неотрицательно,
то поставим ему в соответствие номер 2n+1, (1)
если целое число n отрицательное,
то поставим ему в соответствие номер 2|n|.
Каждому уравнению вида :
$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots, + a_n x^0 = 0$ (2)
поставим в соответствие натуральное число:
$N = 2^{\alpha_n} \times 3^{\alpha_{n-1}} \times \ldots \times p_{n+1}^{\alpha_0}$, где 2,3,...,p - простые числа, а α_i - номер целого числа a_i (коэффициента уравнения (1)), полученного после приведенной нумерации (1).
Таким образом можно перенумеровать все уравнения типа (2). Так как каждое уравнение (2) имеет не более n различных корней, то тем самым доказывается счетность множества алгебраических чисел.

Свойства счетных множеств.

Свойство 1.

Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Действительно, если А - счетное множество, то его элементы можно перенумеровать. Пусть В - подмножество множества А. Тогда, если среди элементов множества В есть элемент с наибольшим номером, то множество В является конечным, в противном случае множество В будет счетным.

Свойство 2.

Объединение любого конечного или счетного числа счетных множеств, есть счетное множество.

Для доказательства этого свойства используется так называемая **Канторовская диагональная процедура.**

Свойство 3.

Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Действительно, если А - бесконечное множество, то в нем есть хотя бы один элемент а. Внесем его в строящееся подмножество В, присвоив этому элементу номер 1. Так как А - бесконечное множество, то в нем после удаления элемента a, останутся элементы. Возьмем любой элемент, присвоим ему номер 2, удалим его из множества A и включим его в множество B, и т.д. Построенное таким образом множество B будет счетным.

2.11. Множества мощности континуум.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется **несчетным. Эквивалентными** называют два множества M и N, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Очевидно, что все счетные множества эквивалентны множеству натуральных чисел, а тем самым они все эквивалентны между собой.

Основным свойством бесконечных множеств является то, что всякое бесконечное множество эквивалентно своему истинному подмножеству.

Действительно, пусть M - бесконечное множество и A его счетное подмножество (существование множества A гарантирует свойство 3). Разобьем множество A на два счетных подмножества A' и A'', где A' - множество элементов из множества A с четными номерами элементов, а A'' - с нечетными номерами.

Рассмотрим **соотношение 1:**

$M= A\cup(M\backslash A)$.

Это соотношение верно, так как $A\cup(M\backslash A) = A\cup M\overline{A}=(A\cup M)(A\cup\overline{A})=A\cup M=M$.

Здесь используется дистрибутивный закон алгебры множеств и то, что $A\subseteq M$.

Рассмотрим **соотношение 2:**

$M\backslash A''= A'\cup(M\backslash A)$. Его справедливость следует, например, из следующих соотношений.

$A'\cup(M\backslash A)=A'\cup M\overline{A}=(A'\cup M)(A'\cup\overline{A})=M(A'\cup\overline{A})=A'\cup M\backslash A''= M\backslash A''$.

Из соотношений 1 и 2 следует, что их правые части эквивалентны, а тем самым доказывается эквивалентность множеств М и М\А’’, где М\А’’$\subset$М..

Теорема Кантора о существовании несчетных множеств.
Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.
Доказательство.
Пусть все действительные числа, заключенные в интервале от нуля до единицы, можно перенумеровать. Представим каждое такое действительное число в виде бесконечной десятичной дроби (дополнив, если это необходимо, их нулями). Покажем, что существует такое действительное число из интервала от нуля до единицы, которого нет среди перенумерованных чисел. Это число строится так:
$\beta = 0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$, где десятичный знак этого числа отличен от десятичного знака первого перенумерованного числа, сотый знак - отличается от сотого знака второго перенумерованного числа и т.д. Полученное противоречие и доказывает теорему.
Множество, эквивалентное множеству действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, называется **континуальным** множеством или множеством мощности **континуум.**
Итак, самыми “маленьким” из бесконечных множеств являются счетные множества. Более высокий “порядок” у бесконечных множеств составляют множества мощности континуум.
На вопрос о существовании множеств более высокого порядка отвечает следующая теорема, так же принадлежащая Кантору.

Теорема Кантора о существовании множеств мощности более континуума.
Пусть М - некоторое множество и Р (М) - булеан множества М. Тогда |Р(М)|>|М|.
Доказательство

Если множество М - конечно и |М|=n, то теорема верна, т.к. |Р(М)|= 2^n>n.

Очевидно, что для бесконечного множества М выполняется |Р(М)|$\geq$|М|, так как множество Р(М) содержит по крайней мере все одноэлементные подмножества из элементов множества М.

Покажем что |Р(М)|$\neq$|М|. Доказательство будем проводить от противного.

Пусть |М|=|Р(М)|, т.е. множества М и Р(М) эквивалентны, а это означает, что между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие. Установим такое соответствие:

Элементу **а** из множества М поставим во взаимно однозначное соответствие множество **А** - элементы булеана Р(М);

элементу **в** поставим во взаимно однозначное соответствие множество **В** (элемент множества (М));

элементу **с** - множество **С** и т.д.

Постоим следующее множество **Х** элементов из М:

для пары соответствующих членов (**а,А**) элемент **а** мы поместим в множество **Х** тогда и только тогда, если элемент **а** не принадлежит множеству **А,** и элемент **а** мы не поместим в множество **Х** , если **а** принадлежит множеству **А**; алогично, элемент **в** помещаем в множество **Х** , если этот элемент не принадлежит множеству **В** и не помещаем в множество **Х** , если этот элемент принадлежит множеству **В**; так по всем элементам множества **А.**

Так как множество **Х** будет состоять из элементов множества М, то это множество является элементом булеана множества М и ему, как и любому другому элементу из множества Р(М), должен взаимно однозначно соответствовать некоторый элемент **х** из множества М.

Покажем, что этого не может быть.

Действительно, если элемент **х** принадлежит соответствующему ему множеству **Х**, то этот элемент мы в множество **Х** включить не должны, если же элемент **х** не принадлежит множеству **Х,** то мы должны этот элемент включить в множество **X.** Полученное противоречие доказывает теорему.

2.12. Теорема Кантора-Бернштейна.

Пусть A и B произвольные множества. Если в множестве A есть подмножество A_1 эквивалентное множеству B, а в множестве B есть подмножество B_1 эквивалентное множеству A, то A и B эквивалентные множества.

Доказательство.

Не уменьшая общности будем считать, что $A_1 \subset$ A и $B_1 \subset$B, так как если A_1=A или B_1 =B, то теорема верна.

Так как A_1~B, а $B_1 \subset$B, то найдется множество $A_2 \subset A_1$, такое, что $B_1 \sim A_2$.

Так как B_1 ~A, а $A_1 \subset$A, то найдется множество $B_2 \sim A_1$. Получили, что A~$B_1 \sim A_2$, B~$A_1 \sim B_2$.

Продолжая аналогичные рассуждения, получим:

$A_k \sim A_{k+2}$, $A_{k+1} \sim A_{k+3}$, при этом $A_k \subset A_{k+1}$, k=1,2,... .

Отсюда следует, что

$$A_k \setminus A_{k+1} \sim A_{k+2} \setminus A_{k+3}. \qquad (1)$$

Обозначим через D =A$\cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$.

Тогда

A = D $\cup$ (A$\setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots$=

= D$\cup$ (A$\setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \ldots \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup (A_5 \setminus A_6) \ldots$.

$$A_1 = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots =$$

$$= D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup (A_5 \setminus A_6) \ldots \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots .$$

Из полученных выражений для А и A_1, а так же из условий (1) следует А ~ A_1, что и доказывает теорему.

2.13. Доказательство существования иррациональных и трансцендентных чисел.

Классификация чисел:

Действительные или **вещественные** числа включают в себя **рациональные** (разумные) и **иррациональные** числа.

Рациональные - это десятичные периодические дроби, представимые в виде несократимой дроби p\q, q>0, p и q - целые числа.

Иррациональные, это десятичные непериодические дроби, например, e, $\pi, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$, и т.д.

Алгебраические числа - это корни алгебраических уравнений

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots, + a_n x^0 = 0$

с рациональными (или целыми) коэффициентами.

Пусть R - множество действительных чисел,

Q - множество рациональных чисел,

J - множество иррациональных чисел,

A - множество алгебраических чисел,

T - множество неалгебраических (трансцендентных) чисел.

Тогда:

R=Q$\cup$J и из того, что множество R является континуальным, то тем самым доказывается существование иррациональных чисел, более того, множество иррациональные числа представляют собой континуальное множество, в то время как множество рациональных чисел (как это было показано ранее) счетно;

R=A$\cup$T и из того, что множество R является континуальным, то тем самым доказывается существование неалгебраических (трансцендентных) чисел, более того, множество трансцендентных числа представляют собой континуальное множество, в то время как множество алгебраических чисел (как это было показано ранее) счетно. Примерами трансцендентных чисел являются числа: e, $\pi, a^{\sqrt{b}}$ (число Эйлера) , где **a** -иррациональное число, а **в** - целое, **c=0,1234567891011**...(число Малера) и др.

2.14. Кардинальные операции над множествами. Прямое произведение множеств. Понятие вектора.

Кардинальными операциями называются такие операции, при применении которых в результирующем множестве появляются новые элементы.

Примером кардинальных операция является **прямое (декартово**) произведение множеств.

Прямым произведением множеств А и В называется множество

$A \times B=\{(a,b)|\ a \in A,\ b \in B\}$, т.е. множество тех и только тех пар, первая компонента которых принадлежит множеству А, а вторая В.

Через $A^2 = A \times A, \ldots, A^n = A \times A \times \ldots \times A$ - обозначают, соответственно, декартов квадрат и декартову n-ую степень множества А.

Определив прямое произведение множеств, мы фактически воспользовались понятием **вектора**. Понятие вектора, как и понятие множества, является неопределяемым. Еще одно название вектора (менее распространенное) - **кортеж**.

Элементы, образующие вектор называются **координатами** или **компонентами** вектора. Они нумеруются слева на право. Число координат называется **длиной** или **размерностью** вектора. В отличие от множества, координаты вектора могут повторяться, т.к. каждая из них имеет свое место.

Обозначение вектора **a**=($a_1, a_2, \ldots, a_n$), где a_i - i-ая компонента вектора **a**, i=1,2,...,n.

Два вектора **а**=($a_1, a_2, ..., a_n$) и **в**=($b_1, b_2, ..., b_m$) равны **(а=в)**, тогда и только тогда, если m=n и $a_i = b_i$, i=1,2,...,n.

Прямым произведением множеств $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ называется множество n- мерных векторов таких, i-ая компонента которых принадлежит i-ому множеству A_i.

Теорема о мощности множества n - мерных векторов.

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ - конечные множества мощностей $m_1, m_2, ..., m_n$, тогда $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$.

Доказательство теоремы проводится индукцией по n.

Следствием из теоремы является соотношение:

$|A^n| = |A|^n$.

2.15. Проекция множеств.

Введем еще одну операцию над множествами - операцию **проектирования.** В отличие от ранее введенных операций, она будет одноместной, т.е. применяется не к паре множеств, а к отдельно взятому множеству, причем, не к любому множеству, а лишь к множеству векторов одинаковой длины.

Проекцией вектора а на i-ую ось (pr_i **а**) называется i-ая компонента вектора **а**.

Проекцией вектора а на оси с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ называется k- мерный вектор

($pr_{i_1, i_2, ..., i_k}$ **а**)=($a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}$).

Если А - множество n-мерных векторов, то **проекцией множества А на i-ую** ось называется множество всех проекций векторов из множества А на i-тую ось:

$pr_i A = \{b | b = pr_i\, a, a \in A\}$.

Проекцией множества А на оси с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ называется множество проекций всех векторов множества А на оси с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$:

$$pr_{i_1,i_2,\dots,i_k} A = \{b | b = pr_{i_1,i_2,\dots,i_r} a \; a \in A\} \cdot$$

2.16. Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений.

Пару множеств **f**=(F,M) называют **отношением,** если существует такое натуральное число s, что F$\subseteq M^s$. Такое отношение называют **s- местным**. Если s=2, то такое отношение называют **бинарным** отношением. Таким образом, говорят, что на множестве M задано бинарное отношение, если задана пара множеств (F,M), где F$\subseteq M^2$. Если пара (а,в) $\in$F, то говорят, что **элемент а находится в отношении f с элементом в** и записывают а**f**в.

При s=1 получаем одноместное отношение - F является подмножеством множества M. Такое отношение называется **признаком** : элемент а обладает признаком **f** , если а$\in$F, F$\subseteq$M.

Бинарное отношение f^{-1}называется **обратным** к f, если аf^{-1}в тогда и только тогда, если в**f**а. Обозначается обратное отношение парой множеств f^{-1}=(F^{-1},M).

Бинарное отношение **f** называется **рефлексивным**, если для любого x$\in$M, (x,x) $\in$F.

Бинарное отношение называется **антирефлексивным**, если для всех x$\in$M, (x,x) $\notin$F.

Бинарное отношение называется **симметричным**, если из того, что (x,y) $\in$F следует, что (y,x) $\in$F.

Бинарное отношение называется **антисимметричным,** если из того, что (x,y) $\in$F и (y,x) $\in$F следует, что x=y.

Бинарное отношение называется **асимметричным,** если по крайней мере одно из соотношение (x,y) $\in$F или (y,x) $\in$F не выполняется.

Бинарное отношение называется **транзитивным,** если из того, что (x,y) $\in$F и (y,z) $\in$F, следует, что (x,z) $\in$F.

Бинарное отношение называется **связным,** если для всех x,y$\in$M либо (x,y) $\in$F либо (y,x) $\in$F.

2.17. Представления бинарных отношений в виде орграфов, матриц, верхнего и нижнего сечений.

Ориентированным графом (орграфом) называют пару множеств G=(V,A), где V- множество вершин, а A - множество (ориентированных) дуг, A$\subseteq V^2$. Из определения орграфа следует, что с его помощью можно наглядно представлять бинарные отношения, а отсюда бинарные отношения могут задаваться как и орграфы с помощью матриц смежности и матриц инцидентности.

Верхним сечением бинарного отношения f=(F,M) называется множество:

$R^+(x)=\{y|(y,x)\in F, y\in M\}$.

Нижним сечением бинарного отношения f=(F,M) называется множество:

$R^-(x)=\{y|(x,y)\in F, y\in M\}$

2.18. Операции над бинарными отношениями.

Пусть **f**=(F,M) и **r**=(R,M) - два произвольных бинарных отношения.

Объединением бинарных отношений f и **r** называется бинарное отношение:

f∪**r**=(F∪R, M), т.е. x(**f**∪**r**)y тогда и только тогда, если имеет место либо x**f**y или x**r**y.

Пересечением бинарных отношений f и **r** называется бинарное отношение :

fr=(F I R, M), т.е. x(**fr**)y тогда и только тогда, если имеет место одновременно и x**f**y и x**r**y.

Разностью бинарных отношений f и **r** называется бинарное отношение:

f\r=(F\R, M), т.е. x(**f\r**)y тогда и только тогда, если имеет место x**f**y и x**r'**y, где запись x**r'**y означает, что (x,y) $\notin$R.

Дополнением к бинарному отношению f называется бинарное отношение:

f'=(M^2 \F, M), т.е. x**f'**y тогда и только тогда, если (x,y) $\notin$F.

введенные операции над бинарными отношениями определяются через алгебраические операции над множествами. Так как бинарные отношения определяются как множества упорядоченных пар, то на них можно задавать и другие операции.

Произведением (композицией) бинарных отношений f и **r** называется бинарное отношение **f**$\circ$**r** =(F$\circ$R, M), которое определяется следующим образом:

x(**f**$\circ$**r**)y тогда и только тогда, если множество M содержит хотя бы один элемент z
такой, что имеет место x**f**z и z**r**y.

Симметрической частью бинарного отношения f называется бинарное отношение $f^{(c)} = f\, f^{-1}$.

Асимметрической частью бинарного отношения f называется бинарное отношение

$f^{(a)} = f \setminus f^{(c)}$.

2.19. Выражение свойств бинарных отношений через задающие их множества.

Назовем бинарное отношение **e** =(E,M) **единичным,** если E={(x,y)| x=y, x$\in$M}.

Необходимыми и достаточными условиями:

рефлексивности является E$\subseteq$F;

антирефлексивности являются EF=$\varnothing$;

симметричности является F=F^{-1};

антисимметричности является $F F^{-1} \subseteq E$;
асимметричности является $F F^{-1} = \varnothing$;
транзитивности является $F \circ F \subseteq F$;
связности является $M^2 \setminus E \subseteq F \cup F^{-1}$.

2.20. Отношения порядка. Упорядоченные множества.

Бинарное отношение **f**=(F,M) называется **отношением строгого порядка,** если оно антирефлексивно и транзитивно.

Бинарное отношение **f**=(F,M) называется **отношением нестрогого порядка,** если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Отношение строгого и нестрогого порядка называется отношением **порядка.**

Бинарное отношение порядка называется **совершенным,** если оно является связным.

Множество, для которого определено отношение порядка, называется **множеством, упорядоченным этим отношением.**

Если порядок, определенный на множестве, является совершенным, то множество называется **линейно упорядоченным** или **полностью упорядоченным множеством.**

Если порядок не является совершенным, то множество называется **частично упорядоченным.**

2. 21. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Системы различных представителей.

Бинарное отношение **f=**(F,M) называется **отношением эквивалентности,** если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
Пусть на множестве М задано отношение эквивалентности. Возьмем из М некоторый элемент **а** и образуем множество С(**а**) - состоящее из элемента **а** и всех эквивалентных ему элементов из М. Рассмотрим множество М\С(**а**). Если оно не пусто, то выберем из него любой элемент **в** и образуем множество С(**в**) - состоящее из элемента **в** и всех эквивалентных ему элементов из М и т.д. до тех пор, пока в оставшейся части множества М не останется ни одного элемента. Полученная система подмножеств является разбиением множества М и называется **системой классов эквивалентности по отношению к бинарному отношению f.** Мощность этой системы, т.е. количество классов эквивалентности, называется **индексом разбиения.**
Системой различных представителей некоторого отношения эквивалентности называется множество, содержащее по одному и только одному элементу из каждого класса эквивалентности.

2.22. Лексикографическое отношение порядка.

Пусть А - конечное множество, элементами которого являются символы (буквы, цифры, знаки препинания, знаки операций и т.д.). Множество А называется **алфавитом.** Элементы множества A^n - **слова** длины n в алфавите А. Множество всех слов в алфавите А это множество $A^* = A^1 \cup A^2 \cup \ldots \cup A^n \cup \ldots$. Зафиксируем порядок букв в алфавите А . Если буква **а** в алфавите А стоит раньше (в зафиксированном порядке) чем буква **в,** то этот факт будем обозначать **а** p **в.**
Пусть **c** и **d** два произвольных слова из множества A^*.

Будем говорить, что слово **c** предшествует слову **d,** обозначая этот факт **c**p **d,** тогда и только тогда, если имеет место один из двух следующих случаев:

<u>Случай 1</u>.

c=vae,

d=vвr, где **v -** некоторое (возможно пустое) слово, **a**p **в, e** и **r** -некоторые (возможно пустые) слова.

<u>Случай 2.</u>

d=ev, где **v -** некоторое непустое слово.

Такое бинарное отношение порядка p называется **лексикографическим упорядочиванием слов**, или **лексикографическим порядком**.

2.23. Мажоранта и миноранта множеств. Максимум и минимум множеств. Точные грани множеств.

Пусть A - множество, упорядоченное нестрогим порядком, т.е. на нем задано бинарное отношение **f=**(F,A), удовлетворяющее свойствам рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. Пусть M$\subseteq$A.

Элемент m’, m’$\in$A называется **мажорантой** множества M, если для любого элемента m, m$\in$M, имеет место m**f**m’.

Элемент m’, m’$\in$A называется **минорантой** множества M, если для любого элемента m, m$\in$M, имеет место m’**f**m.

Если при этом m’$\in$M, то мажоранта называется **максимумом** множества M, а миноранта называется **минимумом** множества M.

Если на множестве мажорант существует минимум, то он называется **точной верхней гранью множества** M и обозначается **supr** M.

Если на множестве минорант существует максимум, то он называется **точной нижней гранью множества** M и обозначается **inf** M.

Мажорант и минорант у множества может быть много, максимумов, минимумов и точных граней лишь по одному.

Если множество A упорядочено отношением строгого порядка, то у него и его подмножеств не существует ни максимумом, ни минимумов, ни точных граней.

2.24. Понятие графика. Функциональные, инъективные графики. Инверсия графика.

Графиком множества M называется множество F $\subseteq M^2$, т.е. график это множество пар.

Областью определения графика F называется множество $pr_1 F$, **областью значений** графика F называется множество $pr_2 F$.

График называется **функциональным**, если в нем нет пар с одинаковыми первыми и разными вторыми компонентами.

График называется **инъективным**, если в нем нет пар с разными первыми и одинаковыми вторыми компонентами.

График Q = F^{-1} называется **инверсией** графика F.

Для графиков (как для множеств пар элементов) применима операция композиции. Нетрудно показать, что композиция графиков сохраняет и функциональность и инъективность, а инверсия переводит функциональный график в инъективный, а инъективный график в функциональный.

2.25. Соответствия. Функциональные, инъективные, сюръективные и биективные соответствия. Общее понятие функции.

Соответствием называется тройка множеств :

G=(F,A,B), где F$\subseteq$A$\times$B, F - **график** соответствия, A - **область отправления** соответствия и B - **область прибытия** соответствия.

Говорят, что G - соответствие между множеством A и B.

$pr_1F \subseteq$A, pr_1F - **область определения** соответствия G,

$pr_2F \subseteq$B, pr_2F - **область значений** соответствия G/

Соответствие называется **функциональным,** если график соответствия функционален; **инъективным**, если график соответствия инъективен.

Соответствие называется **всюду определенным**, если pr_1F =A; соответствие называется **сюръективным**, если pr_2F =B.

Соответствие называется **биективным (биекцией или взаимно-однозначным соответствием),** если оно функционально, инъективно, всюду определено и сюръективно.

Соответствие называется **однородным,** если $pr_1F = pr_2F$.

Функцией называется функциональное соответствие. Если функция всюду определена (соответствие, определяющее функцию всюду определено), то её называют **отображением.**

Функция называется сюръективной, инъективной, однородной, если соответствие её определяющее обладает этими свойствами.

2.26. Высказывания. Операции над высказываниями.

Высказывание - это предложение, о котором можно говорить **истинно** оно или **ложно.** В дальнейшем под высказыванием мы будем понимать **переменную**, принимающую два значения: 1 (истина) или 0 (ложь). Такие высказывания будем называть **элементарными переменными высказываниями** и обозначать малыми латинскими буквами: x,y,z и т.д.

На множестве переменных высказываний можно задавать **операции**, основными из которых являются:

Одноместная операция **отрицание.**

Отрицанием высказывания x называется высказывание (обозначение $\bar{x}$), принимающее значение 1, если x=0 и 0, если x=1.

Операция **конъюнкция.**

Конъюнкцией высказываний x и y называется высказывание (обозначение x&y), принимающее значение 1, если x=y=1и значение 0 во всех остальных случаях.

Операция **дизъюнкция.**

Дизъюнкцией высказываний x и y (обозначение xVy), называется высказывание, принимающее значение 0, если x=y=0 и значение 1 во всех остальных случаях.

Алгеброй логики называется пара множеств **B=(P(**{0,1}**), {&,V, ¯})**, где **P(**{0,1}**) -** основное (несущее) множество - булеан множества {0,1}, а **{&,V, ¯} -** сигнатура (множество операций) алгебры.

2.27. Формулы и функции алгебры логики.

Высказывания, образованные из элементарных переменных высказываний путем применения операций алгебры логики, называются **сложными** высказываниями или **формулами** алгебры логики.

Если переменным, входящим в формулу задать определенные значения из множества {0,1**},** то и формула примет определенное значение из того же самого множества, отсюда, каждая формула алгебры логики определяет некоторую свою **функцию,** причем и аргументы и сама функция могут принимать лишь два значения 0 или 1.

Функцию $f\ (x) = f\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$, принимающую значения 0 или 1 и определенную на всевозможных n-мерных наборах из 0 и 1, называют **логической функцией** или **функцией алгебры логики** от n переменных.

Любую функцию алгебры логики от n переменных можно представить с помощью специальной таблицы (**таблицы**

истинности), в которой, для удобства, строки (их всего 2^n) располагаются в порядке возрастания двоичных чисел:

x_1	x_2	. . . . .	x_n	$f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$
0	**0**	. . . . .	**0**	$f(x)=f(0,0,\dots,0)$
0	**0**	. . . . .	**1**	$f(x)=f(0,0,\dots,1)$
...	**...**	. . . . .	**...**	. . . . .
1	**1**	. . . . .	**1**	$f(x)=f(1,1,\dots,1)$

Теорема о числе функций алгебры логики от n переменных.

Число всех функций алгебры логики от n переменных равно 2^{2^n}.

Из теоремы о числе функций алгебры логики следует, что всех функций алгебры логики от двух переменных 16. Рассмотрим эти функции.

x	**y**	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**

Здесь:

f_0=**0** - “константа 0”,

f_1=**x&y -** “конъюнкция” (x и y)

$f_2=\overline{x\to y}$ - “левая коимпликация” (не если x, то y).

f_3=**x -** “переменная x”

$f_4=\overline{y\to x}$ - “ правая коимпликация” (не если y, то x).

f_5=**y -** “переменная y”.

f_6=**x⊕y=($\bar{x}$ &y)V(x&$\bar{y}$)** - “сложение по модулю 2” (x плюс y по модулю 2).

f_7=**xVy -** “дизъюнкция” (x или y).

f_8= **x↓y=**$\overline{x}$ **&**$\overline{y}$ - “стрелка Пирса” (x стрелка y).

f_9**=x~y=** **(**$\overline{x}$ **Vy)&(xV**$\overline{y}$ **)** - “эквивалентность” (x эквивалентно y).

f_{10}=$\overline{y}$ - “отрицание “ (не y).

f_{11}=**y**$\rightarrow$ **x=**$\overline{y}$ **Vx** - “x правая импликация y, или y импликация x”

f_{12}=$\overline{x}$ **-** “отрицание**”** (не x).

f_{13}=**x**$\rightarrow$ **y=**$\overline{x}$ **Vy** **- “** импликация ” (если x, то y).

f_{14}=**x|y=**$\overline{x}$ **V**$\overline{y}$ - “ штрих Шеффера” (x штрих y).

f_{15}=1- “константа 1”.

2.27. Равносильные формулы. Законы алгебры логики.

Две формулы алгебры логики называются **равносильными,** если они принимают одинаковые значения при всех возможных значениях входящих в них переменных высказываний.

Законы алгебры логики.

1. Коммутативность

относительно конъюнкции

относительно дизъюнкции

x&y=y&x

xVy=yVx

2. Ассоциативность

относительно конъюнкции

относительно дизъюнкции

(x&y)&z=x&(y&z)

(xVy)Vz=xV(yVz)

3. Дистрибутивность
конъюнкции относительно дизъюнкции дизъюнкции относительно конъюнкции
$x\&(yVz)=(x\&y)V(x\&z)$
$xV(y\&z)=(xVy)\&(xVz)$

4. Закон де Моргана.
относительно конъюнкции относительно дизъюнкции

$\overline{xVy} = \overline{x} \& \overline{y}$

$\overline{x\&y} = \overline{x}\, V\, \overline{y}$

5. Законы поглощения
$xV(x\&y)=x$
$xV(\overline{x}\, Vy)=xVy$

6. Законы идемпотентности
относительно конъюнкции относительно дизъюнкции
$xVx=x$ **$x\&x=x$**

7. Законы противоречия
относительно конъюнкции относительно дизъюнкции
$x\&\overline{x}=0$ **$xV\overline{x}=1$**

8. Законы констант
$xV1=1$
$x\&1=x$
$x\&0=0$
$xV0=x$

Для удобства записей выражений в алгебре логике в дальнейшем мы будем придерживаться следующих правил:

- если над некоторым выражением стоит отрицание, то это выражение мы не будем заключать в скобки;
- знак & мы будем иногда опускать (как знак операции пересечения в алгебре множеств);
- будем считать, что знак & “сильнее”, чем знаки дизъюнкции, сложения по модулю 2, эквивалентности, импликации, стрелки Пирса и штриха Шеффера, тем самым мы будем где это возможно, опускать скобки;
- на основании закона ассоциативности мы будем опускать скобки при записи нескольких идущих подряд дизъюнкций и конъюнкций.

2.28. Дизъюнктивные и конъюктивные нормальные формы.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция переменных высказываний и (или) их отрицаний.
Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция переменных высказываний и (или) их отрицаний.

Обозначим $x^{\alpha}=\mathbf{x}$, если α =1 и $x^{\alpha}=\overline{x}$, если α =0.
Тогда
$K = x_{i_1}^{\alpha_{i1}} \& x_{i_2}^{\alpha_{i2}} \& \dots \& x_{i_n}^{\alpha_{in}}$ - элементарная конъюнкция,
$\Delta = x_{i_1}^{\alpha_{i1}} V\ x_{i_2}^{\alpha_{i2}} V \dots V\ x_{i_n}^{\alpha_{in}}$ - элементарная дизъюнкция.
Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) данной формулы называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.
Конъюктивной нормальной формой (КНФ) данной формулы называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.
Для того, чтобы построить по данной формуле алгебры логики равносильную ей ДНФ или КНФ необходимо

перейти в сигнатуру алгебры логики (выразить все операции через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание), воспользоваться законом де Моргана для того, чтобы отрицания стояли лишь над элементарными переменными высказываниями, раскрыть скобки (для построения ДНФ) или воспользоваться дистрибутивным законом (для построения КНФ).

2.29. Разложение функций алгебры логики по k переменным. СДНФ и СКНФ.

Представление функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \dots \& x_k^{\alpha_k} \& f(\alpha_1, \dots \alpha_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \qquad (*)$$

называется **разложением функции** $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **от n переменных по k переменным.**

Замечания.

1. x^{α} **=1** тогда и только тогда, если α **=1**.

2. $x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \dots \& x_k^{\alpha_k}$ **=1,** тогда и только тогда, если

$x_1 = \alpha_1, \dots, x_k = \alpha_k$.

Теорема о разложении функции алгебры логики по k переменным.

Всякую функцию алгебры логики $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных можно представить в виде (*).

Доказательство теоремы основано на том, что выбрав произвольный двоичный n- мерный набор из 0 и 1, можно показать, используя замечание 1, что левая и правая части выражения (*) совпадают.

Следствием из этой теоремы является

Теорема о представлении любой функции алгебры логики в сигнатуре алгебры логики.

Всякая функция алгебры логики может быть представлена в виде формулы, содержащей только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Совершенные нормальные формы.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

Определение 1.

Элементарная конъюнкция называется **правильной,** если в неё каждая переменная входит не более одного раза, включая её вхлждение и под знаком отрицания.

Определение 2.

Элементарная конъюнкция называется **полной** относительно переменных x,y,z ..., если в неё входит каждая из этих переменных не менее одного раза, включая и их вхождение под знаком отрицания.

Определение 3.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) относительно переменных x,y,z,... , называется дизъюнктивная нормальная форма, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все элементарные конъюнкции правильные и полные относительно переменных x,y,z,... .

Алгоритм построения СДНФ.

1. Преобразование исходной формулы в ДНФ.

<u>Шаг 1.</u>

Преобразовать исходную формулу к равносильному ей виду, в котором есть лишь операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (перейти в сигнатуру алгебры логики), причем отрицания могут стоять лишь над элементарными переменными высказываниями.

<u>Шаг 2.</u>

Преобразовать полученную формулу к равносильному ей виду, в котором все конъюнкции выполняются раньше, чем дизъюнкции (раскрыть скобки), т.е. построить ДНФ для исходной формулы.

2.Преобразование ДНФ в СДНФ.

Шаг 3.

Если в ДНФ есть несколько одинаковых элементарных конъюнкций, то оставляем только одну - это преобразование приводит к равносильной формуле ,т.к. **xVx=x.**

Шаг 4.

Делаем все элементарные конъюнкции правильными с помощью следующих двух преобразований:

- если в элементарной конъюнкции переменная входит со своим отрицанием, то удаляем эту конъюнкцию из ДНФ.
- если некоторая переменная входит в элементарную конъюнкцию несколько раз, причем или во всех случаях без отрицаний, или во всех случаях с отрицаниями, то оставляем только одну эту переменную.

Шаг 5.

Преобразуем правильные конъюнкции в полные. Пусть в некоторую элементарную конъюнкцию $K = x_{i_1}^{\alpha_{i1}} \& x_{i_2}^{\alpha_{i2}} \& \cdots \& x_{i_n}^{\alpha_{in}}$ не входит переменная x, тогда рассмотрим выражение $K = x_{i_1}^{\alpha_{i1}} \& x_{i_2}^{\alpha_{i2}} \& \cdots \& x_{i_n}^{\alpha_{in}} (\mathbf{x} \mathbf{V} \overline{x})$ и перейти на шаг 2. Если недостающих переменных несколько, то проделать аналогичные преобразования со всеми недостающими переменными.

После шага 2 выполняется шаг 3, после чего СДНФ построена.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма.

Определение 1.

Элементарная дизъюнкция называется **правильной,** если в неё каждая переменная входит не более одного раза, включая её вхлждение и под знаком отрицания.

Определение 2.

Элементарная дизъюнкция называется **полной** относительно переменных x,y,z ..., если в неё входит каждая из этих переменных не менее одного раза, включая и их вхождение под знаком отрицания.

Определение 3.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) относительно переменных x,y,z,... , называется конъюнктивная нормальная форма, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все элементарные дизъюнкции правильные и полные относительно переменных x,y,z,... .

Алгоритм построения СКНФ.

1. Преобразование исходной формулы в КНФ.

<u>Шаг 1.</u>

Преобразовать исходную формулу к равносильному ей виду, в котором есть лишь операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (перейти в сигнатуру алгебры логики), причем отрицания могут стоять лишь над элементарными переменными высказываниями.

<u>Шаг 2.</u>

Преобразовать полученную формулу к равносильному ей виду, в котором все дизъюнкции выполняются раньше, чем конъюнкции (применить дистрибутивный закон), т.е. построить КНФ для исходной формулы.

2.Преобразование КНФ в СКНФ.

<u>Шаг 3.</u>

Если в КНФ есть несколько одинаковых элементарных дизъюнкций , то оставляем только одну - это преобразование приводит к равносильной формуле ,т.к. **x&x=x.**

<u>Шаг 4.</u>

Делаем все элементарные дизъюнкции правильными с помощью следующих двух преобразований:

- если в элементарной дизъюнкции переменная входит со своим отрицанием, то удаляем эту дизъюнкцию из КНФ.

- если некоторая переменная входит в элементарную дизъюнкцию несколько раз, причем или во всех случаях без отрицаний, или во всех случаях с отрицаниями, то оставляем только одну эту переменную.

<u>Шаг 5.</u>

Преобразуем правильные дизъюнкции в полные. Пусть в некоторую элементарную дизъюнкцию $\Delta = x_{i_1}^{\alpha_{i1}} V\ x_{i_2}^{\alpha_{i2}} V\ \dots V\ x_{i_n}^{\alpha_{in}}$ не входит переменная x, тогда рассмотрим выражение $\Delta = x_{i_1}^{\alpha_{i1}} V\ x_{i_2}^{\alpha_{i2}} V\ \dots V\ x_{i_n}^{\alpha_{in}}$ **(x&$\overline{x}$)** и перейдём на шаг 2. Если недостающих переменных несколько, то проделать аналогичные преобразования со всеми недостающими переменными.

После шага 2 выполняется шаг 3, после чего СКНФ построена.

Построение совершенных нормальных форм с помощью таблиц истинности.

Для построения СДНФ или СКНФ , исходя из теоремы о разложении функции алгебры логики от n переменных по k переменным(k=n), можно воспользоваться таблицами истинности.

Для построения **СДНФ** отметим в таблице истинности те наборы значений переменных, на которых функция равна 1. Для каждого такого набора построим полную правильную элементарную конънкцию по следующей схеме: если значение некоторой компоненты равно 1, то соответствующая переменная входит в элементарную конъюнкцию без отрицания, если значение компоненты 0, то соответствующая переменная входит в элементарную конъюнкцию с отрицанием. Объединив таким образом построенные правильные полные элементарные конъюнкции знаками дизъюнкции, получим совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

Для построения **СКНФ** отметим в таблице истинности те наборы значений переменных, на которых функция равна 0. Для каждого такого набора построим полную правильную элементарную дизъюнкцию по следующей схеме: если значение некоторой компоненты равно 1, то соответствующая переменная входит в элементарную дизъюнкцию с отрицанием, если значение компоненты 0, то соответствующая переменная входит в элементарную дизъюнкцию без отрицания. Объединив таким образом построенные правильные полные элементарные дизъюнкции знаками конъюнкции, получим совершенную конъюктивную нормальную форму.

Построение совершенных нормальных форм , используя принцип двойственности.

Построение совершенной Конъюктивной нормальной формы.

Пусть задана некоторая функция алгебры логики от n переменных. Рассмотрим отрицание этой функции и , так как полученная формула будет формулой алгебры логики, то разложим её по n переменным. Полученное выражение, после возможных упрощений, представляет собой совершенную дизъюнктивную нормальную форму. Возьмём отрицания от левой и правой частей полученного выражения. Слева будет исходная функция, а справа (после применения, если это необходимо, закона де Моргана и возможных упрощений) её совершенная конъюктивная нормальная форма.

Построение совершенной дизъюнктивной нормальной формы.

Рассмотрим вместо исходной функции её отрицание и построим для полученной формулы алгебры логики её совершенную конъюнктивную нормальную форму. Взяв затем отрицания от левой и правой частей полученного выражения и применив, если это необходимо. закон де Моргана, а так же возможно упростив полученное выражение, получим совершенную дизъюнктивную нормальную форму для исходной функции.

2.30. Тавтологии и противоречия. Проблема разрешимости в алгебре логики. Логические следствия.

Формула алгебры логики называется **тождественно истиной, общезначимой** или **тавтологией,** если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в неё элементарных переменных высказываний. Будем обозначать тавтологию $\Leftarrow$ F, где F - тождественно истинная формула, а $\Leftarrow$ **-** обозначение тавтологии.

Противоречием или **тождественно ложной** формулой в алгебре логики называют всякую формулу, которая принимает значение 0 при любых значениях входящих в неё элементарных переменных высказываний.

Формула алгебры логики называется **выполнимой,** если она принимает одно значение 1 хотя бы на одном наборе значений входящих в неё элементарных переменных высказываний.

Проблема разрешимости в алгебре логики состоит в том, чтобы найти способ, позволяющий для любой формулы алгебры логики определить, является ли она тождественно истиной.

Очевидно, что эта проблема может быть решена путем построения для заданной формулы таблицы истинности.

Однако, существует более эффективный способ решения этой проблемы.

Теорема 1 о тождественной истинности формулы алгебры логики.

Для того, чтобы формула алгебры логики была тождественно истиной, необходимо и достаточно, чтобы каждая элементарная дизъюнкция её Конъюктивной нормальной формы содержала, по крайней мере, одно элементарное переменное высказывание вместе с его отрицанием.

Доказательство.

Пусть каждая элементарная дизъюнкция КНФ, равносильной исходной формуле, содержит некоторую переменную вместе с её отрицанием. Рассмотрим произвольную элементарную дизъюнкцию и пусть в ней содержится некоторая переменная **x** и её отрицание $\overline{x}$, тогда, из-за того, что **x**$\mathbf{V}\overline{x}$ **=1**, эта элементарная конъюнкция будет равна 1. Так для всех элементарных конъюнкций КНФ.

Пусть исходная формула является тождественно истиной. Рассмотрим КНФ ей равносильную и предположим, что в некоторой элементарной дизъюнкции этой КНФ нет пары типа **x** и $\overline{x}$ **.** Тогда рассмотрим набор из 0 и 1, такой, что в этом наборе компонента равна 1, если в рассматриваемой элементарной дизъюнкции ей соответствующая переменная входит под знаком отрицания и равна 0, если соответствующая переменная входит без знака отрицания. Тогда на этом наборе элементарная дизъюнкция будет равна 0, тем самым и значение КНФ на этом наборе будет равно 0, что противоречит тожественной истинности исходной формулы.

Теорема 2 о тождественной ложности формулы алгебры логики.

Для того, чтобы формула алгебры логики была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы каждая элементарная конъюнкция её ДНФ содержала по крайней мере одно элементарное переменное высказывание вместе со своим отрицанием.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Формула алгебры логики f называется **логическим следствием** формул $f_1, f_2, ..., f_m$**,** если для любых наборов значений переменных, входящих в формулы $f_1, f_2, ..., f_m$**,** f

, для которых истины все формулы $f_1, f_2, \ldots, f_m$, формула f тоже истина. Обозначение $f_1, f_2, \ldots, f_m \Leftarrow f$.

Теорема 3 о логическом следствии.

Формула алгебры логики f является логическим следствием формулы алгебры логики g , тогда и только тогда, если $\Leftarrow g \to f$.

Доказательство.

Пусть n - количество различных переменных, входящих в формулы g и f , и **a** n - мерный двоичный набор из 0 и 1.

Пусть $g \Leftarrow f$, покажем что $\mathrm{a}\ \ g \to f \Leftarrow g \to f$.

Так как f является следствием из g , то на любом наборе **a**, если g (**a**)=1, то f (**a**)=1. Если же g (**a**)=0, то $0 \to f$ принимает значение 1 при любом значении f (**a**).

Пусть $\Leftarrow g \to f$, покажем, что $g \Leftarrow f$.

f - следствие из g , если при любом наборе **a,** из g (**a**)=1 следует f (**a**)=1.

Пусть **a,** такой набор, что g (**a**)=1, тогда из того, что $g \to f$ - тождественно истинная формула, её значение на наборе **a** должно равняться 1, а это для операции импликации может быть лишь тогда, когда f (**a**)=1.

Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается и более общая теорема.

Обобщенная теорема 4 о логическом следствии.

$f_1, f_2, \ldots, f_m \Leftarrow f$ тогда и только тогда, если $\Leftarrow f_1 \& f_2 \& \cdots \& f_m \to f$

Следствие из теоремы 4.

$f_1, f_2, \ldots, f_m \Leftarrow f$ тогда и только тогда, если при любом p, $.1 \le p \le m$, $\quad f_1, f_2, \ldots, f_p \Leftarrow . f_{.p+1} \to .(f_{p+2} \to \ldots) \cdots(f_m \to f) \ldots)$. ри доказательстве следствия кроме теоремы 4 используется и определение операции импликации.

Определение.

Множество формул алгебры логики $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ называется **непротиворечивым,** если существует по крайней мере один такой набор значений переменных, входящих в эти формулы, что все формулы из множества на этом наборе равны 1.

Множество формул алгебры логики $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ называется **противоречивым,** если при всяком наборе значений переменных, входящих в эти формулы , по крайней мере одна из формул принимает значение 0.

Отсюда, $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ **-** непротиворечиво, если $f_1 \& f_2 \&, ... \& f_m$**=1** по крайней мере на одном наборе и противоречиво, если $f_1 \& f_2 \&, ... \& f_m$**=0** для любого набора значений переменных.

Теорема 5 о противоречивости множества формул алгебры логики.

Множество формул алгебры логики противоречиво, если из него в качестве логического следствия можно вывести противоречие.

Для доказательства теоремы используется теорема 1 и определение операции импликации.

Теорема 6 о тождественной истинности формулы алгебры логики.

$f_1, f_2, ..., f_m \Leftarrow f$ **,** если в качестве логического следствия из $f_1, f_2, ..., f_m$ и $\overline{f}$ можно вывести противоречие.

2.31. Основные схемы доказательств: если x то y, доказательство от противного, доказательство построением цепочки импликаций, доказательство разбором случаев.

На основании выше доказанных теорем рассмотрим следующие схемы доказательств.

Схема 1.

Доказательство теорем типа “если x, то y”.

Схема доказательства основана на следующем логическом следствии:

$$\overline{y} \to \overline{x} \Leftarrow x \to y \cdot$$

Действительно, по теореме 3 из $\overline{y} \to \overline{x} \Leftarrow x \to y$ следует

$\Leftarrow (\overline{y} \to \overline{x}) \to (x \to y)$, $\quad \overline{y V \overline{x}} \; V \; \overline{x} \; V \; y =$

$x \; \overline{y} \; V \; \overline{x} \; V \; y = x \; V \; \overline{x} = 1 \cdot$

Схема 2.

Доказательство от противного или метод косвенного доказательства.

Схема доказательства основана на следующем логическом следствии:

$\overline{x} \to y \; , x \to \overline{y} \Leftarrow x$

Действительно, по теореме 4 из $\overline{x} \to y \; , x \to \overline{y} \Leftarrow x$ следует, что

$$(\overline{x} \to y) \; \& \; (\overline{x} \to \overline{y}) \to x = \overline{(x \; V \; y)(x \; \; V \; \overline{y})} \; \; V x =$$

$$\overline{x}\,\overline{y} \; V \; \overline{x} \, y \; V \; x = x \; V \; y \; V \; \overline{x} = 1 \cdot$$

Схема 3.

Доказательство построением цепочки импликаций.

Схема доказательства основана на следующем логическом следствии:

$x_1, (x_1 \to x_2), \ldots, (x_{m-1} \to x_v) \Leftarrow x_m$

Действительно, по теореме 4 из $x_1, (x_1 \to x_2), \ldots, (x_{m-1} \to x_v) \Leftarrow x_m$ следует, что

$$\overline{x_1(\overline{x}_1 V\ x_2)\ (\ \overline{x}_2 V\ x_3 x_3)\ ,\dots,(\ \overline{x}_{m-1} V\ x_m)\ V\ x_m} =$$
$$\overline{x}_1 V\ x_1\overline{x}_2 V\ x_2\overline{x}_3 V\ \cdots V\ x_{m-1}\overline{x}_m V\ x_m =$$
$$\overline{x}_1 V\ \overline{x}_2 V\ \cdots V\ \overline{x}_{m-1} V\ \overline{x}_m V\ x_m = 1\ .$$

Схема 4.

Доказательство разбором случаев.

Схема доказательства основана на следующем логическом следствии:

$(\ x_1 V\ x_2 V\ \dots V\ x_m)\ ,(\ x_1 \to\ y\ )\ ,\dots,(\ x_m \to\ y\ ) \Leftarrow y$ **.**

Действительно, по теореме 4 из

$(\ x_1 V\ x_2 V\ \dots V\ x_m)\ ,(\ x_1 \to\ y\ )\ ,\dots,(\ x_m \to\ y\ ) \Leftarrow y$ следует, что

$$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\cdots\overline{x}_m V\ \overline{y}\ x_1 V\ \overline{y}\ x_2 V\ \cdots V\ \overline{y}\ x_m V\ y =$$
$$x_1 V\ x_2 V\ \cdots V\ x_m V\ \overline{x}_m V\ y = 1\ .$$

2.32. Суперпозиция функций алгебры логики.

Суперпозиция функций - это образование сложных функций, т.е. в аргументы функций подставляются другие функции , некоторые переменные отождествляются и эта процедура повторяется.

Определение.

Рассмотрим конечную систему функций алгебры логики

$$F = \left\{ f_1(x_{11},\dots,x_{1k_1}),\dots,\ f_m(\ x_{m1},\dots,x_{mk_m}) \right\}.$$

Функция f называется **элементарной суперпозицией** (суперпозицией ранга 1) и обозначается $f \in F^{(1)}$**,** если она может быть получена одним из следующих способов.

Способ 1.

Из некоторой функции f , $f \in F$, переименованием некоторой её переменной.

Способ 2.

Подстановкой некоторой функции f , $f \in F$, вместо некоторого аргумента одной из функций исходного класса.

Если описан класс функций $F^{(r)}$, являющихся суперпозициями ранга r функций из системы F, то класс функций $F^{(r+1)}$ состоит из элементарных суперпозиций функций из $F^{(r)}$, т.е. $F^{(r+1)} = \left(F^{(r)}\right)^{(1)}$.

Суперпозициями функций из F называются функции, входящие в какой либо из классов $F^{(r)}$.

2.33. Полные системы функций. Понятие базиса.

Определения.

Система функций F называется **полной**, если всякая функция алгебры логики представила посредством суперпозиций функций из системы F.

Система функций F называется **базисом,** если удаление из множества F любой функции приводит к нарушению полноты.

Утверждение 1.

Система функций $F_0 = \{\bar{x},\ x\&y,\ xVy\}$ является полной. Это следует из Теоремы о разложении функций алгебры логики от n переменных по k=n переменным.

Утверждение 2.

Системы функций $F_1 = \{x \& y, \bar{x}\}$, $F_2 = \{x V y, \bar{x}\}$ являются полными, так как $x V y = \overline{\bar{x} \& \bar{y}}$ и $x \& y = \overline{\bar{x} V \bar{y}}$.

Утверждение 3.

Системы функций $F_3 = \{x \mid y\}$, $F_4 = \{x \downarrow y\}$ - штрих Шиффера и стрелка Пирса, являются полными, так как $\overline{x} = x \mid x$, $x \& y = \overline{x \mid y}$, $\overline{x} = x \downarrow x$, $x V y = \overline{x \downarrow y}$.

Утверждение 4.

Система функций $F_5 = \{x \& y, x \oplus y, 1\}$ является полной, так как $\overline{x} = x \oplus 1$.

Замечание.

Очевидно, что все приведенные выше системы функций, кроме системы F_0, являются базисами.

2.34. Алгебра Жегалкина. Полином Жегалкина. Теорема Жегалкина. Линейные функции.

Алгебра над множеством логических функций с двумя бинарными операциями конъюнкции **&** и сложения по модулю 2 $\oplus$ называется **алгеброй Жегалкина.**

В алгебре Жегалкина, очевидно, имеют место следующие соотношения:

$\mathbf{x \oplus y = y \oplus x}$

$\mathbf{x(y \oplus z) = xy \oplus xz}$

$\mathbf{x \oplus x = 0}$

$\mathbf{x \oplus 0 = x}$

$\mathbf{x \oplus 1 = \overline{x}}$

$\mathbf{xVy = xy \oplus x \oplus y}$

Если в произвольной формуле, выраженной в сигнатуре алгебры Жегалкина, раскрыть скобки и провести возможные сокращения, то получится формула, имеющая вид суммы по модулю 2 элементарных конъюнкций, в которых не содержатся отрицаний. Такая формула называется **полиномом Жегалкина.**

Исходя из оценки числа различных функций алгебры логики и числа различных полиномов Жегалкина, следует

Теорема Жегалкина.

Для всякой логической функции существует соответствующий ей полином Жегалкина и притом только один.

Функция алгебры логики, для которой полином Жегалкина имеет вид $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \oplus \beta$ (здесь знак суммирования означает суммирование по модулю 2, а параметры $\alpha_i, \beta \in \{0, 1\}$, $i=\overline{1,n}$, называется **линейной.**

Очевидно, что все функции от одной переменной линейны.

Линейными являются, например, функции **x$\oplus$ y** и **x$\oplus$ y$\oplus$ 1=x~y.**

Для построения полинома Жегалкина можно воспользоваться следующими двумя схемами:

Схема 1.

Перейти в сигнатуру алгебры Жегалкина (это можно сделать всегда, так как система функций **{x&y, x$\oplus$ y, 1}** , как это было показано ранее, полна), раскрыть скобки и провести возможные сокращения.

Схема 2.

Воспользоваться приёмом, который называется **методом неопределённых коэффициентов.**

Этот метод применим лишь тогда, когда функция от n переменных задана своей таблицей истинности. Решается система линейных уравнений с 2^n ограничениями, которые задаются через значения функции на двоичных n мерных наборах, и 2^n неизвестными - коэффициентами полинома Жегалкина.

2.35. Замкнутые классы функций.

Множество **М** логических функций называется **замкнутым классом**, если любая суперпозиция функций из **М** снова принадлежит **М**.

Всякая система функций алгебры логики порождает замкнутый класс - класс, состоящий из функций, которые можно получить суперпозициями из **M.** Такой класс называется **замыканием M** и обозначается **[M].** Очевидно, что если **M** - замкнутый класс, то **[M]=M.** Если **M -** полная система функций, то **[M]=** P_2, где P_2 **-** множество всех функций алгебры логики.

2.36. Монотонные функции. Теорема о монотонных функциях.

Функция алгебры логики $f = (x_1, \ldots, x_n)$ **, называется монотонной,** если для любых n мерных двоичных наборов α , β **,** из того, что $\alpha \leq \beta$ **,** следует, что $f(\alpha) \leq f(\beta)$**.**

Теорема о монотонных функциях.

Всякая булева функция в сигнатуре алгебры логики, не содержащая отрицаний, является монотонной функцией.

Для любой монотонной функции алгебры логики, отличной от 0 и 1, найдется равносильная ей булева функция без отрицаний.

Доказательство первой части теоремы основано на рассмотрении ДНФ, равносильной исходной функции без отрицаний. Для произвольного двоичного набора, на котором значение ДНФ равно 1, найдется элементарная конъюнкция, которая на этом наборе равна 1. Так как в этой конъюнкции нет отрицаний, то это означает, что все компоненты набора равны 1. Тогда на любом другом большем или равном наборе значение элементарной конъюнкции тоже будет равно 1, а тем самым выполняются условия монотонности.

Доказательство второй части теоремы основано на рассмотрении СДНФ, равносильной исходной монотонной функции, и предположении, что в ней существует полная правильная элементарная конъюнкция, содержащая хотя бы

одну переменную с отрицанием. Тогда исходя из монотонности функции, а тем самым и СДНФ, найдется другая элементарная полная правильная коньюнкция, которая отличается от найденной лишь тем, что переменная, входящая в первую конъюнкцию с отрицанием, входит во вторую без отрицания. Таким образом от исходной СДНФ можно перейти к ДНФ, в которой мы избавились от одной переменной, входящей в СДНФ с отрицанием. Так для всех переменных с отрицаниями.
Следствие из теоремы.

2.37. Двойственность в алгебре логики. Самодвойственные функции.

Определение.

Функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n})}$ называется **двойственной** функцией к функции $f(x_1, ..., x_n)$.

Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется **самодвойственной**, если $f(x_1, ..., x_n) = f^*(x_1, ..., x_n)$.

Самодвойственными являются функции **x**, $\overline{x}$, $x\,y \vee x\,z \vee y\,z$.

2.38. Функции сохраняющие константы 0, 1.

Определения.

Функция $f(x_1, ..., x_n)$, для которой выполняется $f(0, ..., 0) = 0$, называется **функцией, сохраняющей константу 0**.

Функция $f\left(x_1,...,x_n\right)$, для которой выполняется $f\left(1,...,1\right)=1$, называется **функцией, сохраняющей константу 1.**

2.39. Теорема Поста о функциональной полноте.

Обозначим через **T** - множество всех функций, сохраняющих константу 1, **F**- множество всех функций, сохраняющих константу 0, **L** - множество всех линейных функций, **M** - множество всех монотонных функций, **S** - множество всех самодвойственных функций. Нетрудно показать, что все перечисленные множества функций образуют замкнутые классы.

Теорема Поста о функциональной полноте.

Для того, чтобы система функций была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из следующих замкнутых классов **T, F, L, M** и **S.**

Доказательство необходимости очевидно, так как если все функции системы принадлежат одному из классов, то замкнутость этого класса нарушает условия полноты.

Достаточность доказывается на основании следующих лемм.

Лемма 1.

Если функция не самодвойственная, то из неё путем подстановки функций **x** и $\overline{x}$ можно получить константу.

Доказательство.

Так как $f\left(x_1,...,x_n\right)\notin S$, то найдется такой n-мерный набор α, что $f\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)=f\left(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n\right)$.

Рассмотрим функции $g_i\left(x\right)=x^{\alpha_i}, \quad i=\overline{1,n}$.

Пусть $g(x)=f\left(g_1(x),..., g_n(x)\right)$. Тогда

$$g(0)=f\left(g_1(0),..., g_n(0)\right)=f\left(0^{\alpha_1},..., 0^{\alpha_n}\right)=f\left(\overline{\alpha}_1,..., \overline{\alpha}_n\right)=f\left(\alpha_1,..., \alpha_n\right)=$$

$$f\left(1^{\alpha_1},..., 1^{\alpha_n}\right)=f\left(g_1(1),... g_n(1)\right)=g(1)$$

Мы получили $g(0)=g(1)$, т.е. функция $g(x)$ - константа.

Лемма доказана.

Лемма 2.

Если функция не монотонна, то из неё, путем подстановки констант **0,1** и функции **x,** можно получить функцию $\overline{x}$.

Доказательство.

Два одинаково размерных двоичных набора называются **соседними** по координате i, если наборы совпадают по всем другим координатам, а i -ая координата i в одном наборе равна 1, а в другом 0.

Так как функция не монотонна, то найдутся два таких набора α , β , $\alpha \le \beta$, что $f(\alpha)>f(\beta)$.

Очевидно, что среди таких наборов найдутся и соседние, и пусть они являются соседними по координате i. Рассмотрим функцию $g(x)=f\left(\alpha_1,..., \alpha_{i-1}, x\ \alpha_{i+1},..., \alpha_n\right)$.

Мы имеем:

$$g(0)=f\left(\alpha_1,..., \alpha_{i-1}, 0 , \alpha_{i+1},..., \alpha_n\right)=f(\alpha)>f(\beta)=$$

$$f\left(\alpha_1,..., \alpha_{i-1}, 1\ \alpha_{i+1},..., \alpha_n\right)=g(1).$$

Отсюда следует доказательство леммы, так как $g(0)=1$, $g(1)=0$, $g(x)=\overline{x}$.

Лемма 3.

Если функция не линейная, то из неё путем подстановки констант **0, 1** и функций **x** и $\overline{x}$, можно получить функцию **x&y.**

Доказательство.

Для заданной нелинейной функции построим полином Жегалкина **Р.** Он нелинеен, т.е. найдется член, содержащий конъюнкцию не менее двух переменных. Не уменьшая общности будем предполагать, что этими переменными являются переменные x_1, x_2. Тогда полином Жегалкина для исходной нелинейной функции можно представить в виде:

$$P = x_1 x_2 f_1(x_3,\dots,x_n) \oplus x_1 f_2(x_3,\dots,x_n) \oplus x_2 f_3(x_3,\dots,x_n) \oplus f_4(x_3,\dots,x_n)$$

Здесь $f_1(x_3,\dots,x_n) \neq 0$, т.е. найдется хотя бы один набор, на котором значение этой функции не равно 0. Мы имеем $f_1(\alpha_3,\dots,\alpha_n) = 1$. Тогда

$$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3, \dots \alpha_n) = x_1 x_2 \oplus a\, x_1 \oplus b\, x_2 \oplus c.$$

Рассмотрим функцию

$$q(x_1, x_2) = g(x_1 \oplus b,\, x_2 \oplus a) \oplus ab \oplus c =$$

$$(x_1 \oplus b)(x_2 \oplus a) \oplus a(x_1 \oplus b) \oplus b(x_2 \oplus a) \oplus ab \oplus c \oplus c = x_1 x_2.$$

Лемма доказана.

Пусть система функций целиком не принадлежит ни одному из классов **T, F, L, M, S.** Пусть **t, f, l, m, s -** функции из заданной системы, не принадлежащие соответственным классам (некоторые из них и даже все могут совпадать) и зависящие от тех же самых переменных.

Используя лемму 1, при помощи функции **t, f** и **s** можно получить константы **0** и **1.**

При помощи констант **0** и **1** и функции **m**, используя лемму 2 можно получить $\overline{x}$.

При помощи констант **0** и **1**, функции $\overline{x}$ и функции **l**, используя лемму 3 можно получить функцию **x &y**.

Получили систему функций, содержащую отрицание и конъюнкцию, тем самым доказали теорему.

3. Задачник с решением типовых задач

3.1. Определить, является ли данная функция алгебры логики монотонной.

$\bar{x} \to (\overline{x} \to y)$

Перейдем в сигнатуру алгебры логики.

$\bar{x} \to (\overline{x} \to y) = x \vee (\bar{x} \to y) = x \vee (x \vee y) = x \vee y$

По теореме о монотонных функциях алгебры логики данная функция является монотонной.

Определить, является ли функция монотонной?

Задача 1.1.

$f(x,y)=(x \to y)(\bar{x} \oplus y)$

Задача 1.2.

$f(x,y)=(xy \to y) \oplus xy)$

Задача 1.3.

$f(x,y,z)=xyz \vee \overline{xy}$

Задача 1.4.

$f(x,y,z)=(xy \oplus x) \downarrow yz$

Задача 1.5.

$f(x,y)=(x \oplus y)(y \leftarrow x))$

Задача 1.6.

$f(x,y)=(x \to y) \approx xy$

Задача 1.7.

f(x,y)=(x$\oplus$y)

Задача 1.8.
f(x,y,z)=(xy$\oplus x)\downarrow xz$

Задача 1.9.
f(x,y,z)=(xy$\oplus x)|yz$

Задача 1.10.
f(x,y)=(xy$\oplus$x)$\rightarrow$y

Задача 1.11.
f(x,y)=(xy$\oplus x)\downarrow y$

3.2. Определить, является ли данная функция алгебры логики линейной.

$xy\vee\overline{x}\,\overline{y}$

Перейдем в сигнатуру алгебры Жегалкина.

$$xy\vee\overline{x}\,\overline{y}=xy\overline{x}\,\overline{y}\oplus xy\oplus(x\oplus1)(y\oplus1)=xy\oplus xy\oplus x\oplus y\oplus1=$$
$$x\oplus y\oplus1$$

Получили линейный полином Жегалкина, т.е. исходная функция линейная.

Определить, является ли функция линейной?

Задача 2.1.
f(x,y,z)=xyz$\vee\overline{x\oplus y\oplus z}$

Задача 2.2.
f(x,y)=(xy$\rightarrow y)\oplus xy$)

Задача 2.3.
f(x,y)=(x$\oplus$y)$\rightarrow(x\vee y)$

Задача 2.4.
f(x,y)=$(x \oplus y)(\bar{x} \vee \bar{y})$

Задача 2.5.
f(x,y)=$(xy \oplus x) \downarrow y$

Задача 2.6.
f(x,y)=$(xy \oplus x) | y$

Задача 2.7.
f(x,y,z)=$(xy \oplus x) | yz$

Задача 2.8.
f(x,y,z)=$(xy \oplus x) | xz$

Задача 2.9.
f(x,y)=$(x \oplus y)(y \leftarrow x))$

Задача 2.10.
f(x,y,z)=$xyz \vee \bar{x}\,\bar{y}$

Задача 2.11.
f(x,y,z)=$xyz \vee \overline{xy}$

3.3.Является ли данная функция самодвойственной.

$xy \vee xz \vee yz$

Построим двойственную функцию к исходной

$$(x \vee y)(x \vee z)(y \vee z) = (x \vee xz \vee xy \vee yz)(y \vee z) = (x \vee yz)(y \vee z) =$$
$$xy \vee xz \vee yz \vee yz = xy \vee xz \vee yz$$

Двойственная функция к исходной равна исходной, т.е. исходная функция самодвойственная.

Является ли функция самодвойственной?

Задача 3.1.
$f(x,y,z)=(xy\rightarrow yz)(\bar{x}\vee y)\rightarrow z$

Задача 3.2.
$f(x,y)=(xy\rightarrow y)\oplus xy)$

Задача 3.3.
$f(x,y)=(x\oplus y)$

Задача 3.4.
$f(x,y)=(x\oplus y)(\bar{x}\vee \bar{y})$

Задача 3.5.
$f(x,y)=(xy\oplus x)\downarrow y$

Задача 3.6.
$f(x,y)=(xy\oplus x)|y$

Задача 3.7.
$f(x,y,z)=(xy\oplus x)|yz$

Задача 3.8.
$f(x,y,z)=(xy\oplus x)|xz)$

Задача 3.9.
$f(x,y)=(x\oplus y)(y\vee x))$

Задача 3.10.
$f(x,y,z)=xyz\vee \overline{xy}$

Задача 3.11.
$f(x,y,z)=xz\vee \bar{x}y$

3.4.Полна ли система функций.

$\{xy, x\oplus 1\}$

Построим таблицу Поста

f(x,y)	T_0	T_1	L	M	S
xy	+	+	-	+	-
$x\oplus 1$	-	-	+	-	+

Система функций полна.

Полна ли система функций?

Задача 4.1.

$\{x\oplus y,\ x\oplus 1\}$

Задача 4.2.

$\{x\oplus y,\ x\to y\}$

Задача 4.3.

$\{x\to y,\ x\oplus 1\}$

Задача 4.4.

$\{x\approx y,\ x\oplus 1\}$

Задача 4.5.

$\{xy,\ x|1\}$

Задача 4.6.

$\{x\oplus y,\ x\to 1\}$

Задача 4.7.

$\{xy,\ x\downarrow 1\}$

Задача 4.8.

$\{x\vee y,\ x\oplus 1\}$

Задача 4.9.

{xy, 1|y}

Задача 4.10.
$\{\bar{x}y,\ x\oplus x\}$

Задача 4.11.
$\{\bar{x}y,\ x\oplus 1\}$

3.5.Построить полином Жегалкина для функции
$x\bar{y}\vee\bar{x}z$
Перейдем в сигнатуру алгебры Жегалкина
$x\bar{y}\vee\bar{x}z=x\bar{y}\bar{x}z\oplus x\bar{y}\oplus\bar{x}z=x(y\oplus1)\oplus(x\oplus1)z=xy\oplus xz\oplus x\oplus z$

Построить полином Жегалкина для функции:

Задача 5.1.
$f(x,y)=(xy\oplus(x\downarrow y))|x$

Задача 5.2.
$f(x,y)=((x\to y)\oplus xy)$

Задача 5.3.
$f(x,y)=(x\oplus y)\to 0$

Задача 5.4.
$f(x,y)=(x\oplus y)\to(\bar{x}\vee\bar{y})$

Задача 5.5.
$f(x,y)=(x\oplus y)\downarrow(x\to y)$

Задача 5.6.
$f(x,y)=(x\to(x\oplus y))(x\vee y)$

Задача 5.7.

f(x,y,z)=(xz⊕y) (x≈z)

Задача 5.8.
f(x,y,z)=(xy⊕z)(x|y)

Задача 5.9.
f(x,y)=(x⊕y)(y←(x⊕y))

Задача 5.10.
f(x,y,z)=(xyz≈(x⊕y))⊕z

Задача 5.11.
f(x,y,z)=(xz≈(z⊕y))⊕x

3.6.Построить СДНФ для функции

$x\vee yz$

$x\vee yz=x(y\vee\bar{y})(z\vee\bar{z})\vee yz(x\vee\bar{x})=xyz\vee xy\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee x\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}yz$

Построить СДНФ для функции

Задача 6.1.
f(x,y,z)=(x←y) ⊕ (y→z)

Задача 6.2.
f(x,y)=(xy→1) → (x⊕z)

Задача 6.3.
f(x,y,z)=xyz∨ (x⊕z) ∨(xyz⊕1)

Задача 6.4.
f(x,y,z)=(xy⊕z) → (xz→y)

Задача 6.5.
f(x,y)=(x⊕y)(z←1)

Задача 6.6.
f(x,y)=(x→y) ↓ (z⊕y)

Задача 6.7.
f(x,y)=(x⊕z) ↓xy

Задача 6.8.
f(x,y,z)=(xy⊕z) ∨ (xz↓y)

Задача 6.9.
f(x,y,z)=(xy→z) → (xz→y)

Задача 6.10.
f(x,y,z)=(x⊕z) ∨ (x⊕y) ∨(y⊕z)

Задача 6.11.
f(x,y,z)=(x⊕z) → (x⊕y)

3.7. Построить СКНФ для функции

$$(x \to y) \to z$$

$$(x \to y) \to z = (\overline{\overline{x} \vee y}) \vee z = x\overline{y} \vee z = (x \vee z)(\overline{y} \vee z) = (x \vee y\overline{y} \vee z)$$
$$(x\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$$

Построить СКНФ для функции

Задача 7.1.
f(x,y,z)=(x←y) ⊕ (y→z)

Задача 7.2.
f(x,y)=(xy→1) → (x⊕z)

Задача 7.3.
f(x,y,z)=xyz∨ (x⊕z) ∨(xyz⊕1)

Задача 7.4.
f(x,y,z)=(xy⊕z) → (xz→y)

Задача 7.5.
$f(x,y)=(x\oplus y)(z\leftarrow 1)$

Задача 7.6.
$f(x,y)=(x\to y)\downarrow (z\oplus y)$

Задача 7.7.
$f(x,y)=(x\oplus y)\downarrow xz$

Задача 7.8.
$f(x,y,z)=(xy\oplus z)\vee (xz\downarrow y)$

Задача 7.9.
$f(x,y,z)=(xy\to z)\to (xz\to y)$

Задача 7.10.
$f(x,y,z)=(xz\vee (x\oplus y))\to (y\oplus z)$

Задача 7.11.
$f(x,y,z)=(x\oplus z)\vee (x\oplus y)\vee(y\oplus z)$

3.8. Построить множество всех подмножеств P(M) (булеан множества M)

если M={3,a,5}

P(M)={{3},{a},{5},{3,a},{3,5},{a,5},{3,a,5},∅}

Построить множество всех подмножеств P(M), если

Задача 8.1.
M={a, {a,2},2}

Задача 8.2.
M={2, {a,2},a}

Задача 8.3.
M={a, {a,2},b}

Задача 8.4.
M={1, {1,2},2}

Задача 8.5.
M={2, {a,2},1}

Задача 8.6.
M={a, {a,b},2}

Задача 8.7.
M={a, {a,b},b}

Задача 8.8.
M={a, {a,2},1}

Задача 8.9
M={1, {a,2},2}

Задача 8.10.
M={a, {1,2},2}

Задача 8.11
M={a, {a,b},1}

3.9.Дать анкету бинарного отношения, заданного ориентированным графом G=(V,A)

V={1,2,3,4},
A={(2,1),(2,3),(3,3),(4,3),(1,3),(2,4),(1,4),(1,1),(2,2),(4,4)}
Рефлексивность +
Антирефлексивность -
Симметричность -
Антисимметричность +

Асимметричность +
Транзитивность +
Связность +

Дать анкету для бинарного отношения, заданного ориентированным графом G=(V,A), V={1,2,3,4}

Задача 9.1.
A={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),
(3,1),(2,4),(4,2),(4,1),(3,2),(3,4)}

Задача 9.2.
A={(1,1),(2,3),(3,3),(4,3),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(2,1),(4,1),(2,2)}

Задача 9.3.
A={(2,1),(2,3),(3,4),(1,3), (2,4),(1,4)}

Задача 9.4.
A={(2,1),(2,3),(3,3),(4,3),(1,3),(3,2),(2,4),(1,4),(1,1)}

Задача 9.5.
A={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)}

Задача 9.6.
A={(2,1),(2,3),(3,3),(4,3),(1,3),(3,2),(2,4),(1,4),(1,1)}

Задача 9.7.
A={(2,1),(2,3),(3,3),(4,3),(1,3),(3,2),(2,4),(1,4),(1,1),(2,2)}

Задача 9.8.
A={(2,1),(2,3),(3,3),(4,3),(1,3),(2,4),(1,4),(1,1),(2,2)}

Задача 9.9.
A={(2,1),(2,3),(3,3),(4,3),(1,3),(3,2),(2,4),(1,4),(1,1)}

Задача 9.10.

A={(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2)}

Задача 9.11.
A={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4), (3,1),(1,3),(3,2),(2.3),(4,2),(2,4)}

3.10. Определить, является ли соответствие Q=(F,A,B) функциональным, сюръективным, инъективным, всюду определенным, биективным.

где A=B, A={1,2,3,4}, а F -график соответствия задается ориентированным графом G
(-,+,-,+,-)

Определить, является ли соответствие Q=(Ф,A,B), где A=B,
A={1,2,3,4}, а Ф - график соответствия задается ориентированным графом G, функциональным, сюръективным, инъективным, всюду определенным, биективным ?

Задача 10.1. - Задача 10.11
Графы из условий задач 9.1 -9.11.

3.11. Решить систему уравнений.

$$A \bigcup X = B$$

$$B\overline{X} = C$$

Решение.

$$A \bigcup X = B \Leftrightarrow (A \bigcup X) \oplus B = \overline{B}X \bigcup \overline{A}B\overline{X} \bigcup A\overline{B} = \varnothing$$

$$B\overline{X} = C \Leftrightarrow B\overline{X} \oplus C = CX \bigcup B\overline{C}\,\overline{X} \bigcup \overline{B}C = \varnothing$$

Общее уравнение.

$$(\overline{B} \bigcup C)X \bigcup (\overline{A}B \bigcup B\overline{C})\overline{X} \bigcup (A\overline{B} \bigcup \overline{B}C) = \varnothing$$

Необходимые и достаточные условия совместности.

$$C \subseteq A \subseteq B$$

Общее решение.

$$X = (\overline{A}B \bigcup B\overline{C}) \bigcup K(\overline{\overline{B} \bigcup C}) = B(\overline{A} \bigcup C) = B\overline{C}$$

Решение единственно.

Проверка.

$A\bigcup X = A\bigcup B\overline{C} = B$

$(A\bigcup B\overline{C})\oplus B = \varnothing$

Покажем, что $(A\bigcup B\overline{C})\oplus B=\varnothing$. Действительно, $(A\bigcup B\overline{C})\oplus B=\overline{A\cup B\overline{C}}B\cup(A\cup B\overline{C})\overline{B}=\overline{A}BC\cup A\overline{B}=\varnothing$, т.к. $A\subseteq B$ (отсюда $A\overline{B}=\varnothing$) и $C\subseteq A$(отсюда $C\overline{A}=\varnothing$, т.е. и $\overline{A}BC=\varnothing$)

$B\overline{X}=B\overline{B\overline{C}}=BC=C$ (т.к. $C\subseteq B$)

Решить систему уравнений.

Задача 11.1.

$A\overline{B}X = \overline{C}$

$A\bigcup \overline{C}X = \overline{B}$

Задача 11.2.

AX=BC

B$\overline{X}$=CA

Задача 11.3.

$A\oplus X = C$

$A\bigcup \overline{X} = B$

Задача 11.4.

$AX = \overline{B}C$

$B\bigcup \overline{X} = C$

Задача 11.5.

$A\oplus \overline{X} = C$

$\overline{A}\bigcup B = X\overline{C}$

Задача 11.6.

$$A \bigcup X = B \oplus C$$

$$B \bigcup CX = A$$

Задача 11.7.

$$A \cup X = B \oplus C$$

$$B \bigcup CX = B$$

Задача 11.8.

$$\overline{B}CX = B$$

$$AC\overline{X} = \overline{C}$$

Задача 11.9.

$$AX = BC$$

$$BX = \overline{A}C$$

Задача 11.10.

$$A \bigcup BX = CX$$

$$B \bigcup CX = AX$$

Задача 11.11.

$$B \bigcup AX = CX$$

$$A \bigcup CX = BX$$

4. Домашние контрольные задания

Домашнее задание содержит в себе 11 задач по каждой из тем, приведенных в задачнике. Задачи объединяются в 30 различных вариантов.

Номера задач по каждому из вариантов приведены в следующей таблице.

Вар\задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Вариант1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Вариант2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Вариант3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Вариант4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Вариант5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Вариант6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
Вариант7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
Вариант8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
Вариант9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
Вариант10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Вариант11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Вариант12	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
Вариант13	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2
Вариант14	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
Вариант15	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
Вариант16	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
Вариант17	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
Вариант18	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
Вариант19	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	11
Вариант20	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11
Вариант21	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Вариант22	1	3	2	4	6	5	8	7	10	9	11
Вариант23	2	4	1	3	5	7	9	8	10	11	6
Вариант24	1	11	2	9	3	8	4	7	6	5	10
Вариант25	2	1	11	3	9	4	8	5	7	6	10
Вариант26	3	11	2	10	1	4	7	6	9	8	5
Вариант27	1	4	8	2	5	9	3	7	10	11	6
Вариант28	2	5	8	1	3	4	6	7	9	10	11
Вариант29	3	7	10	4	2	11	5	6	7	9	1
Вариант30	9	11	8	10	7	6	2	3	4	5	1
Вариант31	8	10	7	3	5	7	10	4	6	8	5

Так, например, вариант 30 включает в себя задачи из задачника с номерами:
9,11,8,10,7,6,2,3,4,5,1

5. **Вопросы к экзамену**

1.Множества. Конечные и бесконечные множества. Способы задания множеств.
2. Подмножества. Множество всех подмножеств данного множества.
3. О числе к-элементных подмножеств n-элементного множества.
4.Определение мощности множества всех подмножеств конечного множества (с использованием формулы бинома Ньютона).
5.Универсальное множество. Понятие алгебры. Алгебра множеств.
6.Понятия алгебраических и кардинальных операций. Алгебраические операции над множествами.
7.Законы алгебры множеств. Двойственность в алгебре множеств.
8.Уравнения и системы уравнений в алгебре множеств. Основные леммы, используемые при решении уравнений в алгебре множеств.
9.Мощность множества. Понятие счетного множества и континуума.
10.Канторовская диагональная процедура. Примеры счетных множеств.
11.Доказательство счетности множества алгебраических чисел.
12.Свойства счетных множеств. Необходимые и достаточные условия бесконечности множества.
13. Примеры континуальных множеств. Теорема Кантора-Бернштейна.

14. Доказательство существования иррациональных и трансцендентных чисел.
15.Кардинальные операции над множествами. Прямое произведение множеств. Проекция множеств.
16.Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений.
17.Представления бинарных отношений в виде матриц, орграфов, верхнего и нижнего сечений.
18. Операции над бинарными отношениями. Выражение свойств бинарных отношений через задающие их множества.
19. Отношения порядка. Упорядоченные множества.
20.Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Системы различных представителей.
21.Лексикографическое отношение порядка.
22.Мажоранта и миноранта множеств. Максимум и минимум множеств. Точные грани множеств.
23.Понятие графика. Функциональные, инъективные графики. Инверсия графика.
24.Соответствия. Функциональные, инъективные, сюръективные и биективные соответствия.
25.Общее понятие функции. Биективная функция.
26.Высказывания. Операции над высказываниями. Формулы и функции алгебры логики.
27.О числе функций алгебры логики от n переменных.
28. Равносильные формулы. Законы алгебры логики.
29.ДНФ и КНФ.
30.Разложение функций алгебры логики по к переменным.
31.СДНФ и СКНФ.
32. Логические следствия. Проблема разрешимости в алгебре логики.
33.Тавтологии и противоречия.
(34.Основные схемы доказательств: если х то у, доказательство от противного, доказательство построением цепочки импликаций, доказательство разбором случаев.)
35.Суперпозиция функций алгебры логики.
36. Полные системы функций. Понятие базиса.

37.Алгебра Жегалкина. Полином Жегалкина. Теорема Жегалкина.
38.Замкнутые классы функций.
39. Линейные функции.
40. Монотонные функции. Теорема о монотонных функциях.
41.Двойственность в алгебре высказываний. Самодвойственные функции.
42.Функции не сохраняющие константы 0, 1.
43.Теорема Поста о функциональной полноте.