МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра математической логики и высшей алгебры

КОМБИНАТОРИКА

(методическая разработка)

Нижний Новгород, 2004

УДК: 519.95

Комбинаторика: Методическая разработка / Составители: Л. Г. Киселева, Т. Г. Смирнова. – Н. Новгород: Нижегородский государственный университет, 2004. – 40 с.

Методическая разработка предназначена для студентов первого курса факультета ВМК, изучающих курс “Дискретная математика”. Она содержит теоретический материал, примеры решения задач и контрольные задания по теме “Комбинаторика”.

Составители:

Л. Г. Киселева, к. ф.-м. н., доц. каф. МЛиВА,

Т. Г. Смирнова, к. ф.-м. н., ст. преп. каф. МЛиВА.

Рецензент:

А. И. Гавриков, к. ф.-м. н., доц. каф. ЧиФА.

Нижегородский государственный университет

им. Н.И.Лобачевского

2004

§1. Сочетания, размещения, перестановки

Пусть $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ – конечное множество, набор элементов ($a_{i_1},...,a_{i_k}$) из A называется (n,k)*–выборкой.*

Выборка называется *упорядоченной*, если в ней задан порядок следования элементов, в противном случае выборка называется *неупорядоченной.*

В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов, т.е. выборки могут быть как *с повторениями*, так и *без повторений*.

Неупорядоченная (n,k)–выборка без повторений называется (n,k)*-сочетанием* или *сочетанием из n элементов по k*, другими словами, это k–элементное подмножество множества A.

Упорядоченная (n,k)–выборка без повторений называется (n,k)*–размещением (перестановкой)* или *размещением из n элементов по k.*

Неупорядоченная (n,k)–выборка с повторениями называется (n,k)*–сочетанием с повторениями*.

Упорядоченная (n,k)–выборка с повторениями называется (n,k)*–размещением с повторениями*. (n,n)–размещение без повторений называется *перестановкой из n элементов.*

Например, рассмотрим множество $A=\{a_1,a_2,a_3\}$. Составим сочетания из трех элементов по два: (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_3).

Все сочетания с повторениями из трех элементов по два представляют собой следующие (3,2)-выборки: (a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_3).

Далее выпишем все размещения из трех элементов по два без повторений: (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_3); (a_3, a_2), (a_1, a_3), (a_3, a_1).

Все размещения с повторениями из трех элементов по два имеют вид: (a_1,a_1), (a_1,a_2), (a_2,a_1), (a_2,a_2), (a_1,a_3), (a_3,a_1), (a_2,a_3), (a_3,a_2), (a_3,a_3).

Наконец, перестановки из трех элементов − это следующие упорядоченные без повторений (3,3)-выборки: (a_1,a_2,a_3), (a_1,a_3,a_2), (a_2,a_1,a_3), (a_2,a_3,a_1), (a_3,a_1,a_2), (a_3,a_2,a_1).

§2. Основные правила комбинаторики

Правило суммы

Если элемент x может быть выбран k способами, а элемент y может быть выбран n другими способами, тогда выбор элемента x, либо y может быть осуществлен ($k+n$) способами.

Правило произведения

Пусть набор (x, y) образуется в результате последовательного выбора элементов x и y, причем элемент x может быть выбран k способами, и при каждом выборе элемента x элемент y может быть выбран n способами, тогда выбор всех упорядоченных пар (x, y) может быть осуществлен $k \cdot n$ способами.

Задача 1. Сколько существует двузначных четных чисел с разными цифрами?

Решение. Пусть $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ – двузначное четное число, у которого все цифры различны. Тогда $\alpha_2 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, а $\alpha_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{\alpha_2\}$.

Если α_1 – нечетная цифра, т.е. $\alpha_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, получаем, что первая цифра α_1 может быть выбрана 5 способами. При каждом выборе первой цифры α_1, вторая цифра α_2 может быть выбрана 5 способами. По правилу произведения получим, что существуют $5 \cdot 5 = 25$ двузначных четных чисел, у которых первая цифра нечетная.

Если α_1 – четная цифра, тогда $\alpha_1 \in \{2, 4, 6, 8\}$, а $\alpha_2 \in \{0, 2, 4, 6, 8\} \setminus \{\alpha_1\}$, т.е. элемент α_2 может быть выбран 4 способами. По правилу произведения, число α может быть выбрано $4 \cdot 4 = 16$ способами.

У любого двузначного числа первая цифра либо четная, либо нечетная. Используя правило суммы, получаем, что всего существует $25 + 16 = 41$ двузначных четных чисел с различными цифрами.

Эту же задачу можно решить другим способом.

Рассмотрим четное двузначное число $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, где $\alpha_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а $\alpha_2 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Первая цифра α_1 может быть выбрана 9 способами, для каждой фиксированной цифры α_1, вторая цифра α_2 может быть выбрана 5 способами. По правилу произведения получаем, что существует $9 \cdot 5 = 45$ различных четных двузначных чисел. Среди них четыре числа: 22, 44, 66, 88 – с одинаковыми цифрами. Отсюда получаем, что существует $45 - 4 = 41$ двузначных четных чисел с различными цифрами.

Обобщенное правило произведения

Пусть набор $(x_1, x_2, ..., x_n)$ образуется в результате последовательного выбора элементов $x_1, x_2, ..., x_n$, причем элемент x_1 может быть выбран k_1 способами, при каждом выборе x_1 элемент x_2 может быть выбран k_2 способами и т.д., наконец, при каждом выборе $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ элемент x_n может быть выбран k_n способами, тогда выбор всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ может быть осуществлен $k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n$ способами.

Правило равенства

Если между конечными множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, тогда $|A| = |B|$, т.е. множества A и B имеют одинаковое число элементов.

Прямым (*декартовым*) *произведением множеств A и B* называется множество $A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B \}$, т.е. множество всех упорядоченных пар, у которых первый элемент из множества A, а второй — из множества B.

Например, если $A=\{a,b,c\}$, $B=\{x,y\}$, имеем $A\times B=\{\langle a,x\rangle,\langle a,y\rangle,\langle b,x\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,x\rangle,\langle c,y\rangle\}$.

Аналогично определяется *прямое произведение* k *множеств*: $A_1\times A_2\times\ldots\times A_k=\{\langle a_1,a_2,\ldots,a_k\rangle \mid a_i\in A_i, i=\overline{1,k}\}$.

Теорема 1. $|A_1\times A_2\times\ldots\times A_k|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_k|$.

Доказательство. Пусть $\alpha=\langle a_1,a_2,\ldots,a_k\rangle\in A_1\times A_2\times\ldots\times A_k$. Тогда элемент a_1 может быть выбран $|A_1|$ способами, для каждого фиксированного a_1 элемент a_2 может быть выбран $|A_2|$ способами и т.д., при каждом выборе $a_1,a_2,\ldots,a_{k-1}$ элемент a_k может быть выбран $|A_k|$ способами. По обобщенному правилу произведения получаем, что набор $\alpha=\langle a_1,a_2,\ldots,a_k\rangle$ может быть выбран $|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_k|$ способами, что и требовалось доказать.

Множество $\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{k\ раз}$ называется k-*ой степенью множества* A и обозначается через A^k.

Следствие. $|A^k|=|A|^k$.

Задача 2. Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся на 5, у которых все цифры различны?

Решение. Пусть $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – множество цифр, $\alpha=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ – четырехзначное число, где $\alpha_1\in A\setminus\{0\}$, $\alpha_4\in\{0,5\}\setminus\{\alpha_1\}$, $\alpha_2\in A\setminus\{\alpha_1,\alpha_4\}$, $\alpha_3\in A\setminus\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$.

Если $\alpha_4 = 0$, тогда цифра α_1 может быть выбрана 9 способами, цифра α_2 может быть выбрана 8 способами, а α_3 – 7 способами. По правилу произведения получаем, что число α может быть получено $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ способами.

Если $\alpha_4 = 5$, тогда $\alpha_1 \in A \setminus \{0,5\}$, т.е. цифра α_1 может быть выбрана 8 способами, цифра α_2 может быть выбрана также 8 способами, а α_3 – 7 способами. По правилу произведения получаем, что число α может быть выбрано $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ способами.

Таким образом, используя правило суммы, получаем, что существует $504 + 448 = 952$ четырехзначных чисел, делящихся на 5, у которых все цифры различные.

§3. Число сочетаний, размещений и размещений с повторениями

Пусть $\hat{A}_n^k$ – число всех (n,k)–*размещений с повторениями.*

<u>Теорема 2.</u> $\hat{A}_n^k = n^k$.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Между множеством (n,k)–размещений с повторениями и прямым произведением A^k существует взаимно однозначное соответствие, т.е. они равномощны. По следствию теоремы 1 имеем $\left| A^k \right| = \left| A \right|^k = n^k$, т.е. число всех размещений с повторениями из n по k равно n^k.

Число всех (n,k)–*размещений* обозначается через A_n^k.

Теорема 3. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_k)$ – (n,k)–размещение из множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, где $\alpha_i \in A$, $i = \overline{1,k}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ для всех $i \neq j$. Элемент α_1 может быть выбран n способами, $\alpha_2 \in A \setminus \{\alpha_1\}$, т.е. после выбора элемента α_1 элемент α_2 может быть выбран $(n-1)$ способом, после выбора α_1 и α_2 выбираем элемент $\alpha_3 \in A \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$, он может быть выбран $(n-2)$ способами и т.д. После выбора элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ последний элемент α_k может быть выбран $(n-(k-1))$ способами.

По правилу произведения получаем, что число всех (n,k)–размещений равно $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Пусть $P(n)$ – число всех перестановок из n элементов.

Следствие. $P(n) = n!$.

Число всех (n,k)–сочетаний обозначается через C_n^k или $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Эта величина называется *биномиальным коэффициентом*.

Теорема 4. $C_n^k = \dfrac{n!}{n!(n-k)!}$.

<u>*Доказательство.*</u> Рассмотрим (n,k)–сочетание $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, эту неупорядоченную (n,k)–выборку можно упорядочить $k!$ способами (в силу следствия теоремы 3). Если упорядочить каждое (n,k)–сочетание, то получим все упорядоченные (n,k)–выборки, т.е. $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Отсюда получаем, что $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

<u>Задача 3</u>. Сколько существует двоичных матриц с m строками и n столбцами, все строки которых различны?

<u>*Решение*</u>. Число различных двоичных упорядоченных наборов длины n равно 2^n. Число всех двоичных матриц с m строками совпадает с числом всех размещений из 2^n элементов по m. Следовательно, по теореме 3 получаем, что число матриц равно $A_{2^n}^m = \dfrac{(2^n)!}{(2^n-m)!}$.

<u>Задача 4.</u> Сколькими способами из колоды в 36 карт можно вытащить 5 карт так, чтобы среди них были три карты червовой масти и две крестовой масти?

<u>*Решение.*</u> Всего в колоде имеем по 9 карт каждой из 4 мастей. Три карты червовой масти можем вытащить C_9^3 способами, а две карты крестовой масти можно вытащить C_9^2 способами. По правилу произведения получаем, что существует $C_9^3 \cdot C_9^2$ способов вытащить из колоды 5 карт определенным образом.

§4. Основные свойства биномиальных коэффициентов

Свойство 1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доказательство. Рассмотрим множество из n элементов $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Каждому (n,k)–сочетанию $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ однозначно соответствует $(n, n-k)$–сочетание α', составленное из элементов множества $A \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$. Отсюда следует, что число (n,k)–сочетаний и число $(n, n-k)$–сочетаний одинаково.

Убедиться в справедливости свойства 1 можно также непосредственной проверкой, расписав число сочетаний по теореме 4.

Свойство 2. $C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^{i} = C_n^i$.

Доказательство. Свойство доказывается непосредственной проверкой. Согласно теореме 4 имеем $C_{n-1}^{i-1} = \dfrac{(n-1)!}{(n-i)! \cdot (i-1)!}$,

$C_{n-1}^{i} = \dfrac{(n-1)!}{(n-1-i)! \cdot i!}$. Отсюда получаем, что

$$C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^{i} = \frac{(n-1)!}{(n-i)! \cdot (i-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-i)! \cdot i!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-i)! \cdot i!} = C_n^i .$$

Свойство 3. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Число всех подмножеств множества A равно 2^n, число всех k–элементных подмножеств множества A равно C_n^k, тогда $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

§5. Бином Ньютона

Теорема 5. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

Доказательство. Утверждение доказывается индукцией по n. При $n=1$ имеем $a+b=C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0$, т.е. утверждение выполнено.

Пусть утверждение выполнено для любого $i<n$. Имеем $(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-1-k}$ по предложению индукции.

Тогда $(a+b)^n = (a+b)^{n-1}\cdot(a+b) = (\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-1-k})(a+b) =$

$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} =$(в первой обобщенной сумме выделим последнее слагаемое, а во второй – первое, получим)

$$=\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{n-1-k} + a^n b^0 + a^0 b^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} =$$

(после замены k на $i+1$ в последнем слагаемом получим)

$$=\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{n-1-k} + a^n b^0 + a^0 b^n + \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-1}^{i+1} a^{i+1} b^{n-i-1} =$$

(в последнем слагаемом заменим i на k, объединим слагаемые)

$$=\sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1})}_{C_n^{k+1}} a^k b^{n-1-k} + a^n b^0 + a^0 b^n =$$

(воспользовались свойством 2 для сочетаний)
$$= \sum_{k=0}^{n-2} C_n^{k+1} a^{k+1} b^{n-k-1} + C_n^n a^n b^0 + C_n^0 a^0 b^0 =$$
(наконец, после замены k на $i-1$ получаем)
$$= \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i a^i b^{n-i} + C_n^n a^n b^0 + C_n^0 a^0 b^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}.$$ Теорема доказана.

<u>Следствие 1.</u> $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

<u>Следствие 2.</u> $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Утверждение следует из теоремы при условии, что $a=1, b=1$.

<u>Следствие 3.</u> $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$.

Утверждение следует из теоремы при условии, что $a=1, b=-1$.

<u>Следствие 4.</u> $\sum_{k} C_n^{2k} = \sum_{k} C_n^{2k+1} = 2^{n-1}$.

§6. Разбиение множества

Множества $A_1, A_2, ..., A_k$ задают *разбиение множества* A, если объединение всех множеств равно A и все множества попарно не пересекаются, т.е. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$ и $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Теорема 6. Число различных упорядоченных разбиений множества A мощности n на k подмножеств $A_1, A_2, ..., A_k$ заданных мощностей $s_1, s_2, ..., s_k$ равно $\dfrac{n!}{s_1! s_2! ... s_k!}$.

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, ..., A_k$ — некоторое разбиение множества A на k подмножеств, причем $|A_1| = s_1$, $|A_2| = s_2$, ..., $|A_k| = s_k$, $\sum\limits_{i=1}^{k} s_i = n$, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

Множество A_1 может быть выбрано $C_n^{s_1}$ способами, после выбора A_1 множество A_2 может быть выбрано $C_{n-s_1}^{s_2}$ способами и т.д. После выбора множеств $A_1, A_2, ..., A_{k-1}$ множество A_k может быть выбрано $C_n^{s_1} \cdot C_{n-s_1}^{s_2} ... C_{n-s_1-s_2-...-s_{k-1}}^{s_k}$ способами. Тогда по правилу произведений получаем, что общее число разбиений равно

$$C_n^{s_1} \cdot C_{n-s_1}^{s_2} ... C_{n-s_1-s_2-...-s_{k-1}}^{s_k} = \frac{n!}{(n-s_1)! s_1!} \cdot \frac{(n-s_1)!}{(n-s_1-s_2)! s_2!} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n-s_1-s_2)!}{(n-s_1-s_2-s_3)! s_3!} \cdot ... \cdot \frac{(n-s_1-...-s_{k-1})!}{(n-s_1-...-s_{k-1}-s_k)! s_k!} = \frac{n!}{s_1! s_2! ... s_k!}.$$

Теорема доказана.

Число $\dfrac{n!}{s_1! s_2! ... s_k!}$ называется *полиномиальным коэффициентом* и обозначается через $C_n(s_1, s_2, ..., s_k)$.

Теорема 7. Если множества $A_1, A_2, ..., A_k$ задают разбиение множества A, тогда $|A| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму Венна *k*–го порядка для множеств $A_1, A_2, ..., A_k$. Так как $A_1, A_2, ..., A_k$ задают разбиение множества A, то $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, т.е. все элементы A_i расположены в одной ячейке $\overline{A_1} ... \overline{A_{i-1}}\, A_i\, \overline{A_{i+1}} ... \overline{A_k}$. Получаем, что $A_i = \overline{A}_1 \overline{A}_2 ... \overline{A}_{i-1} A_i \overline{A}_{i+1} .... \overline{A}_k$. Тогда $|A| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| =$

$$= \left|\bigcup_{i=1}^{k} \overline{A}_1 ... \overline{A}_{i-1} A_i \overline{A}_{i+1} ... \overline{A}_k\right| = \sum_{i=1}^{k} \left|\overline{A}_1 ... \overline{A}_{i-1} A_i \overline{A}_{i+1} ... \overline{A}_k\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Следствие. Если множества $A_1, A_2, ..., A_k$ не пересекаются, то

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Это следствие представляет собой обобщенное правило суммы.

Задача 5. Дано множество U из 9 элементов. Каким числом способов в нем можно выбрать три подмножества A, B, C так, чтобы выполнялись условия: $|AC \cup B| = 4$, $|\overline{A}\,\overline{B}\,C| = 2$.

Решение. Построим диаграмму Венна для искомых подмножеств A, B, C универсального множества U (см. рис.1). Введем обозначения: $A_1 = AC \cup B$, $A_2 = \overline{A}\,\overline{B}\,C$, $A_3 = \overline{B}\,\overline{C}$.

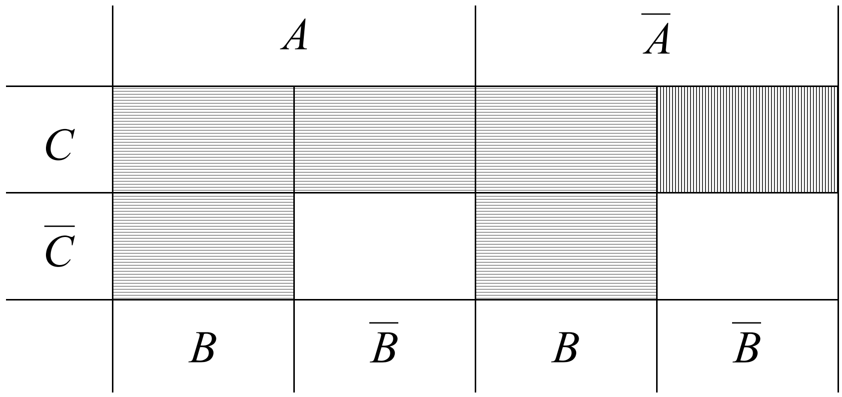

Рис.1

Заметим, что $|A_1| = 4$ (это подмножество размещено в пяти ячейках диаграммы Венна – горизонтальная штриховка), $|A_2| = 2$ (одна ячейка диаграммы – вертикальная штриховка) и $|A_3| = 3$ (две ячейки диаграммы), причем подмножества A_1, A_2, A_3 задают разбиение множества U. Тогда по правилу произведения получаем, что число способов выбора подмножеств A, B, C равно $C_9(4,2,3)\cdot 5^4 \cdot 2^3 = \dfrac{9!}{4!\cdot 2!\cdot 3!}\cdot 5^4 \cdot 2^3 = 6\,300\,000$.

§7. Перестановки с фиксированным числом повторений

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Упорядоченную (k,n)–выборку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ с повторениями, где α_i встречается s_i раз для всех $i = \overline{1,k}$, назовем *перестановкой с повторениями*. Число всех таких перестановок обозначим через $P(s_1, s_2, ..., s_k)$.

<u>Теорема 8.</u> $P(s_1, s_2, ..., s_k) = C_n(s_1, s_2, ..., s_k) = \dfrac{n!}{s_1! s_2! ... s_k!}$.

Доказательство. Пусть B_i − множество номеров мест, на которых стоит элемент α_i в перестановке α.

Число всех перестановок с повторениями совпадает с числом всех разбиений множества $B=\{1,2,...,n\}$ на подмножества $B_1,B_2,...,B_k,$ где $|B_i|=s_i,\quad i=\overline{1,k}$. По теореме 6 получаем, что число всех разбиений n–элементного множества на k подмножеств равно $C_n(s_1,s_2,...,s_k)=\dfrac{n!}{s_1!s_2!...s_k!}$. Отсюда получаем, что $P(s_1,s_2,...,s_k)=C_n(s_1,s_2,...,s_k)=\dfrac{n!}{s_1!s_2!...s_k!}$, что и требовалось доказать.

Задача 6. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «математика»?

Решение. В слове «математика» буква «м» встречается 2 раза, буква «а» – 3 раза, буква «т» – 2 раза, буква «е» – 1 раз, буква «и» - 1 раз, буква «к» – 1 раз. Всего в слове 10 букв, тогда число всех различных слов равно $P(2,3,2,1,1,1)=\dfrac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=151\,200$.

Задача 7. Сколько слов длины 9 в алфавите $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ можно составить при условии, что $n_1=n_2=n_3=n_4$, где n_i обозначает число вхождений буквы a_i в слово.

Решение. Если $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$, тогда $n_5 + n_6 = 9$, и число слов, удовлетворяющих этому условию, равно числу двоичных последовательностей длины 9.

Если $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$, тогда $n_5 + n_6 = 5$, и, рассматривая всевозможные разложения числа 5 на упорядоченную сумму двух слагаемых, получаем, что число слов в этом случае равно $P(1,1,1,1,0,5) + P(1,1,1,1,1,4) + P(1,1,1,1,2,3) + P(1,1,1,1,3,2) +$

$$+P(1,1,1,1,4,1) + P(1,1,1,1,5,0) = 2 \cdot \frac{9!}{5!} + 2 \cdot \frac{9!}{4!} + 2 \cdot \frac{9!}{2! \cdot 3!} = 96\,768.$$

Наконец, если $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$, тогда $n_5 + n_6 = 1$, и число слов равно $P(2,2,2,2,0,1) + P(2,2,2,2,1,0) = 2 \cdot \dfrac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 45\,360$.

По правилу суммы получаем, что всего можно составить $512 + 96\,768 + 45\,360 = 142\,640$ слов.

Задача 8. Сколькими способами можно переставить буквы слова «комиссия» так, чтобы:

1) никакие две гласные не стояли рядом;

2) не менялся порядок гласных букв;

3) две буквы «с» не шли подряд?

Решение. 1) Имеется $P(1,1,2) = \dfrac{4!}{2!} = 12$ перестановок согласных. Для каждого размещения согласных имеем 5 мест для размещения четырех гласных слова, тогда число всех размещений гласных букв слова равно $\frac{A_5^4}{2!} = \frac{5!}{2!} = 60$. По правилу произведения получаем $12 \cdot 60 = 720$ слов.

2) Число размещений согласных букв с учетом того, что буква «с» повторяется дважды равно $\frac{A_8^4}{2!} = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = 840$. Очевидно, что на оставшиеся места гласные в указанном порядке размещаются однозначно.

3) Число различных слов, которые получаются перестановками букв слова «комиссия» равно $P(1,1,1,1,2,2) = \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 10\ 080$. Число слов, в которых две буквы «с» идут подряд равно $P(1,1,1,1,1,2) = \frac{7!}{2!} = 2\ 520$. Получаем, $10\ 080 - 2\ 520 = 7\ 560$ слов, в которых две буквы «с» не идут подряд.

<u>Задача 9.</u> Сколькими способами можно разместить n одинаковых карандашей в k различных ящиках?

<u>Решение</u>. Перенумеруем ящики. Обозначим через n_i − число карандашей, попавших в i−ый ящик. Каждому размещению карандашей поставим в соответствие последовательность из нулей и единиц следующим образом: сначала записываем n_1 нулей, затем записываем единицу, далее пишем n_2 нулей, снова единицу, и

т.д. Заканчивается последовательность n_k нулями. Эта последовательность имеет $(n_1 + n_2 + ... + n_k) = n$ нулей и $k-1$ единиц.

Например, при $n = 10$, $k = 4$ размещению, при котором в первом ящике 5 карандашей, во втором – нет карандашей, в третьем ящике – 3 карандаша, а в четвертом – 2 карандаша, соответствует последовательность 0000011000100.

Таким образом, число всех размещений совпадает с числом всех двоичных наборов с n нулями и $(k-1)$ единицами. Число таких наборов, в силу теоремы 8, равно $P(n, k-1) = \dfrac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$.

<u>Задача 10.</u> Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$?

<u>*Решение.*</u> Пусть $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_k = s_k$ решение уравнения. Этому решению поставим в соответствие двоичный набор с n нулями и $(k-1)$ единицами следующим образом:

$$\underbrace{0....0}_{s_1 \text{ раз}}\ 1\ \underbrace{0...0}_{s_2 \text{ раз}}\ 1\ ...\ 1\ \underbrace{0...0}_{s_k \text{ раз}}\ .$$

Таким образом, между множеством двоичных наборов с n нулями и $(k-1)$ единицами и множеством решений заданного уравнения устанавливается взаимно-однозначное соответствие, откуда число решений равно $P(n, k-1) = \dfrac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = C_{n+k-1}^{n} = C_{n+k-1}^{k-1}$.

§8. Число сочетаний с повторениями

Пусть $\hat{C}_n^k$ – число всех (n,k)–сочетаний с повторениями.

Теорема 9. $\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = P(n-1,k) = C_{n+k-1}^{n-1}$.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $\tilde{\alpha} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik})$ (n,k)–сочетание с повторениями, в котором элемент a_i встречается s_i раз для всех $i = \overline{1,n}$, причем $\sum_{i=1}^{n} s_i = k$. Сочетанию $\tilde{\alpha}$ поставим в соответствие двоичный набор, в котором $(n-1)$ единиц и k нулей, следующим образом: $\underbrace{0....0}_{s_1 \text{ раз}}\, 1\, \underbrace{0...0}_{s_2 \text{ раз}}\, 1\, ...\, 1\, \underbrace{0...0}_{s_n \text{ раз}}$. Между множеством двоичных наборов с $(n-1)$ единицами и k нулями и множеством (n,k)–сочетаний с повторениями существует взаимно-однозначное соответствие. Отсюда получаем, что $\hat{C}_n^k = P(n-1,k) = \dfrac{(n-k-1)!}{(n-1)!k!} = C_{n+k-1}^k$. Теорема доказана.

Задача 11. Сколькими способами можно купить букет из 9 роз, если в продаже имеются розы 3 цветов: белые, розовые и красные.

Решение. Число всех букетов совпадает с числом всех сочетаний из трех элементов по 9 с повторениями, тогда

$$\hat{C}_3^9 = P(2,9) = C_{11}^2 = \frac{11!}{2!\cdot 9!} = \frac{11\cdot 10}{2} = 55.$$

§9. Формула включений и исключений

Пусть заданы множества A и B, найдем число элементов в $A \cup B$. Если $A \cap B = \varnothing$, то $\left|A \bigcup B\right| = |A| + |B|$ в силу следствия теоремы 7.

Если $A \cap B \neq \varnothing$, построим диаграмму Венна 2-го порядка.

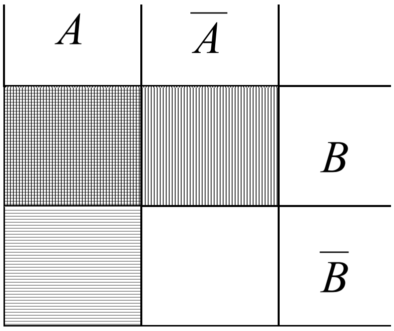

Рис.2

Множество A пометим горизонтальной штриховкой, а B – вертикальной, тогда в $A \cup B$ входят все элементы универса, которые находятся в заштрихованной области, причем элементы множества $A \cap B$ находятся в дважды заштрихованной области, так как они входят и в множество A, и в множество B. Отсюда получаем, что $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. (1)

Очевидно, что формула (1) верна и в случае, если $A \cap B = \varnothing$.

Из формулы (1) можно получить формулу для мощности объединения трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B)C| =$$

$$= |A| + |B| - |AB| - |AC| - |BC| + \underbrace{|ACBC|}_{=|ABC|} + |C|.$$

Отсюда получаем, что

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |AC| - |BC| + |ABC|. \qquad (2)$$

Аналогично из формул (1) и (2) можно получить формулы для мощности объединения четырех множеств и т.д.

<u>Теорема 10.</u> $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_k)\subseteq \\ \subseteq\{1,2,\dots,n\}}} \left|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right| \qquad (3)$$

<u>*Доказательство.*</u> Утверждение докажем индукцией по n.

Для $n = 1$ утверждение очевидно. Справедливость теоремы для $n = 2$ вытекает согласно формуле (1).

Допустим, что теорема выполнена для $(n-1)$ множеств.

Пусть $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}$. Тогда $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A \cup A_n$, следовательно, $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A| + |A_n| - |AA_n|$ в силу формулы (1).

Согласно предположению индукции,

$$|A| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq \\ \subseteq\{1,\dots,n-1\}}} \left|A_{i_1},\dots,A_{i_k}\right|. \qquad (4)$$

Рассмотрим $|AA_n| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i A_n\right|$. Обозначим $A_i A_n$ через β_i, тогда

$$|AA_n| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} \beta_i\right| \overset{(4)}{=} \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq \\ \subseteq\{1,\dots,n-1\}}} \left|\beta_{i_1}\dots\beta_{i_k}\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq \\ \subseteq\{1,\dots,n-1\}}} \left|A_{i_1}\dots A_{i_k}A_n\right| = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{n\in\{i_1,\dots,i_{k+1}\}\subseteq \\ \subseteq\{1,\dots,n\}}} \left|A_{i_1}\dots A_{i_{k+1}}\right| =$$

$$= \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-2} \sum_{\substack{n\in\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq \\ \subseteq\{1,\dots,n\}}} \left|A_{i_1}\dots A_{i_k}\right|.$$

Таким образом, получаем, что $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| =$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq \\ \subseteq\{1,\dots,n-1\}}} \left|A_{i_1}\dots.A_{i_k}\right| + \left|A_n\right| - \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-2} \sum_{\substack{n\in\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq \\ \subseteq\{1,\dots,n\}}} \left|A_{i_1},\dots,A_{i_k}\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_k\}\subseteq \\ \subseteq\{1,\dots,n-1\}}} \left|A_{i_1}\dots.A_{i_k}\right| + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{n\in\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq \\ \subseteq\{1,\dots,n\}}} \left|A_{i_1}\dots.A_{i_k}\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq \\ \subseteq\{1,\dots,n\}}} \left|A_{i_1}\dots.A_{i_k}\right|.$$

Теорема доказана.

Задачи

1. Студенты изучают 7 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, если в день следует устанавливать не менее двух и не более четырех предметов?
2. Сколько существует семизначных чисел, делящихся на 5? Сколько среди них четных?

3. Сколько существует девятизначных чисел, которые одинаково читаются как слева направо, так и справа налево? Сколько среди них четных?
4. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого n-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?
5. В комнате n лампочек. Сколькими способами можно зажечь k лампочек? Сколько существует способов освещения комнаты?
6. Сколько существует пятизначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?
7. Сколько существует шестизначных чисел, у которых цифры расположены в неубывающем порядке?
8. Имеется n черных и m белых шаров. Сколькими способами можно их выложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?
9. Студенту необходимо сдать 4 экзамена в течение 10 дней, причем известно, что в последний день он сдает экзамен. Сколькими способами он может это сделать?
10. Сколькими способами можно рассадить n гостей за круглым столом?
11. Имеется 4 типа открыток. Сколькими способами можно выбрать 10 открыток?

12. Сколькими способами n различных (одинаковых) предметов можно разложить в k одинаковых ящиков (разных ящиков)?
13. Сколько существует чисел не больше 100, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?
14. На полке стоят n книг. Сколькими способами можно взять из них m так, чтобы никакие две не стояли рядом?
15. Сколькими способами можно выбрать три различных карандаша из имеющихся пяти карандашей разных цветов?
16. В группе 5 девочек и 7 мальчиков. Сколькими способами их можно разделить на 2 группы по 6 человек? Сколькими способами это можно сделать при условии, что в каждой группе должно быть хотя бы по одной девочке?
17. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом m юношей и n девушек так, чтобы никакие две девушки не сидели рядом?
18. Имеется n абонентов телефонной сети. Сколькими способами можно одновременно соединить три пары?
19. Три студента сдают экзамен. Сколькими способами они могут сдать экзамен по пятибалльной системе? По семибалльной?
20. Сколько различных слов можно составить из букв слова «комбинаторика»?
21. Сколькими способами 12 одинаковых монет можно разложить по пяти пакетам так, чтобы ни один из пакетов не был пуст?

22. В конструкторском бюро все сотрудники знают хотя бы один из трех языков. Шестеро знают английский, шестеро – немецкий, семеро – французский. Четверо знают английский и немецкий, трое – немецкий и французский, двое – французский и английский. Один сотрудник знает все три языка.
    1) Сколько всего сотрудников в КБ?
    2) Сколько из них знают только один язык?
    3) Ровно 2 языка?
23. При обследовании читательских вкусов студентов оказалось, что 60% студентов читают журнал A, 50% – журнал B, 50% – журнал C, 30% – журналы A и B, 20% – журналы B и C, 40% – журналы A и C, 10% – журналы A, B и C. Сколько процентов студентов:
    1) не читает ни одного из журналов;
    2) читает в точности 2 журнала;
    3) читает не менее 2 журналов?
24. На одной из кафедр университета работают 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 10 человек знают английский, 7 - немецкий, 6 - французский. 5 - английский и немецкий, 4 - английский и французский, 3 - немецкий и французский. Сколько человек знают:
    1) все 3 языка?
    2) ровно 2 языка?
    3) только английский язык?

25. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр числа 12304122?
26. В лифт сели 8 человек. Сколькими способами они могут выйти из лифта на четырех этажах так, чтобы на каждом этаже вышел, по крайней мере, один человек?
27. Сколькими способами четыре игрока могут разделить 28 костей домино по 7 штук каждому?
28. Имеется 10 одинаковых ручек, 7 простых карандашей и 8 кисточек. Сколькими способами их можно разложить по двум коробкам? По трем коробкам?
29. Имеется s_1 предметов 1-го типа, s_2 предметов 2-го типа,…, s_k – k-ого типа. Сколькими способами их можно разделить между двумя людьми так, чтобы каждый получил не менее r_i предметов i-ого типа, $i = \overline{1, k}$?
30. Имеется s_1 предметов 1-го типа, s_2 предметов 2-го типа,…, s_k – k-ого типа. Сколькими способами их можно разделить между k лицами? Сколькими способами это можно сделать при условии, что каждый получит хотя бы по один предмет?
31. Сколько целых положительных решений имеет уравнение
$$x_1 + x_2 + ... + x_k = n \quad (n > k)?$$
32. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?

33. Каким числом способов можно на обычной шахматной доске разместить белую и черную ладьи так, чтобы они не атаковали друг друга?
34. Лифт останавливается на десяти этажах. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 8 пассажиров, находящихся в кабине лифта?
35. Семь яблок и три апельсина надо положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один апельсин, и чтобы количество фруктов в них было одинаковым. Сколькими способами это можно сделать?
36. Лифт, в котором находится 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры выходят группами в два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?
37. Сколько существует семизначных чисел, у которых:
    1) цифры различны, причем первая - не 9, а последняя - не 0?
    2) ровно три цифры четные?
    3) среди цифр имеется не менее двух четных?
    4) среди цифр есть одинаковые?
    5) сумма цифр четна?
38. Шесть ящиков различных материалов доставляют на восемь этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких из них на восьмой этаж будет доставлено не менее двух материалов?

39. Номер кодового замка состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?
40. Код замка состоит из пяти десятичных цифр. Известно, что среди них один раз встречается цифра 0 и дважды - цифра 3. Сколько комбинаций нужно перебрать, чтобы наверняка открыть замок?
41. Чему равна сумма четырехзначных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр
    1) 2, 5, 5, 5;
    2) 3, 7, 7, 5?
42. Сколько существует пятизначных чисел, у которых
    1) цифры различны, причем первая – не 5, последняя – не 0;
    2) среди цифр есть одинаковые;
    3) цифры различны, причем 0 отсутствует, а цифры 2, 4, 5 встречаются одновременно;
    4) среди цифр не менее двух четных?
43. Сколько чисел, меньших 10^5, можно записать из цифр 2, 4, 5? Сколько среди них нечетных?
44. Сколько имеется различных треугольников, длины сторон которых принимают значения: 8, 10, 12 и 14 см? Сколько среди них равносторонних, равнобедренных и разносторонних?

45. Сколькими способами из шести пар перчаток различных размеров можно выбрать одну перчатку на левую руку и одну – на правую руку так, чтобы перчатки были разных размеров?
46. У одного студента 5 разных книг, у другого — 7 других книг. Сколькими способами студенты могут обменяться двумя книгами?
47. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?
48. Стороны каждой из двух игральных костей помечены числами 0, 1, 3, 7, 15, 31. Сколько различных сумм может получиться при метании этих костей?
49. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с пятью полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?
50. Кидают шесть игральных костей (различимых друг от друга), помеченных числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. В скольких случаях они дадут два вида очков?
51. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, 1 апельсин, 1 сливу, 1 лимон, 1 грушу, 1 персик и 1 айву?

Контрольные задания

1. Дано множество U из n элементов. Каким числом способов в нем можно выбрать три подмножества A, B, C так, чтобы выполнялись заданные условия?

1. $n = 7$, $|A - B| = 1$, $|B - (A \cup C)| = 4$;
2. $n = 9$, $|(A \cap B) \cup C| = 2$, $|A - (B \cup C)| = 5$;
3. $n = 8$, $|A \cup B| = 6$, $|A - (B \cup C)| = 5$;
4. $n = 7$, $|A \cup B \cup C| = 5$, $|A - B| = 4$;
5. $n = 6$, $|A - B| = 3$, $|B \cap (A \cup C)| = 2$;
6. $n = 7$, $|A \cap (B \cup C)| = 2$, $|(B \cup C) - A| = 1$;
7. $n = 9$, $|(A \cap B) \cup C| = 8$, $|A \cap (B \cup C)| = 1$;
8. $n = 7$, $|A \cup B| = 2$, $|C \cap (A \cup B)| = 1$;
9. $n = 9$, $|A - (B \cup C)| = 6$, $|C \cap (A \cup B)| = 2$;
10. $n = 8$, $|(A \cap B) \cup C| = 6$, $|C - (A \cup B)| = 4$;
11. $n = 8$, $|A - B| = 2$, $|A \cap B \cap C| = 4$;
12. $n = 7$, $|(A - B) \cup C| = 1$, $|B - (A \cup C)| = 3$;
13. $n = 7$, $|A \cup B| = 5$, $|A \cap B \cap C| = 3$;
14. $n = 8$, $|A - B| = 6$, $|(B \cap C) - A| = 1$;
15. $n = 5$, $|(A \cap B) \cup C| = 3$, $|C - (A \cap B)| = 1$;
16. $n = 6$, $|A \cup B| = 4$, $|(A \cup B) - C| = 1$;
17. $n = 8$, $|A - (B \cup C)| = 5$, $|(B \cup C) - A| = 1$;
18. $n = 7$, $|(A \cap B) \cup C| = 4$, $|C - (A \cap B)| = 1$;

19. $n=9$, $|A-B|=3$, $|(B\cap C)-A|=5$;

20. $n=6$, $|A-B|=3$, $|B-(A\cap C)|=2$;

21. $n=7$, $|(A-B)\cup C|=6$, $|C\cap(A\cup B)|=3$;

22. $n=8$, $|A-(B\cup C)|=5$, $|B-(A\cap C)|=2$;

23. $n=7$, $|(A-B)\cup C|=6$, $|A-(B\cup C)|=3$;

24. $n=9$, $|A\cap B|=4$, $|A-(B\cup C)|=4$;

25. $n=7$, $|A\cap B|=5$, $|(A\cup C)-B|=1$;

26. $n=6$, $|(A-B)\cup C|=4$, $|(A\cup C)-B|=2$;

27. $n=8$, $|A\cap B\cap C|=4$, $|(A\cup B)-C|=1$;

28. $n=8$, $|A\cap B|=5$, $|C-(A\cup B)|=2$;

29. $n=8$, $|(A-B)\cup C|=7$, $|C-B|=6$;

30. $n=7$, $|A\cap B\cap C|=3$, $|A-(B\cap C)|=2$;

31. $n=6$, $|(A\cup B)-C|=3$, $|C-(A\cap B)|=2$;

32. $n=7$, $|A\cap B|=1$, $|(A\cap C)-B|=3$;

33. $n=8$, $|(A-C)\cup B|=1$, $|(A\cap C)-B|=4$;

34. $n=6$, $|A\cup B|=4$, $|(B\cap C)-A|=1$;

35. $n=6$, $|A\cap B|=4$, $|C-(A\cap B)|=1$;

36. $n=7$, $|(A-B)\cup C|=6$, $|C-(A\cap B)|=2$;

37. $n=6$, $|A\cup B|=5$, $|A-(B\cap C)|=1$;

38. $n=7$, $|(A\cap B)-C|=4$, $|C\cap(A\cup B)|=1$;

39. $n=6$, $|(A-B)\cup C|=4$, $|A\cap B\cap C|=1$;

40. $n=8$, $|A\cup B\cup C|=4$, $|A\cap B|=1$.

2. На одной из кафедр университета работают S человек, среди которых T человек не знают ни одного иностранного языка. A человек знают английский, N – немецкий, F – французский. AN знают английский и немецкий, AF – английский и французский, NF – немецкий и французский, ANF знают все три языка. По заданным в таблице условиям восстановить недостающую информацию.

№	S	A	N	F	AN	AF	NF	ANF	T
1.	17	11	6	5	4	3	2	1	?
2.	16	?	9	7	4	4	5	2	3
3.	17	8	10	?	6	4	4	3	5
4.	20	11	8	5	7	3	4	?	7
5.	?	10	7	4	5	4	3	3	5
6.	17	12	9	7	8	?	5	4	3
7.	21	11	?	6	6	5	3	2	5
8.	26	14	11	5	?	4	3	2	6
9.	19	13	9	5	5	3	3	1	?
10.	17	?	9	6	6	4	4	2	2
11.	16	12	9	?	6	4	3	3	1
12.	17	13	6	4	6	3	2	?	3
13.	?	14	9	7	7	5	3	2	1
14.	18	15	8	6	7	?	4	3	2
15.	20	12	?	8	5	5	3	1	4
16.	23	14	8	7	?	4	4	2	5
17.	23	15	8	9	3	4	5	2	?

№	*S*	*A*	*N*	*F*	*AN*	*AF*	*NF*	*ANF*	*T*
18.	?	14	7	8	4	5	4	3	1
19.	20	?	9	6	4	3	2	1	2
20.	25	11	14	10	6	4	?	2	3
21.	27	17	13	?	9	6	5	4	4
22.	30	18	14	9	9	5	4	?	4
23.	26	15	13	11	8	?	5	3	2
24.	28	17	?	10	11	5	7	4	4
25.	30	19	16	12	?	8	7	5	3
26.	35	20	16	15	10	8	9	6	?
27.	?	20	17	13	8	5	4	1	5
28.	39	?	17	13	8	5	6	2	4
29.	37	22	16	?	8	5	4	3	2
30.	33	19	18	11	9	?	7	2	3
31.	31	17	19	11	10	4	7	?	2
32.	33	21	16	13	9	7	?	3	1
33.	38	22	19	14	10	6	5	2	?
34.	33	20	?	15	11	8	7	4	2
35.	37	23	18	16	?	9	8	5	3
36.	?	22	20	13	11	7	6	4	3
37.	38	23	21	?	11	8	9	3	2
38.	39	?	15	17	8	6	7	2	4
39.	38	22	23	16	12	?	9	4	1
40.	36	21	17	14	9	7	6	?	2

3. Рассматриваются слова в алфавите $\{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$. Через n_i обозначается число вхождений буквы a_i в слово. Требуется подсчитать число слов длины n, удовлетворяющих данным условиям.

1.	$q=3$,	$n=9$,	$n_1 \ge 6$;
2.	$q=4$,	$n=7$,	$n_1 = 2n_2$;
3.	$q=4$,	$n=7$,	$n_1 + n_2 < n_3 + n_4$;
4.	$q=5$,	$n=8$,	$n_1 = n_2 + n_3 + n_4$;
5.	$q=3$,	$n=9$,	$n_1 = 2, \quad n_2 < n_3$;
6.	$q=5$,	$n=7$,	$n_1 + n_2 = 3, \quad n_3 \ge 2$;
7.	$q=3$,	$n=7$,	$n_1 = n_2$;
8.	$q=3$,	$n=10$,	$n_1 = n_2 + n_3$;
9.	$q=3$,	$n=7$,	$n_1 + n_2 < n_3$;
10.	$q=4$,	$n=6$,	$n_1 + n_2 = n_3$;
11.	$q=4$,	$n=5$,	$n_1 < n_2$;
12.	$q=3$,	$n=8$,	$n_1 + n_2 \ge 6$;
13.	$q=3$,	$n=8$,	$2 < n_1 < 6$;
14.	$q=3$,	$n=6$,	$n_1 \le n_2 \le n_3$;
15.	$q=4$,	$n=7$,	$n_1 \le 2, \quad n_2 + n_3 = 4$;
16.	$q=5$,	$n=8$,	$n_1 = 4, \quad n_2 \le 3$;
17.	$q=4$,	$n=6$,	$n_1 \ge n_2 + n_3 + n_4$;
18.	$q=4$,	$n=8$,	$n_1 + n_2 = 3, \quad n_3 \ge 2$;
19.	$q=4$,	$n=9$,	$n_1 > n_2 > 2$;
20.	$q=5$,	$n=6$,	$n_1 = n_2$;

21. $q = 5$, $n = 6$, $n_1 + n_2 = n_3 + n_4$;
22. $q = 4$, $n = 8$, $n_1 = 2$, $n_2 \geq 3$;
23. $q = 5$, $n = 7$, $n_1 \leq 2$, $n_2 + n_3 + n_4 = 3$;
24. $q = 4$, $n = 8$, $n_1 + n_2 \leq 4$, $n_3 = 1$;
25. $q = 5$, $n = 7$, $n_1 = n_2 = n_3$;
26. $q = 4$, $n = 7$, $n_1 < n_2 < 4$;
27. $q = 5$, $n = 6$, $n_1 + n_2 > n_3 + n_4 + n_5$;
28. $q = 5$, $n = 7$, $n_1 + n_2 + n_3 < n_4 < 4$;
29. $q = 4$, $n = 8$, $2n_1 + n_2 = 6$;
30. $q = 3$, $n = 9$, $n_1 \geq n_2 + n_3$;
31. $q = 4$, $n = 7$, $2n_1 < n_2 + n_3$;
32. $q = 4$, $n = 7$, $n_1 + 2n_2 \leq 3$;
33. $q = 5$, $n = 6$, $n_1 + n_2 = n_3 + n_4 + n_5$;
34. $q = 3$, $n = 8$, $2n_1 < n_2 + n_3$;
35. $q = 4$, $n = 8$, $2n_1 = n_2 + n_3$;
36. $q = 5$, $n = 8$, $n_1 + n_2 + n_3 = 2$;
37. $q = 4$, $n = 8$, $n_2 = n_1 + 2$;
38. $q = 3$, $n = 9$, $n_1 + n_2 < n_3$;
39. $q = 3$, $n = 9$, $2n_1 \leq n_2 + n_3$;
40. $q = 5$, $n = 7$, $n_1 + n_2 + n_3 = 2$, $n_4 \geq 3$.

4. Сколькими способами можно переставить буквы слова:

1. «здание», чтобы гласные шли в алфавитном порядке;
2. «перешеек», чтобы четыре буквы «е» не шли подряд;
3. «ежевика», чтобы «и» шла непосредственно после «к»;

4. «тарантас», чтобы две буквы «а» не шли подряд;
5. «каракули», чтобы никакие две гласные не стояли рядом;
6. «группоид», чтобы не менялся порядок гласных букв;
7. «перемена», чтобы три буквы «е» не шли подряд;
8. «столовая», чтобы никакие две гласные не стояли рядом;
9. «фигура», чтобы согласные шли в алфавитном порядке;
10. «баобаб», чтобы три буквы «б» не шли подряд;
11. «тетрадь», чтобы «ь» шла непосредственно после «р»;
12. «колокола», чтобы две буквы «о» не шли подряд;
13. «симфония», чтобы никакие две согласные не стояли рядом;
14. «симметрия», чтобы не менялся порядок гласных букв;
15. «кукуруза», чтобы две буквы «у» не шли подряд;
16. «алгебра», чтобы «р» шла непосредственно после «а»;
17. «автобус», чтобы гласные шли в алфавитном порядке;
18. «карандаш», чтобы две буквы «а» не шли подряд;
19. «решение», чтобы «е» шла непосредственно после «н»;
20. «множество», чтобы согласные шли в алфавитном порядке;
21. «апелляция», чтобы «я» шла непосредственно после «л»;
22. «гиппопотам», чтобы гласные шли в алфавитном порядке;
23. «баллада», чтобы две буквы «а» не шли подряд;
24. «интеллект», чтобы «л» шла непосредственно после «е»;
25. «идиллия», чтобы три буквы «и» не шли подряд;
26. «пассажир», чтобы согласные шли в алфавитном порядке;
27. «диаграмма», чтобы «м» шла непосредственно после «а»;

28. «оперетта», чтобы не менялся порядок гласных букв;
29. «гипербола», чтобы гласные шли в алфавитном порядке;
30. «баррикада», чтобы две буквы «а» не шли подряд;
31. «программа», чтобы «а» шла непосредственно после «р»;
32. «кенгуру», чтобы согласные шли в алфавитном порядке;
33. «колоннада», чтобы «о» шла непосредственно после «к»;
34. «килограмм», чтобы гласные шли в алфавитном порядке;
35. «бестселлер», чтобы две буквы «е» не шли подряд;
36. «периметр», чтобы «е» шла непосредственно после «р»;
37. «поговорка», чтобы согласные шли в алфавитном порядке;
38. «междометие», чтобы «м» шла непосредственно после «е»;
39. «профессор», чтобы не менялся порядок гласных букв;
40. «корректор», чтобы три буквы «р» не шли подряд.

Литература

1. Алексеев В. Е. Элементы комбинаторики. – Пособие для студентов заочного отделения, Нижний Новгород, 2001.
2. Алексеев В.Е., Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Задачи по дискретной математике. – Методическая разработка, Нижний Новгород, 2003.
3. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.
4. Гаврилов Г.Н., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – М.: Наука, 1977.

5. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. – М.: Наука, 1977.
6. Киселева Л.Г. Элементы комбинаторики. – Методическая разработка, Нижний Новгород, 1990.
7. Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Тождества и уравнения в алгебре множеств. – Методическая разработка, Нижний Новгород, 1999.
8. Марков А.А. Элементы комбинаторного анализа. – Методическая разработка, Горький, 1988.
9. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

СОДЕРЖАНИЕ

§1. Сочетания, размещения, перестановки 3
§2. Основные правила комбинаторики 4
§3. Число сочетаний, размещений и размещений с повторениями 8
§4. Основные свойства биномиальных коэффициентов 11
§5. Бином Ньютона 12
§6. Разбиение множества 13
§7. Перестановки с фиксированным числом повторений 16
§8. Число сочетаний с повторениями 21
§9. Формула включений и исключений 22
Задачи 24
Контрольные задания 32
Литература 39

КОМБИНАТОРИКА

(методическая разработка)

Составители: Лариса Георгиевна Киселева, к. ф.-м. н.

Татьяна Геннадьевна Смирнова, к. ф.-м. н.

Подписано в печать Формат 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать офсетная. Усл.-печ. л. 2.
Тираж 500 экз. Заказ .... Бесплатно.

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,
603600, Н.Новгород, пр. Гагарина, 23.

Типография ННГУ, Н.Новгород, ул. Б. Покровская, 37.