## I. Комплексные числа.



### §1. Определение и свойства комплексных чисел.

*Определение.* Комплексными числами называются выражения вида

$$a + bi, \tag{1}$$

где $a, b$ действительные числа, а символ $i$ определяется равенством $i^2 = -1$ и называется мнимой единицей.

Читателю, который до сих пор не встречался с этим понятием, сразу сообщаем: любое квадратное уравнение имеет корни! Решим, например, уравнение $x^2 + x + 1 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}.$$

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ считаются равными тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Арифметические операции над комплексными числами выполняются по обычным правилам преобразования алгебраических выражений:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

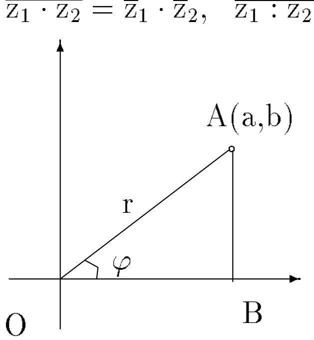
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Выражение (1) называется *алгебраической формой* записи комплексного числа, а вещественные числа $a$ и $b$ называются соответственно его *действительной* и *мнимой* частью.

Комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряженными.* Для данного комплексного числа $z$ сопряженное число обычно обозначается $\overline{z}$. Легко проверить для чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ справедливость следующих равенств: $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$, $\overline{z_1 : z_2} = \overline{z}_1 : \overline{z}_2$.




Подобно тому, как действительные числа изображаются точками числовой прямой, комплексному числу $z = a + bi$ можно сопоставить точку $A$ плоскости, на которой введена декартова система координат. $a$ - первая координата точки, $b$ - вторая. В треугольнике $OAB$ находим $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$

и получаем *тригонометрическую форму* записи числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Величина $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем* , а величина $\varphi$ - *аргументом.* Модуль и аргумент числа $z$ обозначаются соответственно $|z|$ и $\arg z$ .

Используя известные из школьного курса формулы для синуса и косинуса суммы двух углов, легко проверить справедливость равенств

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Из формулы для умножения методом математической индукции выводится *формула Муавра* возведения в целую степень:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Если $n$ натуральное число, то корнем степени $n$ из комплексного числа $u$ называется любое комплексное число $x$, удовлетворяющее уравнению $x^n = u$. Сейчас получим формулу для нахождения всех корней степени $n$ из заданного числа $u = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$. Предположим, что $x = \rho(\cos\psi + \sin\psi)$. Тогда, используя формулу Муавра, получаем равенство $x = \rho^n(\cos n\psi + \sin n\psi) = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ и, далее, $\rho = \sqrt[n]{r}$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k$ - целое. Итак,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}).$$

Так как период синуса и косинуса равен $2\pi$, то все возможные значения корня можно получить при $k = 0, 1, .., n-1$.

## II. Многочлены.

### §1. Операции над многочленами.

***Определение.*** Выражение $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ называется многочленом от $x$ с коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_n$.

Если $a_0 \neq 0$, то $n$ называется степенью многочлена, $a_0x^n$ называется старшим членом. Число $a_n$ называется свободным членом. Степень обозначается $\deg f(x)$. Результаты сложения и умножения многочленов находятся по обычным правилам преобразования алгебраических выражений. С делением многочлена на многочлена дело обстоит немного сложнее. Говорят, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $d(x)$, если существует многочлен $g(x)$ такой, что $f(x) = d(x)g(x)$. Многочлен $d(x)$ называется *делителем* $f(x)$. Например, многочлен $x+1$ является делителем многочлена $x^3+1$, так как $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, но не является делителем многочлена $x^2+1$. В последнем случае, однако, возможно деление с остатком. Например, $x^2+1 = (x+1)(x-1)+2$. Обоснование этой операции содержится в следующем утверждении.

***Утверждение 1.*** Для любых многочленов $f(x), g(x)$ существуют многочлены $d(x), r(x)$ такие, что $f(x) = d(x)g(x) + r(x)$, причем степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$.

Многочлен $d(x)$ называется *частным*, а $r(x)$ - *остатком*. Остаток от деления $f$ на $g$ обозначается $\mathrm{res}(f, g)$.

***Доказательство.*** Доказательство проведем индукцией по степени многочлена $f(x)$, полагая фиксированной степень $m$ многочлена $g(x)$. Если $\deg f(x) < m$ утверждение справедливо, так как $f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x)$. Предположим, что утверждение доказано для всех многочленов степени меньшей $k$ и докажем его для многочлена $f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_k$ степени $k$. Пусть $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m$. Рассмотрим многочлен
$f_1(x) = f(x) - (a_0/b_0)x^{k-m}g(x) =$
$= (a_1 - a_0b_1/b_0)x^{k-1} + (a_2 - a_0b_2/b_0)x^{k-2} + ....$

Так как $\deg f_1 < k$, то, по предположению индукции, существует представление

$$f_1(x) = d_1(x)g(x) + r_1(x), \quad \deg r_1 < \deg g.$$

Следовательно, $f(x) = [(a_0/b_0)x^{k-m} + d_1(x)]g(x) + r_1(x)$ ч.т.д.

Приведенное доказательство содержит способ нахождения частного и остатка, который называется *деление уголком.* Применим этот способ к многочленам $f(x) = x^4+x+1$ и $g(x) = x^2 + x + 1$:

$$\begin{array}{ll|l}
(1) & x^4 \;\; +x \;\; +1 & x^2 + x + 1 \\ \cline{3-3}
(2) & \underline{x^4 + x^3 + x^2} & x^2 - x \text{ - частное} \\
(3) & \quad -x^3 - x^2 + x + 1 & \\
(4) & \quad \underline{-x^3 - x^2 - x \quad\;\;} & \\
(5) & \qquad\qquad 2x + 1 \text{ - остаток} &
\end{array}$$

Комментарии: в строке (1) записаны многочлены $f(x), g(x)$;

– отношение их старших членов, равное $x^2$, записывается в строке (2) справа от вертикальной черты, слева от вертикальной черты записано произведение $x^2$ на $g(x)$;

– в строке (3) записана разность $f_1(x) = f(x) - x^2g(x)$;

– отношение старших членов многочленов $f_1(x), g(x)$, равное $-x$, записывается в в строке (2) справа от вертикальной черты, в строке (4) записан многочлен $-xg(x)$;

– в строке (5) записана разность $f_1(x) - (-x)g(x)$, степень этого многочлена меньше степени делителя, поэтому процесс деления закончен.

Деление произвольного многочлена $f(x) = a_0x^n + ... + a_n$ на многочлен $x - c$ степени 1 удобнее выполнять по *схеме Горнера*, описанной далее.

Пусть $d(x) = d_0x^{n-1} + .. + d_{n-1}$ - частное, а $r$ остаток от деления. Раскрывая скобки в равенстве $f(x) = d(x)(x-c)+r$, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем $a_0 = d_0, a_1 = d_1 - cd_0, ..., a_{n-1} = d_{n-1} - cd_{n-2}, a_n = r - cd_{n-1}$.

Из этих равенств можно выразить коэффициенты частного и остаток, а результат удобно расположить в виде таблицы

| | $a_0$ | $a_1$ | .... | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | $d_0 = a_0$ | $d_1 = cd_0 + a_1$ | .... | $d_{n-1} = cd_{n-2} + a_{n-1}$ | $r = cd_{n-1} + a_n$ |

Первые коэффициенты многочленов $f(x)$ и $d(x)$ равны, а далее следуем правилу:

*очередной элемент второй строки равен сумме верхнего элемента и произведения предыдущего элемента на число* $c$.

***Утверждение 2.*** Остаток от деления $f(x)$ на $x - c$ равен $f(c)$.

***Доказательство.*** Пусть $d(x), r$ соответственно частное и остаток от деления. Полагая $x = c$ в равенстве $f(x) = d(x)(x - c) + r$ , получим $f(c) = r$, что и требовалось.

Так как последний элемент второй строки таблицы равен $f(c)$, то схему Горнера можно использовать для быстрого вычисления значения многочлена в точке.

## §2. Наибольший общий делитель.

*Определение.* Наибольшим общим делителем двух или более многочленов называется тот из их общих делителей, который делится на любой другой общий делитель.

***Утверждение 3.*** Для того, чтобы $d(x)$ был общим делителем $f_1(x)$ и $f_2(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $d(x)$ был общим делителем $f_3 = f_1(x) - g(x)f_2(x)$ и $f_2(x)$, где $g(x)$ любой многочлен.

***Доказательство.*** Необходимость. Если $f_1(x) = d(x)h_1(x)$ и $f_2(x) = d(x)h_2(x)$ для некоторых $h_1(x), h_2(x)$, то $f_3 = d(x)[h_1(x) - g(x)h_2(x)]$. Следовательно, $d(x)$ делит $f_3(x)$ и $f_2(x)$.

Достаточность доказывается аналогично.

***Следствие 3.1.***

$$\text{НОД}(f_1(x), f_2(x)) = \text{НОД}(f_2(x), f_1(x) - g(x)f_2(x)).$$

***Доказательство.*** Так как множества общих делителей у этих пар многочленов совпадают, то совпадают и наибольшие общие делители.

***Алгоритм Евклида нахождения НОД.*** Даны многочлены $f_1, f_2$ такие, что $\deg f_1 \le \deg f_2$ и $f_1 \ne 0$.

Если $f_2 = 0$ , тогда $\text{НОД}(f_1, f_2) = f_1$. Если $f_2 \ne 0$ , тогда последовательно вычисляем $f_3 = \text{res}(f_1, f_2)$, $f_4 = \text{res}(f_2, f_3)$... до тех пор, пока на некотором шаге не получим равенство $f_k = \text{res}(f_{k-2}, f_{k-1}) = 0$. Используя следствие 3.1, имеем

$$\text{НОД}(f_1, f_2) = \text{НОД}(f_2, f_3) = \ldots = \text{НОД}(f_{k-1}, f_k) = f_{k-1}.$$

## §3. Корни многочленов. Разложение на множители.

*Определение.* Число $c$ называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(c) = 0$.

***Утверждение 4.*** (Теорема Безу) Число $c$ является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $x - c$.

***Доказательство.*** См. ***Утверждение 2.***

Пусть $c$ корень $f(x)$. Наибольшее натуральное $k$, при котором $f(x)$ делится на $(x - c)^k$ называется *кратностью корня.* Если $k \ge 2$, то говорят, что $f(x)$ имеет кратный корень.

***Утверждение 5.*** (Основная теорема алгебры) Любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один корень.

***Следствие 5.1.*** Любой многочлен с комплексными коэффициентами раскладывается в произведение многочленов степени $1$.

***Доказательство.*** Доказательство проведем методом математической индукции. Для многочленов степени $1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение справедливо для всех многочленов степени $n-1$. Рассмотрим произвольный многочлен $f(x)$ степени $n$. Пусть $x_1$ его корень . Из теоремы Безу следует, что $f(x) = (x - x_1)f_1(x)$. Так как степень $f_1(x)$ равна $n-1$, то, по предположению индукции, возможно разложение $f_1(x) = (x - x_2)...(x - x_n)$. Отсюда

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n), \qquad (1)$$

что и требовалось.

Собирая в равенстве $(1)$ одинаковые сомножители, получим

***Следствие 5.2.*** Любой многочлен $f(x)$ с комплексными коэффициентами можно представить в в виде

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}...(x - \alpha_s)^{k_s}, \qquad (2)$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_s$ - различные корни $f(x)$.

***Следствие 5.3.*** Многочлен степени $n$ с комплексными коэффициентами имеет, с учетом кратности, $n$ комплексных корней.

*Определение.* Многочлен степени $f(x)$ называется приводимым, если он имеет делитель $d(x)$ такой, что
$1 \le \deg d(x) \le \deg f(x) - 1$. В противном случае многочлен называется неприводимым.

Для многочлена $f(x) = a_0x^n + ... + a_n$ с вещественными коэффициентами, используя разложение $(1)$ можно получить разложение в произведение неприводимых многочленов степени $1$ и $2$ с вещественными коэффициентами.

Действительно, если все корни вещественны, то $(1)$ уже является искомым разложением. Пусть $x_1 = \alpha + \beta i$ комплексный корень. Так как $0 = \overline{f(x_1)} = f(\overline{x}_1)$ , то $\overline{x}_1$ также корень $f(x)$. Произведение $(x - x_1)(x - \overline{x}_1) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ - многочлен с вещественными коэффициентами. Перемножая остальные скобки, соответствующие парам комплексно сопряженных корней, получим искомое разложение.

Хотя основная теорема алгебры и устанавливает факт существования корней для произвольного многочлена, она не содержит указаний на то, как их искать. Это не случайно, оказывается, что невозможно указать формулы пригодные для нахождения корней всех многочленов. На практике обычно находят приближенные значения корней, для этого имеется немало методов.

Сказанное не исключает возможности точного вычисления корней многочленов какого-либо специального вида. Один из примеров такого рода основан на следующем утверждении.

***Утверждение 6.*** Для того, чтобы несократимая рациональная дробь $\dfrac{p}{q}$ была корнем многочлена $f(x) = f_0x^n + ... + f_n$ с целыми коэффициентами, необходимо чтобы выполнялись условия:

– $p$ делит $f_n$;

– $q$ делит $f_0$;
– $p - mq$ делит $f(m)$ для всякого $m \in Z$.

***Доказательство.*** Так как $f(\frac{p}{q}) = 0$ , то $q^n f(\frac{p}{q}) = 0$. Распишем подробно последнее равенство:

$$f_0 p^n + f_1 p^{n-1} q + ... + f_n q^n = 0.$$

Все слагаемые кроме первого делятся на $q$, следовательно, делится на $q$ и $f_0 p^n$. Однако $p$ и $q$ не имеют общих делителей, поэтому $f_0$ делится на $q$. Аналогично доказывается, что $f_n$ делится на $p$.

Поделив $f(x)$ на $x - m$ получим равенство

$$f(x) = (x - m)(d_0 x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + ... + d_{n-1}) + f(m),$$

где $d_0, ..., d_{n-1}$ - целые числа. Умножив его на $q^n$ и подставив $x = \frac{p}{q}$, получим

$$0 = (p - mq)(d_0 p^{n-1} + d_1 p^{n-2} q + ... + d_{n-1} q^{n-1}) + q^n f(m).$$

Первое слагаемое делится на $p - mq$, следовательно, делится и второе. Но $q^n$ и $p - mq$ не имеют общих делителей, поэтому $f(m)$ делится на $p - mq$. Доказательство закончено.

Так как количество делителей конечно, то конечно количество рациональных чисел, в которых следует вычислить значение многочлена с целыми коэффициентами для того, чтобы найти его рациональные корни или убедиться в их отсутствии.

## §4. Интерполяционный многочлен.

Предположим, что относительно некоторой функции $y(x)$ известна только таблица значений в различных точках числовой оси

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | ... | $x_n$ |
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | ... | $y_n$ |

Задача интерполяции состоит в нахождении "правдоподобного" ответа на вопрос о значении функции при значении аргумента, не содержащемся в таблице.

Один из способов решения использует *интерполяционный многочлен* - многочлен $f(x)$ степени $n$ такой, что $f(x_i) = y_i$, при $i = 0, 1, ..., n$.

*Метод Ньютона.* Записав искомый многочлен в виде

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... +$$

$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}),$$

и подставляя значения $x$ из таблицы, последовательно находим

$$a_0 = y_0,\ a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0}, ...,$$

$$a_n = \frac{y_n - a_0 - a_1(x_n - x_0) - ... - a_{n-1}(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-2})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})}.$$

Существуют и другие способы нахождения интерполяционного многочлена, приводящие к тому же результату, поскольку для заданной таблицы существует в точности один интерполяционный многочлен. Действительно, если бы для различных многочленов $f(x)$ и $g(x)$ при всех $i \in \{0,..,n\}$ были верны равенства $f(x_i) = g(x_i)$, то многочлен $d(x) = f(x) - g(x)$, степень которого не превышает $n$, имел бы $n+1$ корень, но это невозможно.

Зная интерполяционный многочлен $f(x)$ для функции $y(x)$, можно предположить, что значение функции при $x = \alpha$ равно $f(\alpha)$.

## §5. Число вещественных корней многочлена.

В этом параграфе будет показано как определить число вещественных корней многочлена на заданном интервале.

Вначале рассматриваем только многочлены, не имеющие кратных корней.

Набор многочленов $f_0(x), f_1(x), ..., f_k(x)$ называется *системой Штурма* если выполняются следующие свойства:

1. Соседние многочлены не имеют общих вещественных корней;

2. Если $\alpha$ вещественный корень $f_i(x)$, при $i \in \{1,..,k-1\}$, то $f_{i-1}(\alpha)f_{i+1}(\alpha) < 0$;

3. Если $\alpha$ вещественный корень $f(x)$, то $f_0(x)f_1(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе $x$ через $\alpha$.

4. $f_k(x)$ не имеет вещественных корней.

Построим систему многочленов $f_0(x), f_1(x), ....$ Полагаем $f_0(x) = f(x)$, в качестве $f_1(x)$ выбираем производную от $f(x)$. Остальные многочлены находятся по формуле

$$f_i(x) = -\mathrm{res}(f_{i-2}(x), f_{i-1}(x)),\ i \geq 2.$$

Вычисления заканчиваются, когда получится многочлен, не имеющий вещественных корней. То, что это произойдет, доказывает следующее рассуждение.

Так как степени многочленов $f_0(x), f_1(x), ....$ уменьшаются, то на некотором шаге получим нулевой остаток: $\mathrm{res}(f_{k-1}(x), f_k(x)){=}0$. Как и в §2, это означает, что $f_k(x) =$ НОД$(f_0(x), f_1(x))$. Так как $f(x)$ не имеет кратных корней, то многочлены $f_0(x)$ и $f_1(x)$ взаимно просты, следовательно, $f_k(x)$ является константой и не имеет вещественных корней.

Докажем, что построена система Штурма.

1. Из равенства $f_s = d(x)f_{s+1} - f_{s+2}$ следует, что общий корень $\alpha$ многочленов $f_s$ и $f_{s+1}$ является корнем $f_{s+2}$. Аналогично доказывается, что $\alpha$ есть корень многочленов $f_{s+3}$,..., $f_k$ , но $f_k$ не имеет корней! Таким образом, соседние многочлены не имеют общих корней.

2. Из равенства $f_{i-1}(x) = d(x)f_i(x) - f_{i+1}(x)$ при $x = \alpha$ получаем $f_{i-1}(\alpha) = -f_{i+1}(\alpha)$, следовательно, $f_{i-1}(\alpha)f_{i+1}(\alpha) < 0$.

3. Если $f(x)$ в окрестности корня меняет знак с плюса на минус, то производная положительна. Если $f(x)$ в окрестности корня меняет знак с плюса на минус, то производная отрицательна. В обоих случаях $f_0(x)f_1(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе $x$ через $\alpha$.

Пусть $\alpha \in R$, $f(\alpha) \neq 0$, вычеркнем нули из последовательности $f_0(\alpha), f_1(\alpha), ..., f_k(\alpha)$ и обозначим $W(\alpha)$ число перемен знака в оставшейся подпоследовательности.

***Утверждение 7.*** (Теорема Штурма.) Если $f(\alpha) \neq 0, f(\beta) \neq 0$, то число корней на интервале $(\alpha, \beta)$ равно $W(\alpha) - W(\beta)$.

**Доказательство.** Проследим как изменяется $W(x)$ при изменении $x$ от $\alpha$ к $\beta$.

1. На любом интервале, не содержащем корней многочленов системы Штурма $W(x)$ не меняется.

2. На интервале, содержащем лишь корень $x_0$ многочлена $f_j$, при $1 \leq j \leq k-1$, перемена знака происходит лишь у $f_j$. С учетом свойства 2 получаем , что при переходе через $x_0$ знаки на фрагменте $f_{j-1}, f_j, f_{j+1}$ могут меняться лишь одним из следующих способов:

$$++- \to +--, \ +-- \to ++-, \ -++ \to --+, \ --+ \to -++$$

В каждом из приведенных случаев $W(x)$ не меняется.

3. При переходе через корень $f(x)$, как следует из свойства 3, теряется одна перемена знака. Доказательство закончено.

***Замечание.*** Если любой из многочленов системы Штурма умножить на положительное число, то получится также система Штурма, так как выполняются перечисленные выше свойства.

Рассмотрим теперь многочлен $f(x)$ обладающий кратными корнями. Обозначим $d(x)$ наибольший общий делитель $f(x)$ и его производной $f'(x)$. Представив $f(x)$ в виде (2), находим

$f'(x) = (x-\alpha_1)^{k_1-1}(x-\alpha_2)^{k_2-1}(x-\alpha_3)^{k_3-1}...(x-\alpha_s)^{k_s-1}\times$
$\times[k_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)...(x-\alpha_s) + k_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)...(x-\alpha_s)+$
$+k_3(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_s) + ... + k_s(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_{s-1})]$.

Многочлен, содержащийся внутри квадратных скобок не имеет общих делителей с $f(x)$ так как не делится ни на один из многочленов $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, ..., $x-\alpha_s$. Из этого следует, что

$$d(x) = (x-\alpha_1)^{k_1-1}(x-\alpha_2)^{k_2-1}...(x-\alpha_s)^{k_s-1}.$$

Определим многочлен $g(x) = f(x)/d(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_s)$. Он имеет те же корни, что и $f(x)$, но не имеет кратных корней, поэтому для того чтобы определить число вещественных корней многочлена $f(x)$ можно применить описанный выше метод к многочлену $g(x)$.

Методом Штурма можно решить также задачу отделения вещественных корней, т.е. найти такие интервалы, каждый из которых содержит ровно один корень. Соответствующий пример приведен в следующем параграфе, а сейчас установим границы интервала, содержащего все вещественные корни.

***Утверждение 8.*** Если $x_0$ вещественный корень многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, а $A$ - наибольший по модулю коэффициент, то $|x_0| < A/|a_0| + 1$.

***Доказательство.*** Достаточно доказать, что произвольное число $t$, удовлетворяющее неравенству $|t| \geq A/|a_0| + 1$, не является корнем, т.е. $f(t) \neq 0$.

$$|f(t)| \geq |a_0t^n| - |a_1t^{n-1} + ... + a_n| \geq$$

$$\geq |a_0||t|^n - A(|t|^{n-1} + ... + 1) = |a_0||t|^n - A\frac{|t|^n - 1}{|t| - 1} =$$

$$= |a_0|(|t|^n - \frac{A}{|a_0|(|t| - 1)}(|t|^n - 1) > |a_0|(|t|^n - (|t|^n - 1)) > |a_0| \neq 0.$$

## §6. Решение примеров.

***Пример 1.*** Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = 4+4i$.

***Решение.*** Вычисляем модуль числа

$$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$$

Вынося найденное число за скобку, получаем

$$z = 4\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i).$$

Учитывая равенства

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

выписываем тригонометрическую форму

$$z = 4\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}).$$

***Пример 2.*** Вычислить $z = (4 + 4\,i)^{20}$.

***Решение.*** Используем формулу Муавра возведения в степень.

$$z = (4\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}))^{20} = 2^{50}(\sin\frac{20\pi}{4} + i\cos\frac{20\pi}{4}) = -2^{50}\,i.$$

***Пример 3.*** Вычислить $z = \sqrt[3]{4 + 4\,i}$.

***Решение.*** Используем результат предыдущего примера и формулу Муавра для извлечения корня.

$$\sqrt[3]{4 + 4\,i} = \sqrt[3]{4\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4})} =$$

$$= \sqrt[6]{32}(\sin\frac{\pi/4 + 2\pi k}{3} + i\cos\frac{\pi/4 + 2\pi k}{3}), k = 0, 1, 2.$$

Три значения корня таковы:

$$z_0 = \sqrt[6]{32}(\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}),$$

$$z_1 = \sqrt[6]{32}(\sin\frac{3\pi}{4} + i\cos\frac{3\pi}{4}),$$

$$z_2 = \sqrt[6]{32}(\sin\frac{17\pi}{12} + i\cos\frac{17\pi}{12}).$$

***Пример 4.*** Извлечь корень $\sqrt{1+2\sqrt{2}i}$.

***Решение.*** Надо найти вещественные числа $x$, $y$, для которых справедливо равенство $\sqrt{1+2\sqrt{2}i} = x+iy$. Возведем обе части равенства в квадрат $1+2\sqrt{2}i = x^2-y^2+2xyi$. Приравниваем действительные и мнимые части

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ xy = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Решением системы являются наборы $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$, поэтому корень имеет два значения: $\sqrt{2}+i$ и $-\sqrt{2}-i$.

***Пример 5.*** Выразить $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi, \sin\varphi$.

***Решение.*** Согласно формуле Муавра $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi$.

С другой стороны, используя формулу бинома Ньютона [1], получаем $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi$.
Приравнивая мнимые части этих двух выражений, получаем

$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$.

***Пример 6.*** Выразить $\sin^5\varphi$ через тригонометрические функции кратного аргумента.

***Решение.*** Рассмотрим число $e = \cos\varphi + i\sin\varphi$. По формуле Муавра находим $e^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi$. Далее имеем

$$\sin^5\varphi = (\frac{e-e^{-1}}{2i})^5 = \frac{e^5 - 5e^3 + 10e - 10e{-}1 + 5e^{-3} - e^{-5}}{32i} =$$

$$= \frac{(\cos5\varphi + i\sin5\varphi) - 5(\cos3\varphi + i\sin3\varphi) + 10(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{32i} +$$

$$+ \frac{-10(\cos\varphi - i\sin\varphi) + 5(\cos3\varphi - i\sin3\varphi) - (\cos5\varphi - i\sin5\varphi)}{32i}$$

$$= \frac{\sin5\varphi - 5\sin3\varphi + 10\sin\varphi}{16}.$$

***Пример 7.*** Поделить с остатком $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 2x - 3$ на $x-2$ и найти $f(2)$.

***Решение.*** Выполним деление, используя схему Горнера.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | $-4$ | $-2$ | $-3$ |
| 2 | 1 | $2\cdot1+3=5$ | $2\cdot5-4=6$ | $2\cdot6-2=10$ | $2\cdot10-3=17$ |

---

[1] $(u+v)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{n-i} v^i$, ,где $C_n^i = \dfrac{n!}{(n-i)!\,i!}$

Из второй строки находим коэффициенты частного $d(x)$ и остаток так, что $d(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 10$ и $f(2) = 17$.

***Пример 8.*** Найти наибольший общий делитель многочленов $f_1(x) = x^3+3x^2+4x+2$ и $f_2(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

***Решение.*** Применяя деление уголком, находим

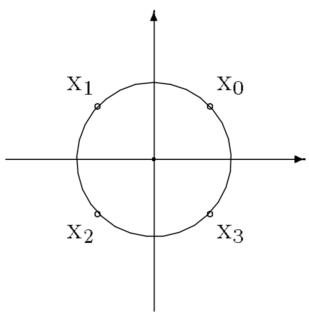
$$\begin{aligned} f_3(x) &= \mathrm{res}(f_1(x), f_2(x)) = x^2 + 2x + 1, \\ f_4(x) &= \mathrm{res}(f_2(x), f_3(x)) = x + 1, \\ f_5(x) &= \mathrm{res}(f_3(x), f_4(x)) = 0. \end{aligned}$$

Наибольшим общим делителем является последний ненулевой остаток, то есть $x+1$.

***Пример 9.*** Разложить $x^4 + 1$ на неприводимые множители в поле комплексных чисел.

***Решение.*** Найдем корни $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi}$,

$$x_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + \sin\frac{\pi + 2\pi k}{4},\ k = 0, 1, 2, 3.$$




Располагая корни на комплексной плоскости, замечаем, что симметричными относительно вещественной оси, а значит сопряженными, являются пары $x_0, x_3$ и $x_1, x_2$. Находим неприводимые множители с вещественными коэффициентами.

$$(x - (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))(x - (\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})) =$$

$$= x^2 - 2\cos\frac{\pi}{4}x + (\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4}) = x^2 - \sqrt{2}x + 1.$$

$$(x - (\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}))(x - (\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4})) =$$

$$= x^2 - 2\cos\frac{3\pi}{4}x + (\cos^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4}) = x^2 + \sqrt{2}x + 1.$$

Итак $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

***Пример 10.*** Найти корни многочлена
$f(x) = x^4 + 9x^3 + 22x^2 + 28x + 24$.

***Решение.*** Так как многочлен имеет целые коэффициенты, то можно попытаться найти рациональный корень $\frac{p}{q}$. Знаменатель $q$ является делителем старшего коэффициента, поэтому $q = 1$. Числитель $p$, являясь делителем свободного члена, может принимать значения из списка $S = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, \pm24\}$.

Найдем $f(-1)$ по схеме Горнера

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 9 | 22 | 28 | 24 | |
| −1 | 1 | 8 | 14 | 14 | 10 | = f(−1) |

Согласно ***Утверждению 6*** корнями могут быть только такие числа $p$, для которых $p+1$ делит $f(-1)=10$, то из списка $S$ надо удалить все числа, не обладающие таким свойством. Получим новый список $S'=\{1,-2,-3,4\}$. Поскольку коэффициенты многочлена положительны, то его корнями могут быть лишь отрицательные числа, поэтому осталось проверить только числа $-2,-3$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 9 | 22 | 28 | 24 | |
| $-2$ | 1 | 7 | 8 | 12 | 0 | $=f(-2)$ |
| $-3$ | 1 | 4 | $-4$ | 0 | $=f(-3)$ | |

В последней строке таблицы записан результат деления частного от первого деления на $x+3$. Таким образом, справедливо равенство $f(x)=(x+2)(x+3)(x^2+4x-4)$ и для нахождения остальных корней надо решить квадратное уравнение $x^2+4x-4=0$.
Ответ: $x_1=-2,\ x_2=-3,\ x_3=-2-\sqrt{8},\ x_3=-2+\sqrt{8}$.

***Пример 11.*** Найти интерполяционный многочлен, зная таблицу значений функции

| x | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 1 | 4 | 15 |

Находим многочлен в виде

$$f(x)=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)x+a_3(x+1)x(x-1)$$

Подставляя значения $x$ из таблицы, последовательно находим

$$a_0=0,\ a_1=\frac{1-0}{0+1}=1, a_2=\frac{4-0-1\cdot(1+1)}{(1+1)\cdot 1}=1,$$

$$a_3=\frac{15-1\cdot(2+1)-1\cdot 2\cdot(2+1)}{2\cdot(2-1)(2+1)}=1.$$

Раскрываем скобки и получаем ответ:

$$f(x)=(x+1)+(x+1)x+(x+1)x(x-1)=x^3+x^2+x+1.$$

***Пример 12.*** Отделить корни многочлена $f(x)=x^4+4x^3+2x^2-3$.

***Решение.*** Найдем систему Штурма.

$$f_0(x)=f(x),\ f_1(x)=\frac{1}{4}f'(x)=x^3+3x^2+x.$$

Находим остаток от деления $f_0(x)$ на $f_1(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^4 & +4x^3 & +2x^2 & -3 & x^3+3x^2+x \\ \cline{5-5} x^4 & +3x^3 & +x^2 & & x+1 \\ \cline{1-3} & x^3 & +x^2 & -3 & \\ & x^3 & +3x^2 & +x & \\ \cline{2-4} & & -2x^2 & -x-3 & \end{array}$$

Полагаем $f_2(x) = -\mathrm{res}(f_0, f_1) = 2x^2 + x + 3$. Для нахождения $f_3(x)$ надо найти остаток от деления $f_1(x)$ на $f_2(x)$. При делении появляются дробные коэффициенты, что усложняет вычисления. Этого можно избежать, если заметить, что многочлены системы Штурма можно умножать на положительные числа, получая при этом также систему Штурма. Следовательно, при делении уголком любой из промежуточных многочленов можно умножать или делить на положительные числа. Многочлен, полученный умножением на число, отделяем двойной линией. Так, например, при первом делении умножаем $f_1(x)$ на 2, записываем под двойной линией и делим полученный многочлен на $f_2(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2+x & 2x^2+x+3 \\ \hline\hline
2x^3+6x^2+2x & x+5 \\
2x^3+x^2+3x & \\ \hline
5x^2-x & \\ \hline\hline
10x^2-2x & \\
10x^2+5x+15 & \\ \hline
-7x-15 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
2x^2+3x+3 & 7x+15 \\ \hline\hline
14x^2+21x+21 & 2x-3 \\
14x^2+30x & \\ \hline
-9x+21 & \\ \hline\hline
-21x+49 & \\
-21x-45 & \\ \hline
94 &
\end{array}
$$

В результате первого деления находим $f_3(x) = 7x + 15$, в результате второго - $f_4(x) = -1$. Корни $f(x)$ удовлетворяют неравенству $|x| < \dfrac{4}{1} + 1 = 5$. Составляем таблицу, каждая строка которой кроме значения $\alpha$ переменной $x$ содержит знаки многочленов Штурма при $x = \alpha$ и число $W(\alpha)$ перемен знака.

| $\alpha$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $W$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-5$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ | 3 |
| 5 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 1 |
| 0 | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $-$ | 2 |

На интервале $(-5, 5)$ содержится $W(-5) - W(5) = 2$ корня многочлена. Выбираем середину интервала и считаем число перемен знака при $x = 0$. Так как $W(-5) - W(0) = 1$, то один корень расположен на интервале $(-5, 0)$, а другой на интервале $(0, 5)$.

**Задачи для самостоятельного решения.**

1. Вычислить:

1) $\sqrt{3 + 4i}$; 2) $\sqrt{8 + 6i}$; 3) $\sqrt{-3 + 4i}$; 4) $\sqrt{-8 + 6i}$;
5) $\sqrt{3 - 4i}$; 6) $\sqrt{8 - 6i}$; 7) $\sqrt{-3 - 4i}$; 8) $\sqrt{-8 - 6i}$.

2. Вычислить:

1) $(\sqrt{3} + i)^{99}$; 2) $(1 + i\sqrt{3})^{97}$; 3) $(\sqrt{3} - i)^{103}$; 4) $(-1 + i\sqrt{3})^{91}$;
5) $(-\sqrt{3} + i)^{102}$; 6) $(1 - i\sqrt{3})^{81}$; 7) $(-\sqrt{3} - i)^{42}$; 8) $(-1 - i\sqrt{3})^{33}$.

3. Выразить через $\cos x$ и $\sin x$:

1) $\cos 3x$; 2) $\sin 3x$; 3) $\sin 4x$; 4) $\cos 4x$; 5) $\sin 5x$; 6) $\cos 5x$;

4. Выразить через синусы и косинусы кратных углов.

1) $\cos^3 x$; 2) $\sin^3 x$; 3) $\sin^4 x$; 4) $\cos^4 x$; 5) $\sin^5 x$; 6) $\cos^5 x$;

5. Найти все корни многочленов:

1) $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 4$; 2) $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18$;
3) $x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 12x + 12$; 4) $x^4 + 9x^3 + 18x^2 - 18x + 40$;
5) $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 4$; 6) $x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 16x + 12$;
7) $x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 12$; 8) $x^4 + 11x^3 + 37x^2 + 31x - 20$.

6. Найти интерполяционный многочлен, зная таблицу значений функции:

1) $\begin{array}{c|cccc|} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -4 & -1 & 0 & 5 \end{array}$; 2) $\begin{array}{c|cccc|} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -2 & -1 & 2 & 13 \end{array}$; 3) $\begin{array}{c|cccc|} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}$;

4) $\begin{array}{c|cccc|} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -3 & -2 & 1 & 12 \end{array}$; 5) $\begin{array}{c|cccc|} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -2 & 1 & 2 & 7 \end{array}$; 6) $\begin{array}{c|cccc|} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -5 & -4 & -1 & 10 \end{array}$.

7. Разложить в произведение неприводимых многочленов с вещественными коэффициентами:

1) $x^6 + 1$; 2) $x^5 + 1$; 3) $x^4 - 2x^2 + 3$;

4) $x^4 + 4x^2 + 5$; 5) $x^6 + x^3 + 1$; 6) $x^6 - x^3 + 1$;

8. Изолировать корни многочленов:

1) $x^3 - x^2 + x - 4$; 2) $x^3 + 3x + 1$;
3) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x + 4$; 4) $4x^3 + 18x^2 + 24x + 9$;
5) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$; 6) $x^3 - 3x + 1$.

9. Разложить по степеням $x - 1$:

1) $x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + x - 4$; 2) $x^6 + x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$;
3) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 4$; 4) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Рекомендуемые учебники: 1. Курош А.Г. " Курс высшей алгебры. "
2. Фаддеев Д.К. " Лекции по алгебре. "