

1 Операции над многочленами

Многочленом (***полиномом***) ***степени*** *k* называется функция вида $\sum_{j=0}^{k} a_j x^j$, где *x* – переменная, a_j - числовые коэффициенты (*j*=0,….*k*), и $a_k \neq 0$. Любое ненулевое число можно рассматривать как ***многочлен нулевой степени***. Число 0 является единственным многочленом, степень которого не определена. Многочлены называются равными, в том случае, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях. Коэффициенты многочлена обычно берутся из некоторого числового множества *M*. Множество всех многочленов с коэффициентами из *M* обозначают *M*(*x*). В качестве *M* обычно рассматривается числовое кольцо, либо числовое поле.

С многочленами над числовым кольцом можно проводить операции сложения, вычитания и умножения. Данные операции сводятся к приведению подобных членов. Ясно, что в результате получится многочлен с коэффициентами из этого же кольца. Выразим коэффициенты произведения многочленов через коэффициенты сомножителей. Пусть в результате перемножения многочленов $a(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j$ и $b(x) = \sum_{j=0}^{s} b_j x^j$ получается многочлен $c(x) = \sum_{j=0}^{s+r} c_j x^j$. Тогда $c(x) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{s} a_j b_k x^{j+k}$ и после приведения подобных получим $c(x) = \sum_{m=0}^{r+s} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} \right) \cdot x^m$, в правой части равенства предполагается, что $a_j = 0$ при $j > r$ и $b_j = 0$ при $j>s$. Таким образом, найдены формулы для вычисления коэффициентов произведения $c_m = \sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j}$, где $m = 0,...,r+s$.

С многочленами над числовым полем, кроме перечисленных операций, определена операция деления с остатком. Задача деления многочлена $a(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j$ на многочлен $b(x) = \sum_{j=0}^{s} b_j x^j$ может быть сформулирована следующим образом: найти такой многочлен $v(x) = \sum_{i=0}^{k} v_i x^i$, называемый ***частным***, при котором степень многочлена $a(x) - b(x)v(x)$ - наименьшая.

Многочлен $f(x)=a(x)-b(x)v(x)$ называется ***остатком*** деления $a(x)$ на $b(x)$. Говорят, что многочлен $a(x)$ ***делится*** на многочлен $b(x)$, если остаток от деления равен нулю. Если степень $a(x)$ меньше степени $b(x)$, то частное равно 0. Пусть степень $a(x)$ не меньше степени $b(x)$. Из требования минимальности степени $f(x)$ и правила умножения многочленов выводим, что степень $v(x)$ не превосходит *r-s* и $v_{r-s}=a_r/b_s$. Задача деления многочлена $a(x)$ на многочлен $b(x)$ сводится к аналогичной задаче деления многочлена $a'(x)=a(x)-v_{r-s}b(x)\cdot x^{r-s}$, но уже меньшей степени. Понятно, что таким образом частное и остаток от деления определяются единственным образом. Алгоритм деления оформляют «***уголком***» и чисто внешне похож на деление целых чисел с остатком. В качестве примера, деление «уголком» многочлена $2x^3-3x+1$ на многочлен $2x^2-x-1$ с остатком приведено на рисунке слева.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3-3x+1 & 2x^2-x-1 \\ \cline{2-2}
-\underline{2x^3-x^2-x} & x+0{,}5 \\
-x^2-2x+1 & \uparrow \\
\underline{x^2-0{,}5x-0{,}5} & \underline{\text{частное}} \\
-1{,}5x+1{,}5 \leftarrow & \underline{\text{остаток}}
\end{array}
$$

При делении на двучлен *x-a* можно воспользоваться более компактной схемой деления, называемой ***схемой Горнера***. В основе этой схемы лежит очевидный факт, что при выполнении деления «уголком» на каждом шаге меняется только один коэффициент в текущем «остатке». Поэтому, схему деления «уголком» можно записать в одну строчку. Для примера, поделим многочлен $2x^3-3x+1$ на двучлен $x-a$ по схеме Горнера. Результат приведен на рисунке слева.

$$
\begin{array}{c|cccc}
f(x) & 2 & 0 & -3 & 1 \leftarrow \text{коэффициенты делимого} \\ \hline
a & \underbrace{2 \quad 2a \quad -3+2a^2}_{\text{частное}} & & & \underbrace{1-3a+2a^3}_{\text{остаток}}
\end{array}
$$

Кроме перечисленных операций используется операция подстановки в многочлен, или вычисления значения многочлена в точке. При выполнении данной операции, вместо переменной подставляют число. В результате получается числовое выражение, значение которого и называется ***значением***

многочлена. Число, значение многочлена в котором равно 0, называется ***корнем*** многочлена. Теорема Безе утверждает, что остаток от деления многочлена *f(x)* на двучлен *x-a* равен *f*(*a*). Таким образом, схему Горнера можно использовать не только для вычисления частного и остатка от деления на двучлен, но и для вычисления значения многочлена в точке.

1.1 Упражнения

1. Найти коэффициенты многочлена
    1. $(1+x+x^2+x^3)(1-x+x^2)$
    2. $(1-x+x^2-x^3)(1+x-x^2)$
    3. $(2-x+3x^2-2x^3)(3+2x-3x^2)$
    4. $(2-i-x+3ix^2-2x^3)(3+2ix-3x^2)$
    5. $(x-1+i)(x+2-3i)$
    6. $(x-a)(x-b)$
    7. $c(x-a)(x-b)$
    8. $(x-1)(x-2)(x-3)$
    9. $(x-a)(x-b)(x-c)$
    10. $(x-a)^2(x-b)$
    11. $d(x-a)(x-b)(x-c)$
    12. $(x-a)^2(x-b)^2$
    13. $(x-1)^5$
    14. $(1+x+x^2)^2$
    15. $(1-x+x^2)^3$
    16. $(1+x+x^2)(1+2x+x^2)(1+3x+x^2)$
    17. $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$
    18. $(x-a)^2(x-b)^3$
    19. $\prod_{|j|\le 2}(x-j)$

20. $\prod_{j=1}^{n}\left(x-\alpha_j\right)$

2. Найти частное и остаток от деления $a(x)$ на $b(x)$

1. $a(x)=2x^4-3x^3-x^2+2x+1,\ b(x)=x^2-3x+3$
2. $a(x)=x^3-2x^2+x+3,\ b(x)=3x^2-2x-1$
3. $a(x)=x^3-3x^2-x-1,\ b(x)=3x^2-2x+1$
4. $a(x)=x^4,\ b(x)=(x+1)^2$
5. $a(x)=x^4,\ b(x)=x^2+x-1$
6. $a(x)=x^4,\ b(x)=x^2-x+1$
7. $a(x)=2x^4-3x^3-x^2+2x+1,\ b(x)=(x+1)^2$
8. $a(x)=4x^4+3x^3+2x^2+x+1,\ b(x)=x^2-3x+2$
9. $a(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5,\ b(x)=(x-1)^2$
10. $a(x)=x^5-4x^4+3x^3+2x^2+x+1,\ b(x)=x^3-3x+2$
11. $a(x)=x^5,\ b(x)=x^2+1$
12. $a(x)=x^5,\ b(x)=x^2-x+1$
13. $a(x)=(x-1)^6,\ b(x)=x^2-x+1$
14. $a(x)=(x+1)^6,\ b(x)=x^2+x+1$
15. $a(x)=\left(x^2-1\right)^3,\ b(x)=x^2+x-1$
16. $a(x)=\left(x^2+1\right)^3,\ b(x)=x^2-x+1$
17. $a(x)=3x^6-3x^5+x^4-x^3+x^2+x+1,\ b(x)=3x^2-2$
18. $a(x)=3x^6-3x^5+6x^4-2x^3+2x^2+x+1,\ b(x)=3x^3-2$
19. $a(x)=x^3+px+q,\ b(x)=x^2+mx-1$
20. $a(x)=x^4+px^2+q,\ b(x)=x^2+mx+1$

3. Поделить с помощью схемы Горнера $a(x)$ на двучлен $b(x)$

1. $a(x)=x^4+2x^3-2x^2-2x+2,\ b(x)=x-2$

2. $a(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2$, $b(x) = 2x - 1$

3. $a(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 + x - 9$, $b(x) = x - 2$

4. $a(x) = x^4 - (1-i)x^3 + (25-7i)x^2 + (-33+16i)x + 11 - 10i$, $b(x) = x - 1 + i$

5. $a(x) = x^4 + (-8+i)x^3 + (25-7i)x^2 + (-35+16i)x + 18 - 10i$, $b(x) = x - 2$

4. С помощью схемы Горнера разложить $a(x)$ по степеням $b(x)$

1. $a(x) = x^4$, $b(x) = x - 1$

2. $a(x) = x^4$, $b(x) = x + 1$

3. $a(x) = x^4$, $b(x) = x - i$

4. $a(x) = x^4$, $b(x) = x + i$

5. $a(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 2$, $b(x) = x + 1$

6. $a(x) = (x-4)^4 - 2(x-4)^3 + 2(x-4)^2 - (x-4) + 1$, $b(x) = x - 2$

7. $a(x) = x^4 + (4i-1)x^3 - (4+3i)x^2 + 3x - 3 + i$, $b(x) = x - i$

8. $a(x) = x^5$, $b(x) = x - 1$

9. $a(x) = x^5$, $b(x) = x + 1$

10. $a(x) = x^5$, $b(x) = x - i$

11. $a(x) = x^5$, $b(x) = x + i$

12. $a(x) = x^5$, $b(x) = x - 2$

13. $a(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 1$, $b(x) = x - 1$

14. $a(x) = 5x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 3x + 1$, $b(x) = x - 1$

15. $a(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) - 2(x+2)(x+1)x(x-1) + {}$
$+ (x+2)(x+1)x - (x+2)(x+1) + 3(x+2) - 1$, $b(x) = x$

5. Найти остаток от деления $a(x)$ на $b(x)$

1. $a(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1$, $b(x) = x - 1$

2. $a(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1,\ b(x) = x^2 - 1$

3. $a(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1,\ b(x) = (x-1)^2$

4. $a(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1,\ b(x) = x^2 + 1$

5. $a(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1,\ b(x) = x^4 - 1$

6. При каких условиях $a(x)$ делится на $b(x)$

1. $a(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2},\ b(x) = x^2 + x + 1$

2. $a(x) = x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2},\ b(x) = x^2 - x + 1$

3. $a(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2},\ b(x) = x^4 + x^2 + 1$

4. $a(x) = x^{2m} + x^m + 1,\ b(x) = x^2 + x + 1$

5. $a(x) = (x+1)^m - x^m - 1,\ b(x) = x^2 + x + 1$

6. $a(x) = (x+1)^m + x^m + 1,\ b(x) = x^2 + x + 1$

7. $a(x) = (x+1)^m - x^m - 1,\ b(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^2$

7. Найти сумму коэффициентов многочлена

1. $(x+1)^{10}$

2. $\left(x^{200} - 200x^{199} + 200x\right)^{300}\left(3x^2 - 2x - 2\right)^{219}$

8. Найти многочлен наименьшей степени, корнями которого являются

1. $\alpha,\ 1/\alpha,\ -\alpha,\ -1/\alpha$

2. $\alpha,\ 1/\alpha,\ 1-\alpha,\ 1/(1-\alpha),\ 1-1/\alpha,\ 1/(1-1/\alpha)$

2 Наименьшее общее кратное, наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида

Многочлен наименьшей степени, делящийся на $f(x)$ и $g(x)$ называется их ***наименьшим общим кратным*** и обозначается $НОК(f(x),g(x))$. Наименьшее общее кратное многочленов определено с точностью до числового множителя. Для пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$ под ***общим делителем*** будем понимать многочлен, который делит $f(x)$ и $g(x)$ без остатка.

Общий делитель определён с точностью до числового множителя. Общий делитель пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$ наибольшей степени называется ***наибольшим общим делителем***, и обозначается *НОД*($f(x)$,$g(x)$). Наибольший общий делитель многочленов является наименьшим общим кратным их общих делителей. Если наибольший общий делитель многочленов равен 1, то они называются ***взаимно простыми***. Приведем простейшие свойства *НОД* и *НОК* многочленов.

A. Если многочлен $h(x)$ делится на многочлены $f(x)$ и $g(x)$, то $h(x)$ делится на *НОК*($f(x)$,$g(x)$).

B. $НОК\left(f(x),g(x)\right)\cdot НОД\left(f(x),g(x)\right)=f(x)\cdot g(x)$

C. Если $v(x)$ взаимно просто с $g(x)$, то
$НОД\left(v(x)f(x),g(x)\right)=НОД\left(f(x),g(x)\right)$

D. Для любого $v(x)$ справедливо равенство
$НОД\left(f(x),g(x)\right)=НОД\left(f(x)-v(x)\cdot g(x),g(x)\right)$.

Видно, что свойства *НОД* и *НОК* многочленов похожи на свойства *НОД* и *НОК* целых чисел. В курсе «абстрактная алгебра» будет показано, что эта аналогия не случайна. Воспользуемся данной похожестью для демонстрации алгоритма Евклида построения наибольшего общего делителя. В основе алгоритма Евклида лежит свойство D, которое для чисел выглядит следующим образом. Для любых целых чисел v, f, g справедливо равенство $НОД\left(f,g\right)=НОД\left(f-v\cdot g,g\right)$. Если в качестве v выбирать частное от деления f на g, то, в конечном счете, получим цепочку равенств, заканчивающейся парой чисел, в которой одно из них равно нулю. Для такой пары, наибольший общий делитель равен ненулевому числу. Для примера, найдем алгоритмом Евклида *НОД*(14,48). Справедливы равенства
НОД(14,48)=*НОД*(14,48-3 14)=*НОД*(14,6)=*НОД*(14-2 6,6)=
=*НОД*(2,6)=*НОД*(2,6-3 2)=*НОД*(2,0)=2.

Аналогичным образом ищется наибольший общий делитель многочленов. Для примера, построим наибольший общий делитель многочленов x^6-2x+1 и x^4+x^3-2 алгоритмом Евклида. Из равенства $x^6-2x+1=(x^2-x+1)(x^4+x^3-2)-x^3+2x^2-4x+3$ выводим $НОД(x^6-2x+1, x^4+x^3-2)=НОД(-x^3+2x^2-4x+3, x^4+x^3-2)$. Далее, из равенства $x^4+x^3-2=(-x-3)(-x^3+2x^2-4x+3)+2x^2-9x+7$ получаем $НОД(-x^3+2x^2-4x+3, x^4+x^3-2)=НОД(-x^3+2x^2-4x+3,\ 2x^2-9x+7)$, из $-x^3+2x^2-4x+3=\left(-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x^2-9x+7)-\frac{47}{4}x+\frac{47}{4}$ находим

$НОД(-x^3+2x^2-4x+3,\ 2x^2-9x+7)=НОД\left(-\frac{47}{4}x+\frac{47}{4}, 2x^2-9x+7\right)$. Так как *НОД* многочленов не изменится, если один из них умножить на число $-\frac{4}{47}$, то $НОД(-11{,}75x+11{,}75;\ 2x^2-9x+7)=НОД(x-1,\ 2x^2-9x+7)$.

Многочлен $2x^2-9x+7$ делится без остатка на x-1, поэтому $НОД(x-1,\ 2x^2-9x+7)=НОД(x-1, 0)=x-1$. Таким образом, наибольший общий делитель многочленов x^6-2x+1 и x^4+x^3-2 равен x-1.

Кроме наибольшего общего делителя целых чисел a и b (многочленов) часто требуется найти его представление через исходные числа (многочлены), то есть представление вида $ua+wb=НОД(a,b)$, где u и w- целые числа (многочлены).

Для нахождения целых чисел u и w воспользуемся расширенным алгоритмом Евклида. Для этого запишем систему уравнений $\begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}$ и применим к левым частям ее строк алгоритм Евклида. В результате получим уравнение $НОД(a,b)=ux+wy$. Подставив вместо x и y числа a и b, получим требуемое представление. При организации вычислительного процесса пишутся только коэффициенты при переменных x и y. В качестве примера применим расширенный алгоритм Евклида к паре чисел 14 и 48.

Коэффициенты уравнений будем записывать в столбцах. Начиная с таблицы $\left(\begin{array}{c:cc} \text{числа} & 14 & 48 \\ \hline x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{array}\right)$, путем операций со столбцами, указанными в скобках,

$$\left(\begin{array}{cc} 14 & 48 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \text{([2]-3[1])}, \left(\begin{array}{cc} 14 & 6 \\ \hline 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \text{([1]-2[2])}, \left(\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ \hline 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{array}\right) \text{([2]-3[1])}, \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ \hline 7 & -24 \\ -2 & 7 \end{array}\right)$$

получим равенство 2=7 14-2 48. Последнюю таблицу можно не вычислять, поскольку все необходимые данные есть в предыдущей таблице.

Аналогичный процесс можно провести и с многочленами. Применим расширенный алгоритм Евклида к многочленам x^6-2x+1 и x^4+x^3-2.

Начиная с таблицы $\left(\begin{array}{cc} x^6-2x+1 & x^4+x^3-2 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$, путем операций со столбцами,

$$\left(\begin{array}{cc} -x^3+2x^2-4x+3 & x^4+x^3-2 \\ \hline 1 & 0 \\ -x^2+x+-1 & 1 \end{array}\right) \text{([1]-} \left(x^2-x+1\right) \text{[2])},$$

$$\left(\begin{array}{cc} -x^3+2x^2-4x+3 & 2x^2-9x+7 \\ \hline 1 & x+3 \\ -x^2+x+-1 & -x^3-2x^2+2x-2 \end{array}\right) \text{([2]-} \left(-x-3\right) \text{[1])},$$

$$\left(\begin{array}{cc} -\frac{47}{4}x+\frac{47}{4} & 2x^2-9x+7 \\ \hline \frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+\frac{19}{4} & x+3 \\ -\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{4}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{7}{2} & -x^3-2x^2+2x-2 \end{array}\right) \text{([1]-} \left(-0{,}5x-1{,}25\right) \text{[2])},$$

$$\begin{pmatrix} x-1 & 2x^2-9x+7 \\ \hline \frac{-2}{47}x^2-\frac{11}{47}x-\frac{19}{47} & x+3 \\ \frac{2}{47}x^4+\frac{9}{47}x^3+\frac{10}{47}x^2-\frac{10}{47}x+\frac{14}{47} & -x^3-2x^2+2x-2 \end{pmatrix}$$ ($\frac{-4}{47}$ [1]) придем к

равенству $x-1=\left(\frac{-2}{47}x^2-\frac{11}{47}x-\frac{19}{47}\right)\left(x^6-2x+1\right)+$

$+\left(\frac{2}{47}x^4+\frac{9}{47}x^3+\frac{10}{47}x^2-\frac{10}{47}x+\frac{14}{47}\right)\left(x^4+x^3-2\right).$

Функция вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ многочлены, называется ***рациональной***. Пусть ее знаменатель $g(x)$ представляется в виде произведения взаимно простых многочленов $g(x)=u(x)v(x)$. Найдём многочлены $a(x)$ и $b(x)$, что $a(x)u(x)+b(x)v(x)=1$. Умножим равенство на рациональную функцию $\frac{f(x)}{g(x)}$, и сократим дроби. В результате получим равенство $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)a(x)}{v(x)}+\frac{f(x)b(x)}{u(x)}$. Тем самым рациональная функция может быть представлена в виде суммы «простейших» рациональных функций.

2.1 Упражнения

1. Доказать свойства

   1. Если $v(x)$ взаимно просто с $g(x)$, то $НОД\left(v(x)f(x),g(x)\right)=НОД\left(f(x),g(x)\right)$

   2. Если $v(x)$ взаимно просто с $g(x)$, то $НОК\left(v(x)f(x),g(x)\right)=v(x)НОК\left(f(x),g(x)\right)$

   3. $НОК\left(f(x),g(x)\right)\cdot НОД\left(f(x),g(x)\right)=f(x)\cdot g(x)$

   4. Если $v(x)$ взаимно просто с многочленами $g(x)$ и $f(x)$, то $v(x)$ взаимно просто с произведением $g(x)f(x)$.

5. Если $v(x)$ взаимно просто с произведением многочленов $g(x)$ и $f(x)$, то $v(x)$ взаимно просто с каждым из сомножителей.

6. Для любого $v(x)$ справедливо равенство
$НОД\left(f(x), g(x)\right) = НОД\left(f(x) - v(x)g(x), g(x)\right)$.

7. Двучлен $x - a$ взаимно прост с $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(a) \neq 0$

2. Найти наибольший общий делитель многочленов

1. $x^4 - 1$ и $x^6 - 1$
2. $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$
3. $x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$ и $x^4 + 7x^3 + 18x^2 - x - 1$
4. $x^4 - 4x^3 + 1$ и $x^3 - 3x^2 + 1$
5. $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ и $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$
6. $4x^5 - 23x^4 + 47x^3 - x^2 - 48x - 36$ и $4x^3 - 15x^2 + 5x + 18$
7. $x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ и $3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$
8. $x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12$ и $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12$
9. $x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ и $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$
10. $x^6 + 1$ и $x^{16} + 1$
11. $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ и $x^5 + x^2 - x + 1$
12. $2x^6 + x^5 + 15x^3 - 4x^4 + 5x^2 - 2x - 1$ и $2x^4 + 5x^3 - x$
13. $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ и $3x^5 - 7x^3 + 3 - x$
14. $4x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 20x^3 + 9x^2 - 8x - 2$ и
$4x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$
15. $1 + 2x + 3x^2$ и $1 + 2x + 3x^2 + x^{10}$
16. $x^{100} + 2x - 3$ и $x^{99} + x - 2$
17. $x^n - 1$ и $x^m - 1$
18. $x^n + a^n$ и $x^m + a^m$

3. Найти наименьшее общее кратное многочленов

1. x^4-1 и x^6-1
2. x^6+1 и $x^{16}+1$
3. $2x^6+x^5+15x^3-4x^4+5x^2-2x-1$ и $2x^4+5x^3-x$
4. $1+2x+3x^2$ и $1+2x+3x^2+x^{10}$
5. x^n-1 и x^m-1
6. x^n+a^n и x^m+a^m

4. Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и многочлены $u(x)$ и $w(x)$ в представлении $u(x)f(x)+w(x)g(x)=НОД(f(x),g(x))$.

1. x^4-1 и x^6-1
2. x^6+1 и x^8-1
3. x^3 и $(1-x)^2$
4. x^3 и $(1-x)^4$
5. $x^4-2x^3-4x^2+6x+1$ и x^3-5x-3
6. x^4+2x^3+x+1 и $x^4+x^3-2x^2+2x-1$
7. $x^4+2x^3-x^2-4x-2$ и $x^4+x^3-x^2-2x-2$
8. $x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$ и x^4+2x^3+x+2
9. $4x^5-23x^4+47x^3-x^2-48x-36$ и $4x^3-15x^2+5x+18$
10. x^5 и $(1-x)^3$
11. x^5 и $(1-x)^4$
12. x^5 и $(1+x)^3$
13. x^5 и $(1+x)^4$
14. $x^6-4x^5+11x^4-27x^3+37x^2-35x+35$ и
$x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25$
15. $2x^6+x^5+15x^3-4x^4+5x^2-2x-1$ и $2x^4+5x^3-x$
16. $x^3(x-1)^2(x-2)$ и $x^2(1-x)^3(x-3)$
17. x^6 и $(1-x)^3$

18. x^6 и $(1-x)^4$

19. x^6 и $(1-x)^5$

20. x^6 и $(1+x)^4$

21. x^6 и $(1+x)^5$

22. x^m и $(1-x)^n$

5. Найти многочлен наименьшей степени, дающей в остатке

   1. $2x$ при делении на $(x-1)^2$ и $3x$ при делении на $(x-2)^3$

   2. x^2+x+1 при делении на $x^4-2x^3-2x^2+10x-7$ и $2x^2-3$ при делении на $x^4-2x^3-3x^2+13x-10$

6. Освободиться от иррациональности в знаменателе

   1. $\dfrac{1}{1+2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}$

   2. $\dfrac{1}{1-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}$

   3. $\dfrac{1}{1-3a+a^2}$, если $1-3a+a^3=0$

   4. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

   5. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$

   6. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

7. Представить в виде суммы дробей

   1. $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$

   2. $\dfrac{1}{x(x-1)^2(x-2)}$

   3. $\dfrac{1}{x(x^2+1)(x-2)}$

   4. $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2}$

   5. $\dfrac{1}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$

3 Интерполяционный многочлен

Задача построения многочлена наименьшей степени, который в заданных точках принимает заданные значения, называется ***задачей***

интерполяции. Решение задачи интерполяции называют ***интерполяционным многочленом***.

Пусть требуется построить многочлен, который в точках $a_1,\ldots,a_n$ (n>1) принимает значения $y_1,\ldots,y_n$. Положим $w(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_n)$ и $w_i(x)=w(x)/(x-a_i)$. Легко убедится в справедливости равенств $w_i(a_j)=0$ при $i\neq j$. Следовательно, многочлен $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{w_i(a_i)}w_i(x)$ принимает в точках $a_1,\ldots,a_n$ значения $y_1,\ldots,y_n$. Существует единственный интерполяционный многочлен степени не превосходящий n-1, который принимает в точках $a_1,\ldots,a_n$ значения $y_1,\ldots,y_n$.. Следовательно, $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{w_i(a_i)}w_i(x)$ - интерполяционный многочлен. Представление интерполяционного многочлена в указанном виде называют ***формой Лагранжа***.

Пусть $f(x)$ – произвольный многочлен. Под ***разностью первого порядка*** будем понимать $f(a_0,a_1)=(f(a_0)-f(a_1))/(a_0-a_1)$. Индукцией определим ***разность порядка*** k $f(a_0,\ldots,a_k)=(f(a_0,\ldots,a_{k-1})-f(a_1,\ldots,a_k))/(a_0-a_k)$. Нетрудно проверить следующее выражение разности порядка k $f(a_0,\ldots,a_k)=\sum_{i=0}^{k}f(a_i)/\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)$. Из полученной формулы вытекает независимость разности от порядка, в котором расположены ее аргументы.

Если степень многочлена $f(x)$ равна n, то разность $f(x,a_1,\ldots,a_k)$ порядка k есть многочлен степени n-k при $n\geq k$. Если $n<k$, то разность порядка k равна нулю. Из определения разности порядка k выводим равенство, позволяющее выразить многочлен через соответствующие разности $f(x)=f(a_1)+(x-a_1)f(a_1,a_2)+\cdots+(x-a_1)\cdots(x-a_k)f(x,a_1,\ldots,a_k)$. При решении задачи интерполяции $f(x,a_1,\ldots,a_n)=0$, и, значит, получаем представление интерполяционного многочлена в ***форме Ньютона***

$$f(x)=f(a_1)+(x-a_1)f(a_1,a_2)+\cdots+(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})f(a_1,\ldots,a_n).$$

3.1 Упражнения

1. Построить интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

1.

x	0	1	2	3
y	-3	-1	9	33

2.

x	0	1	2	3
y	-4	-2	8	32

3.

x	0	1	2	3
y	-3	-3	-1	9

4.

x	0	1	2	3
y	-4	-4	-2	18

5.

x	0	1	2	3
y	-3	-2	1	12

6.

x	1	i	-1	$-i$
y	5	1	1	1

7.

x	1	i	-1	$-i$
y	3	-1	-1	-1

8.

x	1	i	-1	$-i$
y	4	2	0	2

9.

x	1	i	-1	$-i$
y	3	3	-1	3

10.

x	0	1	2	3
y	1	1	5	19

11.

x	-2	-1	0	1
y	-11	-1	1	1

12.

x	-2	-1	0	1
y	-15	1	1	-1

13.

x	-2	-1	0	1
y	-7	2	1	-2

14.

x	-2	-1	0	1
y	-9	1	1	-1

15.

x	0	1	4	9
y	0	0	2	3

16.

x	1	2	3	4
y	2	6	12	20

17.

x	1	2	4	8
y	0	1	2	3

18.

x	0	1	2	3
y	1	2	4	8

19.

x	1	2	3	4
y	2	4	8	16

20.

x	5	2	3	4
y	32	4	8	16

2. Построить интерполяционный многочлен в форме Ньютона

1.

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	29

2.

x	0	1	2	3	4
y	1	1	1	1	25

3.

x	0	1	2	3	4
y	1	2	5	10	41

4.

x	0	1	2	3	-1
y	1	2	3	4	24

5.

x	-1	1	2	3	5
y	1	1	1	1	13

6.

x	-1	1	2	3	5
y	3	-1	-3	-5	3

7.

x	-1	0	1	2	3
y	6	5	0	3	2

8.

x	1	2	3	4	6
y	5	6	1	-4	10

9.

x	1	2	3	4	6
y	4	4	-2	-8	4

15.

x	1	2	3	4	6
y	1	3	7	13	31

10.

x	1	2	3	4	6
y	5	5	-1	-7	5

16.

x	1	2	3	4	6
y	-1	-1	1	5	19

11.

x	1	2	3	4	6
y	1	4	10	20	56

17.

x	0	2	1	3	-1
y	1	3	1	7	3

12.

x	1	2	3	4	6
y	6	9	8	9	41

18.

x	-2	0	2	-1	1
y	-15	1	1	-2	0

13.

x	-3	2	3	4	1
y	-1	4	10	20	1

19.

x	4	3	2	1	-1
y	27	18	11	6	2

14.

x	1	2	3	4	6
y	5	7	5	5	35

20.

x	4	3	2	1	-1
y	19	12	7	4	4

3. Разложить в сумму дробей (с помощью интерполяционного многочлена в форме Лагранжа)

1. $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)(x+2)}$

2. $\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x+1)(x+2)}$

3. $\dfrac{x^2-2}{x(x+1)(x+2)}$

4. $\dfrac{x^3+1}{x(x-2)(x+1)(x+2)}$

5. $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)x(x+1)(x+2)}$

6. $\dfrac{x^3-x^2+1}{(x-2)x(x+1)(x+2)}$

7. $\dfrac{x^2+2}{x(x^2-1)(x^2-4)}$

8. $\dfrac{x^2+x-2}{x(x^2+1)(x^2-4)}$

9. $\dfrac{x+1}{x^6-1}$

10. $\dfrac{1}{x^n-1}$

4. Найти сумму (используя интерполяционный многочлен в форме Ньютона)

1. $S_n = \sum_{i=1}^{n}(2+2i)$

2. $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$

3. $S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(2-2i+i^2\right)$

4. $S_n = \sum_{i=1}^{n}(i-1)i$

5. $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^3$

6. $S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i-1)(i+1)$

7. $S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(i^3 - i^2 + 1\right)$

8. $S_n = \sum_{i=2}^{n} C_i^2$

9. $S_n = \sum_{i=3}^{n} C_i^3$

10. $S_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i+k}^k$, $k \in N$

5. Многочлен $f(x)$ при делении на $(x-1)$ имеет остаток 1, на $(x-2)$ имеет остаток 3, на $(x-3)$ имеет остаток 5, на $(x-4)$ имеет остаток 6. Какой остаток получится при делении $f(x)$ на $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$?

4 Неприводимый многочлен, его свойства

Многочлен называется ***неприводимым над числовым полем***, если он не делится на многочлены меньшей степени (исключая константы) с коэффициентами из этого поля. Многочлен над числовым полем единственным образом раскладывается в произведение неприводимых многочленов, с точностью до перестановки сомножителей и числовых множителей.

Многочлены первой степени неприводимы над любым числовым полем. Число a называется ***корнем*** многочлена, если $f(a)=0$. Многочлен степени n имеет не более n корней**.** Приведем свойства неприводимых многочленов

A. Если h неприводимый многочлен и fg делится на h, то либо f делится на h, либо g делится на h

B. Если h неприводимый многочлен, то либо f взаимно просто с h, либо f делится на h

C. Если неприводимый многочлен f делится на многочлен h, то $f(x) = \alpha h(x)$, где α - число

D. Пусть $h_1(x), \ldots, h_k(x)$ - неприводимые многочлены и $f(x) = \prod_{j=1}^{k} h_j^{t_j}(x)$, $g(x) = \prod_{j=1}^{k} h_j^{n_j}(x)$, тогда

$$НОД(f,g) = \prod_{j=1}^{k} h_j^{\min\{t_j, n_j\}} \text{ и } НОК(f,g) = \prod_{j=1}^{k} h_j^{\max\{t_j, n_j\}}.$$

4.1 Упражнение

1. Доказать свойство неприводимых многочленов

1. A 2. B 3. C 4. D

2. Является ли многочлен неприводимым над полем Q, R, C.

1. x^2+1
2. x^2-2
3. x^6+1
4. x^4+1
5. x^4+2
6. x^4+x^2+1

3. Разложить в произведение линейных множителей над C

1. $x^{100}-1$
2. x^n-1
3. $(x+1)^{10}-x^{10}$
4. $(x+1)^{10}+x^{10}$
5. $(x+1)^n-x^n$
6. $(x+1)^n+x^n$

5 Разложение многочлена над полем рациональных чисел

Многочлен над кольцом целых чисел называется ***примитивным***, если наибольший общий делитель его коэффициентов равен 1. Многочлен с рациональными коэффициентами единственным образом представляется в виде произведения положительного рационального числа, называемого ***содержанием*** многочлена, и примитивного многочлена. Произведение примитивных многочленов есть примитивный многочлен. Из данного факта вытекает, что если многочлен с целочисленными коэффициентами приводим над полем рациональных чисел, то он приводим над кольцом целых чисел. Таким образом, задача разложения многочлена на неприводимые множители над полем рациональных чисел сводится к аналогичной задаче над кольцом целых чисел.

Пусть $f(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ - многочлен с целыми коэффициентами и содержанием 1, а α - его рациональный корень. Представим корень многочлена в виде несократимой дроби $\alpha = a/b$. Многочлен *f*(*x*) представляется в виде произведения примитивных многочленов $(bx-a)g(x)$. Следовательно,

A. числитель a является делителем f_0,

B. знаменатель b – делителем f_n

C. для любого целого k значение $f(k)$ – целое число, которое делится без остатка на $(bk\text{-}a)$.

Перечисленные свойства позволяют свести задачу отыскания рациональных корней многочлена к конечному перебору. Похожий подход используется в разложении многочлена f на неприводимые множители над полем рациональных чисел методом Кронекера. Если многочлен $f(x)$ степени n приводим, то один из множителей имеет степень не выше $n/2$. Обозначим этот множитель через $g(x)$. Поскольку все коэффициенты многочленов суть целые числа, то для любого целого a значение $f(a)$ делится без остатка на $g(a)$. Выберем $m=1+n/2$ различных целых чисел a_i, $i=1,\ldots,m$. Для чисел $g(a_i)$ существует конечное число возможностей (число делителей любого ненулевого числа конечно), следовательно, существует конечное число многочленов, которые могут быть делителями $f(x)$. Осуществив полный перебор, либо покажем неприводимость многочлена, либо разложим его в произведение двух многочленов. К каждому множителю применим указанную схему до тех пор, пока все множители не станут неприводимыми многочленами.

Неприводимость некоторых многочленов над полем рациональных чисел можно установить с помощью простого критерия Эйзенштейна.

Пусть $f(x)$ многочлен над кольцом целых чисел. Если существует простое число p, что

I. Все коэффициенты многочлена $f(x)$, кроме коэффициента при старшей степени, делятся на p

II. Коэффициент при старшей степени не делится на p

III. Свободный член не делится на p^2

Тогда многочлен $f(x)$ неприводим над полем рациональных чисел.

Следует отметить, что критерий Эйзенштейна даёт достаточные условия неприводимости многочленов, но не необходимые. Так многочлен x^2+x-1 является неприводимым над полем рациональных чисел, но не удовлетворяет критерию Эйзенштейна.

Многочлен x^n+2, по критерию Эйзенштейна, является неприводимым. Следовательно, над полем рациональных чисел найдётся неприводимый многочлен степени *n*, где *n* любое натуральное число больше 1.

5.1 Упражнения

1. Найти содержание многочлена

    1. $2x^2+\frac{4}{3}x-6$
    2. $2x^2+\frac{1}{2}x-6$
    3. $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+0{,}6$
    4. $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{i}x^{i-1}$
    5. $\sum_{i=1}^{5}2^i3^{5-i}x^{i-1}$
    6. $x^2\sum_{|i|\le 2}\frac{i}{|i|+1}x^i$
    7. $\left(4x-\frac{2}{3}\right)\left(3x-\frac{3}{5}\right)$
    8. $\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{5}\right)$
    9. $\prod_{i=1}^{5}\left(x-\frac{1}{i}\right)$
    10. $\prod_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{i}x+1\right)$
    11. $\prod_{i=1}^{5}\left(x-\frac{1}{i}\right)$

2. Найти рациональные корни многочлена

    1. $x^3-6x^2+15x-14$
    2. $2x^3+3x^2+6x-4$
    3. $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$
    4. $4x^4-7x^2-5x-1$
    5. $x^4+2x^3-13x^2-38x-24$
    6. $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$

7. $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$
8. $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$
9. $24x^4-42x^3-77x^2+56x+60$
10. $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$
11. $x^5-7x^3-12x^2+6x+36$
12. $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$
13. $3x^5-5x^4-4x^3+7x^2-8x+4$
14. $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6$
15. $x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8$
16. $5x^6-16x^5+3x^4-10x^3-27x^2-10x+3$
17. $3x^6+11x^5+14x^4+36x^3+82x^2+40x-24$
18. $18x^6-6x^5+x^4-9x^3+x^2-3x+10$

3. Разложить на неприводимые множители над полем Q
   1. $x^4+x^3-3x^2-2x+2$
   2. $3x^4+2x^3-7x^2-2x+3$
   3. $2x^5-7x^3+x^2+5x-2$
   4. $2x^5-4x^4-3x^3+7x^2+x-2$
   5. $4x^4-8x^3-x^2+5x+1$
   6. $2x^4-6x^3+3x^2+3x-1$
   7. $x^4-8x^3+21x^2-20x+5$
   8. $x^4-x^3+x^2+x-1$
   9. $x^4-x^3+x^2-x-1$

4. Доказать неприводимость многочлена над полем Q
   1. $x^4+8x^3-6x^2+12x-6$
   2. $2x^5-9x^3+12x^2-15x+6$
   3. $x^4+6x^3+16x^2+20x+11$

4. $\dfrac{x^p-1}{x-1}$, где p - простое

6 Формальная производная, ее свойства

Многочлен $f(x+y)$-$f(x)$ делится на y без остатка. Положим $F(x,y)=\left(f(x+y)-f(y)\right)/y$. Многочлен $F(x,0)$ называют производной многочлена $f(x)$ и обозначают $f'(x)$. Приведем свойства производной

A. $\left(f(x)\pm g(x)\right)' = f'(x)\pm g'(x)$

B. $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$

C. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$

D. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

Если $f(x)$ делится на $(x-\alpha)^k$ и не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$, то говорят, что α корень многочлена $f(x)$ ***кратности*** k. Между кратными корнями многочлена и его производной существует связь. Если a корень многочлена $f(x)$ кратности k, то a корень его производной кратности k-1.

Пусть $f(x)$ - многочлен с коэффициентами из поля P. Построим многочлен $g(x)=\dfrac{f(x)}{НОД\left(f(x),f'(x)\right)}$, коэффициенты которого принадлежат P. Рассмотрим многочлены $f(x)$ и $g(x)$ над полем разложения $f(x)$, которое обозначит через T. Пусть $f(x)=\prod_{j=1}^{s}\left(x-\alpha_j\right)^{k_j}$ - разложение многочлена $f(x)$ над T. Тогда, по теореме о кратных корнях

$НОД\left(f(x),f'(x)\right)=\prod_{j=1}^{s}\left(x-\alpha_j\right)^{k_j-1}$ и $g(x)=\prod_{j=1}^{s}\left(x-\alpha_j\right)$. Пусть

$f(x)=\prod_{j=1}^{m}h_j^{r_j}(x)$ - разложение многочлена $f(x)$ над полем P на неприводимые множители, тогда $g(x)=\prod_{j=1}^{m}h_j(x)$. То есть, многочлен $g(x)$

раскладывается на те же неприводимые множители, что и $f(x)$, причем кратность каждого множителя равна 1.

Производную порядка *k* от многочлена *f*(*x*) обозначим $f^{(k)}(x)$. Будем считать, что $f^{(0)}(x)$ - исходный многочлен. При вычислении производных высокого порядка от произведения справедлива формула, напоминающая бином Ньютона $(f(x)g(x))^{(j)} = \sum_{r=0}^{j} C_j^r f^{(r)}(x) g^{(j-r)}(x)$.

Для многочлена $f(x)$ степени *n* справедлива ***формула Тейлора*** $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^j$. В частности отсюда вытекает возможность вычисления значения производной *j*-го порядка в точке α по схеме Горнера. Другим важным фактом является эквивалентное определение кратного корня с помощью производной. Условие $f^{(i)}(\alpha) = 0$ при *i*=0,…,*k*-1 и $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$ равносильно тому, что α - корень *f*(*x*) кратности ***k*.**

Рассмотрим обобщение задачи интерполяции. Требуется найти многочлен наименьшей степени, у которого на некотором множестве заданы не только его значения, но и значения производных до определенных порядков. Пусть на множестве точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ заданы значения функции, а также её производных высших порядков. То есть, заданы значения $f^{(i)}(\alpha_j)$, где *j*=1,…,*k* и $i = 0,\ldots,s_j$. Задача заключается в построении многочлена $h(x)$ наименьшей степени, удовлетворяющего равенствам $h^{(i)}(\alpha_j) = f^{(i)}(\alpha_j)$, где *j*=1,…,*k* и $i = 0,\ldots,s_j$. Положим $w_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{k} (x-\alpha_j)^{s_j}$. Будем искать интерполяционный многочлен в виде $h(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{s_i} h_{ij}(x-\alpha_i)^j \right) w_i(x)$, где коэффициенты h_{ij} определяются из условий задачи интерполяции. Поскольку $h^{(i)}(\alpha_j) = \sum_{r=0}^{i} C_i^r h_{jr} w_j^{(i-r)}(\alpha_j)$, то имеем рекуррентные формулы для вычисления h_{ji}: $h_{j0} = \frac{f(\alpha_j)}{w_j(\alpha_j)}$, и $h_{ji} = \frac{f^{(i)}(\alpha_j) - \sum_{r=0}^{i-1} C_i^r h_{jr} w_j^{(i-r)}(\alpha_j)}{w_j(\alpha_j)}$, где

j=1,…,k и $i = 1,..., s_j$. Интерполяционный многочлен, записанный в виде $h(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{s_i} h_{ij} (x - \alpha_i)^j \right) w_i(x)$, называется ***интерполяционным многочленом Лагранжа – Сильвестра***. Существует единственный многочлен $h(x)$ степени не больше $k + s_1 + \cdots + s_k$, удовлетворяющий равенствам $h^{(i)}(\alpha_j) = f^{(i)}(\alpha_j)$, где j=1,…,k и $i = 0,..., s_j$.

6.1 Упражнения

1. Разложить в формулу Тейлора в точке α
   1. $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 2$, $\alpha = -1$
   2. $a(x) = x^5$, $\alpha = 1$
   3. $a(x) = x^4 + (4i - 1)x^3 - (4 + 3i)x^2 + 3x - 3 + i$, $\alpha = i$
   4. $a(x) = (x-4)^4 - 2(x-4)^3 + 2(x-4)^2 - (x-4) + 1$, $\alpha = 2$
   5. $a(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) - 2(x+2)(x+1)x(x-1) +$
   $+ (x+2)(x+1)x - (x+2)(x+1) + 3(x+2) - 1$, $\alpha = 0$
2. Отделить кратные множители
   1. $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$
   2. $x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8$
   3. $x^6 + 6x^5 + 3x^4 - 28x^3 - 9x^2 + 54x - 27$
   4. $x^7 - 5x^6 - 3x^5 + 31x^4 + 19x^3 - 63x^2 - 81x - 27$
3. Определить кратность корня α
   1. $f(x) - \sum_{j=0}^{k} (x-\alpha)^j \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!}$
   2. $\dfrac{(x-\alpha)}{2}(f'(x) + f'(\alpha)) - f(x) + f(\alpha)$
4. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра
   1. $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = 3$, $f(2) = 1$
   2. $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = 1$, $f(2) = 1$
   3. $f(1) = 1$, $f'(1) = 3$, $f''(1) = 6$, $f(2) = 8$

4. $f(1)=8$, $f'(1)=12$, $f''(1)=12$, $f(0)=1$
5. $f(1)=4$, $f'(1)=4$, $f''(1)=2$, $f(0)=1$, $f'(0)=2$

5. Найти многочлен наименьшей степени, дающий в остатке
   1. $2x$ при делении на $(x-1)^2$ и $3x$ при делении на $(x-2)^3$
   2. x^2+x+1 при делении на $(x-1)^4$ и $3x$ при делении на $(x-2)^3$

6. При каких *a,b,c* многочлен $x^4+ax^3+bx^2+cx-1$ имеет -1 корнем не ниже третьей кратности?

7. При каких *a,b* многочлен имеет кратный корень
   1. x^3+ax+b
   2. x^4+ax+b
   3. x^5+ax+b
   4. x^3-ax+b
   5. x^4-ax^3+b
   6. x^n+ax+b
   7. $x^n+ax^{n-1}+b$

8. Показать, что многочлен x^m+ax^n+b, где $b\neq 0$ не имеет корней кратности выше 2.

9. Показать, что многочлен $\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}$ не имеет кратных корней.

7 Формулы Виета, симметрические полиномы

Пусть многочлен $\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+x^n$ имеет корни $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$. Из равенства $\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+x^n=(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n)$, сопоставив коэффициенты при равных степенях, выводим формулы Виета $\alpha_i=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_{n-i}\le n}(-1)^{n-i}\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_{n-i}}$.

Многочленом от n переменных называется функция вида $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i_1=0}^{s_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{s_n}\alpha_{i_1\ldots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$. ***Степенью многочлена*** называется максимальная суммарная степень по всем переменным. Слагаемое вида $x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ называется ***мономом***. Многочлен от *n* переменных может содержать несколько мономов максимальной степени. Моном максимальной степени

$x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ назовём ***старшим***, если набор его степеней $i_1,\ldots,i_n$ лексикографически максимален. Обозначим через $v(f)$ набор степеней старшего монома. Имеет место $v(fg)=v(f)+v(g)$, $v(f\pm g)\le\max\{v(f),v(g)\}$. Многочлен от нескольких переменных называется ***симметрическим***, если он не меняется при любой перестановке переменных. Многочлены $\delta_i=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_i\le n}x_{j_1}\cdots x_{j_i}$, где i=1,…,n называются ***элементарными симметрическими многочленами***.

По формулам Виета, коэффициенты многочлена с точностью до знака суть значения элементарных симметрических многочленов от его корней. Заметим $v(\delta_i)=\left\langle\overbrace{1,\ldots 1}^{i},0,\ldots,0\right\rangle$. Для любого симметрического многочлена f степени $v(f)=\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$, справедливы неравенства $\alpha_1\ge\alpha_2\ge\ldots\ge\alpha_n$. Степень $\delta_1^{\alpha_1-\alpha_2}\delta_2^{\alpha_2-\alpha_3}\cdots\delta_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}\delta_n^{\alpha_n}$ равна $v\left(\delta_1^{\alpha_1-\alpha_2}\delta_2^{\alpha_2-\alpha_3}\cdots\delta_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}\delta_n^{\alpha_n}\right)=\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$**.** Из этих фактов вытекает основная теорема алгебры симметрических многочленов.

Любой симметрический многочлен единственным образом представляется в виде полинома от элементарных симметрических многочленов.

Хотя доказательство теоремы носит конструктивный характер, для построения искомого полинома используют метод неопределенных коэффициентов.

Например, рассмотрим задачу вычисления суммы кубов корней уравнения x^4-4x+7. Обозначим через $x_1,\ldots,x_4$ корни этого уравнения. По теореме Виета, известны значения элементарных симметрических многочленов на этих корнях $\delta_1=0$, $\delta_2=0$, $\delta_3=4$, $\delta_4=7$. Многочлен $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3$ является симметрическим, и, значит, представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Поскольку исходный многочлен имеет степень 3, то его представление имеет вид $\alpha_1\delta_1^3+\alpha_2\delta_1\delta_2+\alpha_3\delta_3$, где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ - неизвестные коэффициенты. Чтобы найти эти коэффициенты возьмем конкретные значения переменных $x_1,\ldots,x_4$, сосчитаем на них значения элементарных многочленов и приравняем значение многочлена и его представления. При удачном выборе $x_1,\ldots,x_4$, из полученного равенства будет найден один из коэффициентов. Данные удобно свести в таблицу

x_1	x_2	x_3	x_4	δ_1	δ_2	δ_3	$x_1^3+\cdots+x_4^3$	$\alpha_1\delta_1^3+\alpha_2\delta_1\delta_2+\alpha_3\delta_3$	*прим.*
1	0	0	0	1	0	0	1	α_1	$\alpha_1=1$
1	1	0	0	2	1	0	2	$8\alpha_1+2\alpha_2$	$\alpha_2=-3$
1	1	1	0	3	3	1	3	$27\alpha_1+9\alpha_2+\alpha_3$	$\alpha_3=3$

.

Таким образом, $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=\delta_1^3-3\delta_1\delta_2+3\delta_3$. Подставим в правую часть значения элементарных симметрических многочленов на корнях многочлена, находим, что сумма кубов корней этого уравнения равна 12.

7.1 Упражнения

1. Выразить через элементарные симметрические многочлены

   1. $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$
   2. $\sum_{1\le i<j\le 3}\left(x_ix_j^2+x_i^2x_j\right)$
   3. $\sum_{i=1}^{3}x_i^4-\sum_{1\le i<j\le 3}x_i^2x_j^2$
   4. $\sum_{1\le i<j\le 3}\left(x_i^5x_j^2+x_i^2x_j^5\right)$
   5. $\prod_{1\le i<j\le 3}\left(x_i+x_j\right)$
   6. $\prod_{1\le i<j\le 4}\left(x_i^2+x_j^2\right)$
   7. $\prod_{1\le i<j\le 4}\left(x_i-x_j\right)^2$
   8. $\prod_{1\le i<j\le 4}\left(x_i+x_j\right)$
   9. $\prod_{1\le i<j\le 4}\left(x_i-x_j\right)^2$

2. Выразить через элементарные симметрические многочлены

   1. $x_1^2+\cdots$
   2. $x_1^3+\cdots$
   3. $x_1^2x_2+\cdots$
   4. $x_1^2x_2x_3+\cdots$
   5. $x_1^2x_2^2+\cdots$
   6. $x_1^3x_2+\cdots$
   7. $x_1^4+\cdots$
   8. $x_1^2x_2^2x_3+\cdots$

9. $x_1^3x_2x_3+\cdots$

10. $x_1^3x_2^2+\cdots$

11. $x_1^4x_2+\cdots$

12. $x_1^5+\cdots$

3. Вычислить значение симметрической функции от корней многочлена $f(x)$

1. $x_1^2+\cdots,\ f(x)=3x^3-5x^2+1$
2. $x_1^3x_2^2+\cdots,\ f(x)=3x^3-5x^2+1$
3. $x_1^5+\cdots,\ f(x)=3x^3-5x^2+1$
4. $x_1^4x_2+\cdots,\ f(x)=3x^3-5x^2+1$
5. $x_1^2x_2x_3+\cdots,\ f(x)=3x^4-2x^3+2x^2+x-1$
6. $x_1^3x_2^2+\cdots,\ f(x)=3x^4-2x^3+2x^2+x-1$
7. $x_1^2x_2^2x_3+\cdots,\ f(x)=3x^4-2x^3+2x^2+x-1$
8. $x_1^5+\cdots,\ f(x)=3x^4-2x^3+2x^2+x-1$

4. Корни многочлена $f(x)=x^3+ax+b$ обозначим через x_1,x_2,x_3. Найти многочлен, корни которого являются

1. x_1+x_2, x_1+x_3, x_2+x_3
2. $x_1+x_2+cx_1x_2$, $x_1+x_3+cx_1x_3$, $x_2+x_3+cx_2x_3$
3. $(x_1-x_2)^2$, $(x_1-x_3)^2$, $(x_2-x_3)^2$
4. x_1^2, x_2^2, x_3^2
5. $(x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon^2x_3)^3$, $(x_1+\varepsilon^2x_2+\varepsilon x_3)^3$, где $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Написать многочлен, корнями которого являются квадраты корней многочлена

1. x^2+ax+b
2. x^3+ax+b
3. x^4+ax+b
4. x^4+ax^3+b
5. x^n+ax+b
6. $x^n+ax^{n-1}+b$

6. Многочлен $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ имеет корни $x_1, \ldots, x_n$. Какие корни имеют многочлены:

1. $\sum_{i=0}^{n} a_i (-1)^i x^{n-i}$
2. $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
3. $\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} x^i$
4. $\sum_{i=0}^{n} a_i b^i x^{n-i}$

7. Определить α так, чтобы

1. один из корней многочлена $x^3 - 7x + \alpha$ равнялся удвоенному другому
2. сумма двух корней многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \alpha$ равна 1

8 Основная теорема Алгебры, и ее следствия

Основная теорема алгебры утверждает, что любой многочлен над полем комплексных чисел имеет хотя бы один комплексный корень. Следовательно, многочлен над полем комплексных чисел разлагается в произведение линейных множителей. Разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей. Рассмотрим многочлен с вещественными коэффициентами $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$. Над полем комплексных чисел он раскладывается на линейные множители. Если a его комплексный корень, то $f(\bar{a}) = \overline{f(a)} = 0$, т.е. $\bar{a}$ то же корень $f(x)$. Таким образом, многочлен $f(x)$ делится на трёхчлен $(x-a)(x-\bar{a}) = x^2 - 2\,\mathrm{Re}(a)x + |a|^2$ с вещественными коэффициентами. Следовательно, над полем вещественных чисел многочлен раскладывается в произведение неприводимых многочленов степени 1 и 2. Разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей.

8.1 Упражнения

1. Разложить многочлен на неприводимые множители над полем комплексных чисел

1. $x^3 + x + 2$
2. $x^4 + 4$
3. $x^4 - 10x^2 + 1$
4. $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + 4$

5. $x^4 + 4x^2 + 64$
6. $x^4 + 8x^3 + 8x - 1$
7. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
8. $x^6 - 1$
9. $x^6 + 27$
10. $x^4 - ax^2 + 1$, где $|a| < 2$
11. $x^{2n} - 1$
12. $x^{2n+1} - 1$

2. Разложить на неприводимые множители над полем вещественных чисел

1. $x^3 + x + 2$
2. $x^4 + 4$
3. $x^4 - 10x^2 + 1$
4. $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + 4$
5. $x^4 + 4x^2 + 64$
6. $x^4 + 8x^3 + 8x - 1$
7. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
8. $x^6 - 1$
9. $x^6 + 27$
10. $x^4 - ax^2 + 1$, где $|a| < 2$
11. $x^{2n} - 1$
12. $x^{2n+1} - 1$

3. По заданным корням построить многочлен наименьшей степени а) с рациональными коэффициентами, б) с вещественными коэффициентами, в)с комплексными коэффициентами

1. i - корень кратности 2, простые корни 1, 2, 3
2. 1 – корень кратности 2, простые корни 1-2i, 2, 3
3. корни $\sqrt{2}$, i, 1
4. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ - кратности, простые корни 2, $1 - i$
5. $\sqrt[3]{2} + i$ - кратности 2, простые корни $\sqrt{2}$, $1 - 2i$

9 Вещественные корни, теорема Штурма

Последовательность многочленов $F = \{f_0(x),\ldots, f_k(x)\}$ назовём ***последовательностью многочленов Штурма***, если она удовлетворяет следующим условиям:

I. Любые два соседних многочлена не имеют общих корней
II. Если a – корень $f_i(x)$ при i>0, то $f_{i-1}(a) f_{i+1}(a) < 0$
III. Последний многочлен не имеет вещественных корней.

IV. Если в окрестностях корня a многочлена $f_0(x)$ сам многочлен возрастает, то $f_1(a) > 0$, а если убывает, то $f_1(a) < 0$

Для последовательности многочленов F и числа a определим $w(a)$ – число перемен знака в числовой последовательности $f_0(a),..., f_k(a)$ (нули игнорируем). Число различных корней многочлена $f_0(x)$ на отрезке $[a,b]$ равно $w(a)-w(b)$.

Пусть многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней. Построим последовательность многочленов: $f_0(x)= f(x)$, $f_1(x)= f'(x)$, и далее, $f_i(x)$ - остаток от деления $f_{i-2}(x)$ на $f_{i-1}(x)$ умноженный на -1.

Данная последовательность многочленов будет последовательностью многочленов Штурма. Действительно, условие IV выполнено по свойству производной. Наибольший общий делитель многочлена и его производной равен 1, т.к. нет кратных корней. Таким образом, последний многочлен в ряду равен константе и не имеет вещественных корней. Из равенства $f_{i+1}(x) = -f_{i-1}(x) + h_i(x) f_i(x)$ вытекает условие II. Подставив $x=a$, где a – корень $f_i(x)$, получим $f_{i+1}(a) = -f_{i-1}(a)$. Общего корня у соседних многочленов не может быть, так как его наличие приводит к существованию кратных корней у $f_0(x)$.

9.1 Упражнения

1. Отделить вещественные корни многочлена

1. x^3-3x-1
2. x^3-7x+7
3. x^3+x^2-2x-1
4. x^4+3x^2-1
5. $x^4-12x^2-16x-4$
6. $2x^4-8x^3+8x^2-1$
7. $x^4+4x^3-12x+9$
8. x^4-x-1
9. $x^4-2x^3-4x^2+5x+5$
10. $x^4-2x^3-3x^2+2x+1$
11. $x^4-4x^3-4x^2+4x+1$
12. $x^4-2x^3+x^2-6x+1$
13. $x^4-2x^3+x^2-2x+1$
14. $x^4-2x^3-7x^2+8x+1$

15. $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$

16. $x^5 + 5x^4 + 5x^2 - 5x - 3$

2. Определить число вещественных корней многочленов

1. $x^3 + px + q$
2. $x^n + px + q$
3. $x^5 - 5ax^3 + 5ax^2 + 2b$
4. $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$
5. $f(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j}$
6. $f(x) = nx^n - \sum_{j=0}^{n-1} x^j$