С.К. Соболев, В.Я Томашпольский.

Прямые и плоскости

Методические указания к решению задач по аналитической геометрии.

Для всех факультетов

МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Москва
2012

УДК: 512+514.12

Рецензент: Покровский Илья Леонидович

Соболев С.К., Томашпольский В.Я. Прямые и плоскости. Методические указания к решению задач по курсу «Аналитическая геометрия». – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, илл. 32.

Изложены основы аналитической геометрии прямых и плоскостей на плоскости и в пространстве: различные виду уравнений прямых и плоскостей, исследование их взаимного расположения, приложения к планиметрии и стереометрии. Разобрано большое количество примеров различной степени сложности. Содержит задачи для самостоятельного решения снабженные ответами и указаниями.

Для студентов, изучающих и применяющих аналитическую геометрию.

Рекомендовано: Учебно-методической комиссией факультета Фундаментальные науки МГТУ им. Н.Э. Баумана.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5
Глава. 1 Прямая в пространстве 6
1.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом 6
1.2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости, заданных уравнениями с угловым коэффициентом 6
1.3. Общее уравнение прямой на плоскости 7
1.4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости, заданных общими уравнениями 7
1.5. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости 7
1.6. Уравнение прямой на плоскости «в отрезках» 8
1.7. Нормальное (полярное) уравнение прямой на плоскости 9
1.8. Нахождение точки пересечения двух прямых на плоскости. 9
1.9. Расстояние от точки до прямой на плоскости 9
1.10. Пучок прямых на плоскости 9
1.11. Расположение отрезка относительно прямой на плоскости 10
1.12. Решением типовых примеров к главе 1 10
1.13. Задачи для самостоятельного решения к главе 1 19
Глава 2. Плоскость в пространстве 21
2.1. Общее уравнение плоскости в векторной форме 21
2.2. Общее уравнение плоскости в координатной форме 21
2.3. Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения плоскости 21
2.4. Специальные виды уравнения плоскости 21
2.4.1. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки 21
2.4.2. Уравнение плоскости «в отрезках» 22
2.4.3. Нормальное уравнение плоскости 22
2.4.4 Параметрические уравнения плоскости 22
2.5. Расстояние от точки до плоскости 23
2.6. Расположение отрезка относительно плоскости 23
2.7. Взаимное расположение двух плоскостей 23
2.8. Решение типовых примеров к главе 2 24
2.9. Решение геометрических с помощью уравнения плоскости 27
2.10. Задачи для самостоятельного решения к главе 2 32
Глава 3. Прямая в пространстве 35
3.1. Общие уравнения прямой в пространстве 35
3.2. Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве 35

3.3. Общее векторное уравнение прямой в пространстве ··· 36
3.4. Переход от канонических уравнений прямой к общим уравнениям и обратно ··· 37
3.5. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки ··· 36
3.6. Расстояние от точки до прямой в пространстве ··· 37
3.7. Пучок плоскостей ··· 37
3.8. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости ··· 38
3.9. Решением типовых примеров к главе 3 ··· 38
3.10. Задачи для самостоятельного решения к главе 3 ··· 45
Глава 4. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Геометрические задачи на прямую и плоскость в пространстве ··· 49
4.1. Взаимное расположение прямой и плоскости ··· 49
4.2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве ··· 50
4.3. Угол между двумя прямыми ··· 51
4.4. Нахождения точки пересечения двух пересекающихся прямых в пространстве ··· 51
4.5. Расстояние между двумя параллельными прямыми ··· 51
4.6. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми ··· 51
4.7. Уравнение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых ··· 52
4.8. Решение типовых примеров к главе 4 ··· 53
4.9. Задачи для самостоятельного решения к главе 4 ··· 65
Ответы и указания ··· 69
Литература ··· 74

Введение.

Аналитическая геометрия была создана французскими математиками и Рене Декартом и Пьером Ферма в 17 веке. Главная идея этой науки – описывать геометрические объекты: точки, линии, поверхности – алгебраическими методами, главным образом, уравнениями. Для точного математического описания положения точек на плоскости или в пространства вводится прямоугольная система координат, называемая также **декартовой**. Любопытно, что в математике координаты появились намного позже, чем в астрономии и географии. Положение каждой точки на плоскости определяется двумя, а в пространстве – тремя числами – координатами этой точки. Тогда одно уравнение с двумя переменными $F(x,y)=0$ задает (как правило) на плоскости линию, состоящую из всех точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Аналогично, уравнение с тремя переменными $F(x,y,z)=0$ задает (вообще говоря) в пространстве поверхность, состоящую из всех точек $M(x;y;z)$, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Соответственно, система двух таких уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

задает некоторую линию, а именно линию пересечения двух поверхностей.

В данном пособии мы рассмотрим геометрические объекты, задаваемее линейными уравнениями вида $ax+by+c=0$ (на плоскости) и вида $ax+by+cz+d=0$ в пространстве). Эти уравнения описывают прямые и плоскости. Мы научимся задавать прямые и плоскости уравнениями разных видов, исследовать их взаимное расположение, а также решать геометрические задачи методами аналитической геометрии. Для понимания изложенного материала требуется хорошее владение векторной алгеброй, см., например, [6].

В начале каждой главы излагается весь необходимый теоретический материал и приводятся все необходимые формулы. Далее разбираются примеры: как простейшие, так и средней и повышенной сложности. Конец решения примера помечен квадратиком ■. В заключении каждой главы имеются задачи для самостоятельного решения (с ответами в конце пособия).

Глава 1. Прямая на плоскости

Прямая на плоскости может быть задана уравнениями разных видов.

1.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пусть на декартовой плоскости, т.е. на плоскости, на которой задана декартова система координат *XOY*, расположена прямая ℓ, не параллельная оси *OY*. Возьмем на этой прямой произвольные две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Тогда справедливо утверждение:

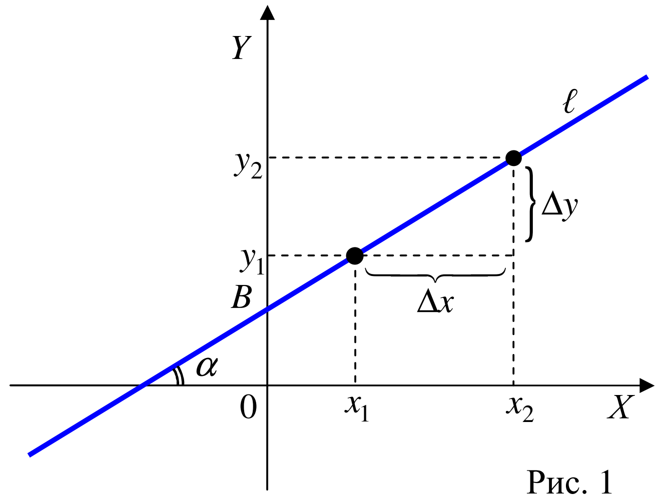

Рис. 1

Отношение $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *не зависит от выбора точек* M_1 *и* M_2 *на этой прямой, равно тангенсу угла* α *наклона этой прямой к оси OX и называется её* ***угловым коэффициентом****:* $k = \operatorname{tg}\alpha$**.**

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y = kx + m$ ($k, m = const \in \mathbf{R}$), где k – угловой коэффициент этой прямой, пересекающей ось *OY* в точке *B* с координатами $B(0; m)$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k и проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{1.1}$$

1.2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.

Пусть на плоскости даны прямые $\ell_1: \ y = k_1x + m_1$ и $\ell_2: \ y = k_2x + m_2$. Тогда эти прямые:

(а) совпадают $\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2, \\ m_1 = m_2; \end{cases}$

(б) параллельны (но не совпадают) $\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2, \\ m_1 \neq m_2; \end{cases}$

(в) пересекаются (в одной точке) $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$;

(г) перпендикулярны $\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$; (1.2)

(д) не перпендикулярны и образуют угол φ, тангенс которого равен

$$k_1k_2 \neq -1, \quad \operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|. \tag{1.3}$$

1.3. Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид $\ell: ax + by + c = 0$, где $a, b, c = const \in \mathbf{R}$ и $a^2 + b^2 > 0$, причем, вектор $\boldsymbol{n}\{a; b\}$ перпендикулярен прямой ℓ и называется её ***нормальным вектором***. В частности:

(а) $a = 0 \Leftrightarrow$ прямая ℓ параллельна оси OX;
(б) $b = 0 \Leftrightarrow$ прямая ℓ параллельна оси OY;
(в) $c = 0 \Leftrightarrow$ прямая ℓ проходит через начало координат.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\boldsymbol{n}\{a; b\}$, имеет вид:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (1.4)$$

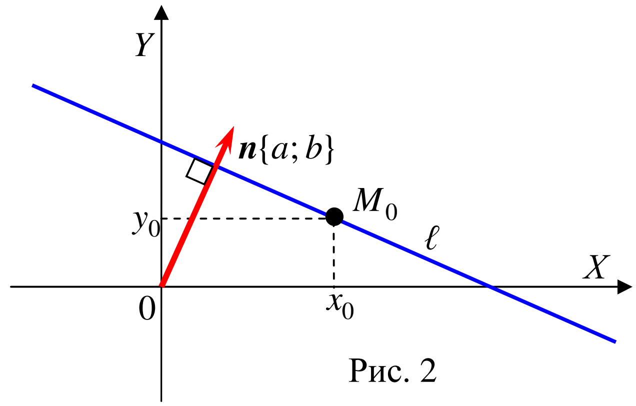

Рис. 2

1.4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости, заданных общими уравнениями.

Пусть на плоскости даны прямые ℓ_1: $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ и $\ell_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$. Тогда эти прямые:

(а) совпадают $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$;

(б) параллельны (но не совпадают) $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;

(в) пересекаются (в одной точке) $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$;

(г) перпендикулярны $\Leftrightarrow (\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2) = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$;

(д) образуют между собой угол φ, косинус которого равен модулю косинуса угла между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi = \cos\left(\ell_1 \wedge \ell_2\right) = \frac{\left|(\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2)\right|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \qquad (1.5)$$

1.5. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости.

Пусть на плоскости дана некоторая линия L, прямая или кривая.

Отметим на этой линии ***точку отсчета*** M_0, зададим некоторое направление (называемое ***положительным***) и затем сопоставим каждой точке M этой линии некоторой число t, которое равно нулю в точке M_0 и непрерывно увеличивается (уменьшается) при движении вдоль линии L в положительном (отрицательном) направлении. Величина t называется ***параметром,*** но правильней её было бы назвать ***внутренней координатой точки M на линии L.***

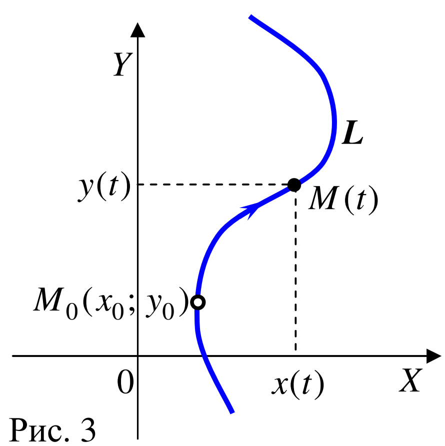

Рис. 3

Если выразить декартовы (внешние) координаты точки M кривой через её параметр (внутреннюю координату) t в виде некоторых функций: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то получим так называемые **па-**

раметрические уравнения линии L.

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} t \in (\alpha; \beta), \tag{1.6}$$

где $(\alpha; \beta)$ – интервал изменения параметра t. Например, если t – время, то уравнения (1.6) задают ***траекторию*** движения точки на плоскости.

Составим параметрическое уравнение **прямой** линии на плоскости. Пусть прямая ℓ параллельна ненулевому вектору $\boldsymbol{s}\{p; q\}$ (он называется ***направляющим*** вектором этой прямой) и проходит через данную точку $M_0(x_0; y_0)$. Тогда точка $M(x; y)$ принадлежит прямой $\ell \Leftrightarrow$ вектор $\overline{M_0M}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{s}$ $\Leftrightarrow$ $\overline{M_0M} = t \cdot \boldsymbol{s}$ при некотором $t \in \mathbf{R}$. Следовательно, радиус- вектор точки M задается уравнением:

$$\overline{OM} = \overline{OM_0} + t \cdot \boldsymbol{s} \tag{1.7}$$

(где t пробегает все вещественные значения т.е. $t \in \mathbf{R}$),
которое называется ***параметрическим уравнением прямой в векторной форме.***

При этом каждой точке прямой соответствует некоторое значение параметра (внутренней координаты) t, и наоборот, в частности, значению $t = 0$ отвечает сама точка M_0, а значению $t = 1$ соответствует точка M_1 этой прямой такая, что $\overline{M_0M_1} = \boldsymbol{s}$.

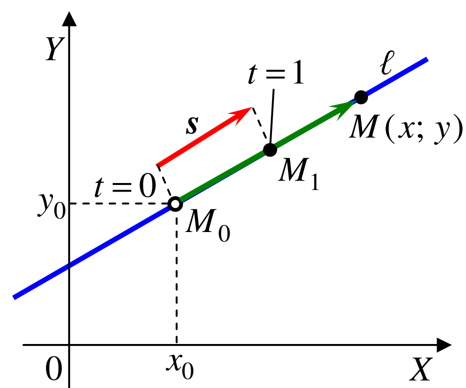

Рис. 4

Если в векторном уравнении (1.7) перейти к координатам, то получим ***параметрические уравнения прямой в координатной форме:***

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + pt, \\ y &= y_0 + qt \end{aligned}\right\} t \in \mathbf{R} \tag{1.8}$$

Исключив параметр t из этих уравнений, получим ***каноническое*** уравнение прямой ℓ на плоскости:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} \tag{1.9}$$

где x_0, y_0 – координаты точки, принадлежащей этой прямой, $\{p; q\}$ – координаты направляющего вектора прямой.

1.6. Уравнение прямой на плоскости «в отрезках»

Если прямая на плоскости **не** проходит через начало координат и пересекает координатные оси в точках $A(a; 0)$ и $B(0; b)$ (см. Рис. 5), то она задается уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{1.10}$$

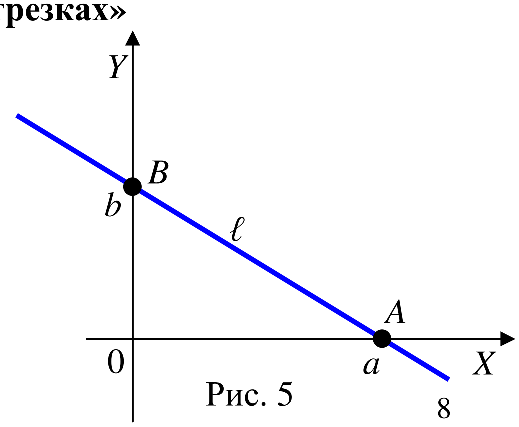

Рис. 5

1.7. Нормальное (полярное) уравнение прямой на плоскости. Если прямая ℓ на плоскости не проходит через начало координат, перпендикуляр OP, опущенный из начала координат на эту прямую, имеет длину p и образует с осью OX угол α (см. Рис. 6), то ***нормальное уравнение*** этой прямой имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p. \qquad (1.11)$$

При этом вектор $\overline{OP}$ имеет координаты $\overline{OP}\{p\cdot\cos\alpha; p\cdot\sin\alpha\}$.

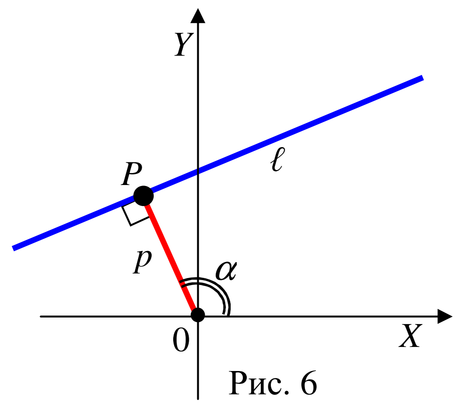

Рис. 6

1.8. Нахождение точки пересечения двух прямых на плоскости. Напомним, что координаты точки пересечения двух линий на плоскости являются решениями системы уравнений этих линий. В частности, координаты точки пересечения двух пересекающихся прямых $\ell_1: \; a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $\ell_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ являются решениями системы:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Аналогично находится точка пересечения прямых, если одна из них или обе они заданы каноническими уравнениями.

Очень легко находить точку пересечения двух прямых, если одна из них задана параметрически: $x = x_0 + pt,\ y = y_0 + qt\ (t \in \mathbf{R})$, а вторая – общим уравнением $ax + by + c = 0$ (или каноническим). Тогда надо решить систему трех уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ ax + by + c = 0, \end{cases}$$

для чего следует подставить первые два уравнения в третье, решить полученное уравнение и найденное значение t подставить в первые два уравнения системы.

1.9. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $\ell: ax + by + c = 0$ (на плоскости) находится по так называемой формуле **«дробь – модуль – корень»:**

$$\rho(M_0; \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (1.12)$$

1.10. Пучок прямых на плоскости. Пусть на плоскости даны две прямые (пересекающиеся в некоторой точке M_0), заданные своими общими уравнениями $\ell_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $\ell_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Тогда уравнение:

$$(a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2) = 0 \qquad (1.13)$$

с параметром $\lambda = const \in \mathbf{R}$ задает семейство всех прямых плоскости, проходящих через точку M_0 (кроме прямой ℓ_2). Это семейство прямых называется ***пучком прямых***. Таким образом, при любом значении λ уравнение (1.13) задает некоторую прямую, проходящую через точку M_0 пересечения данных прямых ℓ_1 и ℓ_2, и наоборот, всякая прямая m, проходящая через точку M_0, кроме прямой ℓ_2, задается уравнением вида (1.13) при подходящем значении λ.

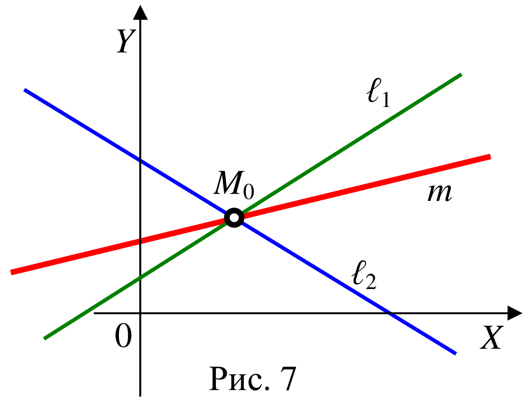

Рис. 7

1.11. Расположение отрезка относительно прямой на плоскости. Пусть на плоскости дана прямая $\ell : ax + by + c = 0$ и отрезок с концами в точках $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, которые **не лежат** на этой прямой. Для любой точки $M(x; y)$ обозначим $\varphi_\ell(M) = \varphi_\ell(x, y) = ax + by + c$. Тогда

(а) отрезок M_1M_2 пересекает эту прямую, т.е. точки M_1 и M_2 лежат по **разные** стороны от прямой $\ell \Leftrightarrow \varphi_\ell(M_1) \cdot \varphi_\ell(M_1) < 0$ (Рис. 8);

(б) отрезок M_1M_2 **не** пересекает прямую ℓ, т.е. точки M_1 и M_2 лежат по **одну** сторону от этой прямой $\Leftrightarrow \varphi_\ell(M_1) \cdot \varphi_\ell(M_1) > 0$.

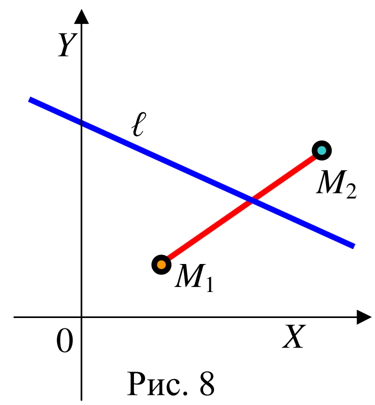

Рис. 8

1.12. Решением типовых примеров к главе 1

Пример 1. 1. На плоскости даны точки $A(3;-1)$ и $B(1;4)$. Написать уравнения: (а) прямой *AB*; (б) прямой, проходящей через точку *A* перпендикулярно *AB*,

Решение. (а) Вектор $\overline{AB}\{-2;5\}$ является направляющим для искомой прямой, поэтому её уравнение запишем, сначала в каноническом виде (1.9), а затем и общем виде:

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{5} \Leftrightarrow 5x - 15 = -2y - 2 \Leftrightarrow 5x + 2y - 13 = 0.$$

(б) Для этой прямой вектор $\overline{AB}\{-2;5\}$ является нормальным, поэтому уравнение прямой запишем в общем виде (1.4):

$$(-2)\cdot(x-3) + 5\cdot(y+1) = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 + 5y + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y - 11 = 0.$$

Ответы. (а) $5x + 2y = 13 = 0$; (б) $2x - 5y - 11 = 0$. ■

Пример 1. 2. Найти расстояние от точки $A(4;3)$до прямой ℓ, заданной параметрически: $x = 3 + 2t,\ y = -4 + 5t,\ t \in \mathbf{R}$.

Решение. Запишем сначала каноническое уравнение, исключив параметр t, из которого легко получим общее уравнение прямой ℓ:

$$t=\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{5}\Rightarrow 5(x-3)=2(y+4)\Leftrightarrow 5x-2y-23=0.$$

Расстояние находим о формуле (1.12) : $\rho(A,\ell)=\dfrac{|5\cdot 4-2\cdot 3-23|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{29}}$.

Ответ: $\dfrac{9}{\sqrt{29}}$. ■

Пример 1. 3. Найти параметрические уравнения и каноническое уравнение прямой, заданной общим уравнением $3x+5y+4=0$.

Решение. Заметим, что векторы $\boldsymbol{n}\{a;b\}$ и $\boldsymbol{m}\{b;-a\}$ всегда ортогональны, т.к. их скалярное произведение равно нулю: $(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{m})=ab-ba=0$. Поэтому вектор $\boldsymbol{s}\{5;-3\}$ перпендикулярен нормальному вектору $\boldsymbol{n}\{3;5\}$ этой прямой и, следовательно, является для неё направляющим. Подбором найдем какую-нибудь точку $M_0(x_0;y_0)$ этой прямой, например, $x_0=-3,\ y_0=1$. Следовательно, данная прямая может быть задана параметрическими уравнениями: $x=-3+5t$, $y=1-3t,\ t\in\mathbf{R}$. Исключая параметр t, получаем каноническое уравнение.

Ответ. $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-1}{-3}$. ■

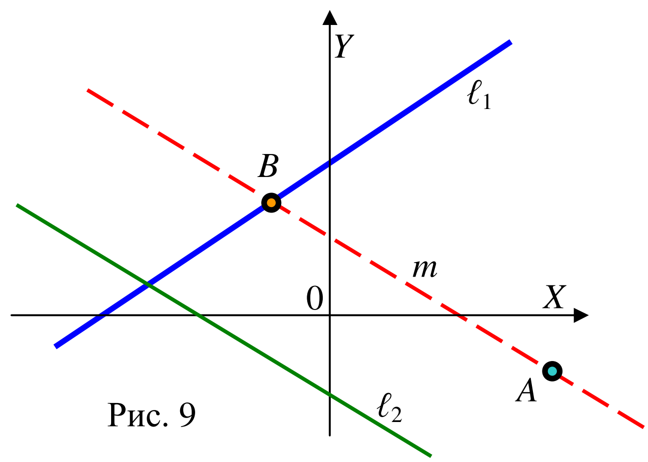

Рис. 9

Пример 1. 4. Найти координаты точки B – проекции точки $A(4;-1)$ на прямую $\ell_1: 2x-3y+8=0$ параллельно прямой $\ell_2: 3x+5y+7=0$.

Решение. Точка B есть пересечение прямой m, проходящей через точку A параллельно прямой ℓ_2, поэтому имеющей тот же нормальный вектор $\boldsymbol{n}\{3;5\}$, следовательно, её уравнение $m: 3(x-4)+5(y+1)=0\Leftrightarrow 3x+5y-7=0$. Координаты точки B (пересечения прямых m и ℓ_1) являются решением системы уравнений этих прямых:

$$\begin{cases}2x-3y+8=0\\3x+5y-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$$

Ответ $B(-1;2)$. ■

Пример 1. 5. На плоскости даны три точки $A(-2;4), B(7;-2)$ и $C(5;8)$. Найти координаты: (а) точки C_1 – **ортогональной** проекции точки C на прямую AB; (б) точки C_2 – симметричной точке C относительно прямой AB.

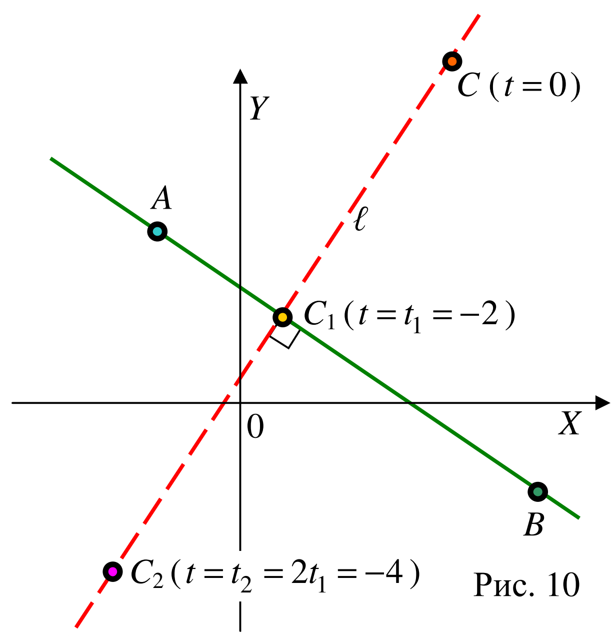

Рис. 10

Решение. Сначала напишем каноническое уравнение прямой *AB*, её направляющим вектором является любой вектор $\boldsymbol{s}$, коллинеарный вектору $\overline{AB}\{9;-6\}$, например, $\boldsymbol{s}\{3;-2\}$. Получаем каноническое, а затем и общее уравнение прямой *AB*:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-2}\Leftrightarrow -2(x+2)=3(y-4)\Leftrightarrow 2x+3y-8=0.$$

Точка C_1 есть точка пересечения прямой *AB* с прямой ℓ, проходящей через точку *C* перпендикулярно *AB* (см. Рис. 10), её направляющим вектором является нормальный вектор прямой *AB*, а именно, $\boldsymbol{n}\{2;3\}$. Напишем параметрические уравнения прямой ℓ:

$x=5+2t,\ y=8+3t\ \ (t\in\mathbf{R})$, и подставим их в уравнение прямой *AB*:

$$\begin{cases}x=5+2t\\ y=8+3t\\ 2x+3y-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5+2t\\ y=8+3t\\ 2(5+2t)+3(8+3t)-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5+2t_1=1,\\ y=8+3t_1=2,\\ t=-2=t_1\end{cases}$$

Прямая *AB* пересекает прямую ℓ в её точке, соответствующей значению параметра $t=-2=t_1$, т.е. в точке $C_1(1;2)$. Поскольку точке *C* соответствует $t=0$ и $CC_2=2\cdot CC_1$, то точке $C_2(x_2;y_2)$ соответствует удвоенное значение параметра:

$$t=t_2=2t_1=-4\Rightarrow\begin{cases}x_2=5+2t_2=-3,\\ y_2=8+3t_2=-4.\end{cases}.$$

Ответ: (а) $C_1(1;2)$, (б) $C_2(-3;-4)$.■

Пример 1. 6. На плоскости даны прямые $\ell_1: 11x+2y-7=0$ и $\ell_2: 2x-y+3=0$. Найти уравнения биссектрис углов, образованных этими прямыми.

Решение. Как известно, точка $M(x;y)$ принадлежит биссектрисе некоторого угла тогда и только тогда, когда она равноудалена от его сторон. Следовательно, искомые биссектрисы задаются уравнением

$$\rho(M;\ell_1)=\rho(M;\ell_2)\Leftrightarrow\frac{|11x+2y-7|}{\sqrt{11^2+2^2}}=\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{2^2+1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{|11x+2y-7|}{5\sqrt{5}}=\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow|11x+2y-7|=5|2x-y+3|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}11x+2y-7=5(2x-y+3)\\ 11x+2y-7=-5(2x-y+3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+7y-22=0,\\ 21x-3y+8=0.\end{array}\right.$$

Отметим, что полученные две прямые, как и должно быть, перпендикулярны друг другу, т.к. скалярное произведение их нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1\{1;7\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{21;-3\}$ равно нулю: $(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)=1\cdot21+7\cdot(-3)=0$.

Ответ: $x+7y-22=0$ и $21x-3y+8=0$. ■

Пример 1. 7. В треугольнике *ABC* известны уравнения его сторон: $AB: 3x-11y=46$, $AC: y=3x+4$ и $BC: 2x+y=14$. Найти: (а) координаты центра *Q* описанной окружности и её радиус; (б) величину высоты h_B, опущенную из вершины B на сторону AC; (в) уравнение высоты AD и координаты точки пересечения высот H.

Решение. (а) Сначала найдем координаты вершин треугольника. Координаты точки A являются решениями системы уравнений прямых AB и AC:

$$\begin{cases} 3x-11y=46 \\ 3x-y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow A(-3;-5).$$

Аналогично находим координаты остальных двух вершин: $B(8;-2)$, $C(2;10)$.

Центр описанной окружности Q лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

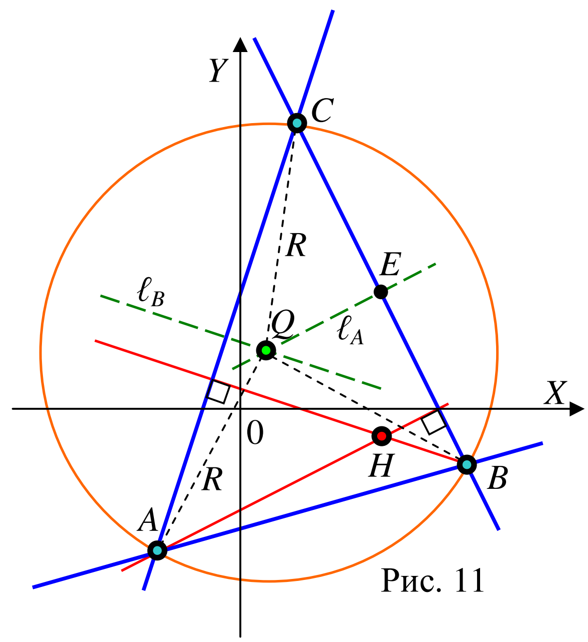

Рис. 11

Серединный перпендикуляр ℓ_A к стороне BC проходит через середину E этой стороны перпендикулярно ей:

$$x_E=\tfrac{1}{2}(x_B+x_C)=\tfrac{1}{2}(8+2)=5,$$

$$y_E=\tfrac{1}{2}(y_B+y_C)=\tfrac{1}{2}(10-2)=4 \Rightarrow E(5;4).$$

Нормалью для этого перпендикуляра ℓ_A является любой вектор, коллинеарный вектору $\overline{BC}\{-6;12\}$, например, $\boldsymbol{n}\{-1;2\}$, поэтому его уравнение:

$$-(x-5)+2(y-4)=0 \Leftrightarrow -x+2y-3=0.$$

Серединный перпендикуляр ℓ_B к стороне AC найдем иначе: каждая его точка $M(x;y)$ равноудалена от вершин $A(-3;-5)$ и $C(2;10)$:

$$M\in\ell_B \Leftrightarrow \rho(M,A)=\rho(M,C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y+5)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2+10y+25=x^2-4x+4+y^2-20y+100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3y-7=0.$$

Искомая точка Q есть пересечение прямых ℓ_A и ℓ_B:

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow Q(1;2).$$

Радиус описанной окружности равен расстоянию от точки Q до любой вершины треугольника:

$$R=\rho(Q;B)=\sqrt{(1-8)^2+(2+2)^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}.$$

(б) высота h_B равна расстоянию от точки B до прямой $AC:\ y=3x+4 \Leftrightarrow 3x-y+4=0$, которое найдем по формуле (1.12):

$$h_B=\rho(B,AC)=\frac{|3\cdot 8-(-2)+4|}{\sqrt{3^3+1^2}}=\frac{30}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}.$$

(в) Высота *AD* проходит через вершину $A(-3;-5)$ перпендикулярно *BC*, поэтому её уравнение $-(x+3)+2(y+5)=0 \Leftrightarrow -x+2y+7=0$. Аналогично, высота *BF* проходит через точку *B* перпендикулярно вектору $\overline{AC}\{5;15\}$, или, что же самое, вектору $\boldsymbol{m}\{1;3\}$, поэтому уравнение этой высоты:

$$(x-8)+3(y+2)=0 \Leftrightarrow x+3y-2=0.$$

Находим координаты точки пересечения этих высот:

$$\begin{cases} -x+2y+7=0 \\ x+3y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow H(5;-1)$$

Замечание: Уравнения высот треугольника можно было найти, не вычисляя координаты его вершин и только зная уравнения его сторон. Например, высота *AD* проходит через точку пересечения прямых $AB: 3x-11y-46=0$ и $AC: 3x-y+4=0$, и поэтому уравнение этой высоты ищем в виде пучка прямых:

$$\begin{aligned} &(3x-11y-46)+\lambda(3x-y+4)=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3+3\lambda)x+(-11-\lambda)y+(-54+4\lambda)=0 \end{aligned}. \qquad (1.14)$$

Значение параметра λ ищем из условия, что нормальный вектор этой прямой $\boldsymbol{n}_{AD}\{3+3\lambda;-11-\lambda\}$ должен быть ортогонален нормальному вектору прямой $BC: 2x+y=14$, т.е. $\boldsymbol{n}_{BC}\{2;1\}$:

$$(\boldsymbol{n}_{AC}\cdot\boldsymbol{n}_{BC})=0 \Leftrightarrow 2(3+3\lambda)+1\cdot(-11-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=1.$$

Подставляя $\lambda=1$ в (1.14), получаем уравнение высоты *AD*:
$6x-12y-42=0 \Leftrightarrow -x+2y+7=0$.

Ответ: (а) $Q(1;2)$, $R=\sqrt{65}$; (б) $h_B=3\sqrt{10}$; (в) $-x+2y+7=0$, $H(5;-1)$.■

Пример 1. 8. В треугольнике *ABC* известны координаты его вершин $A(-2;-4)$, $B(5;-3)$ и $C(6;4)$. Найти координаты центра вписанной окружности треугольника и её радиус.

Решение. **Первое решение.** Центр вписанной окружности треугольника лежит на пересечении его биссектрис. Известно, что если векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ имеют одинаковую длину (например, равную 1), то вектор $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ направлен по биссектрисе угла, образованного этими векторами. Следовательно, биссектриса угла *BAC* направлена по вектору

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{|\overline{AB}|}\cdot\overline{AB}+\frac{1}{|\overline{AC}|}\cdot\overline{AC}.$$

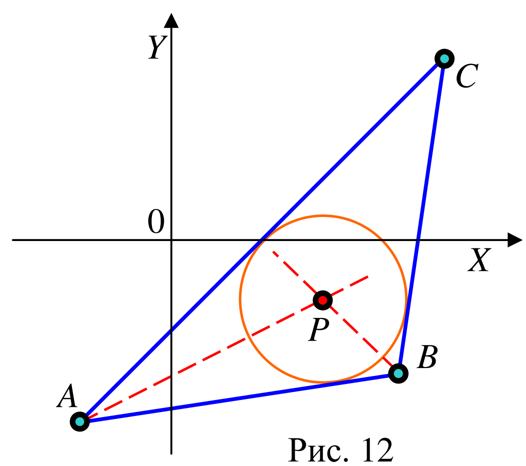

Рис. 12

Находим: $\overline{AB}\{7;1\}, |\overline{AB}|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$,
$\overline{AC}\{8;8\}, |\overline{AC}|=8\sqrt{2}$. Поэтому

$\boldsymbol{a}=\frac{1}{5\sqrt{2}}\{7;1\}+\frac{1}{8\sqrt{2}}\{8;8\}=\frac{1}{5\sqrt{2}}(\{7;1\}+\{5;5\})=\frac{6}{5\sqrt{2}}\{2;1\}$. Следовательно, в качестве направляющего вектора биссектрисы угла *BAC* можно взять любой вектор, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}$, например, $\boldsymbol{s}_A\{2;1\}$. Уравнение этой биссектрисы: $\frac{x+2}{2}=\frac{y+4}{1}\Leftrightarrow x-2y=6$. Аналогично, биссектриса угла ABC направлена по вектору $\boldsymbol{s}_B$, коллинеарному вектору

$$\boldsymbol{b}=\frac{1}{|\overline{BA}|}\cdot\overline{BA}+\frac{1}{|\overline{BC}|}\cdot\overline{BC}=\tfrac{1}{5\sqrt{2}}\{-7;-1\}+\tfrac{1}{5\sqrt{2}}\{1;7\}=\tfrac{6}{5\sqrt{2}}\{-1;1\},$$

следовательно, $\boldsymbol{s}_B\{-1;1\}$, уравнение биссектрисы угла ABC:

$$\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{1}\Leftrightarrow x+y=2.$$

Находим координаты точки пересечения биссектрис P:

$$\begin{cases}x-2y=6\\ x+y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{10}{3}\\ y=-\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow P\left(\tfrac{10}{3};-\tfrac{4}{3}\right)$$

Радиус вписанной окружности равен расстоянию от точки P до любой стороны, например до AB, уравнение которой $\frac{x+2}{7}=\frac{y+4}{1}\Leftrightarrow x-7y-26=0$:

$$r=\rho(P;(AB))=\frac{\left|\frac{10}{3}-7\left(-\frac{4}{3}\right)-26\right|}{5\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Второй способ нахождения биссектрисы угла *BAC*. Напишем уравнения сторон треугольника ABC**:**

$A(-2;-4), B(5;-3)$ и $C(6;4)$

AB**:** $\frac{x+2}{5+2}=\frac{y+4}{-3+4}\Leftrightarrow x+2=7(y+4)\Leftrightarrow x-7y-26=0.$

AC: $\frac{x+2}{6+2}=\frac{y+4}{4+4}\Leftrightarrow x-y-2=0$**.**

BC: $\frac{x-5}{6-5}=\frac{y+3}{4+3}\Leftrightarrow 7(x-5)=y+3\Leftrightarrow 7x-y-38=0$**.**

Биссектрисы углов, образованными прямыми AB и AC, найдем как в примере 6:

$$\rho(M,AB)=\rho(M,AC)\Leftrightarrow$$

$$\frac{|x-7y-26|}{\sqrt{1+49}}=\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow|x-7y-26|=5\cdot|x-y-2|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-7y-26=5x-5y-10\\ x-7y-26=-5x+5y+10\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+y+8=0\Leftrightarrow\varphi_1(x,y)=0,\\ x-2y-6=0\Leftrightarrow\varphi_2(x,y)=0,\end{array}\right.$$

Из этих двух прямых биссектрисой угла BAC является та, которая пересекает отрезок BC. Проверяем точки $B(5;-3)$ и $C(6;4)$:

$\varphi_1(B)=2\cdot5+(-3)+8>0, \varphi_1(C)=2\cdot6+4+8>0$, следовательно, первая прямая **не** пересекает отрезок BC.

$\varphi_2(B)=5-2\cdot(-3)-6>0, \varphi_2(C)=6-2\cdot4-9<0$**,** значит, вторая прямая пересекает BC и является биссектрисой угла BAC.

Третий способ нахождения координат центра вписанной окружности. В примере 4 работы [6] получено, что координаты центра P вписанной окружности треугольника ABC находятся по формулам:

$$x_P = \frac{1}{a+b+c}\left(a\cdot x_A + b\cdot x_B + c\cdot x_C\right),\ y_P = \frac{1}{a+b+c}\left(a\cdot y_A + b\cdot y_B + c\cdot y_C\right),$$

где $a = |BC| = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}, b = |AC| = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$, $c = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$.

Поэтому

$$x_P = \frac{1}{5\sqrt{2}+8\sqrt{2}+5\sqrt{2}}\left(5\sqrt{2}\cdot(-2)+8\sqrt{2}\cdot 5+5\sqrt{2}\cdot 6\right) = \frac{-10+40+30}{18} = \frac{10}{3}$$

Аналогично, находим

$$y_P = \frac{1}{5\sqrt{2}+8\sqrt{2}+5\sqrt{2}}\left(5\sqrt{2}\cdot(-4)+8\sqrt{2}\cdot(-3)+5\sqrt{2}\cdot 4\right) = \frac{-20-24+20}{18} = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $P\left(\frac{10}{3};-\frac{4}{3}\right), r = \frac{4}{3}\sqrt{2}$. ■

Пример 1. 9. В треугольнике ABC известны координаты вершины $A(-3;6)$ и уравнения медианы $BD: x+8y=15$ (точнее, прямой, содержащей медиану BD), а также биссектрисы $CE: 3x-y=5$ (точнее, прямой, содержащей эту биссектрису). Найти координаты вершин B и C.

Решение. Сначала заметим, что точка A_1, симметричная точке A относительно биссектрисы CE, лежит на прямой BC. Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно CE, задается параметрическими уравнениями: $x=-3+3t,\ y=6-t$. Эта прямая пересекает CE

$$\begin{cases} x=-3+3t \\ y=6-t \\ 3x-y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3+3t \\ y=6-t \\ 3(-3+3t)-(6-t)-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3+3t_1=3 \\ y=6-t_1=4 \\ t=2=t_1 \end{cases}$$

при $t=t_1=2$, следовательно, точке A_1 соответствует удвоенное значение параметра $t=2t_1=4$, её координаты $x_{A_1}=-3+3\cdot 4=9,\ y_{A_1}=6-4=2 \Rightarrow A_1(9;2)$.

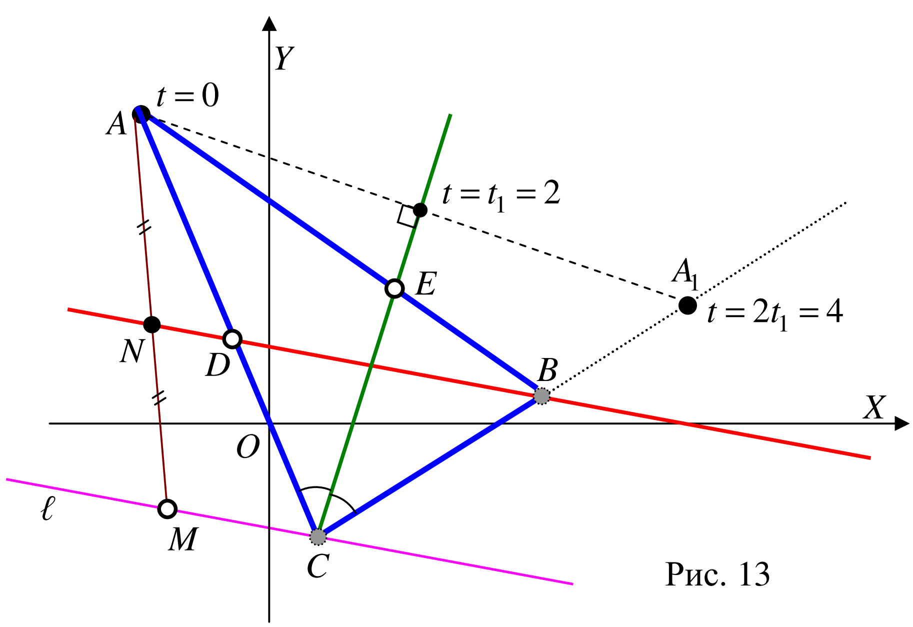

Рис. 13

Точка D – середина стороны AC, поэтому $x_D = \frac{1}{2}\left(x_A + x_C\right) \Rightarrow x_C = 2x_D - x_A$, аналогично, $y_C = 2y_D - y_A$. Напишем параметрические уравнения медианы *BD*. Вектор $\boldsymbol{s}\{-8;1\}$ перпендикулярен нормальному вектору этой прямой, и поэтому является для неё направляющим. Положив в уравнении *BD*, например, $x_0=0$, получим $y_0=\frac{15}{8}$. Значит, *BD* проходит через точку $F(0;\frac{15}{8})$ параллельно вектору $\boldsymbol{s}\{8;-1\}$, следовательно, координаты точки *D* – середины *AC* при некотором значении *t* удовлетворяют уравнениям: $x_D=8t,\ y_D=\frac{15}{8}-t$. Отсюда,

$$x_C=2x_D-x_A=2\cdot 8t+3=3+16t,$$
$$y_C=2y_D-y_A=2\cdot\left(\tfrac{15}{8}-t\right)-6=-\tfrac{9}{4}-2t$$

Мы получили параметрические уравнения прямой ℓ, проходящей через точку *C* параллельно медиане *BD*. Отрезок *AM*, соединяющий любую точку *M* этой прямой, пересекает медиану *BD* в середине *N* этого отрезка. Подставим эти уравнения в уравнения биссектрисы *CE*, находим значение параметра *t*, соответствующего точке *C*:

$$\begin{cases} x=3+16t \\ y=-\frac{9}{4}-2t \\ 3x-y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3+16t \\ y=-\frac{9}{4}-2t \\ 3(3+16t)-\left(-\frac{9}{4}-2t\right)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{8}, \\ x_C=3+16\left(-\frac{1}{8}\right)=1, \\ y_C=-\frac{9}{4}-2\left(-\frac{1}{8}\right)=-2. \end{cases}$$

Итак, точка *C* имеет координаты $C(1;-2)$. Теперь напишем уравнение прямой CA_1: её уравнение $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+2}{4}\Leftrightarrow x-2y-5=0$.

Точка *B* лежит на пересечении этой прямой с медианой *BD*:

$$\begin{cases} x-2y-5=0 \\ x+8y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B=7 \\ y_B=1 \end{cases}$$

Ответ: $B(7;1),\ C(1;-2)$.■

Пример 1.10. На плоскости расположен квадрат *ABCD*. Известна координата его вершины $A(-1;4)$, и что сторона *BC* лежит на прямой $\ell: 2x-3y+1=0$. Найти координаты вершин *C* и *D*.

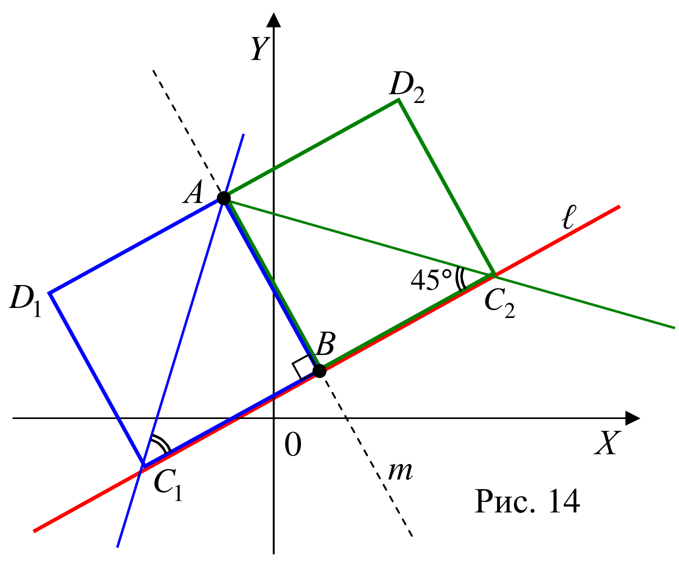

Рис. 14

Решение. Отрезок *AB* перпендикулярен прямой ℓ, поэтому *B* является точкой пересечения прямой ℓ с прямой *m*, проходящей через точку *A* перпендикулярно ℓ. Направляющим вектором прямой *m* является нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ прямой ℓ, $\boldsymbol{n}\{2;-3\}$, параметрические уравнения прямой *m*:

$$x=-1+2t,\ y=4-3t.$$

Подставляя эти выражения в уравнение прямой ℓ, находим:

$$2(-1+2t)-3(4-3t)+1=0\Rightarrow 13t=13\Rightarrow t_0=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_B=-1+2t_0=1,\ y_B=4-3t_0=1.$$

Для нахождения координат точки C заметим, что прямая AC образует с прямой ℓ угол 45°. Обозначим через k угловой коэффициент прямой AC. Поскольку у прямой $\ell: 2x-3y+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ угловой коэффициент равен $k_0=\frac{2}{3}$, то, применяя формулу (1.3) тангенса угла между прямыми, получим:

$$1=\operatorname{tg}45°=\left|\frac{k-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}k}\right|=\left|\frac{3k-2}{3+2k}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3k-2}{3+2k}=1 \\ \frac{3k-2}{3+2k}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3k-2=3+2k \\ 3k-2=-3-2k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1=5 \\ k_2=-\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

У нас получается два варианта уравнения прямой AC (прямой, проходящей через точку $A(-1;4)$ с угловым коэффициентом k):

(1) $k=5$: $y-4=5(x+1) \Leftrightarrow y=5x+9$, эта прямая пересекает прямую $\ell: 2x-3y+1=0$ в точке $C(-2;-1)$, и, поскольку вектор $\overline{AD}=\overline{BC}\{-3;-2\}$, точка D имеет координаты $D(-4;2)$.

(2) $k=-\frac{1}{5}$: $y-4=-\frac{1}{5}(x+1) \Leftrightarrow x+5y-19=0$, данная прямая пересекает прямую $\ell: 2x-3y+1=0$ в точке $C(4;3)$, так же находим координаты точки $D_2(2;6)$.

Ответ: (1) $C_1(-2;-1), D_1(-4;2)$; (2) $C_2(4;3), D_2(2;6)$. ■

Пример 1. 11. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-6;\frac{12}{5})$ и такой, что площадь треугольника, ограниченного этой прямой и координатными осями, равна 30.

Решение. Очевидно, что искомая прямая не проходит через начала координат, и пусть она пересекает оси OX и OY в точках $A(a;0)$ и $B(0;b)$ соответственно. Тогда её уравнение (в «отрезках») примет вид: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Подставив в это уравнение координаты точки M, получим:

$$\frac{-6}{a}+\frac{12}{5b}=1 \Leftrightarrow -30b+12a=5ab.$$

Площадь треугольника ABO равна $S_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}|ab|=30$, следовательно, $ab=\pm 60$. Получаем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab=60 \\ -30b+12a=5ab \end{cases} \\ \begin{cases} ab=-60 \\ -30b+12a=5ab \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab=60 \\ -30b+12a=300 \end{cases} \\ \begin{cases} ab=-60 \\ -30b+12a=-300 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab=60 \\ a=25+\frac{5}{2}b \end{cases} \\ \begin{cases} ab=-60 \\ a=-25+\frac{5}{2}b \end{cases} \end{array}\right.$$

Она имеет 4 решения

$$\begin{cases} a_1=30 \\ b_1=2 \end{cases};\ \begin{cases} a_2=-5 \\ b_2=-12 \end{cases};\ \begin{cases} a_3=-15 \\ b_3=4 \end{cases};\ \begin{cases} a_4=-10 \\ b_4=6 \end{cases}.$$

соответствующие четырем прямым:

Ответ: (1) $\frac{x}{30}+\frac{y}{2}=1 \Leftrightarrow x+15y-30=0$; (2) $\frac{x}{-5}+\frac{y}{-12}=1 \Leftrightarrow 12x+5y+60=0$;

(3) $\dfrac{x}{-15}+\dfrac{y}{4}=1 \Leftrightarrow 4x-15y+60=0$; (4) $\dfrac{x}{-10}+\dfrac{y}{6}=1 \Leftrightarrow 3x-5y+30=0$. ■

1.13. Задачи для самостоятельного решения к главе 1

1. 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;5)$ и имеющей угловой коэффициент $k=4$.

1. 2. На плоскости даны точки $A(2;5)$ и $B(5;1)$. Написать общее уравнение: (а) прямой *AB*, (б) прямой, проходящей через точку *B* перпендикулярно отрезку *AB*.

1. 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;6)$ и перпендикулярной прямой $7x-y-4=0$.

1. 4. Найти общее уравнение прямой $x=-2+5t,\ y=3+4t$, $t\in\mathbf{R}$.

1. 5. Найти (какие-нибудь) каноническое уравнение и параметрические уравнения прямой $2x-3y+5=0$.

1. 6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-3;-2)$ и пересекающей прямую $3x-2y+10=0$ под углом $45°$.

1. 7. Найти координаты точки *B* – проекции точки $A(8;2)$ на прямую $\ell_1: 2x+4y-13=0$ параллельно прямой $\ell_2: x-3y+7=0=0$.

1. 8. Найти координаты: (а) точки M_1 – проекции точки $M(7;2)$ на прямую $5x-3y+5=0$; (б) точки M_2, симметричной точке *M* относительно данной прямой..

1. 9. На плоскости даны три точки $A(-1;4)$, $B(5;1)$ и $C(5;6)$. Найти координаты: (а) точки C_1 – проекции точки C на прямую *AB*;
(б) точки C_2 – симметричной точке *C* относительно прямой *AB*.

1. 10. На плоскости даны прямые $\ell_1: 7x+y-4=0$ и $\ell_2: x-y+2=0$. Найти уравнения биссектрис углов, образованных этими прямыми.

1. 11. Исследовать взаимное расположение двух прямых ℓ_1 и ℓ_2 (совпадают, параллельны или пересекаются). Если они параллельны, то найти расстояние *d* между ними, а если пересекаются, то найти координаты их точки пересечения *M* и угол между этими прямыми:

(а) $\ell_1: 5x+3y+29=0$, $\ell_2: \dfrac{x}{7}=\dfrac{y-4}{2}$;

(б) $\ell_1: 14x-8y+1=0$, $\ell_2: x=1+4t,\ y=4+7t, t\in\mathbf{R}$;

(в) $\ell_1: x=2-3t,\ y=-5+4t, t\in\mathbf{R}$, $\ell_2: \dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+1}{4}$.

1. 12. Дан треугольник *ABC* с вершинами $A(-4;2)$, $B(-1;6)$, $C(4;-6)$. Составить уравнения прямых, содержащих: (а) медиану *AM*; (б) биссектрису *BK*; (в) высоту *CH*; (г) серединный перпендикуляр к стороне *BC*..

1. 13. В треугольнике *ABC* известны координаты его вершин:
$A(-1;-2)$, $B(2;7)$, $C(7;2)$. Найти: (а) координаты центра *Q* описанной окруж-

ности и её радиус; (б) величину высоты h_A, опущенную из вершины A на сторону BC; (в) уравнение высоты BD и координаты точки пересечения высот H.

1. 14. В треугольнике ABC, известны координаты его вершин $A(-2;8)$, $B(1;-4)$ и $C(10;-1)$. Найти координаты центра вписанной окружности треугольника и её радиус.

1. 15. В треугольнике ABC известны координаты вершины $A(7;-1)$, уравнения медианы $BD: 7x-6y=10$ (точнее, прямой, содержащей медиану BD) и высоты $CE: 3x+y=10$ (точнее, прямой, содержащей эту биссектрису). Найти координаты вершин B и C.

1. 16. На плоскости расположен параллелограмм $ABCD$ с углом 45° при вершине A. Известна координата вершины $C(4;2)$, также известно, что сторона AB лежит на прямой $\ell: 2x-3y+11=0$. Найти координаты вершин A, B и D.

1. 17. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(6;-4)$ и такой, что площадь треугольника, ограниченного этой прямой и координатными осями, равна 50.

1. 18. В квадрате $ABCD$ известны координаты вершины $A(4;-3)$ и уравнение прямой $BD: x-2y=0$. Найти координаты вершин B и C.

1. 19. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты вершины $A(-2;-1)$, уравнение прямой $BD: x+3y-8=0$ и прямой BC: $BC: 2x-7y+23=0$ Найти координаты вершины C и площадь параллелограмма.

1. 20. В ромбе $ABCD$ известны: координаты вершины $A(-1;4)$, уравнение прямой $BC: x-y-3=0$ и координаты точки $M(3;2)$, лежащей на прямой BD. Найти координаты вершин B, C и D.

1. 21. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB известны координаты вершин $A(-5;3)$ и $B(4;1)$, а вершина C лежит на прямой $x+2y+6=0$. Найти координаты вершины C.

1. 22. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC известны координаты вершин $A(-2;6)$ и $B(-4;3)$, а вершина C лежит на прямой $x+y-2=0$. Найти координаты вершины C.

1. 23. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC известны координаты вершин $A(-2;7)$ и $B(-3;-1)$, а вершина C лежит на прямой $2x-y-7=0$. Найти координаты вершины C.

1. 24. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB известны координаты вершин $A(4;-3)$ и $B(-4;1)$, а вершина C лежит на прямой $x-4y+24=0$. Найти координаты вершины C.

Глава 2. Плоскость в пространстве

2.1. Общее уравнение плоскости в векторной форме.

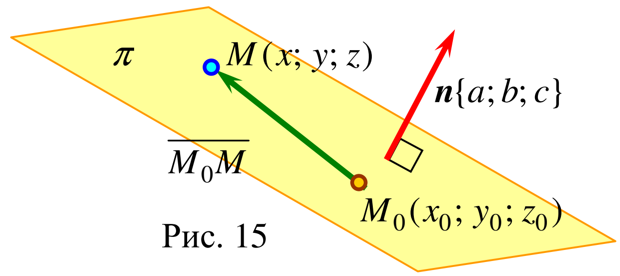

Рис. 15

Пусть плоскость π проходит через заданную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно заданному ненулевому вектору $\boldsymbol{n}\{a;b;c\}$. Обозначим $\boldsymbol{r}_0=\overline{OM_0}$ и $\boldsymbol{r}=\overline{OM}$ – радиус-векторы точки M_0 и точки $M(x;y;z)$. Тогда точка M принадлежит плоскости π $\Leftrightarrow$ вектор $\overline{M_0M}=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ параллелен плоскости $\pi \Leftrightarrow$ вектор $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{n} \Leftrightarrow (\boldsymbol{n}\bullet(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0))=0 \Leftrightarrow$

$$(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{r})=\alpha, \qquad (2.1)$$

где $\alpha=(n\bullet r_0)$.

Уравнение (2.1) называется **общим уравнением плоскости в векторной форме.**

2.2. Общее уравнение плоскости в координатной форме. Поскольку вектор $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ имеет координаты $\overline{M_0M}\{x-x_0;\,y-y_0;\,z-z_0\}$, получаем координатную форму уравнения плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\boldsymbol{n}\{a;b;c\}$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \qquad (2.2)$$

Раскрыв в (2.2) скобки и обозначив $-ax_0-by_0-xz_0=d$, получим **общее уравнение плоскости (в координатной форме):**

$$ax+by+cz+d=0, \qquad (2.3)$$

Это значит, что каждое уравнение вида (2.3), где $a^2+b^2+c^2>0$, задает плоскость, и наоборот, каждая плоскость в пространстве задается некоторым уравнением вида (2.3).

2.3. Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения плоскости. Пусть плоскость π задается уравнением (2.3). Тогда:

плоскость π перпендикулярна вектору $\boldsymbol{n}\{a;b;c\}$, который называется ***нормальным*** вектором плоскости (2.3). В частности:

$a=0 \Leftrightarrow$ плоскость π параллельна оси OX;
$b=0 \Leftrightarrow$ плоскость π параллельна оси OY;
$c=0 \Leftrightarrow$ плоскость π параллельна оси OZ;
$d=0 \Leftrightarrow$ плоскость π проходит через начало координат O;

2.4. Специальные виды уравнения плоскости:

2.4.1. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Если три точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ и $A_3(x_3;y_3;z_3)$ не лежат на одной прямой, то уравнение плоскости, проходящей через них, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0, \qquad (2.4)$$

где $a = \begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$, $b = -\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$, $c = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$.

2.4.2. Уравнение плоскости «в отрезках»

Если плоскость π не проходит через начало координат и пересекает координатные оси OX, OY и OZ в точках $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ и $C(0;0;c)$ соответственно(см. Рис. 16), то эта плоскость задается уравнением:

$$\pi : \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (2.5)$$

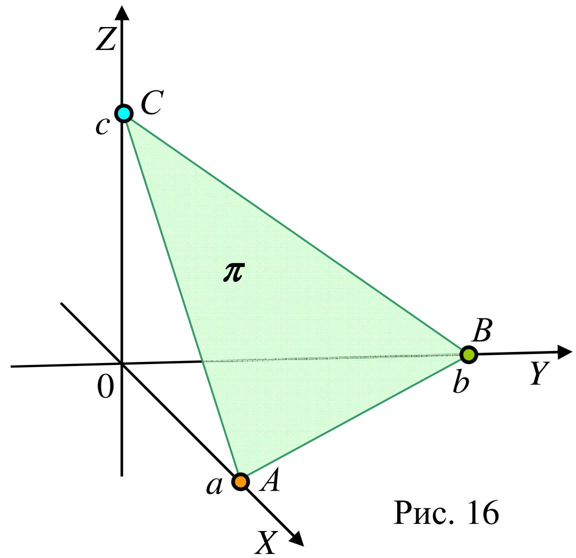

Рис. 16

2.4.3. Нормальное уравнение плоскости. Пусть плоскость π **не** проходит через начало координат, точка P – ортогональная проекция начала координат на эту плоскость, $|OP| = p$ (расстояние от начала координат до плоскости), и вектор $\overline{OP}$ образует с координатными осями OX, OY и OZ углы α, β и γ соответственно (направляющие углы этого вектора). Тогда уравнение плоскости π имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \qquad (2.6)$$

Заметим, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, а вектор $\overline{OP}$ имеет координаты $\overline{OP}\{p\cos\alpha; p\cos\beta; p\cos\gamma\}$.

2.4.4. Параметрические уравнения плоскости. Пусть плоскость π проходит через точку $A_0(x_0; y_0; z_0)$ и параллельна двум данным неколлинеарным векторам $\boldsymbol{s}_1\{p_1; q_1; r_1\}$ и $\boldsymbol{s}_2\{p_2; q_2; r_2\}$. Эти векторы образуют базис в пространстве V_π всех векторов плоскости π. Поэтому точка $M(x; y; z)$ принадлежит этой плоскости $\Leftrightarrow$ вектор $\overline{A_0M}$ принадлежит пространству $V_\pi \Leftrightarrow \overline{A_0M} = t_1\cdot\boldsymbol{s}_1 + t_2\cdot\boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{r} \equiv \overline{OM} = \overline{OA_0} + t_1\boldsymbol{s}_1 + t_2\boldsymbol{s}_2$ для некоторых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

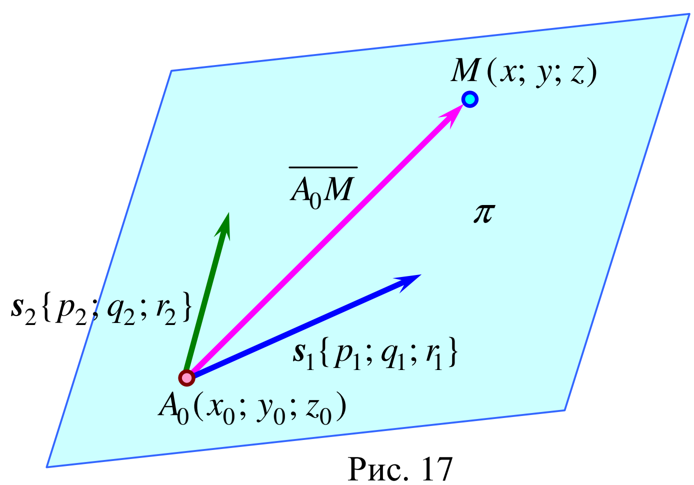

Рис. 17

Уравнение

$$\boldsymbol{r} = \overline{OA_0} + t_1\boldsymbol{s}_1 + t_2\boldsymbol{s}_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R},$$

где $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ – радиус вектор точки $M(x;\, y;\, z)$, называется ***параметрическим уравнением плоскости в векторной форме***. Векторы $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ называются ***направляющими*** векторами плоскости π.

Переходя к координатам, получим три соответствующих ***параметрических уравнения плоскости*** $\boldsymbol{\pi}$ (***в координатной форме***):

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + p_1t_1 + p_2t_2 \\ y &= y_0 + q_1t_1 + q_2t_2 \\ z &= z_0 + r_1t_1 + r_2t_2 \end{aligned}\right\} t_1, t_2 \in \mathbf{R} \qquad (2.7)$$

Числа t_1 и t_2 называются ***параметрами***, но точнее их было бы назвать ***внутренними координатами*** точки M на плоскости.

2.5. Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ до плоскости $\pi : ax + by + cz + d = 0$ вычисляется по так называемой формуле **«дробь-модуль-корень»**:

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (2.8)$$

2.6. Расположение отрезка относительно плоскости.

Пусть в пространстве дана плоскость $\pi : ax + by + cz + d = 0$ и отрезок с концами в точках $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, которые **не** лежат в этой плоскости. Для любой точки $M(x;\, y;\, z)$ обозначим $\varphi_\pi(M) = \varphi_\pi(x, y, z) = ax + by + cz + d$. Тогда:

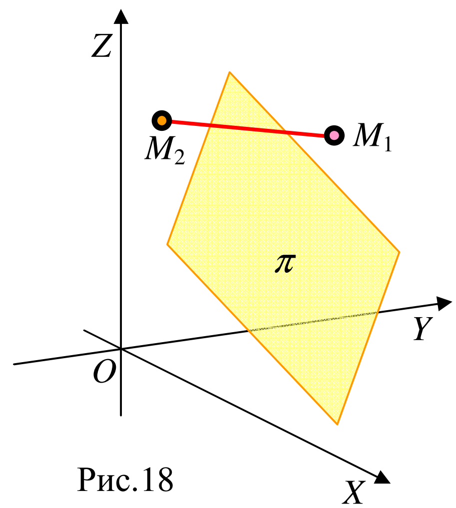

Рис.18

(а) отрезок M_1M_2 пересекает плоскость π, т.е. точки M_1 и M_2 лежат по **разные** стороны от этой плоскости $\Leftrightarrow$ $\varphi_\pi(M_1) \cdot \varphi_\pi(M_2) < 0$;

(б) отрезок M_1M_2 **не** пересекает эту плоскость, т.е. точки M_1 и M_2 лежат по **одну** сторону от этой плоскости $\Leftrightarrow$ $\varphi_\pi(M_1) \cdot \varphi_\pi(M_2) > 0$ (см. Рис. 18).

2.7. Взаимное расположение двух плоскостей. Пусть даны две плоскости $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ с нормальными векторами $\boldsymbol{n}_1\{a_1;\, b_1;\, c_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{a_2;\, b_2;\, c_2\}$ соответственно. Тогда:

а) плоскости π_1 и π_2 совпадают $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$;

б) плоскости π_1 и π_2 параллельны $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2}$;

в) плоскости π_1 и π_2 пересекаются $\Leftrightarrow$ векторы $\boldsymbol{n}_1\{a_1;\, b_1;\, c_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{a_2;\, b_2;\, c_2\}$ не коллинеарны $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ или $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

г) в частности, плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны $\Leftrightarrow$ их нормальные векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ перпендикулярны $\Leftrightarrow$ $(\boldsymbol{n}_1 \bullet \boldsymbol{n}_2) = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$;

д) в общем случае косинус острого угла между плоскостями π_1 и π_2 равен модулю косинуса угла между их нормальными векторами:

$$\cos\left(\pi_1 \wedge \pi_2\right) = \left|\cos(\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2)\right| = \frac{\left|(\boldsymbol{n}_1 \bullet \boldsymbol{n}_2)\right|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}; \quad (2.9)$$

е) если две плоскости π_1 и π_2 параллельны, то, не нарушая общности, можно считать, что они задаются уравнениями $\pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ и $\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$. Тогда расстояние между этими плоскостями вычисляется по формуле

$$\rho(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (2.10)$$

2.8. Решение типовых примеров к главе 2.

Пример 2. 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 5; -2)$ и параллельной плоскости $\sigma : 2x - 3y + 4z - 5 = 0$.

Решение. Искомая плоскость π имеет тот же нормальный вектор, что и плоскость σ, а именно, $\boldsymbol{n}\{2; -3; 4\}$, поэтому уравнение плоскости π имеет вид

$$\pi : 2(x-3) - 3(y-5) + 4(z+2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4z + 17 = 0.$$

Ответ: $2x - 3y + 4z + 17 = 0$.

Пример. 2. 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $A(2; 5; 3)$, $B(3; 2; 1)$ и $C(4; 1; 2)$.

Решение. 1-й способ. Нормальный вектор искомой плоскости, перпендикулярен векторам $\overline{AB}\{1; -3; -2\}$ и $\overline{AC}\{2; -4; -1\}$, поэтому он коллинеарен (пропорционален) их векторному произведению:

$$\boldsymbol{n} = \lambda \cdot \left(\overline{AB} \times \overline{AC}\right) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \lambda\left(-5\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\right) = \{5; 3; -2\} \quad (\lambda = -1).$$

Искомая плоскость ABC проходит через точку $A(2; 5; 3)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}\{5; 3; -2\}$:

$$ABC: \ 5(x-2) + 3(y-5) - 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow 5x + 3y - 2z - 19 = 0.$$

Второй способ. Искомое уравнение получим как уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A, B и C (см. (2.4)):

$$ABC: \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-3 \\ 3-2 & 2-5 & 1-3 \\ 4-2 & 1-5 & 2-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5(x-2) - 3(y-5) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow 5x + 3y - 2z - 19 = 0.$$

Третий способ. Напишем параметрические уравнения этой плоскости. Пусть $\boldsymbol{s}_1 = \overline{AB}\{1;-3;-2\}$, $\boldsymbol{s}_2 = \overline{AC}\{2;-4;-1\}$ – направляющие векторы плоскости ABC, $M(x;y;z)$ – произвольная точка этой плоскости. Тогда $\overline{OM} = \overline{OA} + t_1\overline{AB} + t_2\overline{AC}$, или, в координатах:

$$\begin{cases} x = 2 + t_1 + 2t_2 \\ y = 5 - 3t_1 - 4t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}. \\ z = 3 - 2t_1 - t_2 \end{cases}$$

Ответ. $5x + 3y - 2z - 19 = 0$ или $\begin{cases} x = 2 + t_1 + 2t_2 \\ y = 5 - 3t_1 - 4t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}. \\ z = 3 - 2t_1 - t_2 \end{cases}$ ■

Пример 2. 3. Найти расстояние от точки $D(3;-1;6)$ до плоскости ABC из примера 2. 2.

Решение. По формуле (2.8) искомое расстояние от точки $D(3;-1;6)$ до плоскости $ABC: 5x + 3y - 2z - 19 = 0$ равно

$$\rho(D, ABC) = \frac{|5\cdot 3 + 3(-1) - 2\cdot 6 - 19|}{\sqrt{25+9+4}} = \frac{19}{\sqrt{38}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{38}. ■$$

Пример 2. 4. Найти угол между плоскостями $\pi_1: 2x + y - 4z + 5 = 0$ и $\pi_2: 3x - y + 2z + 7 = 0$.

Решение. Нормальные векторы этих плоскостей имеют координаты: $\boldsymbol{n}_1\{2;1;-4\}$, $\boldsymbol{n}_2\{3;-1;2\}$. По формуле (2.9),

$$\cos(\pi_1 \wedge \pi_2) = |\cos(\boldsymbol{n}_1 \wedge \boldsymbol{n}_2)| = \frac{|(\boldsymbol{n}_1 \bullet \boldsymbol{n}_2)|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|2\cdot 3 + 1\cdot(-1) + (-4)\cdot 2|}{\sqrt{4+1+16}\sqrt{9+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = \frac{3}{7\sqrt{6}}.$$

Ответ. $\cos(\pi_1 \wedge \pi_2) = \dfrac{3}{7\sqrt{6}}$. ■

Пример 2. 5. Проверить, что плоскости $\pi_1: 6x - 9y + 18z - 5 = 0$ и $\pi_2: 4x - 6y + 12z + 7 = 0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

Решение. В самом деле, $\dfrac{6}{4} = \dfrac{-9}{-6} = \dfrac{18}{12} \neq \dfrac{-5}{7}$, поэтому (см. п.2.7. б)) $\pi_1 \parallel \pi_2$. Для нахождения расстояния между ними приведем их уравнения к одинаковым коэффициентам при переменных, для чего первое уравнение разделим на 3, а второе – на 2:

$$\pi_1: 2x - 3y + 6z - \tfrac{5}{3} = 0, \quad \pi_2: 2x - 3y + 6z + \tfrac{7}{2} = 0.$$

По формуле (2.10) находим:

$$\rho(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left|-\frac{5}{3} - \frac{7}{2}\right|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{31}{42}. ■$$

Пример 2. 6. Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями $\pi: x - y + 2z - 3 = 0$ и $\sigma: 5x + 2y - 5z + 4 = 0$.

Решение. Точка $M(x;\,y;\,z)$ принадлежит плоскости, делящей пополам угол, образованный плоскостями π_1 и π_2 $\Leftrightarrow$ точка M равноудалена от этих плоскостей:

$$\rho(M,\pi_1)=\rho(M,\pi_2)\Leftrightarrow \frac{|x-y+2z-3|}{\sqrt{6}}=\frac{|5x+2y-5z+4|}{\sqrt{54}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|x-y+2z-3|=|5x+2y-5z+4|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3(x-y+2z-3)=5x+2y-5z+4\\ 3(x-y+2z-3)=-5x-2y+5z-4\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2x-5y+11z-13=0\\ \quad 8x-y+z-5=0\end{array}\right..$$

Эти плоскости, как и следовало ожидать, перпендикулярны, т.к. скалярное произведение их нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1\{-2;-5;11\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{8;-1;1\}$ равно нулю:

$$(\boldsymbol{n}_1\bullet\boldsymbol{n}_2)=(-2)\cdot 8+(-5)\cdot(-1)+11\cdot 1=0.$$

Ответ: $2x+5y-11z+13=0$**,** $8x-y+z-5=0$**.■**

Пример 2. 7. Составить уравнение плоскости, образующей с осями OY и OZ одинаковые углы, проходящей через точку $A(\sqrt{2};3;-1)$ и удаленной от начала координат на расстояние $d=3$.

Решение. Если нормальный вектор какой-то плоскости образует с некоторой координатной прямой угол φ, то сама плоскость образует с этой прямой угол $\left|\frac{\pi}{2}-\varphi\right|$. Пусть нормальный вектор искомой плоскости образует с координатными осями углы a, β и γ. Тогда нормальное уравнение искомой плоскости (см. п. 2.4.3) имеет вид $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=3$.

По условию,

$$\left|\frac{\pi}{2}-\beta\right|=\left|\frac{\pi}{2}-\gamma\right|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}-\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma\\ \frac{\pi}{2}-\beta=\gamma-\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ \beta=\gamma\\ \beta+\gamma=\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \cos\gamma=\pm\cos\beta.$$

Если обозначить $p=\cos\alpha, q=\cos\beta$, то уравнение искомой плоскости примет вид (а) $px+qy+qz=3$ или (б) $px+qy-qz=3$, причем, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\Leftrightarrow p^2+2q^2=1$.

Случай (а). По условию, искомая плоскость проходит через точку A, значит,

$$p\sqrt{2}+3q-q=3\Rightarrow p=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(3-2\theta)\Rightarrow p^2+2q^2=1\Rightarrow \tfrac{1}{2}\left(9-12q+4q^2\right)+2q^2=1$$

$$\Rightarrow 8q^2-12q+7=0,\ D=144-224<0\Rightarrow \text{нет решений.}$$

Случай (б): искомая плоскость проходит через точку A, значит,

$$p\sqrt{2}+3q+q=3 \Rightarrow p=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(3-4q) \Rightarrow p^2+2q^2=1 \Rightarrow \tfrac{1}{2}\left(9-24q+16q^2\right)+2q^2=1$$

$$\Rightarrow 20q^2-24q+7=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q_1=\tfrac{1}{2} \Rightarrow p_1=\tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ q_2=\tfrac{7}{10} \Rightarrow p_2=\tfrac{1}{5\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Получим два варианта уравнения искомой плоскости:

1) $\tfrac{1}{\sqrt{2}}x+\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}z=3 \Leftrightarrow x\sqrt{2}+y-z-6-0;$

2) $\tfrac{1}{5\sqrt{2}}x+\tfrac{7}{10}y-\tfrac{7}{10}z=3 \Leftrightarrow x\sqrt{2}+7y-7z-30=0.$

Ответ. $x\sqrt{2}+y-z-6-0$ или $x\sqrt{2}+7y-7z-30=0$.■

Пример 2. 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;4;2)$ и $B(1;1;-1)$ и отстоящей от начала координат на расстояние $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. Искомая плоскость задается уравнением вида $ax+by+cz+d=0$, и по условию, $d\neq 0$. Разделим это уравнение на d и положим $\alpha=\dfrac{a}{d}$, $\beta=\dfrac{b}{d}$, $\gamma=\dfrac{c}{d}$, тогда искомая плоскость $A(1;4;2)$ и $B(1;1;-1)$, и запишем формулу для расстояния от точки $O(0;0;0)$ до этой плоскости. Получим три уравнения:

$$\begin{cases} \alpha+4\beta+2\gamma+1=0 \\ \alpha+\beta-\gamma+1=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \end{cases}$$

Выразим из первых двух уравнений две переменные, например, α и β через γ, для чего из первого уравнения вычтем первое и разделим на 3, получим $\beta=-\gamma$, а если из исходного первого уравнения вычесть учетверенное второе, то получится (после сокращения на 3) $\alpha=2\gamma-1$. Подставив в третье уравнение, получим два решения:

$$\begin{cases} \beta=-\gamma, \\ \alpha=2\gamma-1, \\ (2\gamma-1)^2+\gamma^2+\gamma^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2\gamma-1, \\ \beta=-\gamma, \\ 3\gamma^2-2\gamma-1=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=1, \\ \beta_1=-1, \\ \gamma_1=1; \end{cases} \begin{cases} \alpha_2=-\tfrac{5}{3}, \\ \beta_2=\tfrac{1}{3}, \\ \gamma_2=-\tfrac{1}{3}. \end{cases}$$ Получатся две плоскости:

Ответ. $\pi_1: x-y+z+1=0$ и $\pi_2: -\tfrac{5}{3}x+\tfrac{1}{3}y-\tfrac{1}{3}z+1=0 \Leftrightarrow 5x-y+z-3=0$.■

2.9. Решение геометрических задач с помощью уравнения плоскости.

Разберем несколько стереометрических задач, где успешно применяется аналитическая геометрия.

Пример 2. 9. Все плоские углы при вершине *D* тетраэдра *ABCD* прямые, причем, некоторая точка *M* грани *ABC* удалена от остальных граней *BCD*, *ACD* и ABD на расстояния 3, 4 и 5 соответственно. С помощью аналитической геометрии определить наименьший объем этого тетраэдра.

Решение. Поместим вершину тетраэдра в начало координат, а координатные оси OX, OY и OZ направим вдоль боковых рёбер тетраэдра DA, DB и DC соответственно. Тогда точка M будет иметь координаты $M(3;4;5)$. Пусть длины боковых ребер тетраэдра равны $|DA| = a > 0,\ |DB| = b > 0,\ |DC| = c > 0$. Тогда уравнение плоскости ABC запишется «в отрезках» следующим образом:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

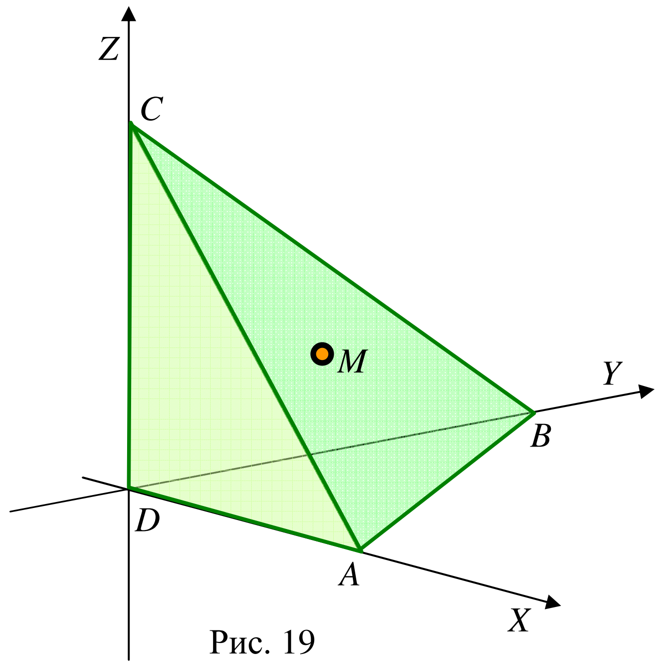

Рис. 19

Поскольку эта плоскость проходит через точку $M(3;4;5)$, то $\frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = 1$. Объем данного тетраэдра равен $V = \frac{1}{6}abc$. Итак, надо решить задачу:

$$V = \tfrac{1}{6}abc \to \min$$

при условиях: $\frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = 1$, $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

Обозначим: $\frac{3}{a} = \alpha,\ \frac{4}{b} = \beta,\ \frac{5}{c} = \gamma$, тогда получим, что надо найти наибольшее значение произведения $\alpha\beta\gamma = \frac{60}{abc} = \frac{10}{V} \to \max$ при условии $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Вспомним из курса средней школы, что, если сумма нескольких положительных чисел постоянна, то их произведение будет наибольшим когда они равны друг другу([1]). Следовательно, объём тетраэдра будет минимальным при $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$, т.е. при $a = 9, b = 12, c = 15$, $V_{\min} = \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 = 270$. ■

Пример 2. 10. Найти радиус и координаты центра описанной окружности треугольника ABC с вершинами $A(1;1;3)$, $B(-1;2;2)$ и $C(7;-3;1)$.

([1]) Это следует из известного неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом: для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ справедливо неравенство $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$, причем, точное равенство выполняется, только когда $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Тогда, если $a_1 + a_2 + ... + a_n = C = const$, то $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n = \left(\frac{C}{n}\right)^n = C_1$, причем, максимальное значение произведения $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = C_1$ возможно только, когда все числа a_i равны друг другу.

Решение. Искомый центр описанной окружности Q лежит в плоскости треугольника и равноудалён от всех его вершин, следовательно, он лежит на пересечении трех плоскостей: плоскости ABC, плоскости π, состоящей из всех точек, равноудаленных от вершин A и B, (т.е. проходящей через точку D – середину стороны AB перпендикулярно ей), и плоскости σ, проходящей через точку E – середину стороны AC перпендикулярно ей (см. Рис. 20).

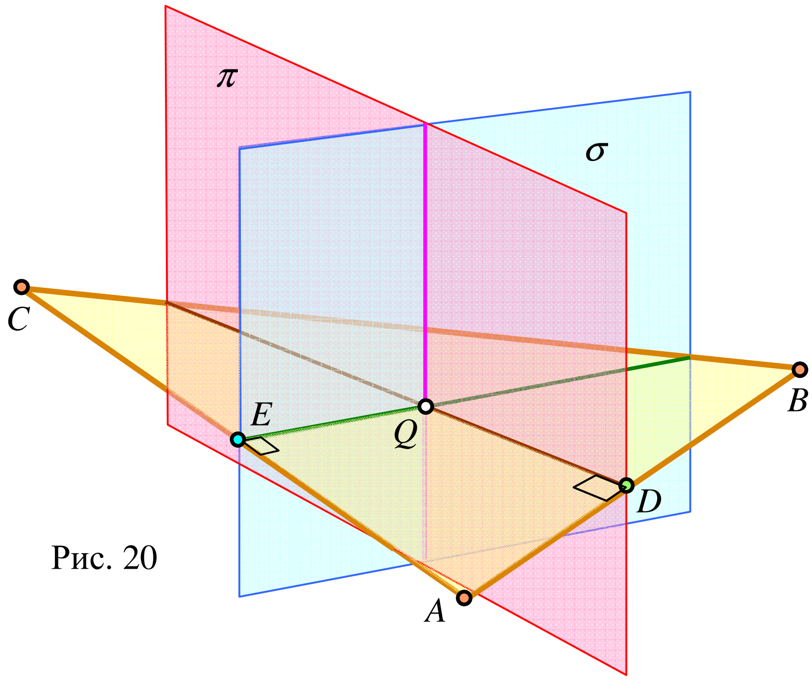

Рис. 20

Уравнение плоскости ABC:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6(x-1)-10(y-1)+2(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x+5y-z-5=0.$$

Находим координаты векторов: $\overline{AB}\{-2;1;-1\}$, $\overline{AC}\{6;-4;-2\}$ и точек $D\left(0;\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$, $E\left(4;-1;2\right)$.

Уравнение плоскости π: $-2(x-0)+(y-\frac{3}{2})-(z-\frac{5}{2})=0 \Leftrightarrow 2x-y+z-1=0$.

Уравнение плоскости σ: $6(x-4)-4(y+1)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-2y-z-12=0$.

Координаты точки Q пересечения этих плоскостей являются решением системы уравнений этих трех плоскостей (ABC, π и σ):

$$\begin{cases} 3x+5y-z=5 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x-2y-z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=-4 \end{cases} \Rightarrow Q(2;-1;-4).$$

Радиус описанной окружности равен расстоянию от точки Q до любой вершины: $R=|QA|=\sqrt{1+4+49}=3\sqrt{6}$.

Ответ: $Q(2;-1;-4)$, $R=3\sqrt{6}$. ■

Пример 2. 11. Для тетраэдра с вершинами в точках $A(3;9;-3)$, $B(2;6;9)$, $C(4;1;8)$ и $D(8;6;3)$ найти координаты центра описанной сферы и её радиус.

Решение. Центр P описанной сферы тетраэдра равноудален от всех его вершин и лежит на пересечении трех плоскостей, равноудаленных от концов ребер, например, AB, AC и AD. Напишем уравнения этих плоскостей. Плоскость π_1 является геометрическим местом точек $M(x;y;z)$, равноудаленных от вершин A и B, поэтому её уравнение:

$$\rho(M,A)=\rho(M,B)\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+(y-9)^2+(z+3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2+(z-9)^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-18y+81+z^2+6z+9=x^2-4x+4+y^2-12y+36+z^2-18z+81\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2x-6y+24z-22=0\Leftrightarrow x+3y-12z+11=0.$$

Плоскость π_2 является геометрическим местом точек $M(x;\,y;\,z)$, равноудаленных от вершин A и C, поэтому она, как известно из стереометрии, проходит через середину E отрезка AC перпендикулярно ему. Точка E имеет координаты $E\left(\frac{3+4}{2};\frac{9+1}{2};\frac{-3+8}{2}\right)=\left(\frac{7}{2};5;\frac{5}{2}\right)$, а нормальным вектором плоскости π_2 является вектор $\overline{AC}\{1;-8;11\}$. Уравнение плоскости π_2:

$$\left(x-\tfrac{7}{2}\right)-8(y-5)+11\left(z-\tfrac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow x-8y+11z+9=0.$$

Аналогично находим уравнение плоскости π_3, стоящей из всех точек, равноудаленных от вершин A и D: $5x-3y+6z-5=0$.

Координаты точки P – центра описанной сферы являются решениями системы уравнений этих трех плоскостей:

$$\begin{cases}x+3y-12z+11=0\\ x-8y+11z+9=0\\ 5x-3y+6z-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=4,\\ z=2.\end{cases}\quad\text{т.е. } P(1;4;2).$$

Радиус описанной сферы равен расстоянию от центра P до любой вершины, например до A: $R=|PA|=\sqrt{2^2+5^2+5^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}.$

Ответ. $P(1;4;2)$, $R=3\sqrt{6}$. ■

Пример 2. 12. Для тетраэдра с вершинами $A(1;5;4)$, $B(3;7;6)$, $C(4;2;7)$ и $D(4;8;1)$ найти координаты центра вписанного шара и его радиус.

Решение. Центр шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$, лежит на пересечении его биссекторных([2]) плоскостей трех его двугранных углов, например, при рёбрах AB, AC и BC. Сначала напишем уравнения плоскостей всех граней тетраэдра

Плоскость ABC:

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-5 & z-4\\ 3-1 & 7-5 & 6-4\\ 4-1 & 2-5 & 7-4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y-5 & z-4\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & -3 & 3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 12(x-1)-0(y-5)-12(z-4)=0$$
$$\Leftrightarrow x-z+3=0.$$

Плоскость ABD:

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-5 & z-4\\ 3-1 & 7-5 & 6-4\\ 4-1 & 8-5 & 1-4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y-5 & z-4\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -12(x-1)+12(y-5)+0(z-4)=0$$
$$\Leftrightarrow x-y+4=0.$$

Аналогично находим уравнения плоскостей двух других граней:

плоскость ACD: $y+z-9=0$;

плоскость BCD: $4x+y+z-25=0$.

([2]) ***Биссекторная плоскость*** двугранного угла – это плоскость, проходящая через ребро этого двугранного угла и делящая его пополам.

Теперь напишем уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями ABC и ABD: они состоят из точек $M(x, y, z)$, равноудаленных от этих плоскостей (см. пример 16):

$$\rho(M, ABC) = \rho(M, ABD) \Leftrightarrow \frac{|x-z+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-z+3 = x-y+4 \\ x-z+3 = -x+y-4 \end{array}\right.$$

Нам нужна та их двух полученных плоскостей $\pi_1 : y-z-1=0$, $\pi_2 : 2x-y-z+7=0$, которая пересекает отрезок CD.

$\varphi_1(C) = \varphi_1(4; 2; 7) = 2-7-1 < 0,$

$\varphi_1(D) = \varphi_1(4; 8; 1) = 8-1-1 > 0,$

$\varphi_2(C) = \varphi_1(4; 2; 7) = 2\cdot 4-2-7+7 > 0,$

$\varphi_2(D) = \varphi_2(4; 8; 1) = 2\cdot 4-8-1+7 > 0.$

Это значит, что первая из полученных плоскостей пересекает отрезок CD, а вторая – нет. Итак, биссекторная плоскость двугранного угла при ребре AB тетраэдра $ABCD$ имеет уравнение $\pi_1 : y-z-1=0$.

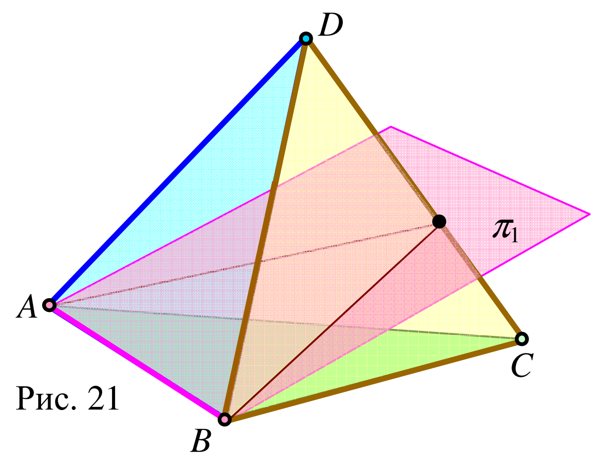

Рис. 21

Аналогично находим уравнение биссекторных плоскостей при рёбрах AC и BC

При ребре AC:

$$\rho(M, ABC) = \rho(M, ACD) \Leftrightarrow \frac{|x-z+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|y+z-9|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-z+3 = y+z-9 \\ x-z+3 = -y-z+9 \end{array}\right.$$

Получим две плоскости: $\pi_3 : x-y-2z+12=0$, $\pi_4 : x+y-6=0$.

Искомая плоскость должна пересекать ребро BD:

$\varphi_3(B) = \varphi_3(3; 7; 6) = 3-7-12+12 < 0, \varphi_3(D) = \varphi_3(4; 8; 1) = 4-8-2+12 > 0,$

$\varphi_4(B) = \varphi_4(3; 7; 6) = 3+7-6 > 0,\ \varphi_4(D) = \varphi_4(4; 8; 1) = 4+8-6 > 0.$

Это значит, что плоскость π_3 пересекает отрезок BD и является искомой биссекторной плоскостью, а π_4 – нет.

Точно так же находим уравнение биссекторной плоскости при ребре BC:

$$\rho(M, ABC) = \rho(M, BCD) \Leftrightarrow \frac{|x-z+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|4x+y+z-25|}{\sqrt{18}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(x-z+3) = 4x+y+z-25 \\ 3(x-z+3) = -4x-y-z+25 \end{array}\right.$$

Получаем еще две плоскости:

$\pi_5 : x+y+4z-34=0$, $\pi_6 : 7x+y-2z-16=0$.

$\varphi_5(A) = 1+5+16-34 < 0,\ \varphi_5(D) = 4+8+4-34 < 0,$

$\varphi_6(A) = 7+5-8-16 < 0,\ \varphi_5(D) = 28+8-2-16 > 0.$

Значит, $\pi_6 : 7x+y-2z-16=0$ – биссекторная плоскость двугранного угла при ребре BC. Центр Q вписанного шара лежит на пересечении найденных плоскостей π_1, π_3 и π_6, и его координаты являются решениями системы уравнений этих плоскостей:

$$\begin{cases} \pi_1 : y - z - 1 = 0, \\ \pi_3 : x - y - 2z + 12 = 0, \\ \pi_6 : 7x + y - 2z - 16 = 0; \end{cases}$$

Решив эту систему (например, по формулам Крамера) находим
$x = \frac{14}{5} = 2,8;\ y = \frac{28}{5} = 5,6;\ z = \frac{23}{5} = 4,6$; центр вписанного шара Q имеет координаты $Q(2,8;\ 5,6;\ 4,6)$, его радиус равен расстоянию от точки Q до любой из граней, например, ABC:

$$r = \rho(Q,\ ABC) = \frac{|2,8 - 4,6 + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

Для контроля убедимся, что расстояние от точки Q до плоскости, скажем, ACD такое же:

$$\rho(Q,\ ACD) = \frac{|5,6 + 4,6 - 9|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

Ответ: $Q(2,8;\ 5,6;\ 4,6)$, $r = \frac{3\sqrt{2}}{5}$. ■

2.10. Задачи для самостоятельного решения к главе 2.

2. 1. Составить уравнение плоскости, проходящей:
(а) через данную точку $A(-1; 5; 2)$ параллельно плоскости $2x + 7y - z + 4 = 0$;
(б) через данную точку $B(3; 5; 1)$ перпендикулярно прямой BD, где $D(6; 3; 6)$;
(в) через три данные точки $A(2; 4; 1)$, $B(-1; 6; 3)$ и $C(1; 3; 2)$.

2. 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 2; 3)$, $B(3; -1; 2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{m}\{2; 4; 1\}$.

2. 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-3; -4; 1)$ и перпендикулярной плоскостям $\pi_1 : 3x - 3y - z + 1 = 0$ и $\pi_2 : x + 2y + 3z + 5 = 0$.

2. 4. Найти расстояние от точки $A(1; 5; -5)$ до плоскости $4x - y - 2z + 2 = 0$.

2. 5. Написать уравнение геометрического места точек $M(x;\ y;\ z)$:
(а) равноудаленных от двух данных точек $A(4; 1; 2)$ и $B(1; 6; 0)$;
(б) для которых разность квадратов расстояний до точек $A(4; 3; 1)$ и $B(-1; 6; 2)$ равна 7;
(в) равноудаленных от двух данных плоскостей $x + 2y - 7z + 4 = 0$ и $2x - y + z + 3 = 0$.

2. 6. Доказать, что плоскости $\pi_1 : x - 3y + 2z + 6 = 0$ и $\pi_2 : -2x + 6y - 4z - 1 = 0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

2. 7. Доказать, что плоскости $\pi_1 : 2x + y - 2z + 5 = 0$ и $\pi_2 : 2x - 3y - 6z - 4 = 0$ пересекаются, и найти косинус острого угла между ними.

2. 8. Исследовать взаимное положение двух плоскостей π_1 и π_2. Если они параллельны, то найти расстояние между ними, а если пересекаются, то найти острый угол между ними.

(а) $\pi_1 : 2x - 3y + z - 2 - 0$, $\pi_2 : x + 5y - z - 2 = 0$;
(б) $\pi_1 : 4x + 2y - 6z + 5 = 0$, $\pi_2 : 6x + 3y - 9z - 4 = 0$.

2. 9. Исследовать взаимное расположение двух плоскостей (совпадают, параллельны или пересекаются). Если они параллельны, то найти расстояние между ними, а если пересекаются, то найти угол между ними:
(а) $\pi_1 : 10x + 2y - 6z + 7 = 0$, плоскость π_2 проходит через точки $A(1; 2; -1)$, $B(2; 3; 1)$ и $C(3; 1; 2)$; (б) $\pi_1 : x + y - 3z + 2 = 0$, плоскость π_2 проходит через точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; 4)$ и $C(2; 3; 1)$; (в) $\pi_1 : 4x - y - 3z + 5 = 0$, плоскость π_2 проходит через точки $A(2; 1; 4)$, $B(1; 3; 2)$ и $C(3; 2; 5)$.

2. 10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 1; 0)$ и $B(-1; 3; 4)$ и отстоящей от начала координат на расстояние $\frac{4}{\sqrt{11}}$.

2. 11. При каком значении λ плоскости $\pi_1 : \lambda x - 2y + 5z + 7 = 0$ и $\pi_2 : \lambda x + 12y + \lambda z - 1 = 0$ перпендикулярны?

2. 12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; 3; 5)$ и $K(8; 7; 7)$, и отсекающей на осях OY и OZ равные ненулевые отрезки.

2. 13. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и отстоящих от неё на расстояние d.

2. 14. На оси OX найти точки, равноудаленные от точки $A(4; -1; 1)$ и от плоскости $\pi : x - 2y - z + 4 = 0$.

2. 15. Составить уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях ненулевые отрезки, пропорциональные числам 1, 2 и 3, и отстоящей от точки $A(1; -3; 4)$ на расстояние $d = 1$.

2. 16. В тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $\pi : 2x - 10y + 3z - 30 = 0$, вписан в куб, одна из вершин которого совпадает с началом координат, три его ребра, выходящие из этой вершины, лежат на координатных осях, а вершина, противоположная началу координат, лежит в плоскости π. Найти объем куба.

2. 17. Найти значение λ, при котором расстояние от точки $M(1; 2; 3)$ до плоскости $\lambda x - y + 2z + 7 = 0$ равно 3.

2. 18. Найти углы, которые образует плоскость $ax + by + cz + d = 0$: (а) с осью OX; (б) с плоскостью OXZ.

2. 19. Найти тангенсы углов, которые образуют координатные оси OX, OY и OZ с плоскостью $z = ax + by + c$.

2. 20. Найти угол между плоскостью $3x - 2y + 6z = 4$ и прямой, проходящей через точки $A(2; 4; 1)$ и $B(3; 6; -1)$.

2. 21. Найти объем пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $12x - 3y + 8z - 24 = 0$.

2. 22. Найти площадь треугольника, отсекаемого координатными плоскостями на плоскости $6x + 3y - 2z - 24 = 0$.

2. 23. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $\pi : x-4y+z+5=0$ и отстоящей от точки $M(5;1;1)$ на расстояние $\sqrt{18}$.

2. 24. Для тетраэдра с вершинами в точках $A(9;3;-2)$, $B(6;2;10)$, $C(1;4;9)$ и $D(6;8;4)$ найти координаты центра описанной сферы и её радиус.

2. 25. Для тетраэдра с вершинами $A(2;4;-5)$, $B(4;6;-7)$, $C(5;7;-2)$ и $D(5;1;-8)$ найти координаты центра вписанного шара и его радиус.

2. 26. В пространстве даны четыре точки $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$ и $D(2;1;2)$. Написать уравнение плоскости, равноудаленной от этих четырех точек, причем, (а) точка A лежит по одну сторону от этой плоскости, а остальные три точки – по другую; (б) точки A и B лежат по одну сторону от этой плоскости, а точки C и D по другую**.**

2. 27. В треугольнике ABC известны координаты его вершин: $A(5;-1;-3)$, $B(5;3;9)$ и $C(6;4;7)$. Найти координаты центра описанной окружности и её радиус; (б) координаты точки пересечения высот треугольника ABC.

Глава 3. Прямая в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана разными способами.

3.1. Общие уравнения прямой в пространстве. Любую прямую в пространстве можно рассматривать как пересечение двух плоскостей π_1 и π_2 (см. Рис. 22), поэтому её можно задать в виде системы уравнений этих (пересекающихся!) плоскостей:

$$\ell\colon \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 : \pi_1 \\ a_1x+b_2y+c_2z+d_2=0 : \pi_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

Эти уравнения называются ***общими уравнениями прямой в пространстве.***

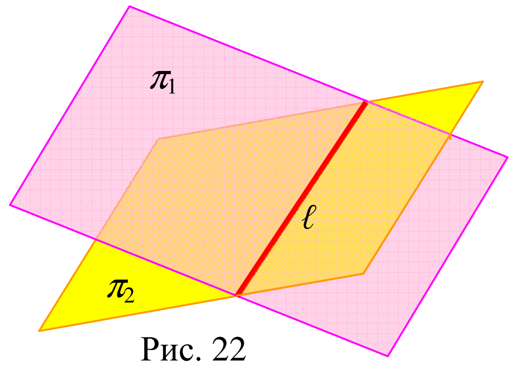

Рис. 22

3.2. Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве. Пусть прямая ℓ в пространстве проходит через точку M_0 и параллельна ненулевому вектору $\boldsymbol{s}$ (который называется ***направляющим вектором*** прямой ℓ **).** Тогда:
точка M принадлежит прямой $\ell \Leftrightarrow$ векторы $\boldsymbol{s}$ и $\overline{M_0M} = \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ коллинеарны $\Leftrightarrow$
$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 = t\cdot\boldsymbol{s} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\cdot\boldsymbol{s}$ для некоторого $t\in\mathbf{R}$.
Уравнение

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\cdot\boldsymbol{s},\ t\in\mathbf{R}, \tag{3.2}$$

называется ***параметрическим уравнением прямой в векторной форме.*** Если перейти к координатам: $M(x;y;z)$, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и $\boldsymbol{s}\{p;q;r\}$, то соответствующие уравнению (3.2) три координатные записи:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+pt \\ y&=y_0+qt \\ z&=z_0+rt \end{aligned}\right\} t\in\mathbf{R} \tag{3.3}$$

называются ***параметрическими уравнениями прямой (в пространстве) в координатной форме.*** Исключив из уравнений (3.3) параметр t, получим уравнения:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}, \tag{3.4}$$

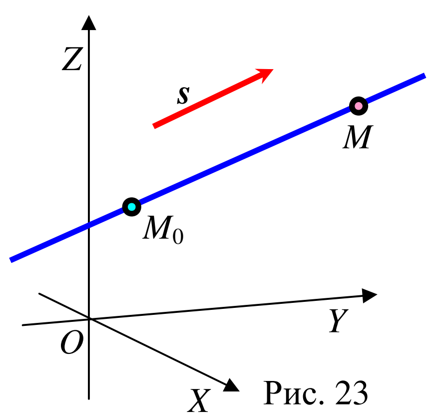

Рис. 23

(каждое из отношений равно t). Эти уравнения называются ***каноническими уравнениями прямой в пространстве***. Отметим, что в уравнениях (3.4) один и даже два (но не три!) знаменателя могут быть равны нулю, поскольку у ненулевого вектора одна или две координаты (но не все три сразу!) могут равняться нулю; в этом случае числитель этой дроби тоже равен нулю, и сама прямая перпендикулярна соответствующей координатной оси.

3.3. Общее векторное уравнение прямой в пространстве. Пусть прямая ℓ в пространстве проходит через точку M_0 и параллельна ненулевому вектору $\boldsymbol{s}$ (который называется ***направляющим вектором*** прямой ℓ**).** Тогда:

точка M принадлежит прямой $\ell \Leftrightarrow$ векторы $\boldsymbol{s}$ и $\overline{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ их векторное произведение равно нулю $\Leftrightarrow$

$$[\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)] = \boldsymbol{0}\,. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) есть ***общее векторное уравнение прямой*** в пространстве, проходящей через точку M_0 (с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0$) параллельно вектору $\boldsymbol{s}$.

Это уравнение можно преобразовать так:

$$[\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}] = \boldsymbol{m}\,, \tag{3.6}$$

где $\boldsymbol{m} = [\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}_0]$.

Уравнение (3.6) задает однозначно некоторую прямую в пространстве, если вектор $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$, а вектор $\boldsymbol{m}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{s}$.

3.4. Переход от канонических уравнений прямой к общим уравнениям и обратно. Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями, т.е. в виде пересечения двух плоскостей π_1 и π_2 (3.1). Очень часто требуется задать эту прямую каноническими (или что почти тоже самое) параметрическими уравнениями.

Первый способ: надо найти её направляющий вектор $\boldsymbol{s}$ и координаты хоты бы одной точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ этой прямой. Прямая ℓ лежит в каждой из этих двух плоскостей π_1 и π_2, поэтому она перпендикулярна их нормальным векторам $\boldsymbol{n}_1\{a_1; b_1; c_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{a_2; b_2; c_2\}$. Следовательно, в качестве направляющего вектора прямой ℓ можно взять векторное произведение $\boldsymbol{s} = [\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2]$. Далее надо произвольно задать значение одной из координат, например, $x = 0$, или $y = 1$, и, решив систему (3.1), найти значения остальных координат точки M_0 этой прямой.

Второй способ: надо найти общее решение системы (3.1), выбрав одну из переменных, например, z, в качестве свободной и, обозначив её буквой t, выразить через неё значения остальных переменных. Мы получим параметрические уравнения прямой ℓ, откуда легко получаются канонические уравнения.

Наоборот, имея канонические уравнения (3.4) прямой ℓ, её легко можно задать в виде пересечения двух плоскостей, к тому же параллельным каким-то двум координатным осям:

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{p} = \dfrac{y-y_0}{q} \\ \dfrac{y-y_0}{q} = \dfrac{z-z_0}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q(x-x_0) - p(y-y_0) = 0, \\ r(y-y_0) - q(z-z_0) = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение задает плоскость, параллельную оси OZ, а второе – параллельную OX

3.5. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки: $A_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ **и** $A_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$. Поскольку вектор $\boldsymbol{s} = \overline{A_1A_2}\{x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\}$ является направляющим для этой прямой, то её канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

3.6. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до прямой ℓ, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{s}\{p;q;r\}$, равно высоте параллелограмма (построенного на векторах $\overline{M_0M_1}$ и $\boldsymbol{s}$), опущенной на сторону $\boldsymbol{s}$ и поэтому равно отношению площади этого параллелограмма к длине этой стороны (см. Рис.) и, следовательно, вычисляется по формуле:

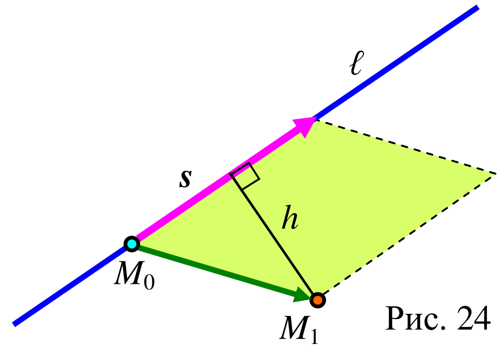

Рис. 24

$$\rho(M_1;\ell)=\frac{\left|[\boldsymbol{s}\times\overline{M_0M_1}]\right|}{|\boldsymbol{s}|} \qquad (3.7)$$

В координатах эта простая формула выглядит довольно громоздко:

$$\rho(M_1;\ell)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} q & r \\ y_1-y_0 & z_1-z_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p & r \\ x_1-x_0 & z_1-z_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p & q \\ x_1-x_0 & y_1-y_0\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad (3.8)$$

Поэтому легче запомнить не эту формулу, а её векторную версию (3.7).

3.7. Пучок плоскостей. Пусть даны две непараллельные плоскости, пересекающиеся по некоторой прямой ℓ, заданные своими общими уравнениями

$$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \Leftrightarrow \varphi_1(x,y,z)=0$$

и

$$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \Leftrightarrow \varphi_2(x,y,z)=0.$$

Тогда уравнение:

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x,y,z)+\lambda\varphi_2(x,y,z)=0\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow(a_1+\lambda a_2)x+(b_1+\lambda b_2)y+(c_1+\lambda c_2)z+(d_1+\lambda d_2)=0\end{aligned} \qquad (3.9.)$$

с параметром $\lambda=const\in\mathbf{R}$ задает семейство всех плоскостей, проходящих через прямую ℓ, кроме плоскости π_2. Это семейство плоскостей называется ***пучком плоскостей.*** Таким образом, (3.9) есть уравнение пучка плоскостей, т.е. уравнение (почти) всех плоскостей, проходящих через линию пересечения двух данных плоскостей. Это значит, что при любом значении параметра λ уравнение (3.9) задает некоторую плоскость σ, проходящую через прямую ℓ – линию пересечения плоскостей π_1 и π_2, и наоборот, всякая плоскость σ, проходящая через прямую ℓ, кроме π_2, задается уравнением вида (3.9) при подходящем значении λ (см. Рис. 25).

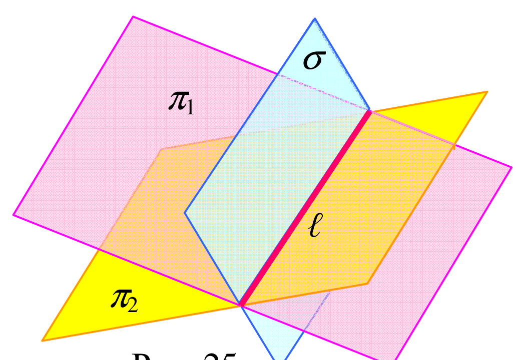

Рис. 25

3.8. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости. Пусть дана плоскость π и пересекающая её прямая ℓ (полное исследование взаимного расположения прямой и плоскости описано в п. 4.1) Для нахождения координат их точки пересечения можно:

(а) записать общее уравнение плоскости π, подставить в него параметрические уравнения прямой ℓ, решить полученное уравнение и подставить найденное значение t в параметрические уравнения прямой (лучший способ);

(б) записать параметрические уравнения плоскости π, подставить их в канонические уравнения прямой ℓ, решить полученные уравнения и найденные значения параметров t_1, t_2 подставить в параметрические уравнения плоскости;

(в) записать общее уравнение плоскости π, задать прямую ℓ в виде системы уравнений двух плоскостей σ_1 и σ_2, и затем решить систему полученных трех уравнений (плоскостей π, σ_1 и σ_2).

3.10. Решением типовых примеров к главе 3

Пример 3. 1. Написать параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точки $D(1;4;4)$ и $E(0;6;7)$.

Решение. Направляющим вектором этой прямой является вектор $\overline{DE}\{-1;2;3\}$, поэтому её параметрические уравнения такие:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1-t \\ y &= 4+2t \\ z &= 4+3t \end{aligned}\right\} t\in \mathbf{R}.$$

Исключив из этих уравнений параметр t, т.е., выразив из каждого из этих трёх уравнений параметр t и приравняв друг другу полученные выражения, получим канонические уравнения прямой DE:

Ответ. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-4}{3}$. ■

Пример 3. 2. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой:

$$\ell:\begin{cases} x-3y+2z+1=0, \\ 2x+y-z-8=0. \end{cases}.$$

Решение. Прямая ℓ задана как пересечение двух плоскостей с нормальными векторами $\boldsymbol{n}_1\{1;-3;2\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{2;1;-1\}$, и поэтому имеет направляющий вектор

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.$$

Далее найдем координаты какой-нибудь точки A, принадлежащей прямой ℓ, положив, например, $y=0$. Решим систему уравнений $\begin{cases} x+2z+1=0, \\ 2x-z-8=0, \end{cases}$ и получим $x=3$, $z=-2$, следовательно, точка A имеет координаты $A(3;0;-2)$. Осталось составить канонические уравнения этой прямой.

Ответ: ℓ: $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+2}{7}$.■

Пример 3. 3. Задать прямую *DE* из примера 3.1. в виде системы уравнений двух плоскостей.

Решение. Канонические уравнения этой прямой можно рассматривать как систему двух уравнений:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-4}{2}\\ \dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-6=0\\3y-2z-4=0\end{cases}\qquad(3.10)$$

Заметим, что первая плоскость в полученной системе (3.10) параллельна оси *OZ*, а вторая – оси *OX*. Кроме того, полученное решение не единственно: мы могли бы приравнять первое и второе, а также первое и третье выражения в канонических уравнениях, или заменить уравнения системы (3.10) на какие-то их линейные комбинации, например, сумму и разность, система полученных уравнений также задавала бы ту же прямую.

Ответ. (приводятся три из бесконечного количества представлений данной прямой общими уравнениями):

$$\begin{cases}2x+y-6=0\\3y-2z-4=0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}2x+y-6=0\\3x+z-7=0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x+2y-z=5\\x-y+z=1\end{cases}.■$$

Пример 3. 4. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\ell:\begin{cases}x+2y+z=0\\2x-y-7z+5=0\end{cases}.$$

Решение. Задачу можно решить аналогично предыдущей, однако рассмотрим другой способ решения. Выразим из этих уравнений две переменные через третью, например, x и y через z. Сначала исключим, например, x, из второго уравнения, для чего вычтем из второго уравнения удвоенное первое. Из полученного уравнения $-5y-9z=-5$ выразим y через z, получим: $y=1-\frac{9}{5}z$, подставим это выражение вместо y в первое уравнение: $x+2\left(1-\frac{9}{5}z\right)+z=0$, откуда выразим и x через z $\Rightarrow x=-2+\frac{13}{5}z$. Положив $z=5t$, получим параметрические уравнения прямой ℓ:

$$\left.\begin{aligned}x&=-2+13t\\y&=1-9t\\z&=5t\end{aligned}\right\}\ t\in\mathbf{R}.$$

Осталось исключить параметр *t*:

Ответ: $\dfrac{x+2}{13}=\dfrac{y-1}{-9}=\dfrac{z}{5}$.■

Пример 3. 5. Найти координаты точки пересечения плоскости π, проходящей через точки $A(2;5;3)$, $B(3;2;1)$ и $C(4;1;2)$ (из примера 2. 2) и прямой ℓ, проходящей через точки $D(1;4;4)$ и $E(0;6;7)$ (из примера 3. 1).

Решение. Первый способ (оптимальный). Составим общее уравнение плоскости (см. пример 2. 2)

$$5x+3y-2z-19=0. \qquad (3.11)$$

и параметрические уравнения прямой *DE* (см. пример 3.1)

$$\left.\begin{aligned} x&=1-t\\ y&=4+2t\\ z&=4+3t \end{aligned}\right\} t\in \mathbf{R}. \qquad (3.12)$$

Подставим эти выражения в уравнения (3.11), и решим полученное уравнение:

$$5(1-t)+3(4+2t)-2(4+3t)-19=0 \Leftrightarrow -5t=10 \Rightarrow t=-2.$$

Подставив найденное значение $t=-2$ в параметрические уравнения (3.12), найдем координаты искомой точки пересечения *M*:

$$x=1-(-2)=3,\ y=4+2\cdot(-2)=0,\ z=4+3\cdot(-2)=-2.$$

Второй способ (удобен, когда плоскость задана параметрическими уравнениями)**.** Запишем параметрические уравнения плоскости *ABC* (см. пример 2.2):

$$\begin{cases} x=2+t_1+2t_2\\ y=5-3t_1-4t_2, \quad t_1,t_2\in \mathbf{R}\\ z=3-2t_1-t_2 \end{cases} \qquad (3.13)$$

и подставим их в канонические уравнения прямой *DE* (см. пример 3.1):

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{3}$$

и решим полученную систему уравнений:

$$\frac{2+t_1+2t_2-1}{-1}=\frac{5-3t_1-4t_2-4}{2}=\frac{3-2t_1-t_2-4}{3}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2(1+t_1+2t_2)=-(1-3t_1-4t_2)\\ 3(1-3t_1-4t_2)=2(-1-2t_1-t_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=3,\\ t_2=-1. \end{cases}$$

Найденные значения параметров подставляем в параметрические уравнения плоскости (3.13) , получим координаты искомой точки пересечения.

$$\begin{cases} x=2+3+2\cdot(-1)=3,\\ y=5-3\cdot 3_1-4\cdot(-1)=0,\\ z=3-2\cdot 3-(-1)=-2. \end{cases}$$

Третий способ (удобен, когда прямая задана общими уравнениями). Возьмем общее уравнение плоскости *ABC*,

$$5x+3y-2z=19,$$

а прямую *DE* зададим в виде системы уравнений двух пересекающихся плоскостей (см. пример 3.3), например,

$$\begin{cases} 2x+y=6\\ 3y-2z=4 \end{cases},$$

и затем решим систему из трех полученных уравнений

$$\begin{cases} 5x+3y-2z=19, \\ 2x+y=6, \\ 3y-2z=4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}.$$

Ответ. Точка пересечения $M(3;0;-2)$.■

Пример 3. 6. Найти координаты: (а) точки M_1 – (ортогональной) проекции точки $M(6;8;-5)$ на плоскость $\pi: 3x+3y-4z+6=0$; (б) точки M_2, симметричной точке M относительно плоскости π.

Решение. Составим параметрические уравнения прямой ℓ, перпендикулярной плоскости π и проходящей через точку M. Направляющим вектором прямой ℓ будет нормальный вектор $\boldsymbol{n}(3;3;-4)$ плоскости π:

$$\ell: \begin{cases} x=6+3t \\ y=8+3t \\ z=-5-4t \end{cases}$$

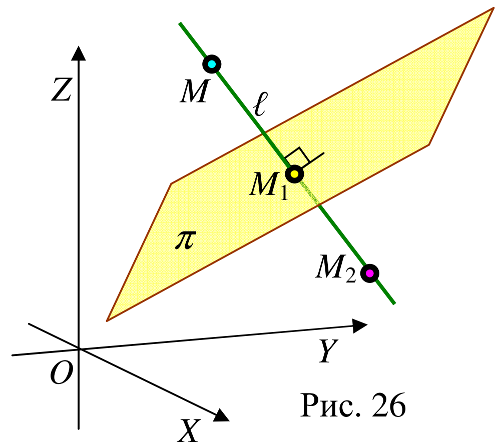

Рис. 26

Далее найдем точку пересечения прямой ℓ и плоскости π, для чего подставим в уравнение плоскости выражения переменных x, y и z через t: $3(6+3t)+3(8+3t)-4(-5-4t)+6=0$. Из данного уравнения получим $t=-2=t_1$, следовательно, проекция M_1 точки M на плоскость π имеет координаты $M_1(0;2;3)$. Поскольку $|MM_1|=|M_1M_2| \Rightarrow \overline{MM_2}=2\cdot\overline{MM_1}$, а точке M соответствует $t=0$, то точке M_2 соответствует удвоенное значение $t=2t_1=-4$ (см. Рис. 26). Подставляя это значение t в параметрические уравнения прямой ℓ, находим координаты точки M_2:

$$\begin{cases} x=6+3\cdot(-4)=-6, \\ y=8+3\cdot(-4)=-4, \\ z=-5-4\cdot(-4)=11. \end{cases}$$

Ответ: $M_1(0;2;3)$, $M_2(-6;-4;11)$.■

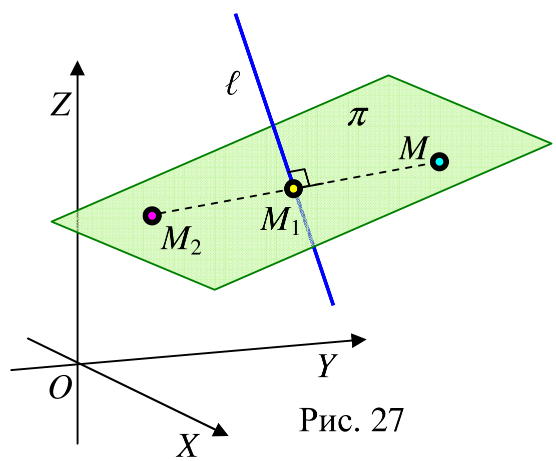

Рис. 27

Пример 3. 7. Найти (ортогональную) проекцию M_1 точки $M(11;2;-2)$ на прямую ℓ: $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$, а также точку M_2, симметричную точке M относительно прямой ℓ.

Решение. Вспомним, что ортогональная проекция точки M на прямую ℓ – это точка пересечения этой прямой с плоскостью π, проходящей через точку M перпендикулярно прямой ℓ (см. Рис. 27). Составим уравнение этой плоскости, её нормальным вектором будет направляющий вектор $\boldsymbol{s}(2;1;-4)$

прямой ℓ:

$$\pi: 2(x-11)+(y-2)-4(z+2)=0 \Leftrightarrow 2x+y-4z-32=0.$$

Далее найдем точку пересечения прямой ℓ и плоскости π. Это можно сделать как в предыдущем примере 3.6, записав параметрические уравнения прямой ℓ и подставив их в уравнение плоскости π, но мы поступим иначе: решим систему уравнений прямой ℓ и плоскости π

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z-3}{-4} \\ 2x+y-4z-32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-6}{1}, \\ \dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z-3}{-4}, \\ 2x+y-4z-32=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-14, \\ z=-4y+27, \\ 2x+y-4z-32=0. \end{cases}$$

Выразив из первых двух уравнений две неизвестные (x и z) через третью (y) и поставив в третье уравнение, находим $x=2,\ y=8,\ z=-5$. Итак точка $M_1(2;8;-5)$ и будет проекцией точки M на прямую ℓ. Далее заметим, что точка M_1 является серединой отрезка MM_2, следовательно координаты точки $M_2(x;y;z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{11+x}{2}=2 \\ \dfrac{2+y}{2}=8 \\ \dfrac{-2+z}{2}=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-7, \\ y=14,, \\ z=-8. \end{cases}$$

Итак, точка M_2 имеет координаты $M_2(-7;14;-8)$.

Ответ: $M_1(2;8;-5)$, $M_2(-7;14;-8)$. ■

Пример 3. 5. Найти уравнение плоскости**,** проходящей через прямую ℓ, заданную в виде пересечения двух плоскостей $x-y+2z-3=0$ и $2x+y-3z+4=0$, перпендикулярно другой плоскости σ: $2x+3y-4z+5=0$.

Решение. Первый способ (традиционный). Сначала надо найти координаты какой-нибудь точки A, принадлежащей прямой ℓ: положим, например, $x=0$ и затем найдем y и z:

$$\begin{cases} -y+2z-3=0 \\ y-3z+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow y=-1,\ z=1, \text{ т.е. } A(0;-1;1).$$

Теперь вычислим координаты её направляющего вектора:

$$\boldsymbol{s}=[\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

Нормальный вектор искомой плоскости π перпендикулярен как вектору $\boldsymbol{s}$, так и нормальному вектору $\boldsymbol{n}_\sigma\{2;3;-4\}$ плоскости σ, поэтому может быть найден в виде их векторного произведения:

$$\boldsymbol{n}_\pi=[\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}_\sigma]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-37\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}.$$

Наконец, записываем уравнение искомой плоскости π как проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}_\pi$:

$$\pi: -37x+10(y+1)-11(z-1)=0 \Leftrightarrow 37x-10y+11z-21=0.$$

Второй способ (опирающийся на понятие **пучка плоскостей**). Искомая плоскость задается уравнением $(x-y+2z-3)+\lambda(2x+y-3z+4)=0$, а параметр λ определяется из условия, что её нормальный вектор $\boldsymbol{n}_\pi\{1+2\lambda; -1+\lambda; 2-3\lambda\}$ был ортогонален вектору $\boldsymbol{n}_\sigma\{2;3;-4\}$, т.е. их скалярное произведение равно нулю:

$$(\boldsymbol{n}_\pi \bullet \boldsymbol{n}_\sigma)=0 \Leftrightarrow 2(1+2\lambda)+3(-1+\lambda)-4(2-3\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=\tfrac{9}{19}.$$

Уравнение искомой плоскости:

$$(x-y+2z-3)+\tfrac{9}{19}(2x+y-3z+4)=0 \Leftrightarrow 37x-10y+11z-21=0.$$

Ответ: $37x-10y+11z-21=0$.■

Пример 3. 6. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$ и точку $A(2;-6;1)$.

Решение. Первый способ (традиционный). Прямая проходит через точку $B(3;-2;4)$ и имеет направляющий вектор $\boldsymbol{s}\{2;-1;3\}$. Нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ искомой плоскости перпендикулярен векторам $\boldsymbol{s}$ и $\overline{AB}\{1;4;3\}$, поэтому

$$\boldsymbol{n}=\lambda[\boldsymbol{s}\times\overline{AB}]=\lambda\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=\lambda\left(-15\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}\right)\Rightarrow \boldsymbol{n}\{5;1;-3\} \quad (\lambda=-\tfrac{1}{3}).$$

Искомая плоскость проходит через точку A, поэтому её уравнение**:**

$$5(x-2)+(y+6)-3(z-1)=0 \Leftrightarrow 5x+y-3z-1=0.$$

Второй способ (с помощью пучка плоскостей). Запишем данную прямую в виде пересечения двух плоскостей:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-1}\\[2mm] \dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y+1=0\\ 3y+z+2=0\end{cases}$$

Искомую плоскость будем искать в виде пучка плоскостей (3.9):

$$(x+2y+1)+\lambda(3y+z+2)=0. \qquad (3.10)$$

Параметр λ подберем так, чтобы плоскость (3.10) проходила через точку $A(2;-6;1)$. Подставив в (3.10) координаты этой точки, получим $-9-15\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{3}{5}$. Уравнение искомой плоскости:

$$(x+2y+1)-\tfrac{3}{5}(3y+z+2)=0 \Leftrightarrow 5(x+2y+1)-3(3y+z+2)=0 \Leftrightarrow 5x+y-3z-1=0.$$

Ответ: $5x+y-3z-1=0$.■

Пример 3. 7.. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;-1)$, перпендикулярной плоскости $\pi: 4x-3y+2z=5$ и параллельной прямой

$$\ell:\begin{cases} x+3y-z=2 \\ 2x-y+4z=6 \end{cases}.$$

Решение. Прямая ℓ задана как пересечения двух плоскостей с нормальными векторами $\boldsymbol{n}_1\{1;3;-1\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{2;-1;4\}$, и поэтому имеет направляющий вектор

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=11\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}.$$

Нормальный вектор $\boldsymbol{n}_4$ искомой плоскости σ перпендикулярен как нормальному вектору $\boldsymbol{n}_3\{4;-3;2\}$ плоскости π, так и вектору $\boldsymbol{s}$, поэтому

$$\boldsymbol{n}_4=\boldsymbol{n}_3\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 11 & -6 & -7 \end{vmatrix}=33\boldsymbol{i}+50\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}.$$

Вектор $\boldsymbol{n}_4$ можно было бы найти и по формуле повторного векторного произведения[3]:

$$\boldsymbol{n}_4=\boldsymbol{n}_3\times\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_3\times[\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2]=\boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_3)-\boldsymbol{n}_2(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_3).$$

Находим:

$(\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_3)=2\cdot4+(-1)\cdot(-3)+4\cdot2=19$, $(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_3)=1\cdot4+3\cdot(-3)+(-1)\cdot2=-7$.

Поэтому $\boldsymbol{n}_4=19\boldsymbol{n}_1+7\boldsymbol{n}_2=19\cdot\{1;3;-1\}+7\cdot\{2;-1;4\}=\{33;50;9\}$.

Следовательно, плоскость σ, проходящая через точку $A(2;3;-1)$ и перпендикулярная вектору $\boldsymbol{n}_4\{33;50;9\}$, задается уравнением:

$$33(x-2)+50(y-3)+9(z+1)=0 \Leftrightarrow 33x+50y+9z-207=0.$$

Ответ. $33x+50y+9z-207=0$. ■

Пример 3. 8. Найти канонические уравнения прямой, каждая точка которой равноудалена от трех данных точек $A(3;2;-1)$, $B(4;1;5)$ и $C(1;8;3)$.

Решение. Напишем уравнения геометрического места (ГМ) точек, равноудаленных от вершин *A*, *B* и *C*. Оно является пересечением двух поверхностей:

π_1 : ГМ точек, равноудаленных от вершин *A* и *B*;

π_2 : ГМ точек, равноудаленных от вершин *A* и *C*.

Каждая из этих поверхностей есть плоскость.

Уравнение первой плоскости π_1 получим по определению:

$$\text{точка } M(x;y;z)\in\pi_1 \Leftrightarrow |MA|^2=|MB|^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+(z-5)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-y+6z-14=0.$$

---

[3] Формула для повторного векторного произведения (формула «бац-цаб»): $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

Для нахождения уравнения второй плоскости π_2 вспомним из стереометрии, что она проходит через середину отрезка AC перпендикулярно ему. Точка E – середина отрезка AC имеет координаты:

$x_E = \frac{1}{2}(x_A + x_C) = \frac{1}{2}(3+1) = 2$,

аналогично:

$$y_E = \tfrac{1}{2}(2+8) = 5,$$
$$z_E = \tfrac{1}{2}(-1+3) = 1,$$

т.е. $E(2;5;1)$. Нормальный вектор этой плоскости имеет координаты $\overline{AC}\{-2;6;4\}$, поэтому плоскость π_2 задается уравнением:

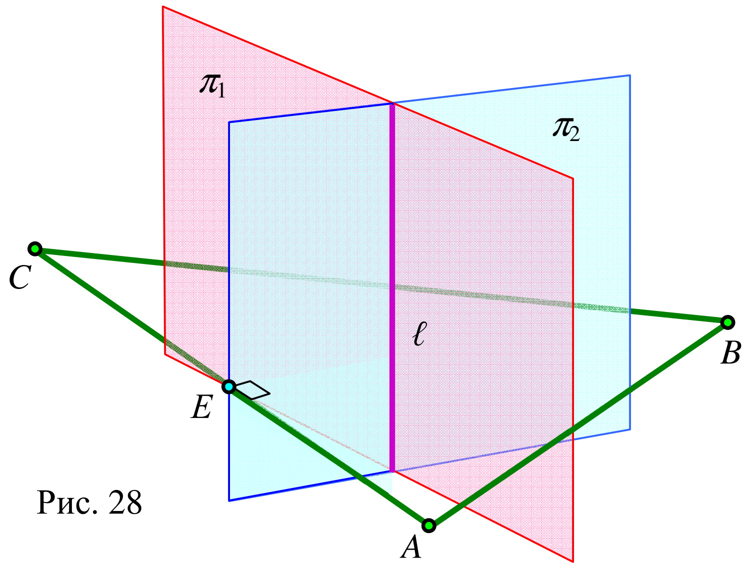

Рис. 28

$$-2(x-2)+6(y-5)+4(z-1)=0 \Leftrightarrow -x+3y+2z-15=0.$$

Геометрическое место точек, равноудаленных от трех точек A, B и C есть прямая ℓ – пересечение плоскостей π_1 и π_2:

$$\ell:\begin{cases} x-y+6z-14=0, \\ -x+3y+2z-15=0. \end{cases}$$

Для нахождения канонических уравнений этой прямой сначала найдем какую-нибудь точку M_0 этой прямой, положив, например, $z_0 = 3$, тогда получим:

$$\begin{cases} x-y=-4, \\ -x+3y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2}, \\ y_0 = \frac{5}{2}. \end{cases}, \text{ т.е. точка } M_0\left(-\tfrac{3}{2};\tfrac{5}{2};3\right) \in \ell.$$

Направляющий вектор $\boldsymbol{s}$ прямой ℓ, как мы знаем, пропорционален векторному произведению нормальных векторов плоскостей π_1 и π_2:

$$\boldsymbol{s} = \lambda[\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2] = \lambda\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \lambda\left(-20\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\right) \Rightarrow \boldsymbol{s}\{10;4;-1\} \quad (\lambda = -\tfrac{1}{2}).$$

В результате получаем

Ответ. $\ell: \dfrac{x+\frac{3}{2}}{10} = \dfrac{y-\frac{5}{2}}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$.■

3.10. Задачи для самостоятельного решения к главе 3

3. 1. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(2;-1;3)$ и $B(6;2;1)$.

3. 2. Написать канонические уравнения прямой $x=3,\ y=-2t,\ z=5+3t,\ t\in \mathbf{R}$.

3. 3. Написать параметрические уравнения прямой $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{0} = \dfrac{z-1}{-2}$.

3. 4. Написать общие уравнения прямой $\ell: x=3-2t,\ y=2+5t,\ z=-1+4t$, $t\in \mathbf{R}$, в виде в виде пересечения двух плоскостей, одна из которых параллельна оси OX, а другая – оси OY.

3. 5. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;5;-3)$ перпендикулярно плоскости $3x-2y+z-5=0$.

3. 6. Написать канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ x+2y+4z=-2 \end{cases}.$$

3. 7. Найти расстояние от точки $A(2;3;-2)$ до прямой $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

3. 8. Найти расстояние от точки $A(2;5;-3)$ до: (а) прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{6}$;

(б) прямой $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ x-3y+4z=7 \end{cases}$..

3. 9. На прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{4}$ найти все точки, равноудаленные от двух данных плоскостей $2x+3y+6z-30=0$ и $6x-3y-2z+10=0$.

3. 10. В треугольнике ABC известны координаты его вершин: $A(2;3;1)$, $B(3;4;5)$ и $(2;8;-4)$. Написать уравнение биссектрисы угла ABC, найти координаты центра P вписанной окружности и её радиус.

3. 11. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ 2x-y+3z-4=0 \end{cases}:$$

(а) и через точку $A(4;-3;-1)$;

(б) параллельно прямой $x=2+3t,\ y=-1+t,\ z=3-2t,\ t\in \mathbf{R}$;

(в) и образующей с плоскостью $2x+3y-z+5=0$ угол 60°.

3. 12. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\ell: \begin{cases} 4x-10y+z-13=0 \\ 5x-2y-z-2=0 \end{cases}$ и касающейся сферы радиуса $R=1$ с центром в начале координат.

3. 13. Доказать, что уравнение пучка плоскостей проходящих через прямую $\ell: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ имеет вид $\alpha\dfrac{x-x_0}{a}+\beta\dfrac{y-y_0}{b}+\gamma\dfrac{z-z_0}{c}=0$, где α,β,γ – произвольные постоянные, удовлетворяющие условию $a+\beta+\gamma=0$.

3. 14. Составить уравнение биссектрисы угла между прямой $\ell: \dfrac{x-5}{8}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-3{,}5}{1}$ и её проекцией на плоскость $\pi: x+y+1=0$.

3. 15. На прямой $\ell: \dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-8}{2}$ найти все точки M такие, что $AM:MB=1:2$, где $A(2;1;4)$, $B(5;-2;1)$.

3. 16. На прямой $\ell: \dfrac{x-11}{6} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$ найти все точки, удаленные от плоскости $3x - 2y - 6z + 7 = 0$ на расстояние, равное 2.

3. 17. При каком условии прямая $\ell: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$

(а) параллельна оси *OX* (но не совпадает ней);(б) перпендикулярна оси *OY*.

3. 18. При каком условии прямая $\ell: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$

(а) пересекает ось *OX*; (б) совпадает с осью *OZ*.

3. 19. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\ell: \begin{cases} x - 4y + 3z + 6 = 0 \\ x - 3y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $A(2; 2; 1)$ и $B(-6; -4; 3)$.

3. 20. При каких значениях α и β прямая $\ell: \begin{cases} 7x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ x + y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$ лежит в плоскости $\pi: \alpha x - 9y + \beta z + 27 = 0$?

3. 21. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 5x + 3y + 2z - 28 = 0 \\ 4x + 3y - 5z - 14 = 0 \end{cases}$ и отстоящей от начала координат на расстояние $d = \sqrt{14}$.

3. 22. Найти координаты: (а) точки *B* – проекции точки $A(2; 7; 1)$ на плоскость $x - 4y - 3z - 23 = 0$; (в) точки *C*, симметричной точке *A* относительно этой плоскости.

3. 23. Найти координаты : (а) точи *B* – проекции точки $A(-7; -11; -4)$ на прямую $\ell: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z+7}{-3}$; (б) точки *C*, симметричной точке *A* относительно этой прямой.

3. 24. Даны точка $A(2; -5; 7)$, плоскость $\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0$ и прямая $\ell: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+2}{3}$. Найти координаты проекции точки *A*: (а) на плоскость π параллельно прямой ℓ; (б) на прямую ℓ параллельно плоскости π.

3. 25. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\ell_1: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{3}$ и параллельной прямой $\ell_2: \dfrac{x+4}{5} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+2}{1}$.

3. 26. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\ell: \begin{cases} 2x - 3y - z + 2 = 0 \\ x + 2y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$ и перпендикулярной плоскости $\pi: 4x + 5y - z = 7$.

3. 27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(7; -1; -1)$ и прямую $\ell: \begin{cases} x - y + 3z + 1 = 0 \\ 4x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

3. 28. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3;-4)$, параллельной плоскости $\pi: 2x+5y+4z-7=0$ и перпендикулярной прямой $\ell: \begin{cases} 3x+2y-z-2=0 \\ x-4y+3z+5=0 \end{cases}$.

3. 29. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-1;5)$ параллельно прямой $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-4}{5}$ перпендикулярно плоскости $2x+3y-z+7=0$.

3. 30. Известны координаты вершин тетраэдра *ABCD*: $A(2;3;1)$, $B(3;4;1)$, $C(4;2;0)$, $D(5;1;2)$. Составить уравнения прямой, содержащей высоту *DH* тетраэдра.

Глава 4. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Геометрические задачи на прямую и плоскость в пространстве.

4.1. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Пусть даны плоскость π, заданная общим уравнением $ax+by+xz+d=0$, и прямая ℓ, заданная каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

Напомним, что вектор $\boldsymbol{n}\{a;b;c\}$ перпендикулярен плоскости π, а прямая ℓ проходит через точку $A_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{s}\{p;q;r\}$.

Тогда возможны 4 случая (из которых четвертый является частным случаем третьего):

4.1.1. прямая ℓ целиком лежит в плоскости $\pi \Leftrightarrow$ { $A_0\in\pi$ и $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$ } $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} ax_0+by_0+xz_0+d=0, \\ ap+bq+cr=0. \end{cases}$$

4.1.2. прямая ℓ параллельна плоскости $\pi \Leftrightarrow$ { $A_0\notin\pi$ и $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$ } $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} ax_0+by_0+xz_0+d\neq 0, \\ ap+bq+cr=0. \end{cases}$$

4.1.3. прямая ℓ пересекает плоскость π (в одной точке) $\Leftrightarrow$ векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{s}$ не ортогональны ($\boldsymbol{n}\not\perp\boldsymbol{s}$) $\Leftrightarrow$ $ap+bq+cr\neq 0$.

4.1.4. прямая ℓ перпендикулярна плоскости $\pi \Leftrightarrow$ векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{s}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$

$$\frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}.$$

Во втором случае надо уметь находить расстояние от прямой до параллельной ей плоскости. Оно равно расстоянию от любой точки этой прямой, например, A_0, до плоскости:

$$\rho(\ell,\pi)=\rho(A_0;\pi)=\frac{|a_0x+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

В третьем случае желательно уметь находить: (1) координаты точки пересечения прямой и плоскости; (2) угол между ними.

Для решения первой задачи (см. также п. 3.8) лучше всего написать параметрические уравнения прямой ℓ:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+pt \\ y&=y_0+qt \\ z&=z_0+rt \end{aligned}\right\} t\in\mathbf{R}, \qquad (4.1)$$

подставить эти выражения в общее уравнение плоскости $ax+by+xz+d=0$, решить получившееся линейное уравнение, затем опять подставить найденное значение $t=t_1$ в уравнения (4.1), чтобы найти координаты точки пересечения. (См. также п. 3.8.)

Для решения задачи 2 надо заметить, что угол $\alpha = (\ell \wedge \pi)$ между прямой ℓ и плоскостью π всегда меньше $\frac{\pi}{2}$ и равен $\alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \varphi\right|$, где φ – угол между векторами $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{n}$, поэтому $\sin\alpha = |\cos\varphi|$, следовательно, синус угла между прямой и плоскостью равен:

$$\sin(\ell \wedge \pi) = \frac{|(\boldsymbol{s} \bullet \boldsymbol{n})|}{|\boldsymbol{s}| \cdot |\boldsymbol{n}|} \qquad (4.2)$$

Или, в координатах:

$$\sin(\ell \wedge \pi) = \frac{|ap + bq + cr|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (4.3)$$

4.2. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть в пространстве даны две прямые ℓ_1 и ℓ_2, заданные своими каноническими уравнениями

$$\ell_1 : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1} \text{ и } \ell_2 : \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2} \qquad (4.4)$$

Эти прямые проходят через точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$, и имеют направляющие векторы $\boldsymbol{s}_1\{p_1; q_1; r_1\}$ и $\boldsymbol{s}_2\{p_2; q_2; r_2\}$ соответственно.

Прямые ℓ_1 и ℓ_2 либо **совпадают**, либо **параллельны**, либо **пересекаются** в одной точке, либо **скрещиваются** (т.е. не лежат в одной плоскости). Покажем, как распознать эти четыре случая. Отметим, что в первых трёх случаях прямые ℓ_1 и ℓ_2 **лежат в одной плоскости** (т.е. пункты 4.2.2, 4.2.3 и 4.2.4 ниже являются частными случаями п. 4.2.1.).

4.2.1) Прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости $\Leftrightarrow$ три вектора $\overline{A_1A_2}$, $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ компланарны $\Leftrightarrow$ их смешанное произведение равно нулю: $(\overline{A_1A_2}\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2) = 0$.

4.2.2) Прямые ℓ_1 и ℓ_2 совпадают $\Leftrightarrow$ три вектора $\overline{A_1A_2}$, $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ коллинеарны, т.е. их координаты пропорциональны.

4.2.3) Прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны $\Leftrightarrow$ векторы $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ коллинеарны, т.е. их координаты пропорциональны, но они не коллинеарны вектору $\overline{A_1A_2}$.

4.2.4) Прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке $\Leftrightarrow$ три вектора $\overline{A_1A_2}$, $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ компланарны, т.е. $(\overline{A_1A_2}\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2) = 0$, но векторы $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ не коллинеарны, т.е. их координаты не пропорциональны.

4.2.5) Прямые ℓ_1 и ℓ_2 скрещиваются, т.е. они не лежат в одной плоскости $\Leftrightarrow$ три вектора $\overline{A_1A_2}$, $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ не компланарны $\Leftrightarrow$ их смешанное произведение не равно нулю: $(\overline{A_1A_2}\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2) \neq 0$.

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны или пересекаются, т.е. ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости, то надо уметь находить уравнение этой плоскости. Для пересекающихся прямых надо также уметь находить координаты их точки пересечения. Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны или скрещиваются, т.е. не имеют общих точек, то надо уметь находить расстояние между ними.

4.3. Угол между двумя прямыми

$$\ell_1 : \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1} \text{ и } \ell_2 : \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2},$$

равен углу φ между их направляющими векторами $\boldsymbol{s}_1\{p_1; q_1; r_1\}$ и $\boldsymbol{s}_2\{p_2; q_2; r_2\}$, если последний угол $\varphi \le 90°$, либо углу $(180° - \varphi)$, если $\varphi > 90°$. Поэтому

$$\cos\left(\ell_1 \wedge \ell_2\right) = \left|\cos(\boldsymbol{s}_1 \wedge \boldsymbol{s}_2)\right| = \frac{\left|(\boldsymbol{s}_1 \bullet \boldsymbol{s}_2)\right|}{|\boldsymbol{s}_1| \cdot |\boldsymbol{s}_2|}. \qquad (4.5)$$

4.4. Нахождения точки пересечения двух пересекающихся прямых в пространстве.

Пусть даны две пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 (полное исследование взаимного расположения двух прямых в пространстве описано в п. 4.2) Для нахождения координат их точки пересечения можно:

(а) записать обе прямые параметрически (но с разными параметрами t_1 и t_2) и приравнять выражения каждой из координат через эти параметры. Получится система из трех уравнений с двумя неизвестными t_1 и t_2, которая должна иметь единственное решение (если прямые пересекаются), или не иметь решений (если прямые скрещиваются или параллельны);

(б) Записать одну из прямых параметрически, подставить выражения каждой из координат через параметр t в канонические (или общие) уравнения второй прямой. Получится система двух уравнений с одним неизвестным параметром t. И опять, эта система имеет решение (если прямые пересекаются), или не имеет решений (если прямые скрещиваются или параллельны);

(в) Записать обе прямые каноническими или общими уравнениями и решить систему всех четырех уравнений с тремя неизвестными. Опять же, эта система иметь единственное решение (если прямые пересекаются), или не имеет решений (если прямые скрещиваются или параллельны).

4.5. Расстояние между двумя параллельными прямыми

$$\ell_1 : \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1} \text{ и } \ell_2 : \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2},$$

где $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$,

равно расстоянию от любой точки первой прямой, например, точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$, до второй прямой (или наоборот) и потому вычисляется по формулам:

$$\rho(\ell_1; \ell_2) = \frac{\left|[\boldsymbol{s}_1 \times \overline{A_1A_2}]\right|}{|\boldsymbol{s}_1|} = \frac{\left|[\boldsymbol{s}_2 \times \overline{A_1A_2}]\right|}{|\boldsymbol{s}_2|}. \qquad (4.6)$$

4.6. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. Если две прямые скрещиваются, то, как известно из стереометрии, существует единственный отрезок с концами на этих прямыми, перпендикулярный эти двум прямым, и его длина меньше длины любого другого отрезка, соединяющего эти две прямые. ***Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми*** называется длина общего перпендикуляра этих двух прямых.

Если прямые (4.4) скрещиваются, то расстояние между ними равно высоте параллелепипеда (построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$), опущенной на его грань (построенную на векторах $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$), и поэтому равно отношению объёма этого параллелепипеда к площади этой грани и (см. Рис. 29); следовательно, это расстояние вычисляется по формуле:

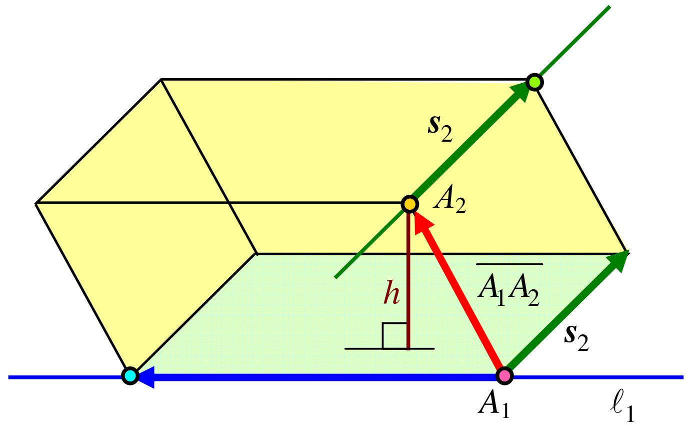

Рис. 29

$$\rho(\ell_1;\ell_2)=\frac{\left|(\overline{A_1A_2}\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2)\right|}{\left|[\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2]\right|} \tag{4.7}$$

В координатной форме эта формула тоже довольно громоздка:

$$\rho(\ell_1;\ell_2)=\frac{\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}^2}}, \tag{4.8}$$

и поэтому лучше запомнить векторную форму (4.7).

4.7. Уравнение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых

Для скрещивающихся прямых (4.4) также желательно уметь находить уравнение прямой, пересекающей обе эти прямые под прямым углом. Это можно сделать разными способами, вот один из них:

(а) сначала найти направляющий вектор $\boldsymbol{m}$ искомой прямой, равный векторному произведению направляющих векторов данных прямых: $\boldsymbol{m}=[\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2]$;

(б) Написать уравнение плоскости σ, проходящей через прямую ℓ_1 параллельно вектору $\boldsymbol{m}$, Эта плоскость проходит через точку A_1, а её нормальным вектором будет вектор $\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{m}]$, который можно найти и по формуле для повторного векторного произведения[4]:

$$\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{m}]=[\boldsymbol{s}_1\times[\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2]]=(\boldsymbol{s}_1\bullet\boldsymbol{s}_2)\cdot\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{s}_1^2\cdot\boldsymbol{s}_2.$$

(в) найти точку пересечения B плоскости σ и прямой ℓ_2;

(г) искомая прямая проходит через точку B параллельно вектору $\boldsymbol{m}$.

[4] Формула для повторного векторного произведения (формула «бац-цаб»): $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

4.8. Решение типовых примеров к главе 4

Пример 4. 1. Исследовать взаимное расположение прямой $\ell: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{4}$ и плоскости: (а) $\pi_1: 2x + y - 2z + 3 = 0$; (б) $\pi_2: 2x - 7y + 2z - 5 = 0$; (в) $\pi_3: 4x - y - 3z + 3 = 0$. Если прямая и плоскость параллельны, то найти расстояние между ними, а если пересекаются, то найти координаты точки пересечения и угол между ними.

Решение. Прямая ℓ проходит через точку $A(2;-1;3)$ и имеет направляющий вектор $\boldsymbol{s}\{3;2;4\}$, нормальные векторы данных трех плоскостей суть: $\boldsymbol{n}_1\{2;1;-2\}$, $\boldsymbol{n}_2\{2;-7;2\}$ и $\boldsymbol{n}_3\{5;-1;-3\}$ соответственно. Обозначим через $\varphi_i(x,y,z)$ левую часть уравнения плоскости π_i, $i = 1, 2, 3$.
(а) Вычисляем: $(\boldsymbol{s} \bullet \boldsymbol{n}_1) = 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 4\cdot(-2) = 0$, $\varphi_1(A) = 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) - 2\cdot(3) + 3 =$, $= 0$, значит, прямая ℓ **лежит** в плоскости π_1.
(б) Аналогично, находим: $(\boldsymbol{s} \bullet \boldsymbol{n}_2) = 3\cdot 2 + 2\cdot(-7) + 4\cdot 2 = 0$, $\varphi_2(A) =$ $= 2\cdot 2 + (-7)\cdot(-1) + 2\cdot 3 - 5 = 12 \neq 0$, следовательно, прямая ℓ **параллельна** плоскости π_2, расстояние между ними, равно расстоянию от точки A до плоскости π_2:

$$\rho(\ell, \pi_2) = \rho(A, \pi_2) = \frac{|\varphi_2(A)|}{|\boldsymbol{n}_2|} = \frac{12}{\sqrt{4+49+4}} = \frac{12}{\sqrt{57}}.$$

(в) Точно так же вычисляем $(\boldsymbol{s} \bullet \boldsymbol{n}_3) = 3\cdot 4 + 2\cdot(-1) + 4\cdot(-3) = -2 \neq 0$, следовательно, прямая и плоскость π_3 **пересекаются**, синус угла между ними равен модулю косинуса угла между векторами $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{n}_3$:

$$\sin(\ell \wedge \pi_3) = \left|\cos(\boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{n}_3)\right| = \frac{|(\boldsymbol{s} \bullet \boldsymbol{n}_3)|}{|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{n}_3|} = \frac{2}{\sqrt{9+4+16}\cdot\sqrt{16+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{29}\sqrt{26}}.$$

Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости π_3 напишем параметрические уравнения этой прямой $x = 2 + 3t,\ y = -1 + 4t,\ z = 3 + 4t$, подставим их в уравнения плоскости π_3 и решим полученное уравнение:

$$4(2+3t) - (-1+2t) - 3(3+4t) + 3 = 0 \Rightarrow t = \tfrac{3}{2}.$$

Найденное значение t подставляем в параметрические уравнения прямой: $x = 2 + 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{13}{2},\ y = -1 + 2\cdot\frac{3}{2} = 2,\ z = 3 + 4\cdot\frac{3}{2} = 9 \Rightarrow$ точка пересечения $M\left(\frac{13}{2}; 2; 9)\right)$

Ответ: (а) $\ell \subset \pi$; (б) $\ell \parallel \pi$, $\rho(\ell, \pi_2) = \dfrac{12}{\sqrt{57}}$; (в) пересекаются, $\sin(\ell \wedge \pi_3) = \dfrac{15}{\sqrt{29}\sqrt{26}}$, $\ell \cap \pi_3 = M\left(\frac{13}{2}; 2; 9\right)$. ■

Пример 4. 2. Доказать, что прямые

$$\ell_1: \frac{x}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-14}{-8} \quad \text{и} \quad \ell_2: \begin{cases} 2x + 3y + 2z - 22 = 0 \\ 2x - 13y - 2z + 30 = 0 \end{cases}$$

параллельны, найти расстояние между ними и составить уравнение плоскости π, проходящей через эти прямые.

Решение. Первая прямая проходит через точку $A_1(0;-1;14)$ и параллельна вектору $\boldsymbol{s}_1(5;2;-8)$. Напишем в каноническом виде и уравнения второй прямой. Положив, например, $y_1=0$, получим $\begin{cases} x+z=11 \\ x-z=-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ z_1=13 \end{cases}$,

т.е. первая прямая проходит через точку $A_2(-2;0;13)$, её направляющий вектор

$$\boldsymbol{s}_2=[\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & -13 & -2 \end{vmatrix}=20\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-32\boldsymbol{k}.$$

Поскольку, $\boldsymbol{s}_2=4\boldsymbol{s}_1$, то прямые ℓ_1 и ℓ_2 либо совпадают, либо параллельны. Но точка $A_2(-2;0;13)$, лежащая на второй прямой, не принадлежит на первой прямой $\left(\frac{-2}{5}\neq\frac{0+1}{2}\neq\frac{13-14}{-8}\right)$, или, иначе, векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\boldsymbol{s}_1$ не коллинеарны, поэтому данные прямые **параллельны**. Расстояние между ними найдем по формуле (4.5):

Вычисляем**:** $\overline{A_1A_2}\{-2;1;-1\}$,

$$[\boldsymbol{s}_1\times\overline{A_1A_2}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 2 & -8 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}+21\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}=3(2\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}),$$

$$\rho(\ell_1;\ell_2)=\frac{\left|[\boldsymbol{s}_1\times\overline{A_1A_2}]\right|}{|\boldsymbol{s}_1|}=\frac{3\sqrt{4+49+9}}{\sqrt{25+4+64}}=\frac{3\sqrt{62}}{\sqrt{93}}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{31}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{31}}=\sqrt{6}.$$

Нормальным вектором к плоскости π, проходящей через эти прямые, будет любой вектор, коллинеарный их векторному произведению, например, $\boldsymbol{n}=\frac{1}{3}[\boldsymbol{s}_1\times\overline{A_1A_2}]=2\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, эта плоскость проходит через точку $A_1(0;-1;14)$ поэтому её уравнение :

$2x+7(y+1)+3(z-14)=0 \Leftrightarrow 2x+7y+3z-35=0.$

Ответ: $\sqrt{6},\ 2x+7y+3z-35=0.$ ■

Пример 4.3. Проверить, что прямые $\ell_1:\frac{x-4}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$ и $\ell_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-10}{4}$ пересекаются, найти координаты точки пересечения и составить уравнение плоскости, содержащей эти прямые.

Решение. Данные прямые проходят через точки $A_1(4;2;-1)$ и $A_2(-1;5;10)$ соответственно. Направляющие векторы этих прямых $\boldsymbol{s}_1\{-3;-1;1\}$ и $\boldsymbol{s}_2\{2;3;4\}$ не коллинеарны, поэтому прямые либо пересекаются, либо скрещиваются. Проверим компланарность трех векторов: $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$ и $\overline{A_1A_2}\{-5;3;11\}$:

$$\left(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\overline{A_1A_2}\right)=\begin{vmatrix}-3 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ -5 & 3 & 11\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются. Плоскость, содержащая эти прямые, проходит через точку $M(-5;-1;2)$, а её нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ пропорционален векторному произведению векторов $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$:

$$\boldsymbol{n}=\lambda[\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2]=\lambda\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=\lambda\left(-7\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}\right)\Rightarrow\boldsymbol{n}\{1;-2;1\}\quad(\lambda=-\tfrac{1}{7}).$$

Поэтому уравнение этой плоскости:

$$1\cdot(x+5)-2\cdot(y+1)+1\cdot(z-2)=0\Leftrightarrow x-2y+z+1=0.$$

Найдем координаты точки пересечения этих прямых.

Первый способ. Запишем параметрические уравнения этих прямых и приравняем соответствующие координаты:

$$\ell_1:\begin{cases}x=4-3t_1\\ y=2-t_1\\ z=-1+t_1\end{cases},\quad \ell_2:\begin{cases}x=-1+2t_2\\ y=5+3t_2\\ z=10+4t_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4-3t_1=-1+2t_2\\ 2-t_1=5+3t_2\\ -1+t_1=10+4t_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=3,\\ t_2=-2\end{cases}$$

Подставляя найденное значение $t_1=3$ в параметрические уравнения прямой ℓ_1 (или значение $t_2=-2$ в уравнении прямой ℓ_2), получим координаты точки пересечения M: $x_M=4-3\cdot3=-5$, $y_M=2-3=-1$, $z_M=-1+3=2$.

Второй способ (оптимальный)**.** Параметрические уравнения первой прямой

$$x=4-3t,\ y=2-t,\ z=-1+t$$

подставим в канонические уравнения второй прямой, получим:

$$\frac{(4-3t)+1}{2}=\frac{(2-t)-5}{3}=\frac{(-1+t)-10}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}15-9t=-2t-6\\ -4t-12=3t-33\end{cases}\Rightarrow t=3.$$

Подставляя это значение t в параметрические уравнения первой прямой, находим координаты точки пересечения.

Третий способ. Решим систему из всех канонических уравнений обеих прямых::

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}\\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-10}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y-2}{-1}\\ \dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1}\\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{3}\\ \dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-10}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3y+2=0\\ y+z-1=0\\ 3x-2y+13=0\\ 4y-3z+10=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5\\ y=-1.\\ z=2\end{cases}$$

Замечание. При решении системы с n неизвестными, содержащей m уравнений ($m>n$), рекомендуется решить систему из каких-то n уравнений, и найденные значения неизвестных подставить для контроля в остальные уравнения системы.

Ответ: $M(-5;-1;2)$, $x-2y+z+1=0$.■

Пример 4. 4. Две прямые заданы своими каноническими уравнениями:

$$\ell_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-8}{1} \text{ и } \ell_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+5}{3}.$$

Требуется:

(а) проверить, что эти прямые скрещиваются и найти расстояние между ними;

(б) составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(4;1;-5)$ и параллельной обеим прямым ℓ_1 и ℓ_2;

(в) составить уравнение прямой, пересекающей обе эти прямые и проходящей через заданную точку $C(-2;-2;10)$;

(г) составить уравнение прямой, пересекающей обе эти прямые и параллельной данной прямой

$$\ell_3 : \frac{x+3}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{6};$$

(д) составить уравнение прямой, пересекающей обе прямые ℓ_1 и ℓ_2 под прямым углом.

Решение. **(а)** Прежде всего, отметим, что первая прямая проходит через точку $A_1(3;1;8)$ и параллельна вектору $\boldsymbol{s}_1\{2;-1;1\}$, а вторая прямая проходит через точку $A_2(3;4;-5)$ и имеет направляющий вектор $\boldsymbol{s}_2\{2;3;3\}$. Векторы $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$, очевидно, не коллинеарны, поэтому эти прямые не параллельны и, тем более, не совпадают. Составим смешанное произведение $\left(\overline{A_1A_2}\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\right)$, где $\overline{A_1A_2} = \{0;3;-13\}$:

$$\left(\overline{A_1A_2}\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\right) = \left(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\overline{A_1A_2}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -13 \end{vmatrix} = -116 \neq 0.$$

Следовательно, данные прямые не лежат в одной плоскости, т.е. **скрещиваются**.

Для определения расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 надо найти векторное произведение

$$\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k},$$

и вычислить это расстояние его по формуле (4.7):

$$\rho(\ell_1;\ell_2) = \frac{\left|(\overline{A_1A_2}\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2)\right|}{\left|[\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2]\right|} = \frac{116}{\sqrt{36+16+64}} = \frac{58}{\sqrt{29}} = 2\sqrt{29}.$$

(б) Нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ искомой плоскости π ортогонален векторам $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ и поэтому коллинеарен (пропорционален) их векторному произведению, найденному в (а):

$$\boldsymbol{n} = \lambda[\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2] = \lambda(-6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}) = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{k}, \text{ если взять } \lambda = -\tfrac{1}{2}.$$

Поэтому плоскость π задается уравнением

$$3(x-4) + 2(y-1) - 4(z+5) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 4z - 34 = 0.$$

(в) Напишем уравнение плоскости π_1, проходящей через прямую ℓ_1 и точку $C(-2;-2;10)$. Её нормальный вектор $\boldsymbol{n}_1$ ортогонален векторам $\boldsymbol{s}_1$ и $\overline{CA_1}\{5;3;-2\}$, поэтому

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{s}_1 \times \overline{CA_1} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}$$, и плоскость π_1 задается уравнением

$$-(x+2)+9(y+2)+11(z-10)=0 \Leftrightarrow x-9y-11z+94=0.$$

Эта плоскость пересекает прямую ℓ_2 в некоторой точке B, и прямая BC – искомая. Для нахождения точки пересечения напишем параметрические равнения прямой ℓ_2, подставим их в уравнение плоскости π_1 и найдем значение t:

$$\ell_2:\ \left.\begin{array}{l} x = 3+2t \\ y = 4+3t \\ z = -5+3t \end{array}\right\} t \in \mathbf{R} \qquad (4.9)$$

$$(3+2t)-9(4+3t)-11(-5+3t)+94=0 \Leftrightarrow -58t+116=0 \Rightarrow t=2.$$

Подставив это значения параметра (т.е. внутренней координаты) в параметрические уравнения (4.9), получим координаты точки B:

$$x_B = 3+2\cdot 2 = 7,\ y_B = 4+3\cdot 2 = 10,\ z_B = -5+3\cdot 2 = 1\text{, т.е. } B(7;10;1).$$

Осталось написать уравнение искомой прямой BC с направляющим вектором, коллинеарным вектору $\overline{BC}$: $\boldsymbol{s} = \lambda\overline{BC} = \lambda\{-9;-12;9\} = \{3;4;-3\}$ $(\lambda = -\frac{1}{3})$:

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-10}{4} = \frac{z-1}{-3}.$$

(г) Напишем параметрические уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2, и пусть искомая прямая пересекает эти прямые в точках M_1 и M_2, отвечающих значениям параметров t_1 и t_2 соответственно:

$$\ell_1:\ \left.\begin{array}{l} x = 3+2t \\ y = 1-t \\ z = 8+t \end{array}\right\} t \in \mathbf{R}\text{, поэтому } M_1(3+2t_1;1-t_1;8+t_1),$$

аналогично, $M_2\left(3+2t_2;4+3t_2;-5+3t_2\right)$. По условию, вектор $\overline{M_1M_2}\{-2t_1+2t_2;3+t_1+3t_2;-13-t_1+3t_2\}$ коллинеарен направляющему вектору $\mathbf{s}_3\{-3;2;6\}$ прямой ℓ_3, поэтому координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{-2t_1+2t_2}{-3} = \frac{3+t_1+3t_2}{2} = \frac{-13-t_1+3t_2}{6},$$

что приводит к системе двух уравнений с двумя неизвестными t_1 и t_2:

$$\begin{cases} 4t_1-4t_2 = 9+3t_1+9t_2, \\ 9+3t_1+9t_2 = -13-t_1+3t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1-13t_2 = 9, \\ 4t_1+6t_2 = -22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -4, \\ t_2 = -1. \end{cases}$$ Подставив найденные значения параметров t_1 и t_2 в параметрические уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2, получим координаты точек M_1 и M_2: $M_1(-5;5;4)$, $M_2\left(1;1;-8\right)$ искомая

прямая проходит через эти точки, вот её канонические уравнения:

$$\frac{x+5}{-3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-4}{6}.$$

(д) Эту задачу можно решить четырьмя способами.

1-й способ. Пусть M_1M_2 **–** общий перпендикуляр этих прямых, причем, $M_1\in\ell_1$, $M_2\in\ell_2$. Тогда направляющий вектор этой прямой коллинеарен, с одной стороны вектору $\overline{M_1M_2}$, а с другой стороны векторному произведению направляющих векторов этих прямых, т.е. вектору

$\boldsymbol{n}=-\frac{1}{2}[\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2]=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$. Проведем через точки M_1, M_2 и прямую ℓ_1 плоскость σ_1, её нормальным вектором является вектор $\boldsymbol{m}_1=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{n}$, и она проходит через точку $A_1(3;1;8)$. Аналогично, проведем через точки M_1, M_2 и прямую ℓ_2 плоскость σ_2, её нормальным вектором является вектор $\boldsymbol{m}_2=\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{n}$, она проходит через точку $A_2(3;4;-5)$. Искомая прямая есть пересечение плоскостей σ_1 и σ_2 (см. Рис. 30). Находим:

$$\boldsymbol{m}_1=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&1\\3&2&-4\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{m}_2=\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&3&3\\3&2&-4\end{vmatrix}=-18\boldsymbol{i}+17\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k},$$

и записываем уравнения плоскостей:

$$\sigma_1:\ 2(x-3)+11(y-1)+7(z-8)=0\Leftrightarrow 2x+11y+7z-73=0;$$

$$\sigma_2:-18(x-3)+17(y-4)-5(z+5)=0\Leftrightarrow 18x-17y+5z+39=0.$$

Искомая прямая – общий перпендикуляр данных прямых – задается системой этих уравнений:

$$M_1M_2:\begin{cases}2x+11y+7z-73=0,\\18x-17y+5z+39=0.\end{cases}$$

Далее желательно найти канонические или параметрические уравнения этой прямой. Для этого не хватает координат хотя бы одной точки этой прямой. Положим, например, $y=1$, получим систему

$$\begin{cases}2x+7z=62,\\18x+5z=-22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\z=10\end{cases},$$

итак получим точку $M_0(-4;1;10)$.

Направляющим вектором искомой прямой является уже известный вектор $\boldsymbol{n}\{2;3;-4\}$, вот её канонические уравнения:

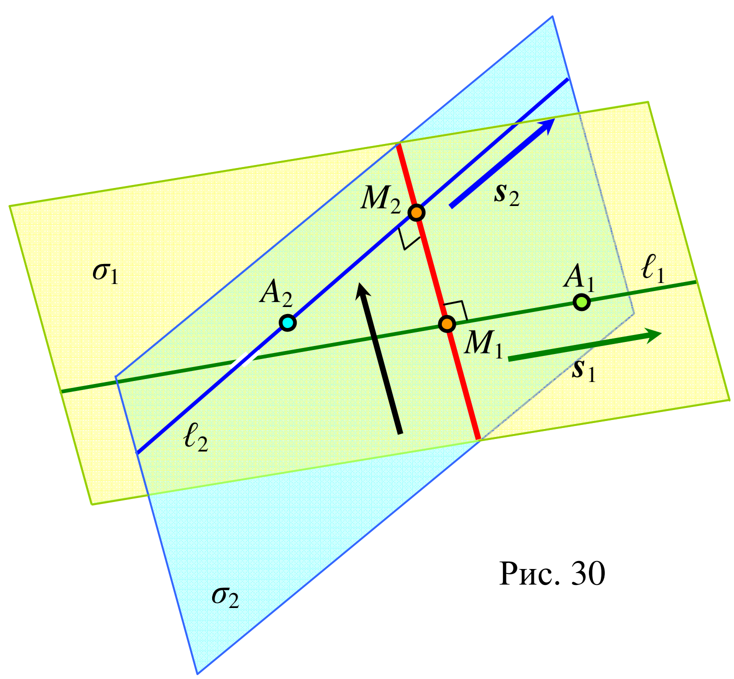

Рис. 30

$$\frac{x+4}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-10}{-4}.$$

2-й способ. Напишем параметрические уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2, и пусть M_1M_2 **–** общий перпендикуляр этих прямых, причем, $M_1\in\ell_1$, $M_2\in\ell_2$, и точкам M_1 и M_2, отвечают значения параметров t_1 и t_2 соответственно, т.е. $M_1(3+2t_1;1-t_1;8+t_1)$, $M_2\left(3+2t_2;4+3t_2;-5+3t_2\right)$. Тогда вектор $\overline{M_1M_2}\left\{-2t_1+2t_2;3+t_1+3t_2;-13-t_1+3t_2\right\}$ ортогонален обоим векторам $s_1\{2;-1;1\}$ и $\boldsymbol{s}_2\{2;3;3\}$, т.е. $(\boldsymbol{s}_1\cdot\overline{M_1M_2})=0,(\boldsymbol{s}_2\cdot\overline{M_1M_2})=0$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases}2(-2t_1+2t_2)-(3+t_1+3t_2)+(-13-t_1+3t_2)=0,\\ 2(-2t_1+2t_2)+3(3+t_1+3t_2)+3(-13-t_1+3t_2)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-6t_1+4t_2=16\\ -4t_1+22t_2=30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=-2\\ t_2=1\end{cases}$$

Подставив найденные значения параметров t_1 и t_2 в параметрические уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2, получим координаты точек M_1 и M_2: $M_1(-1;3;6)$, $M_2\left(5;7;-2\right)$ искомая прямая проходит через эти точки, вот её канонические уравнения:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-6}{-4}$$

Для проверки правильности координат точек M_1 и M_2 убедимся, что расстояние между ними равно уже найденному расстоянию между прямыми ℓ_1 и ℓ_2:

$$\left|M_1M_2\right|=\sqrt{(5+1)^2+(7-3)^2+(-2-6)^2}=\sqrt{36+16+64}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}.$$

Замечание. Полученные уравнения общего перпендикуляра несколько отличаются от канонических уравнений, полученных первым способом. Самостоятельно убедитесь, что эти и те уравнения задают одну и ту же прямую.

3-й способ. Заметим, что направляющим вектором прямой M_1M_2, перпендикулярной прямым ℓ_1 и ℓ_2 и пересекающей их в точках M_1 и M_2 соответственно является вектор $\boldsymbol{n}$, коллинеарный векторному произведению векторов $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$, т.е. $\boldsymbol{n}=-\frac{1}{2}[\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2]=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$. Осталось найти координаты какой-либо точки этой прямой, например. M_2. Эта точка является точкой пересечения прямой ℓ_2 с плоскостью σ_1 проходящей через точки M_1, M_2 и прямую ℓ_1, нормальным вектором плоскости σ_1 является вектор $\boldsymbol{m}_1=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{n}=\{2;11;7\}$, её уравнение (см. 1-й способ):

$$2x+11y+7z-73=0.$$

Для нахождения координат точки M_2 надо подставить в уравнение плоскости σ_1 параметрических уравнений прямой ℓ_2. Доведите до конца это решение самостоятельно.

4-й способ. Поскольку для искомой прямой M_1M_2, перпендикулярной прямым ℓ_1 и ℓ_2 и пересекающей их в точках M_1 и M_2 соответственно, направляющий вектор $\boldsymbol{n}$ известен, $\boldsymbol{n}\{3; 2; -4\}$, то достаточно найти координаты, например, точки M_1. Именно в этой точке расстояние от произвольной точки прямой ℓ_1 до прямой ℓ_2 будет наименьшим. Напишем параметрические уравнения прямой ℓ_1, и пусть точке M_1 отвечает значение параметра *t*, тогда: $M_1(3+2t; 1-t; 8+t)$. Расстояние от этой точки до прямой ℓ_2 (проходящей через точку $A_2(3; 4; -5)$ с направляющим вектором $\mathbf{s}_2\{2; 3; 3\}$) выражается формулой

$$\rho(M_1, \ell_2) = \frac{\left|\boldsymbol{s}_2 \times \overline{A_2M_1}\right|}{\left|\boldsymbol{s}_2\right|}.$$

Находим: $\left|\boldsymbol{s}_2\right| = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$, $\overline{A_2M_1} = \{2t; -3-t; 13+t\}$,

$$\boldsymbol{s}_2 \times \overline{A_2M_1} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 3 \\ 2t & (-t-3) & (t+13) \end{vmatrix} = (6t+48)\boldsymbol{i} + (4t-26)\boldsymbol{j} + (-8t-6)\boldsymbol{k} =$$
$$= 2\cdot\{3t+24; 2t-13; -4t-3\}.$$

Поэтому

$$\rho(M_1, \ell_2) = \frac{2\sqrt{(3t+24)^2 + (2t-13)^2 + (-4t-3)^2}}{\sqrt{22}} = \sqrt{\frac{2}{11}}\sqrt{29t^2 + 116t + 754} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{11}} \cdot \sqrt{29(t+2)^2 + 638}.$$

Наименьшее расстояние равно $\rho(\ell_1, \ell_2) = \min \rho(M_1, \ell_2) = \sqrt{\frac{2}{11}} \cdot \sqrt{638} = 2\sqrt{29}$ и достигается при $t = -2$ т.е. в точке $M_1(-1; 3; 6)$.

Ответ. (а) $\rho(\ell_1, \ell_2) = 2\sqrt{29}$; (б) $3x + 2y - 4z - 34 = 0$; (в) $\frac{x-7}{3} = \frac{y-10}{4} = \frac{z-1}{-3}$; (г) $\frac{x+5}{-3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{6}$; (д) $\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-4}$. ■

Пример 4. 5. В трапеции *ABCD* основание *AD* втрое больше основания *BC*. Известны координат вершин *B*(4; 3; 1) и *C*(2; 6; 2), вершина *A* принадлежит прямой ℓ: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+4}{3}$, вершина *D* принадлежит плоскости π: $3x + 2y - z - 2 = 0$. Найти координаты вершин *A*, *D* и площадь трапеции.

Решение. По условию, $\overline{AD} = 3\cdot\overline{BC} = 3\cdot\{-2; 3; 1\} = \{-6; 9; 3\} = \{x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A\}$.

Запишем параметрические уравнения прямой ℓ, и пусть точке *A* этой прямой соответствует значение параметра *t*; тогда $x_A = 1 + 2t,\ y_A = -2 - t,\ z_A = -4 + 3t$, следовательно, $x_D = x_A - 6 = -5 + 2t$, $y_D = y_A + 9 = 7 - t,\ z_D = z_A + 3 = -1 + 3t$.

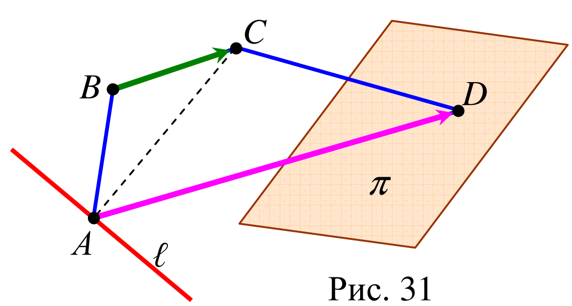

Рис. 31

Подставим эти координаты в уравнение плоскости π и найдем *t*: π: $3(-5+2t) + 2(7-t) - (-1+3t) - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$.

Отсюда находим координаты точек A и D: $A(5;-4;2), D(-1;5;5)$. Площадь трапеции $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABC и ACD, причем, вторая площадь втрое больше первой. Находим: $\overline{BA}\{1;-7;1\}, \overline{BC}\{-2;3;1\}$,

$$\overline{BA}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -7 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-10\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k},\ S_{\Delta ABC}=\tfrac{1}{2}\sqrt{100+9+121}=\tfrac{1}{2}\sqrt{230},$$

$$S_{ABCD}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ABC}+3\cdot S_{\Delta ABC}=4\cdot S_{\Delta ABC}=2\sqrt{230}.$$

Ответ. $D(-1;5;5)$, $S_{ABCD}=2\sqrt{230}$. ■

Пример 4. 6. В треугольной пирамиде $ABCD$, основание которой – прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC, боковые ребра AD, BD и CD наклонены к плоскости основания под одинаковым углом. Известны координаты вершин $A(3;4;2)$ и $C(-1;6;8)$, вершина B лежит на прямой $\ell: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-10}{-2}$, а вершина D лежит в плоскости $\boldsymbol{\sigma}: x-2y-z+22=0$. Найти координаты вершин B, D, и объем пирамиды.

Решение. Запишем параметрические уравнения прямой ℓ, и пусть точке B этой прямой соответствует значение параметра t; тогда $x_B=1+t$, $y_B=1+2t$, $z_B=10-2t$. Векторы $\overline{AB}\{t-2;2t-3;8-2t\}$ и $\overline{CB}\{t+2;2t-5;2-2t\}$ ортогональны, поэтому их скалярное произведение равно нулю:

$$\left(\overline{AB}\bullet\overline{CB}\right)=(t-2)(t+2)+(2t-3)(2t-5)+(8-2t)(2-2t)=0\Rightarrow t^2-4t+3=0,$$

откуда $t_1=1, t_2=3$. **П**олучим два варианта координат точки B: $B_1(2;3;8)$ и $B_2(4;7;4)$. Чтобы найти в каждом случае координаты точки D, вспомним из стереометрии, что

если все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом, то все её боковые рёбра равны. (4.10)

Случай 1: $B_1(2;3;8)$. Из (4.10) следует, что $|DA|=|DB_1|=|DC|$, т.е. D равноудалена от вершин A, B_1 и C. Напишем уравнения прямой m, состоящей из всех точек, равноудаленных от вершин A, B_1 и C (см. пример 3. 8), она представляет собой пересечение двух плоскостей, первая из которых является геометрическим местом (ГМ) точек, равноудаленных от вершин A и B_1, а вторая – ГМ точек, равноудаленных от вершин A и C.

$$m:\begin{cases} x+y-6z+24=0, \\ -2x+y+3z-18=0. \end{cases}$$

Найдем параметрические уравнения этой прямой, для чего вычтем из первого уравнения второе и выразим через z сначала x, а потом y:

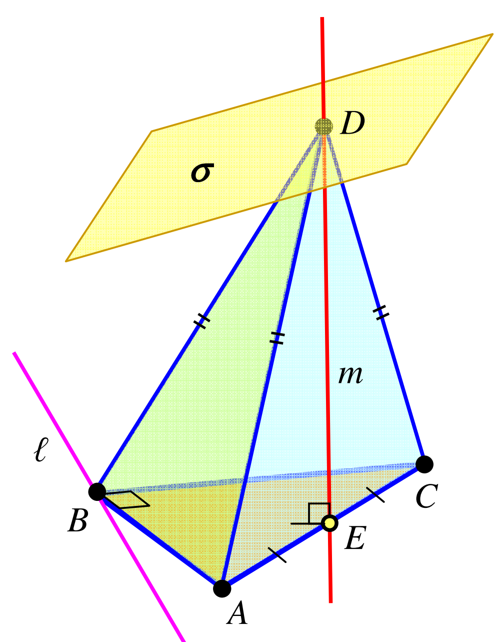

Рис. 32

$$3x-9z+42=0 \Rightarrow x=3z-14,$$
$$y=18+2x-3z=-10+3z.$$

Положив $z=t$, получим параметрические уравнения прямой m:

$$\left.\begin{aligned} x&=-14+3t \\ y&=-10+3t \\ z&=0+t \end{aligned}\right\} t\in \mathrm{R}.$$

Вершина D есть точка пересечения этой прямой с плоскостью $\sigma: x-2y-z+22=0$, найдем её координаты:

$$-14+3t-2(-10+3t)-t+22=0 \Rightarrow t=7,$$

поэтому получаем первый вариант координат точки D: $D_1(7;11;7)$. Объем пирамиды AB_1CD_1 в этом случае равен $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB_1}\,\overline{AC}\,\overline{AD_1}\right)\right|$. Находим:

$$\left(\overline{AB_1}\,\overline{AC}\,\overline{AD_1}\right)=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -4 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}=-228 \Rightarrow V=\frac{228}{6}=38.$$

Случай 2: $B_2(4;7;4)$. Точка D здесь также равноудалена от вершин A, B_2 и C. Для нахождения уравнений прямой – ГМ точек, равноудаленных от точек A, B_2 и C, вспомним, что эта прямая – высота пирамиды $ABCD$, опущенная из вершины D, пересекающая плоскость основания AB_2C в центре его описанной окружности. Метод нахождения центра описанной окружности произвольного треугольника описан в примере 2. 10, но у прямоугольного треугольника этот центр лежит на середине гипотенузы AC, т. в точке $E(1;5;5)$, (см. Рис. 32). Направляющий вектор $\boldsymbol{s}$ этой прямой перпендикулярен плоскости AB_2C, и поэтому

$$\boldsymbol{s}=\lambda\left[\overline{AB_2}\times\overline{AC}\right]=\lambda\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix}=\lambda\left(14\boldsymbol{i}-14\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}\right)=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$ (если взять $\lambda=\frac{1}{14}$).

Напишем параметрические уравнения этого ГМТ и найдем точку его пересечения с плоскостью $\sigma: x-2y-z+22=0$.

$x=1+t,\ y=5-t,\ z=5+t;\ (1+t)-2(5-t)-(5+t)+22=0 \Rightarrow t=-4$.

Получим второй вариант координат точки D: $D_2(-3;9;1)$. Проверьте самостоятельно, что в этом случае объем пирамиды AB_2CD_2 равен 28.

Ответ. (1) $B_1(2;3;8),\ D_1(7;11;7),\ V_1=38$; (2) $B_2(4;7;4);\ D_2(-3;9;1)$, $V_2=28$. ■

Пример 4. 7. Найти координаты точки пересечения высот треугольника ABC с вершинами $A(1;3;2)$, $B(-1;4;1)$ и $C(7;-1;0)$, и длину его высоты, опущенной из вершины B.

Решение. Искомая точка пересечения высот H лежит в плоскости треугольника, и поэтому может быть найдена как пересечение трех плоскостей: плоскости ABC, плоскости π, проходящей через вершину A перпендикулярно стороне BC, и плоскости σ, проходящей через вершину B перпендикулярно

стороне AC. В самом деле, пусть плоскость ABC пересекает плоскость π по прямой AA_1, а плоскость σ – по прямой BB_1. Тогда любая прямая плоскости π, в том числе и AA_1, перпендикулярна BC, и поэтому AA_1 – высота в треугольнике ABC, опущенная из точки A на сторону BC. Аналогично доказываем, что BB_1 – высота в треугольнике ABC, опущенная из вершины B на сторону AC.
Уравнение плоскости ABC:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6(x-1)-10(y-3)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x+5y-z=16 .$$

Находим координаты векторов: $\overline{BC}\{8;-5;-1\}$, $\overline{AC}\{6;-4;-2\}$,

Уравнение плоскости π: $8(x-1)-5(y-3)-(z-2)=0 \Leftrightarrow 8x-5y-z+9=0$.

Уравнение плоскости σ: $6(x+1)-4(y-4)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-2y-z+12=0$

Теперь найдем точку пересечения этих трех плоскостей:

$$\begin{cases} 3x+5y-z=16 \\ 8x-5y-z=-9 \\ 3x-2y-z=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=13 \end{cases} \Rightarrow H(3;4;13).$$

Длина высоты, опущенной из точки B на сторону AC, равна расстоянию от точки B до прямой AC: и находится по формуле $\rho(B, AC) = \dfrac{\left|[\overline{BC}\times\overline{AC}]\right|}{\left|\overline{AC}\right|}$.

Вычисляем:

$$\overline{BC}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8 & -5 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 6\boldsymbol{i} + +10\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} ,$$

$$h_B = \rho(B, AC) = \frac{\left|[\overline{BC}\times\overline{AC}]\right|}{\left|\overline{AC}\right|} = \frac{\sqrt{136+100+4}}{\sqrt{36+16+4}} = \sqrt{\frac{5}{2}} .$$

Ответ: $H(3;4;13)$, $h_B = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Пример 4. 8. Проверить что все четыре высоты тетраэдра $ABCD$ с вершинами $A(2;3;5)$, $B(3;11;2)$, $C(3;5;8)$ и $D(5;4;6)$ пересекаются в одной точке, и найти её координаты.

Решение. Из стереометрии известно, что **не в любом** тетраэдре все четыре высоты (опущенные из каждой вершины на плоскость противоположной грани) пересекаются в одной точке. Для того чтобы в тетраэдре $ABCD$ все четыре высоты пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы:

его противоположные рёбра были попарно перпендикулярны (4.11)

(достаточно перпендикулярности любых двух пар противоположных рёбер).

Если обозначить $\boldsymbol{a} = \overline{DA}$, $\boldsymbol{b} = \overline{DB}$, $\boldsymbol{c} = \overline{DC}$, то $\overline{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $\overline{AC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$, $\overline{BC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$, и тогда условие (4.11) означает, что

$$0=\left(\overline{DA}\cdot\overline{BC}\right)=\left(\boldsymbol{a}\bullet(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\right)=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}),$$

$$0=\left(\overline{DB}\cdot\overline{AC}\right)=\left(\boldsymbol{b}\bullet(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\right)=(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\Leftrightarrow(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}).$$

Таким образом, в тетраэдре $ABCD$ все четыре высоты пересекаются в одной точке $\Leftrightarrow$ $(\overline{DA}\bullet\overline{DB})=(\overline{DA}\bullet\overline{DC})=(\overline{DB}\bullet\overline{DC})$.

Проверим это в нашем случае: $\overline{DA}\{-3;-1;-1\}$, $\overline{DB}\{-2;7;-4\}$, $\overline{DC}\{-2;1;2\}$, $\left(\overline{DA}\bullet\overline{DB}\right)=6-7+4=3$, $\left(\overline{DA}\bullet\overline{DC}\right)=6-1-2=3$, $\left(\overline{DB}\bullet\overline{DC}\right)=4+7-8=3$.

Сначала напишем уравнение высоты, опущенной, из вершины A на плоскость грани BCD, её направляющий вектор:

$$\boldsymbol{s}_A=\lambda\cdot[\overline{DB}\times\overline{DC}]=\lambda\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-2&7&-4\\-2&1&2\end{vmatrix}=\lambda(18\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k})\Rightarrow\boldsymbol{s}_A\{3;2;2\}\ \ (\lambda=\tfrac{1}{6}).$$

Параметрические уравнения этой прямой :

$$x=2+3t_1,\ y=3+2t_1,\quad z=5+2t_1\ \ t_1\in\mathbf{R}. \qquad (4.12)$$

Теперь напишем уравнение какой-нибудь другой высоты, например, опущенной из вершины B на плоскость грани ACD, её направляющий вектор:

$$\boldsymbol{s}_B=\lambda\cdot[\overline{DA}\times\overline{DC}]=\lambda\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-3&-1&-1\\-2&1&2\end{vmatrix}=\lambda(-\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})\Rightarrow\boldsymbol{s}_B\{1;-8;5\}\quad(\lambda=-1)$$

Параметрические уравнения этой высоты:

$$x=3+t_2,\ y=11-8t_2,\ z=2+5t_2\quad(t_2\in\mathbf{R}) \qquad (4.13)$$

Чтобы найти точку пересечения, надо приравнять соответствующие координаты, выраженные через параметры (внутренние координаты точек на этих прямых) и решить полученную систему. При этом обратим внимание на то, что точка пересечения H этих двух прямых (4.12) и (4.13) имеет на них, вообще говоря, **разные** внутренние координаты t_1 и t_2:

$$\begin{cases}2+3t_1=3+t_2,\\ 3+2t_1=11-8t_2,\\ 5+2t_1=2+5t_2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3t_1-t_2=1\\ t_1+4t_2=4\\ 2t_1-5t_2=-3\end{cases}\quad\begin{cases}t_1=\frac{8}{13},\\ t_2=\frac{11}{13}.\end{cases}$$

Подставляя значение $t_1=\frac{8}{13}$ в уравнения высоты (4.12), или значение $t_2=\frac{11}{13}$ в уравнения высоты (4.13), получим координаты искомой точки пересечения высот H:

$$x=2+3\cdot\tfrac{8}{13}=\tfrac{50}{13}=3\tfrac{11}{13},\ y=3+2\cdot\tfrac{8}{13}=\tfrac{55}{13}=4\tfrac{3}{13},\ z=5+2\cdot\tfrac{8}{13}=\tfrac{81}{13}=6\tfrac{3}{13}.$$

Ответ: $H\left(3\tfrac{11}{13};4\tfrac{3}{13};6\tfrac{3}{13}\right)=H\left(\tfrac{50}{13};\tfrac{55}{13};\tfrac{81}{13}\right)$.■

4.9. Задачи для самостоятельного решения к главе 4.

4. 1. Доказать, что прямая $\ell: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-9}{-3} = \dfrac{z-7}{5}$ параллельна плоскости $\pi: 6x - y - 3z - 4 = 0$, и найти расстояние между ними.

4. 2. Доказать, что прямая $\ell: \dfrac{x+5}{8} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{1}$ пересекает плоскость $\pi: 4x - 4y - 3z + 5 = 0$, найти координаты их точки пересечения и угол между ними.

4. 3. Исследовать взаимное расположение прямой ℓ и плоскости π (прямая ℓ целиком лежит в плоскости π, они пересекаются или параллельны). Если они пересекаются, то найти координаты точки их пересечения M, и угол меду ними, а если параллельны, то найти расстояние между ними:

(а) $\ell: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-6}{5} = \dfrac{z}{-1}$, $\pi: 4x - y + 3z - 2 = 0$; (б) $\ell: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-5}{3}$, $\pi: 3x + 2y - z + 7 = 0$; (в) $\ell: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$, $\pi: 2x + 5y - 3z + 4 = 0$.

4. 4. Доказать, что прямые $\ell_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{-1}$ и $\ell_2: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-4}{0}$ скрещиваются, и составить уравнение плоскости, равноудаленной от этих прямых.

4. 5. Доказать, что прямые $\ell_1: \begin{cases} x + 3y - z - 21 = 0 \\ x - 7y + z + 43 = 0 \end{cases}$ и $\ell_2: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z+1}{5}$ параллельны, найти расстояние между ними и составить уравнение плоскости, проходящей через них.

4. 6. Доказать, что прямые $\ell_1: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-7}{3}$ и $\ell_2: \dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z+1}{2}$ пересекаются, найти их точку пересечения, косинус острого угла между ними, а также составить уравнение плоскости, проходящей через них.

4. 7. Доказать, что прямые $\ell_1: \dfrac{x+4}{4} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z+3}{-1}$ и $\ell_2: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-5}{-2}$ скрещиваются, найти расстояние между ними, косинус острого угла между ними, а также составить уравнения общего перпендикуляра к этим прямым.

4. 8. Исследовать взаимное расположение двух прямых ℓ_1 и ℓ_2**.** (совпадают, параллельны, пересекаются или скрещиваются)**.** Если они не имеют общих точек, то найти расстояние между ними; если они лежат в одной плоскости π, то найти уравнение этой плоскости; если они пересекаются, то найти координаты точки пересечения M; если скрещиваются, то написать уравнение их общего перпендикуляра:

(а) $\ell_1: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{-3}$, $\ell_2: \begin{cases} 5x - 2y - 17 - 0 \\ 3y + 5z - 7 = 0 \end{cases}$; (б) $\ell: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{z-5}{3} = \dfrac{z-3}{2}$,

$\ell_2: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{z+3}{5}=\dfrac{z}{1}$; (в) π $\ell_1: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-4}$, $\ell_2: \begin{cases} 2x-y+z+3=0, \\ 2x+3y+3z-7=0 \end{cases}$; (г) $\ell_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-9}{2}$, $\ell_2: \begin{cases} 7x-2z=29, \\ x-2y+3=0 \end{cases}$.

4. 9. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и не пересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 1.

4. 10. Найти расстояние между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра с ребром, равным a.

4. 11. Проверить, что прямая $\ell: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ пересекает плоскость $\pi: 2x-y+z=3$, и найти уравнение:

(а) (ортогональной) проекции этой прямой на эту плоскость;

(б) прямой, симметричной прямой ℓ относительно плоскости π.

4. 12. ([5]) Даны три различные плоскости $\pi_k: A_k x+B_k y+C_k z=D_k$, $k=1,2,3$. При каком необходимом и достаточном условии эти три плоскости:

(а) пересекаются в одной точке; (б) пересекаются по одной общей прямой, но никакие две из них не совпадают; (в) попарно пересекаются по трем разным параллельным друг другу прямым; (г) параллельны друг другу, но никакие две из них не совпадают; (д) какие-то две из этих плоскостей параллельны, а третья их пересекает. Ответ дать в терминах определителей и рангов матриц

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \text{ и } \overline{M}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

4. 13. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $\pi_k: A_k x+B_k y+C_k z+D_k=0$, $k=1,2,3,4$, пересекаются в одной точке? (ответ дать в терминах рангов матриц, образованных коэффициентами этих уравнений).

4. 14. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $\pi_k: A_k x+B_k y+C_k z+D_k=0$ ($k=1,2,3,4$) образуют тетраэдр?

4. 15. Даны прямые $\ell_1: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases}$ и $\ell_2: \begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z=D_3 \\ A_4x+B_4y+C_4z=D_4 \end{cases}$.

Найти ранги основной матрицы M и расширенной матрицы $\overline{M}$ системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \\ A_3x+B_3y+C_3z=D_3 \\ A_4x+B_4y+C_4z=D_4 \end{cases}.$$

в случае, когда эти прямые:

(а) скрещиваются; (б) пересекаются; (в) параллельны; (г) совпадают.

[5] Для решения задач 4.12 – 4.16 необходимо знание ранга матрицы и теории систем линейных уравнений

4. 16. Даны прямая $\ell:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=D_1\\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2\end{cases}$ и плоскость π: $A_3x+B_3y+C_3z=D_3$. При каком необходимом и достаточном условии: (а) прямая ℓ лежит в плоскости π; (б) прямая ℓ пересекает плоскость π; (в) прямая ℓ параллельна плоскости π. Ответ дать в терминах рангов матриц $M=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{pmatrix}$ и $\overline{M}=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\end{pmatrix}$.

4. 17. В треугольнике ABC известны координаты его вершин: $A(4;2;3)$, $B(5;0;2)$ и $C(0;8;1)$. Найти координаты точки пересечения высот этого треугольника.

4. 18. В тетраэдре $ABCD$ известны координаты его вершин $A(2;8;7)$, $B(5;5;1)$, $C(5;2;7)$ и $D(3;4;5)$. Доказать, что высоты этого тетраэдра пересекаются в одной точке и найти её координаты.

4. 19. Найти координаты вершины C треугольника ABC, если $A(-5;1;1)$, $B(3;-2;6)$, $AC=BC$, а точка C лежит на прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-7}{-2}$.

4. 20. Найти координаты вершины C треугольника ABC, если $A(1;2;5)$, $B(3;3;1)$, $AB=BC$, а точка C лежит на прямой $\frac{x+2}{-3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

4. 21. Найти координаты вершины C и площадь прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB, если $A(2;2;1)$, $B(-5;-7;-12)$, а точка C лежит на прямой $\frac{x-5}{2}=\frac{y-7}{3}=\frac{z+6}{-4}$.

4. 22. Найти координаты вершины C прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC, если $A(4;2;2)$, $B(2;5;1)$, а точка C лежит на прямой $\frac{x+6}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$.

4. 23. Найти координаты вершин A, D и площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $B(-1;1;5)$, $C(1;4;3)$, точка A лежит на прямой $\frac{x+2}{2}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-10}{3}$, а точка D лежит на прямой $\frac{x-6}{-4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$.

4. 24. . Найти координаты вершин C и D и площадь параллелограмма $ABCD$, если $A(3;-5;6)$, $B(4;-2;2)$, точка C лежит на прямой $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-2}$, а точка D лежит на плоскости $3x-4y-5z-1=0$.

4. 25. Найти координаты вершин B и D параллелограмма $ABCD$, если $A(8;1;4)$, $C(-6;2;10)$, точка B лежит на прямой $\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-7}{-2}$, а точка D лежит на плоскости $4x+7y-z-7=0$.

4. 26. Найти координаты вершин A, D и площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $B(-1;1;5)$, $C(2;2;3)$, точка A лежит на прямой $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-2}$, точка D лежит на плоскости $x+6y+5z-6=0$, а основание AD в 3 раза больше основания BC.

4. 27. Найти координаты вершин B, D и площадь ромба $ABCD$, если $A(-4;4;1)$, $C(1;4;6)$, а точка B лежит на прямой $\frac{x+4}{-3}=\frac{y-9}{2}=\frac{z-8}{4}$.

4. 28. Найти координаты вершин C и D квадрата $ABCD$, если $A(2;-3;4)$, $B(2;0;1)$, а точка C лежит на плоскости $3x+y-z-17=0$.

4. 29. Найти координаты вершины D и объем тетраэдра $ABCD$, если $A(4;2;-4)$, $B(2;7;-1)$, $C(-1;11;-6)$, $AD=BD=CD$, а точка D лежит на плоскости.

4. 30. Найти координаты вершины D тетраэдра $ABCD$, если $A(-6;7;-2)$, $B(2;1;6)$, $C(3;6;8)$, ребра AD и BC перпендикулярны, а точка D лежит на прямой $\frac{x-7}{-5}=\frac{y-10}{-3}=\frac{z-2}{1}$.

Ответы и указания к задачам для самостоятельного решения

Сокращения: символ ♣ означает «указания», символ ◈ – «ответ не однозначен, приводится один из возможных», символ ⊐ – «применить»

Глава 1.

1. 1. $y = 4x + 13$.

1. 2. (а) $4x + 3y = 23$; (б) $3x - 4y = 11$.

1. 3. $x + 7y - 45 = 0$.

1. 4. $4x - 5y + 23 = 0$.

1. 5. ◈ $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2}$; $x = -1 + 3t,\ y = 1 + 2t,\ t \in \mathbf{R}$.

1. 6. $5x + y + 17 = 0,\ x - 5y - 7 = 0$.

1. 7. $B(5;1)$.

1. 8. (а) $M_1(2;5)$; (б) $M_2(-3;8)$.

1. 9. (а) $C_1(3;2)$; (б) $C_2(1;-2)$.

1. 10. $x + 3y - 7 = 0,\ 6x - 2y + 3 = 0$.

1. 11. (а) пересекаются, $M(-7;2)$, $\arccos\dfrac{11}{\sqrt{1537}}$.(б) параллельны, $d = \dfrac{9}{\sqrt{65}}$; (в) совпадают.

1. 12. (а) $4x + 11y - 6 = 0$; (б) $8x - y + 14 = 0$; (в) $3x + 4y + 12 = 0$; (г) $10x - 24y - 15 = 0$.

1. 13. (а) $Q(2;2), R = 5$; (б) $h_A = 6\sqrt{2}$, (в) $2x + y = 11$, $H(4;3)$.

1. 14. $Q(3;0), r = \sqrt{10}$.

1. 15. $B(-2;-4), C(1;7)$.

1. 16. $A(-7;-1),\ B(-1;3),\ D(-2;-2)$.

1. 17. $x - y - 10 = 0$; $4x - 9y - 60 = 0$; $4x + y = 20$; $x + 9y + 30 = 0$.

1. 18. $B(6;3)$ или $B(-2;-1)$, $C(0;5)$.

1. 19. $C(6;5)$, $S = 26$.

1. 20. $B_1(6;3)$, $C_1(1;-2)$, $D_1(-6;-1)$; $B_2(3;0)$, $C_2(7;4)$, $D_2(3;8)$.

1. 21. $C(-4;-1)$ или $C\left(-\frac{4}{5};-\frac{13}{5}\right)$.

1. 22. $C(5;-3)$.

1. 23. $C(5;3)$ или $C\left(\frac{27}{5};\frac{19}{5}\right)$.

1. 24. $C(4;7)$.

Глава 2.

2. 1. (а) $2x + 7y - z - 31 = 0$; (б) $3x - 2y + 5z - 4 = 0$; (в) $4x + y + 5z - 17 = 0$.

2. 2. $x - 4y + 14z - 51 = 0$.

2. 3. $7x + 10y - 9z + 70 = 0$.

2. 4. $\dfrac{11}{\sqrt{21}}$.

2. 5. (а) $3x-5y+2z+8=0$; (б) $5x-3y-z+11=0$; (в) $x-y+2z+1=0$, $7x-y-4z+13=0$.

2. 6. $\dfrac{11}{2\sqrt{14}}$.

2. 7. $\dfrac{13}{21}$.

2. 8. (а) пересекаются, $(\pi_1 \wedge \pi_2) = \arccos\sqrt{\dfrac{14}{27}}$; (б) параллельны, $\rho(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{23}{6\sqrt{14}}$.

2. 9. (а) параллельны, $\rho(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{27}{2\sqrt{35}}$; (б) пересекаются, $(\pi_1 \wedge \pi_2) = 90°$; (в) совпадают.

2. 10. $3x+y+z-4=0,\ x+3y-z-4=0$.

2. 11. $\lambda=3,\ \lambda=-8$.

2. 12. $6x-7y-7z+50=0$ и $2x-7y+7z-16=0$.

2. 13. $Ax+By+Cz+D \pm d\sqrt{A^2+B^2+C^2}=0$.

2. 14. $M_1(2;0;0),\ M_2\left(\frac{46}{5};0;0\right)$.

2. 15. $6x+3y+2z+2=0$, $6x+3y+2z-12=0$, $6x+3y-2z+18=0$, $6x+3y-2z+4=0$, $6x-3y+2z-16=0$, $6x-3y+2z-30=0$, $6x-3y-2z-14=0$.

2. 16. 8.

2. 17. $\lambda=-2;\ \lambda=\dfrac{19}{4}$.

2. 18. (а) $\arcsin\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; (б) $\arccos\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

2. 19. $\dfrac{|a|}{\sqrt{1+b^2}}$; $\dfrac{|b|}{\sqrt{1+a^2}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2. 20. $\arcsin\frac{13}{21}$.

2. 21. 8.

2. 22. 56.

2. 23. $x-4y+z+16=0$ и $x-4y+z-20=0$.

2. 24. $P(4;1;3),\ R=3\sqrt{6}$.

2. 25. $Q(3{,}8;\ 4{,}6;-5{,}6)$, $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

2. 26. (а) $2x-12y-8z+11=0$; (б) $4x+2y+10z-17=0$.

2. 27. (а) $Q(3;-2;4)$, $R=3\sqrt{6}$; (б) $H(10;10;5)$.

Глава 3.

3. 1. $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-2}$, $x=2+4t,\ y=-1+3t,\ z=3-2t,\ t\in\mathbf{R}$.

3. 2. $\frac{x-3}{0}=\frac{y}{-2}=\frac{z-5}{3}$.

3. 3. $x=2+3t,\ y=-4,\ z=1-2t,\ t\in\mathbf{R}$

3. 4. $\begin{cases}4y-5z-13=0,\\ 2x+z-5=0.\end{cases}$

3. 5. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

3. 6. ◈ $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$, $x=2-2t,\ y=-2-t,\ z=t,\ t\in\mathbf{R}$.

3. 7. $\sqrt{2}$.

3. 8. (а) $\frac{5\sqrt{13}}{7}$; (б) $\sqrt{\frac{5178}{131}}$.

3. 9. $M_1(2;0;1),\ M_2(3;2;5)$.

3. 10. $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-5}{11}$; $P\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3};\frac{4}{3}\right),\ r=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. 11. (а) $y-z+2=0$; (б) $3x-y+4z-5=0$; (в) $3x+y-2z-1=0$ и $x-2y+3z-5=0$; ♣ использовать уравнение пучка плоскостей.

3. 12. $3x-4y-5=0,\ 2x+2y-z+3=0$.

3. 13. ♣ $\alpha\left(\frac{x-x_0}{a}-\frac{z-z_0}{c}\right)+\beta\left(\frac{y-y_0}{b}-\gamma\frac{z-z_0}{c}\right)=0$.

3. 14. $\frac{x-1}{7}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$.

3. 15. $M_1(3;4;2), M_2(5;2;6)$.

3. 16. $M_1(5;1;1),\ M_2(-7;3;-1)$.

3. 17. (а) $A_1=A_2=0,\ D_1^2+D_2^2>0$; (б) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

3. 18. (а) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{D_1}{D_2}$; (б) $C_1=C_2=D_1=D_2=0$.

3. 19. $x-2y+z-2=0$ и $4x-5y+z-20=0$.

3. 20. $\alpha=9,\ \beta=-14$.

3. 21. $2x+y+3z-14=0,\ 3x+2y-z-14=0$.

3. 22. (а) $B(4;-1;-5)$; (б) $C(6;-9;-11)$.

3. 23. (а) $B(-6;-10;-1)$; (б) $C(-5;-9;2)$.

3. 24. (а) $A_1(-1;1;2)$; (б) $A_2(-1;2;-8)$.

3. 25. $5x-13y+z+1=0$.

3. 26. $13x-9y+7z+7=0$.

3. 27. $x-6y+16z+3=0$.

3. 28. $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{-6}=\dfrac{z+4}{5}$.

3. 29. $x-y-z+2=0$.

3. 30. $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Глава 4.

4. 1. $\dfrac{10}{\sqrt{46}}$.

4. 2. $M(3;5;-1)$, $\arcsin\dfrac{13}{9\sqrt{41}}$.

4. 3. (а) параллельны, $\rho(\ell,\pi)=\sqrt{30}$; (б) пересекаются, $M(1;-4;2)$, $\sin(\ell\wedge\pi)=\dfrac{5}{14}$; (в) прямая ℓ лежит в плоскости π.

4. 4. $6x+4y+4z-5=0$.

4. 5. $\sqrt{86}$, $23x+4y-10z-67=0$.

4. 6. $M(-4;1;1)$, $\dfrac{13}{2\sqrt{165}}$, $11x+9y-17z+52=0$.

4. 7. $\rho(\ell_1,\ell_2)=9$; $\cos(\ell_1\wedge\ell_2)=\dfrac{31}{3\sqrt{130}}$; $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+5}{-8}$.

4. 8. (а) параллельны, $\rho(\ell_1,\ell_2)=\dfrac{6\sqrt{13}}{\sqrt{38}}$, плоскость $\pi: 3x-2z=5$; (б) пересекаются, точка пересечения $M(4;2;1)$, плоскость $\pi: 7x-5y+11z-29=0$; (в) совпадают; (г) скрещиваются, $\rho(\ell_1,\ell_2)=2\sqrt{11}$, общий перпендикуляр $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-5}{-1}$.

4. 9. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ ♣ Ввести декартову систему координат с началом в вершине куба и осями, направленными вдоль рёбер куба, написать уравнения вышеуказанных диагоналей.

4. 10. $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$ или $\dfrac{a}{\sqrt{10}}$. ♣ Правильный тетраэдр образован диагоналями граней куба.

4. 11. (а) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+2}{1}$; (б) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-7}=\dfrac{z+2}{1}$.

4. 12. (а) $\det(M)\neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(M)=3$; (б) $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}\left(\overline{M}\right)=2$ и никакие две строчки матрицы M не пропорциональны; (в) $\mathrm{rg}(M)=2$, $\mathrm{rg}\left(\overline{M}\right)=3$ и никакие две строчки матрицы M не пропорциональны; (г) $\mathrm{rg}(M)=1$, $\mathrm{rg}\left(\overline{M}\right)=2$;

(д) $\mathrm{rg}(M)=2$, $\mathrm{rg}\left(\overline{M}\right)=3$ и какие-то две строчки матрицы M пропорциональны.

4. 13. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0$ и $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}=3$.

4. 14. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}\neq 0$ и все миноры 3-го порядка матрицы

$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}$ тоже не равны нулю.

4. 15. а) $\mathrm{rg}(M)=3, \mathrm{rg}\left(\overline{M}\right)=4$; (б) $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}\left(\overline{M}\right)=3$; (в) $\mathrm{rg}(M)=2, \mathrm{rg}\left(\overline{M}\right)=3$; (г) $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}\left(\overline{M}\right)=2$.

4. 16. (а) $\mathrm{rg}(\overline{M})=2$; (б) $\mathrm{rg}(M)=3$; (в) $\mathrm{rg}(M)=2, \mathrm{rg}\left(\overline{M}\right)=3$.

4. 17. $H(5;4;14)$.

4. 18. $H(-1;2;4)$.

4. 19. $C(1;4;3)$.

4. 20. $C(7;1;0)$ или $C(1;-1;2)$.

4. 21. $C(3;4;-2)$, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{3990}$, или $C(1;1;2)$, $S_{\Delta ABC}=\sqrt{222}$.

4. 22. $C(4;6;0)$ или $C(-1;3;1)$.

4. 23. $A(-4;-6;7)$, $D(2;3;1)$, $S_{ABCD}=2\sqrt{93}$.

4. 24. $C(6;-3;4)$, $D(5;-6;8)$, $S=3\sqrt{17}$.

4. 25. $B(-1;3;9)$, $D(3;0;5)$.

4. 26. $A(-7;-4;8)$, $D(2;-1;2)$, $S=2\sqrt{139}$.

4. 27. $B(2;5;0)$, $D(-5;3;7)$, $S=5\sqrt{51}$.

4. 28. $C(6;1;2)$, $D(6;-2;5)$ или $C(6;-1;0)$, $D(6;-4;3)$.

4. 29. $D(5;8;-7)$, $V=\dfrac{86}{3}$.

4. 30. $D(-3;4;4)$, $V=28$.

Литература

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. – М., Изд. МГТУ им. Баумана, 1998 – 316 с.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2003. – 240 с.

3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2008. – 336 с.

4. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: теоремы и задачи. Том 1. М.: «Планета знаний», 2007. -469 с.

5. Пелевина А.Ф., Зорина И.Г. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 46 с.

6. Соболев С.К., Томашпольский В.Я. Векторная алгебра. Методические указания к решению задач по аналитической геометрии. ЭУИ. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011: http://hoster.bmstu.ru/~fn1/?page_id=30.