ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского»

Сборник задач по линейной алгебре

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям подготовки
010400 «Информационные технологии»,
010500 «Прикладная математика и информатика»,

Нижний Новгород
2007

Выписка

из протокола № заседания кафедры мат. логики и высшей алгебры факультета ВМК от 20007

<u>Слушали</u>: о методической разработке " Сборник задач по линейной алгебре ", авторов: доц. Киселевой Л.Г., ст. препод. Шульца М.М., предназначенной для студентов 1 курса факультета ВМК всех специальностей, изучающих курс «геометрия и алгебра».(60стр)

В методической разработке " Сборник задач по линейной алгебре ", авторов: доц. Киселевой Л.Г., ст. препод. Шульца М.М. представлено более 100 задач по различным темам линейной алгебры:

В методической разработке даны определения основных понятий: матрицы, ранга матрицы, определителя, линейных пространств и подпространств. Приведены основные свойства для определителей и линейных пространств. Дано подробное описание для нахождения множества решений для однородных и неоднородных систем уравнений. В работе приведены примеры решения различных задач по линейной алгебре.

Сборник задач будет полезен студентам факультета ВМК для изучения соответствующих тем в курсе геометрия и алгебра.

<u>Постановили</u>:

рекомендовать методическую разработку " Сборник задач по линейной алгебре ", авторов: доц. Киселевой Л.Г., ст. препод. Шульца М.М к изданию в ННГУ.

Заведующий каф. мат.логики и высшей
алгебры проф. Шевченко В.Н.

СОДЕРЖАНИЕ:

Сборник задач
по линейной алгебре
(методическая разработка по курсу
“геометрия и алгебра”)

Составители: Л.Г.Киселева, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. МлиВА,
М.М.Шульц, ст. преподаватель каф. МлиВА.

Подписано к печати Формат 60x84 1/16.
Печать офсетная. Бумага газетная. Усл. печ. л. 3,5. Тираж 500 экз. Заказ .
Бесплатно.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского.
603600, ГСП-20, Н. Новгород, просп. Гагарина, 23.

Типография ННГУ, 603000, Н. Новгород, ул. Б. Покровская, 37.

1. Линейные векторные пространства

В основе понятия векторного пространства лежит множество элементов, называемых *векторами*. Их природа произвольна, важно лишь, чтобы для них была определена операция *сложения*, обладающая определенными свойствами. В конкретных примерах роль векторов могут играть

- геометрические векторы (направленные отрезки) на плоскости или в трехмерном геометрическом пространстве, складываемые по правилу параллелограмма (треугольника);
- n-мерные арифметические векторы (строки или столбцы, n компонент которых являются числами), сложение выполняется покомпонентно;
- многочлены от какой-то переменной (включая нулевой многочлен), складываемые путем приведения подобных членов;
- прямоугольные $m\times n$-матрицы (с числом строк m и числом столбцов n), сложение выполняется поэлементно.

Множество V называется *линейным* (векторным) *пространством*, если для любых двух векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ известна их *сумма*
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$ и имеют место следующие свойства, которые в конкретных случаях проверяются (доказываются), а в общей теории принимаются за аксиомы:

1. $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V\ \ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ – сложение коммутативно.
2. $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V\ \ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ – сложение ассоциативно.
3. $\exists\, \mathbf{0} \in V\ \forall\, \boldsymbol{a} \in V: \boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$ – существует нулевой вектор.
4. $\forall\, \boldsymbol{a} \in V\ \exists\, \boldsymbol{b} \in V:\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ – для всякого вектора существует противоположный, обычно вектор $\boldsymbol{b}$ обозначается через $(-\boldsymbol{a})$.

Кроме сложения, для векторов определено их *умножение на числа*, совокупность которых должна быть полем, т.е. для этих чисел должны быть выполнимы все четыре арифметические операции с обычными свойствами. Чаще всего используется одно из двух стандартных полей: вещественные числа $\mathbf{R}$ и комплексные числа $\mathbf{C}$. Общее обозначение числового поля F.

Умножение векторов на числа обладает следующими свойствами, которые в конкретных случаях проверяются (доказываются), а в общей теории принимаются за аксиомы.

1. $\forall\, \alpha, \beta \in F, \forall\, \boldsymbol{a} \in V:\ \alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$ – умножение ассоциативно.
2. $\forall\, \alpha, \beta \in F,\ \forall\, \boldsymbol{a} \in V:\ (\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$ –умножение дистрибутивно относительно сложения чисел.
3. $\forall\, \alpha \in F, \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V:\ \alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ – умножение дистрибутивно относительно сложения векторов.
4. $\forall \boldsymbol{a} \in V:\ 1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Из аксиом можно вывести важные следствия:

$$0\cdot\boldsymbol{a} = \mathbf{0};\quad -1\cdot\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a};\quad \alpha\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0};$$

если $\alpha\, \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, то или $\alpha = 0$, или $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, или и то и другое.

Итак, пусть имеется множество векторов V, поле чисел-коэффициентов F, выполняются все приведенные выше аксиомы. Тогда говорят: “задано векторное пространство V над полем F “.

Пространство геометрических векторов всегда рассматривается над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, поскольку умножение геометрического вектора на комплексное число не определено.

Пространство n-мерных арифметических векторов рассматривается над тем полем, числами из которого являются компоненты этих векторов. Это пространство обозначается F^{n}.

Пространство $m\times n$-матриц рассматривается над тем полем, числами из которого являются элементы этих матриц. Это пространство обозначается $F^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$.

Пространство многочленов рассматривается над тем полем, из которого берутся коэффициенты многочленов. Это пространство обозначается $F[t]$, где t – переменная, входящая в выражение многочленов.

Пусть заданы векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, … , $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$ и числа-коэффициенты α_1, α_2, … , α_{n}. Тогда вектор $\boldsymbol{b} = \alpha_1\cdot\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\cdot\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, … , $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$. Говорят также, что задано *разложение* вектора $\boldsymbol{b}$ по системе $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\}$ или что вектор $\boldsymbol{b}$ *выражается* через векторы системы A.

1.1 (**Про** 636). Найти линейную комбинацию $3\cdot\boldsymbol{a}_1 + 5\cdot\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$ векторов $\boldsymbol{a}_1=(4,1,3,-2)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,2,-3,2)$, $\boldsymbol{a}_3=(16,9,1,-3)$.

1.2 (**Про** 637). Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из уравнения

$$\boldsymbol{a}_1 + 2\cdot\boldsymbol{a}_2 + 3\cdot\boldsymbol{a}_3 + 4\cdot\boldsymbol{x} = \mathbf{0},$$

где векторы $\boldsymbol{a}_1=(5,-8,-1,2)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,-1,4,-3)$, $\boldsymbol{a}_3=(-3,2,-5,4)$.

1.3 (**Бек** 22.1). Найти линейные комбинации столбцов

$$1)\ 2i\cdot\begin{bmatrix}3-i\\3-6i\end{bmatrix}+(3+i)\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1+2i\\6+2i\end{bmatrix},\ 2)\ (1-2i)\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\3+i\end{bmatrix}+\frac{3}{2}\cdot\begin{bmatrix}3i\\-6i\\-3\end{bmatrix}.$$

1.4 (**Бек** 22.2). Найти линейную комбинацию матриц

$$(2+i)\cdot\begin{bmatrix}1 & -i\\ 2+i & 1-2i\end{bmatrix}+i\cdot\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}1-i & 2+i\\ 6-4i & 9+7i\end{bmatrix}..$$

1.5 (**Бек** 22.3). Найти столбец $\boldsymbol{x}$ из уравнения

$$(1+i)\cdot\left(x-\begin{bmatrix}i\\ 2\end{bmatrix}\right)-(2+i)\cdot\left(x+\begin{bmatrix}2+3i\\ -3i\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1-i\\ -2-2i\end{bmatrix}.$$

1.6 (**Ким** 44.1). Доказать, что в линейном пространстве V над полем F для выполнения равенства $\alpha\cdot\boldsymbol{x} + \beta\cdot\boldsymbol{y} = \beta\cdot\boldsymbol{x} + \alpha\cdot\boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\alpha, \beta\cdot\in F$, необходимо и достаточно, чтобы было $\alpha = \beta$ или $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Линейной оболочкой системы векторов $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots , \boldsymbol{a}_n\}$ называется множество всех линейных комбинаций векторов этой системы. Линейная оболочка системы векторов A обозначается $L(A)$.

Пусть даны две системы векторов $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots , \boldsymbol{a}_n\}$ и $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots , \boldsymbol{b}_m\}$. Говорят, что система A *выражается* через систему B, если каждый вектор системы A выражается через векторы системы B, т.е. $A \subseteq L(B)$

Две системы векторов называются *эквивалентными*, если каждая из них выражается через другую. В этом случае их линейные оболочки совпадают. От любой системы векторов можно перейти к любой эквивалентной системе, выполнив последовательность *элементарных преобразований* следующих видов:

- умножение любого из векторов на число, отличное от нуля;
- перестановка любых двух векторов;
- прибавление к любому из векторов любого другого вектора системы, умноженного на любое число,
- удаление или добавление векторов-дубликатов,
- удаление или добавление нулевых векторов.

1.7 (**Икр** 1.3.1–3). Описать (словами) линейные оболочки следующих систем векторов из F^5

1) $\boldsymbol{a}_1$=(1,0,0,0,0), $\boldsymbol{a}_2$=(0,0,1,0,0),
2) $\boldsymbol{a}_1$=(1,0,0,0,1), $\boldsymbol{a}_2$=(0,1,0,1,0),
3) $\boldsymbol{a}_1$=(1,0,0,0,–1), $\boldsymbol{a}_2$=(0,1,0,0,–1),

a_3=(0,0,0,0,1). a_3=(0,0,1,0,0). a_3=(0,0,1,0,–1),

a_4=(0,0,0,1,–1).

1.8 (**Икр** 1.3.14–5). Какие из систем трехмерных арифметических векторов *A*, *B*, *C* эквивалентны? Описать (словами) их линейные оболочки.

$$A=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},\ B=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\ C=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Если какие-то две системы эквивалентны, выполнить переход от одной из них к другой с помощью элементарных преобразований.

1.9 (**Икр** 1.3.4–7). Какие из систем многочленов *A, B, C, D* эквивалентны? Описать (словами) их линейные оболочки.

$$A=\{1,\ t,\ t^2\},\ B=\{1-t^2,\ t-t^2,\ 2-t-t^2\},$$

$$C=\{1+t^2,\ t+t^2,\ 1+t+t^2\},\ D=\{1-t^2,\ t-t^2\}.$$

Если какие-то две системы эквивалентны, перейти от одной из них к другой с помощью элементарных преобразований.

Пусть задано векторное пространство V над некоторым полем F. Непустое подмножество $W \subseteq V$ называется *подпространством* в V, если оно само является векторным пространством над тем же полем. При этом свойства коммутативности сложения и т.п. для подмножества W проверять не надо, достаточно убедиться в том, что

1. $\forall\, \boldsymbol{a} \in W,\ \forall\ \boldsymbol{b} \in W \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$ – замкнутость W по сложению.
2. $\forall\, \alpha \in F,\ \forall\, \boldsymbol{a} \in W \quad \alpha\boldsymbol{a} \in W$ – замкнутость W по умножению на элементы из поля..

Любое пространство является своим подпространством. Кроме того, во всяком пространстве имеется *нулевое подпространство*, единственным элементом которого является нулевой вектор: $\{\mathbf{0}\}$.

1.10 (**Про** 1294). Описать (словами) все подпространства трехмерного геометрического пространства.

В задачах 1.11–1.26 формулировка вопроса: “является ли подпространством в соответствующем пространстве указанное множество векторов?”

1.11 (**Про** 1286). Все геометрические векторы, лежащие на одной из координатных осей.

1.12 (**Про** 1287, 9). Все геометрические векторы, начало которых совпадает с началом координат, а концы лежат (не лежат) на заданной прямой.

1.13. (**Бек** 20.4) Все геометрические векторы,

(1) перпендикулярные заданной прямой (плоскости);

(2) образующие с заданной прямой угол $\alpha \in (0^o, 90^o)$;

(3) по модулю не превосходящие 1.

1.14. (**Про** 1290, **Икр** 1.1.3) Все геометрические векторы плоскости, начала которых совпадает с началом координат, а концы лежат

(1) в первой четверти;

(2) в первой или третьей четверти;

(3) в первой или второй четверти.

1.15. (**Про** 1291, 1292) Все векторы арифметического пространства F^n, сумма компонент которых равна заданной константе $\alpha \in F$.

1.16. (**Про** 1285) Все векторы арифметического пространства F^n, компоненты которых – целые числа.

1.17. (**Про** 1297–9, **Бек** 20.3) Все векторы арифметического пространства F^n, у которых

(1) первая компонента равна нулю;

(2) первая и последняя компоненты равны между собой;

(3) все компоненты с четными номерами равны 0;

(4) все компоненты с четными номерами равны между собой.

1.18. (**Про** 1300) Все векторы арифметического пространства F^n, имеющие вид (α, β, α, β, ...), где $\alpha, \beta \in F$ – любые числа.

Еще одним примером линейного пространства является множество S всех бесконечных последовательностей вида $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$, где α_k – числа из произвольного поля F с покомпонентным сложением и умножение на числа из F

1.19 (**Икр** 1.1.12). Множество всех бесконечных последовательностей из S, для которых при всех k = 3, 4, … выполняется $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$

Квадратная матрица называется *симметрической* (*кососимметрической*), если ее элементы, стоящие на симметричных местах совпадают (противоположны по знаку), т.е. $a_{ik} = a_{ki}$ ($a_{ik} = -a_{ki}$). Для симметрической (кососимметрической) матрицы $A = A^T$ ($A = -A^T$).

Квадратная комплексная матрица называется *эрмитовой*, если ее элементы, стоящие на симметричных местах комплексно сопряжены. Для эрмитовой матрицы $\overline{A} = A^T$.

Квадратная матрица называется *верхней* (*нижней*) *треугольной*, если все ее элементы, стоящие снизу (сверху) от диагонали, равны нулю.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, стоящие вне диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица называется *скалярной*, если все элементы ее диагонали одинаковы.

Следом квадратной матрицы называется сумма элементов ее диагонали.

1.20 (**Про** 1303, **Бек** 20.6). Все матрицы указанного вида:

(1) все симметрические матрицы;

(2) все кососимметрические матрицы;

(3) все кососимметрические матрицы;

(4) все эрмитовы матрицы над полем вещественных чисел;

(5) все эрмитовы матрицы над полем вещественных чисел;

(6) все нижние треугольные матрицы;

(7) все диагональные матрицы;

(8) все скалярные матрицы;

(9) матрицы, у которых все элементы на диагонали равны нулю,

(10) матрицы, у которых след равен нулю.

1.21 (**Икр** 1.1.15). Все многочлены из пространства $F[t]$, степени которых равны заданному n.

1.22 (**Икр** 1.1.14). Все многочлены из пространства $F[t]$, степени которых $\leq n$. Замечание. Это подпространство обозначается $F_n[t]$.

Многочлен называется четным (нечетным) если он является суммой слагаемых только четных (только нечетных) степеней. Четный (нечетный) многочлен является четной (нечетной) функцией.

1.23 (**Бек** 20.8). Все четные (нечетные) многочлены из пространства $F[t]$, степени которых $\leq n$.

1.24 (**Икр** 1.1.16). Все многочлены из пространства $F[t]$, удовлетворяющие условию $f(\alpha)=\beta$, где $\alpha, \beta \in F$ – заданные константы.

1.25 (**Про** 1293). Линейная оболочка $L(A)$ заданной системы векторов некоторого векторного пространства V.

1.26 (**Бек** 20.7). Множество вещественных функций, заданных на произвольном отрезке $[a, b]$ и обладающих на этом отрезке указанным свойством:

1. непрерывных;
2. дифференцируемых;
3. интегрируемых;
4. ограниченных;
5. таких, что $f(a) = 0$;
6. таких, что $f(a) = 0$ и $f(b) = 0$;
7. таких, что $f(a) = 1$;
8. неотрицательных;
9. таких, что $f(x) \geq c$, где $c \in \mathbf{R}$ – заданная константа;
10. монотонно возрастающих;
11. монотонных.

2. Линейная зависимость векторов

Система векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, … , $\boldsymbol{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие коэффициенты α_1, α_2, … , α_n, не все равные нулю, что линейная комбинация данных векторов с этими коэффициентами равна нулю: $\alpha_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$. В противном случае система векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, … , $\boldsymbol{a}_n$ называется *линейно независимой*.

По крайней мере один из векторов линейно зависимой системы можно выразить в виде линейной комбинации остальных векторов. Для линейно независимой системы из $\alpha_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Ни один из векторов линейно независимой системы не может быть выражен в виде линейной комбинации остальных векторов.

Два геометрических вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны, три геометрических вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Два арифметических вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда их компоненты пропорциональны.

Для выявления остальных случаев линейной зависимости обычно требуются вычисления.

<u>Пример.</u> Рассмотрим систему из трех арифметических векторов-столбцов $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, a_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$. Составим условие линейной зависимости

$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \alpha_3 \cdot \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$. Расписав его покомпонентно, получим систему линейных уравнений $\begin{cases} 1 \cdot \alpha_1 + 4 \cdot \alpha_2 + 7 \cdot \alpha_3 = 0, \\ 2 \cdot \alpha_1 + 5 \cdot \alpha_2 + 8 \cdot \alpha_3 = 0. \\ 3 \cdot \alpha_1 + 6 \cdot \alpha_2 + 9 \cdot \alpha_3 = 0. \end{cases}$ Представим ее в матричном виде и упростим путем элементарных преобразований строк

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

В алгебраической форме упрощенная система уравнений выглядит так: $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$ Она имеет ненулевые решения, одно из которых $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 1$. Таким образом, мы получили линейную зависимость между векторами-столбцами: $1\cdot\boldsymbol{a}_1 - 2\cdot\boldsymbol{a}_2 + 1\cdot\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$. Можно выразить любой из этих трех векторов через два других, например, $\boldsymbol{a}_1 = 2\cdot\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$.

Свойства линейно зависимых и независимых систем:

1. Если в системе имеется нулевой вектор или векторы-дубликаты, она линейно зависима.
2. Система линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов линейно выражается через остальные.
3. Если некоторая подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.
4. Если система линейно независима, то любая ее подсистема линейно независима.
5. Любые эквивалентные линейно независимые системы векторов содержат одинаковое число векторов

Пусть *A* – система *n*–мерных арифметических векторов. Удалив из каждого вектора некоторые компоненты (одни и те же для всех векторов !), получим *укороченную систему* A'.

6. Если система A линейно зависима, укороченная система A' также линейно зависима.
7. Если укороченная система A' линейно независима, система A также линейно независима.

2.1 (**Икр** 1.2.12). Для векторов $\boldsymbol{a}_1 = (3,1,-7,4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,5,0,6)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1,1,3,0)$ найти линейную комбинацию $3\cdot\boldsymbol{a}_1 - 2\cdot\boldsymbol{a}_2 + 7\cdot\boldsymbol{a}_3$. Обсудить полученный результат. Что можно сказать о системе векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$?

2.2 (**Ким** 15.27). Дана система многочленов $f_1(t) = 1 - t^2$, $f_2(t) = 1 + t^3$, $f_3(t) = t - t^3$, $f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Найти две линейные комбинации этих многочленов: $5\cdot f_1 + f_2 - 4\cdot f_3$ и $f_1 + 9\cdot f_2 - 4\cdot f_4$. Обсудить полученный результат. Что можно сказать о данной системе многочленов?

Для полученного многочлена найти другие разложения по системе многочленов f_1, f_2, f_3, f_4.

2.3 (**Икр** 1.2.19–1.2.27, **Про** 641–642, **Бур** 818–821). Выяснить, являются ли следующие системы векторов (многочленов) линейно зависимыми или линейно независимыми:

1) $\boldsymbol{a}_1=(-3,1,5)$, $\boldsymbol{a}_2=(6,-2,15)$.

2) $\boldsymbol{a}_1=(4,-12,28)$, $\boldsymbol{a}_2=(-7,21,-49)$.

3) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3,0)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,4,6,1)$.

4) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,5,7)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,7,10)$.

5) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,5,7)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,7,11)$.

6) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,5,7)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,7,10.001)$.

7) $\boldsymbol{a}_1=(2,-3,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,-1,5)$, $\boldsymbol{a}_3=(1,-4,3)$.

8) $\boldsymbol{a}_1=(5,4,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,3,2)$, $\boldsymbol{a}_3=(8,1,3)$.

9) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,5)$, $\boldsymbol{a}_2=(5,3,1)$, $\boldsymbol{a}_3=(15,2,-21)$.

10) $\boldsymbol{a}_1=(1,0,2,3)+i\cdot(0,1,-1,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,1,1,4)+i\cdot(-1,1,-3,-2)$.

11) $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,-1,-1,1)$, $\boldsymbol{a}_3=(1,-1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_4=(1,1,-1,-1)$.

12) $\boldsymbol{a}_1=(2,1,9,-3,6)$, $\boldsymbol{a}_2=(5,-3,2,1,10)$, $\boldsymbol{a}_3=(-1,8,1,-4,7)$, $\boldsymbol{a}_4=(1,3,-5,9,11)$.

13) $f_1(t)=t^2+5$, $f_2(t)=t^2-4\cdot t+3$, $f_3(t)=t^2+16\cdot t+13$.

14) $f_1(t)=t^2-4\cdot t+3$, $f_2(t)=5\cdot t-4$, $f_3(t)=t^2+t+1$.

15) $f_1(t)=t^2-t+3$, $f_2(t)=\mathbf{2}\cdot t^2+t$, $f_3(t)=\mathbf{2}\cdot t-4$.

2.4 (**Бек** 22.4). Выявить линейные зависимости между данными столбцами:

1) $\begin{bmatrix}-1\\2i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1-i\\-2-2i\end{bmatrix}$. 2) $\begin{bmatrix}-1\\2i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1+i\\3\end{bmatrix}$. 3) $\begin{bmatrix}1\\-i\\1+i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\3i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2i\\-2+i\end{bmatrix}$.

2.5 (**Ким** 44.21, 44.34). Выяснить, являются ли следующие системы многочленов из $\mathbf{C}[t]$ линейно зависимыми или линейно независимыми:

(1) $p(it)$, $p(-it)$, $p(t)$, $p(-t)$, где $p(t)=t^3+t^2+t+1$.

(2) $t-i$, $t+i$, $t-1$, $t+1$.

(3) $t-i,\ t+i,\ (t-i)^2,\ (t+i)^2$.

2.6 (**Бур** 818, **Ким** 44.20,36,37, **Доп**). Выяснить, являются ли следующие системы матриц линейно зависимыми или линейно независимыми:

1) $A_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -5\\ -8 & 5 & -11\end{bmatrix};$

2) $A_1=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -3 & 0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix},\quad A_4=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$

3) $A_1=\begin{bmatrix}i & -1\\ 1 & -i\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}-i & -1\\ 1 & i\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$

4) $A_1=\begin{bmatrix}1 & i\\ -i & 0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}-1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad A_4=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$

5) $A_1=\begin{bmatrix}1 & i & 1+i\\ 2-i & 0 & 1-i\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}-1 & 1 & i\\ 0 & 1+i & 2+i\end{bmatrix},$

$A_3=\begin{bmatrix}1+i & -2 & -1\\ 1+2i & -1-i & -1\end{bmatrix},\quad A_4=\begin{bmatrix}1-i & 2i & i\\ 2-i & -1+i & i\end{bmatrix}.$

6) $A_1=\begin{bmatrix}1 & 1+i\\ i & 1-i\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}i & -1+i\\ -1 & 1+i\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}2-i & 3+i\\ 1+2i & 1-3i\end{bmatrix}.$

2.7 (**Про** 665–668). Найти все значения параметра λ, при которых вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$:

1) $\boldsymbol{a}_1$=(2,3,5),	2) $\boldsymbol{a}_1$=(4,4,3),	3) $\boldsymbol{a}_1$=(3,2,5),
$\boldsymbol{a}_2$=(3,7,8),	$\boldsymbol{a}_2$=(7,2,1),	$\boldsymbol{a}_2$=(2,4,7),
$\boldsymbol{a}_3$=(1,–6,1),	$\boldsymbol{a}_3$=(4,1,6),	$\boldsymbol{a}_3$=(5,6,λ),
$\boldsymbol{b}$=(7,–2, λ).	$\boldsymbol{b}$=(5,9, λ).	$\boldsymbol{b}$=(1,3, 5).

2.8 (**Бур** 816). При каких значениях параметра α векторы $(\alpha,1,0)$, $(1,\alpha,1)$, $(0,1,\alpha)$ линейно зависимы (линейно независимы)?

2.9 (**Бур** 817). При каких значениях параметров α, β, γ векторы $(1, \alpha, \alpha^2)$, $(1, \beta, \beta^2)$, $(1, \gamma, \gamma^2)$ линейно зависимы (линейно независимы)?

2.10 (**Икр** 1.2.9). Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ – линейно независимая система векторов. Будут ли линейно независимыми следующие системы векторов?

1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$;

2) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}$;

3) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$.

2.11 (**Икр** 1.2.10). Показать, что для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и любых чисел α, β, γ система векторов $\alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{b} - \alpha\boldsymbol{c}$, $\beta\boldsymbol{c} - \gamma\boldsymbol{a}$ линейно зависима.

2.12 (**Ким** 15.10). Показать, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы векторы

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c},\ \ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d},\ \ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d},\ \ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}.$$

2.13 (**Ким** 15.12). При каких значениях параметра λ

1) из линейной независимости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ следует линейная независимость векторов $\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$, $\lambda\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$;
2) из линейной независимости системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ следует линейная независимость системы векторов

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \ \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1} + \boldsymbol{a}_n,\ \ \boldsymbol{a}_n + \lambda\boldsymbol{a}_1.$$

2.14 (**Икр** 1.2.11). Пусть p, q, r – вещественные числа. При каких условиях будут линейно зависимы (линейно независимы) многочлены:

$$(t-p)\cdot(t-q),\ \ (t-q)\cdot(t-r),\ \ (t-r)\cdot(t-p).$$

Базой системы векторов называется ее подсистема, которая

- линейно независима,
- через нее выражаются все векторы данной системы.

Если система векторов имеет несколько баз, то все они содержат одинаковое количество векторов. (См. выше 5-е свойство линейно независимых систем). Это количество называется *рангом* системы. Так, ранг система векторов из предыдущего примера равен двум, она имеет три базы: $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3\}$ и $\{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$.

2.15 (**Про** 679–681, **Икр** 1.3.35–38). Найти ранг и какую-нибудь базу данной системы векторов; все векторы, не входящие в эту базу, выразить через векторы базы:

1) $\boldsymbol{a}_1=(5,2,-3,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(4,1,-2,3)$, $\boldsymbol{a}_3=(1,1,-1,-2)$, $\boldsymbol{a}_4=(3,4,-1,2)$.

2) $\boldsymbol{a}_1=(-1,4,-3,-2)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,-7,5,3)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,-2,1,0)$, $\boldsymbol{a}_4=(-4,1,0,1)$.

3) $\boldsymbol{a}_1=(0,2,-1)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,7,1)$, $\boldsymbol{a}_3=(2,0,3)$, $\boldsymbol{a}_4=(5,1,8)$.

4) $\boldsymbol{a}_1=(2,-1,3,5)$, $\boldsymbol{a}_2=(4,-3,1,3)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,-2,3,4)$, $\boldsymbol{a}_4=(4,-1,15,17)$, $\boldsymbol{a}_5=(7,-6,-7,0)$.

5) $\boldsymbol{a}_1=(3,1,-7,4)+i(-1,-2,5,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,1,-6,0)+i(3,1,-7,4)$, $\boldsymbol{a}_3=(0,1,1,-3)$.

6) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3,-4)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,3,-4,1)$, $\boldsymbol{a}_3=(2,-5,8,-3)$, $\boldsymbol{a}_4=(5,26,-9,-12)$, $\boldsymbol{a}_5=(3,-4,1,2)$.

2.16 (**Про** 672–675, **Икр** 1.3.41–43). Найти все базы и ранг данной системы векторов.

1) $\boldsymbol{a}_1=(4,-1,3,-2)$, $\boldsymbol{a}_2=(8,-2,6,-4)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,-1,4,-2)$, $\boldsymbol{a}_4=(6,-2,8,-4)$.

2) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3,4)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,3,4,5)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,4,5,6)$, $\boldsymbol{a}_4=(4,5,6,7)$.

3) $\boldsymbol{a}_1=(2,1,-3,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(4,2,-6,2)$, $\boldsymbol{a}_3=(6,3,-9,3)$, $\boldsymbol{a}_4=(1,1,1,1)$.

4) $\boldsymbol{a}_1=(4,-2,12,8)$, $\boldsymbol{a}_2=(-6,12,9,-3)$, $\boldsymbol{a}_3=(10,-5,30,20)$, $\boldsymbol{a}_4=(-14,28,21,-7)$.

5) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,3,0,-1)$, $\boldsymbol{a}_2=(0,1,1,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3=(1,3,4,1,-1)$.

6) $\boldsymbol{a}_1=(i,1,,2)$, $\boldsymbol{a}_2=(1+i,1-i,2+3i)$, $\boldsymbol{a}_3=(1-i,-1-i,3-2i)$, $\boldsymbol{a}_4=(4,-4i,10+2i)$.

2.17 (**Доп**). Привести пример системы из трех векторов, имеющей

1) одну базу, 2) две базы, 3) три базы.

Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется *полной в пространстве* V, если $V = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$. *Базисом пространства* V называется полная линейно независимая система.

Эквивалентные определения: базис пространства V это
(1) минимальная полная система в V,
(2) максимальная линейно независимая система в V,

Если в пространстве существует базис, содержащий конечное число векторов, пространство называется *конечномерным*, в противном случае – *бесконечномерным*. Из рассмотренных ранее примеров пространств бесконечномерным является пространство всех многочленов $F[t]$, остальные пространства конечномерны.

Все базисы данного конечномерного пространства V содержат одинаковое число векторов, это число называется *размерностью* пространства и обозначается $\dim V$.

Нулевое пространство $\{\mathbf{0}\}$ не имеет базиса (но считается конечномерным), его размерность $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Базисы в конкретных примерах векторных пространств:

- в пространстве геометрических векторов на плоскости – любые два неколлинеарных вектора, в трехмерном геометрическом пространстве – любые три некомпланарных вектора;
- в пространстве *n*-мерных арифметических векторов простейший базис – n *единичных векторов*, у каждого из которых ровно одна компонента равна 1, а остальные 0;
- в пространстве многочленов от какой-то переменной простейший базис – всевозможные степени этой переменной, включая нулевую степень, т.е. “многочлен” 1;
- в пространстве прямоугольных $m\times n$ – матриц простейший базис – так называемые *матричные единицы*, у каждой из которых ровно один элемента равен 1, а остальные 0.

2.18. Для каждого из конечномерных пространств, о которых идет речь в задачах 1.11–1.25 построить какой-нибудь базис и найти размерность.

2.19 (**Икр** 1.4.13). Какая из систем векторов является базисом пространства $\mathbf{R}^4$?

1) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,-1,-2)$,	2) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,-1,-2)$,
$\boldsymbol{a}_2=(2,3,0,-1)$,	$\boldsymbol{a}_2=(2,3,0,-1)$,
$\boldsymbol{a}_3=(1,2,1,3)$,	$\boldsymbol{a}_3=(1,2,1,4)$,

$\boldsymbol{a}_4=(1,3,–1,0)$. $\boldsymbol{a}_4=(1,2,–1,0)$.

2.20 (**Икр** 1.4.35–36). Определить размерность и найти какой-нибудь базис линейной оболочки данной системы векторов.

1) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,2,–1)$,
$\boldsymbol{a}_2=(2,3,2,5)$,
$\boldsymbol{a}_3=(–1,4,3,–1)$,
$\boldsymbol{a}_4=(2,9,3,5)$.

2) $\boldsymbol{a}_1=(–3,1,3,3,2)$,
$\boldsymbol{a}_2=(2,3,0,1,0)$,
$\boldsymbol{a}_3=(1,2,3,2,1)$,
$\boldsymbol{a}_4=(–3,5,1,3,1)$,
$\boldsymbol{a}_3=(3,0,1,0,0)$.

2.21 (**Икр** 1.4.7). Будем рассматривать в качестве векторов комплексные числа, а в качестве коэффициентов – вещественные числа. Какова размерность полученного векторного пространства? Тот же вопрос, если в качестве коэффициентов рассматривать комплексные числа.

Любую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса пространства.

2.22 (**Икр** 1.4.15). В пространстве $\mathbf{R}^4$ построить два различных базиса, имеющих общие векторы $\boldsymbol{e}_1 = (1,1,0,0)$ и $\boldsymbol{e}_2 = (0,0,1,1)$.

2.23 (**Икр** 1.4.16). Систему многочленов $t^5 + t^3$, $t^5 - 3{\cdot}t^3$, $t^5 + 2{\cdot}t^2$, $t^5 - t$ дополнить до базиса пространства $\mathbf{R}_5[t]$

2.24 (**Про** 1295). Пусть линейное подпространство V_1 содержится в линейном подпространстве V_2. Доказать, что для их размерностей

$\dim(V_1) \le \dim(V_2)$, причем размерности равны тогда и только тогда, когда $V_1 = V_2$. Верно ли последнее утверждение для любых двух линейных подпространств данного пространства?

2.25 (**Про** 1305). Доказать, что если линейное подпространство L пространства многочленов степени $\le n$ содержит хотя бы один многочлен степени k для $k = 0, 1, 2, \ldots, p$, но не содержит многочленов степени $k > p$, то оно совпадает с подпространством L_p всех многочленов степени $\le p$.

Пусть $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ – базис пространства V над полем F. Любой вектор $\boldsymbol{x} \in V$ можно единственным образом разложить по базису, представив в виде

$\boldsymbol{x} = x_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + x_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \boldsymbol{e}_n$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Записав набор координат любого вектора из V в виде арифметического вектора, можно (если базис E в V зафиксирован) установить взаимно однозначное соответствие пространства V и арифметического пространства F^n, где $n = \dim V$. Это соответствие сохраняет операции и называется *изоморфизмом* векторных пространств.

Если арифметический вектор $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из n компонент разложить по простейшему базису, состоящему из единичных векторов

$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$,

то координатами вектора будут его компоненты: $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$.

Если матрицу разложить по простейшему базису, состоящему из матричных единиц, координатами матрицы будут ее элементы.

2.26 (**Ким** 17.24). Доказать, что в пространства $\mathbf{R}^3$ векторы $\boldsymbol{e}_1 = (4,1,-1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1,2,-5)$, $\boldsymbol{e}_3 = (-1,1,1)$ образуют базис. Найти координаты каждого из векторов $\boldsymbol{x} = (4,4,-5)$, $\boldsymbol{y} = (2,4,-10)$, $\boldsymbol{z} = (0,3,-4)$ в этом базисе.

2.27 (**Бек** 22.64). Доказать, что в пространства $\mathbf{C}^2$ столбцы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, образуют базис. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе.

$$(1)\ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 3+i \\ 7-6i \end{bmatrix}.$$

$$(2)\ e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 3 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 6+2i \end{bmatrix}.$$

2.28 (**Бек** 20.21). Доказать, что многочлены $2t + t^5$, $t^3 - t^5$, $t + t^3$ образуют базис в пространстве нечетных многочленов степени ≤ 5, и найти координаты многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ в этом базисе.

2.29 (**Икр** 1.4.27). В каждом из следующих базисов пространства $\mathbf{R}_5[t]$ найти координаты многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + +1$.

1. $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$;
2. $1, t + 1, t^2 + 1, t^3 + 1, t^4 + 1, t^5 + 1$;
3. $1 + t^3, t + t^3, t^2 + t^3, t^3, t^4 + t^3, t^5 + t^3$.

2.30 (**Бек** 20.18). Доказать, что в пространстве $\mathbf{R}^{2\times 2}$ матрицы

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ M_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

образуют базис. Найти координаты матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

2.30 (**Ким** 44.77). Доказать, что в пространстве $\mathbf{C}^{2\times 2}$. матрицы

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix},\ M_4 = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

образуют базис. Найти координаты матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 2 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

2.31 (**Доп**). Доказать, что в пространстве симметрических матриц второго порядка матрицы

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

образуют базис. Найти координаты матрицы $S = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

2.32 (**Доп**). Доказать, что в пространстве кососимметрических матриц третьего порядка матрицы

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

образуют базис. Найти координаты матрицы $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

2.33 (**Доп**). Доказать, что в пространстве эрмитовых матриц второго порядка матрицы

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

образуют базис. Найти координаты матрицы $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

2.33 (**Икр** 1.4.38). Доказать, что две бесконечные последовательности $\boldsymbol{e}_1 = (2, 3, 5, 8, 13, ...)$ и $\boldsymbol{e}_2 = (1, 2, 3, 5, 8, ...)$ являются базисом пространства всех бесконечных последовательностей, для которых при $k = 3, 4, \ldots$ выполняется $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$. Разложить по этому базису каждую из последовательностей

$$\boldsymbol{a} = (1,1,2,3,5,\ldots) \text{ и } \boldsymbol{b} = (-2,3,1,4,5,\ldots).$$

3. Определители

Определитель (детерминант) второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

3.1 (**Фад** 231–232). Вычислить определители:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix};\quad 2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix};\quad 3)\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix};\quad 4)\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix};$$

$$5)\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix};\quad 6)\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix};$$

$$7)\begin{vmatrix} \cos\varphi + i\sin\varphi & 1 \\ 1 & \cos\varphi - i\sin\varphi \end{vmatrix};$$

$$8)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix};\quad 9)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};\quad 10)\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix};\quad 11)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix};$$

$$12)\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix};\quad 13)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix},\ \text{где}\ \omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

3.2 (**Фад** 39, 41). Доказать, что при любых вещественных значениях a, b, c, d корни квадратных уравнений вещественны:

$$1)\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0;\quad 2)\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix} = 0.$$

Формулы для определителей второго и третьего порядка являются частными случаями следующего общего определения.

Определитель порядка n $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A)$ равен алгебраической сумме $n!$ произведений вида $\pm a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, где берется знак «+», если перестановка номеров столбцов $j_1\, j_2 \ldots\, j_n$ содержит четное число *инверсий*, и знак «–», если число инверсий нечетно. Инверсией называется ситуация, когда $j_p > j_q$ при $p < q$.

3.3 (**Икр** 3.1.31).. Как изменится определитель с комплексными элементами, если каждый его элемент заменить на сопряженное число?

3.4 (**Икр** 3.1.32). Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент заменить на противоположное число ?

3.5 (**Икр** 3.1.33). Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент умножить на число α ?

3.6 (**Фад** 248). С каким знаком в определитель 6-го порядка входят произведения

$$(1)\ a_{23}\, a_{31}\, a_{42}\ a_{56}\, a_{14}\ a_{65};\ \ (2)\ a_{32}\, a_{43}\, a_{14}\ a_{51}\, a_{66}\ a_{25}\ ?$$

3.7 (**Фад** 249). Входят ли (и если «да», то с каким знаком) в определитель 5-го порядка произведения

$$(1)\ a_{13}\, a_{24}\, a_{23}\, a_{41}\, a_{55};\ \ (2)\ a_{21}\, a_{13}\, a_{34}\, a_{55}\, a_{42}\ ?$$

3.8 (**Фад** 250). Подобрать i и k так, чтобы произведение $a_{1i}\, a_{32}\, a_{4k}\, a_{25}\, a_{53}$ входило в определитель 5-го порядка со знаком «+»

3.9 (**Фад** 254). С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов диагонали, идущей «с северо-востока на юго-запад» ?

3.10 (**Икр** 3.1.34). Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{pq} умножить на число α^{p-q}, где $\alpha \neq 0$?

3.11 (**Про** 200). Найти члены определителя $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$, содержащие x^4 и x^3.

Определитель можно *разложить* по любой строке (любому столбцу): $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, где $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ – *алгебраическое дополнение* к элементу a_{ij}. Здесь M_{ij} – *минор* (определитель порядка n–1), полученный из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Этот способ вычисления определителей особенно эффективен, если в выбранной строке (столбце) много элементов, равных нулю.

3.12 (**Про** 236, 237). Разложить определитель по строке (столбцу), содержащей параметры a, b, c, d:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad 2)\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.

3.13 (**Доп**). Для определителей из задачи 3.12 подобрать значения параметров a, b, c, d, при которых эти определители равны нулю.

3.14 (**Про** 208, 207). Найти (угадать!) корни многочленов, заданных в виде определителей (в (2) все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различны):

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n-x \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix},$$

Если некоторую строку (столбец) определителя можно представить как сумму двух строк (столбцов), то определитель равен сумме двух определителей, в каждом из которых место этой строки (столбца) занимает одно из двух слагаемых. Если элементы строки (столбца) определителя имеют общий множитель, его можно вынести за знак определителя.

3.15 (**Икр** 3.1.28). Определитель $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}t & a_{12}+b_{12}t \\ a_{21}+b_{21}t & a_{22}+b_{22}t \end{vmatrix}$ представить как многочлен второй степени от t с коэффициентами-определителями.

Определитель не меняет своего значения при транспонировании (строки переписываются в виде столбцов, а столбцы – в виде строк).

При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак (умножается на –1).

При умножении любой строки (столбца) на некоторое число, значение определителя также умножается на это число.

От прибавления к любой строке (столбцу) определителя любой линейной комбинации остальных строк (столбцов) значение определителя не меняется.

3.16 (**Икр** 3.1.55). Числа 20604, 53227, 25755, 20927 и 78421 делятся на 17. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ также делится на 17.

Эти три свойства лежат в основе вычисления определителя *методом Гаусса*: с помощью указанных преобразований определитель приводится к треугольному виду, когда все элементы, лежащие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Такой определитель равен произведению элементов диагонали.

3.17 (**Икр** 3.4.10,11,14,18,20,27). Применяя метод Гаусса, вычислить определители:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix};\quad 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix};\quad 3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix};$$

$$4)\begin{vmatrix} 2 & 1000 & 4 & 0,08 \\ 1 & 3000 & -6 & 0,02 \\ 3 & -2000 & 2 & -0,02 \\ 2 & -1000 & 2 & 0 \end{vmatrix};\quad 5)\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix};$$

$$6)\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0{,}1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0{,}1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Для последнего определителя сравнить найденное точное значение с «приближенным», которое получается, если пренебречь сравнительно малым числом 0,1.

3.18. (**Про** 275, 278) Вычислить определители:

$$1)\begin{vmatrix} 3/2 & 9/2 & 3/2 & 3 \\ 5/3 & 8/3 & 2/3 & 7/3 \\ 4/3 & 5/3 & 1 & 2/3 \\ 7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}.$$

3.19. (**Про** 279): Применяя метод Гаусса, вычислить определители порядка n

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Обобщением формулы разложения является *теорема Лапласа*. Пусть в матрице A произвольно выбраны какие-то k строк (столбцов). Сформируем всевозможные миноры порядка k, содержащиеся в выбранных строках (столбцах) (количество таких миноров равно числу сочетаний $\binom{n}{k}$). Для каждого такого минора построим дополнительный минор порядка $n-k$, расположенный в остальных $n-k$ строках и столбцах. Тогда $\det(A)$ равен сумме произведений каждого из миноров, расположенных в выбранных k строках (столбцах) на его алгебраическое дополнение. (Алгебраическое дополнение равно дополнительному минору, взятому со знаком $(-1)^s$, где s – сумма номеров всех строк и всех столбцов, входящих в минор). Этот способ вычисления определителей особенно эффективен, если среди миноров, расположенных в выбранных строках (столбцах), много равных нулю.

3.20 (**Икр** 3.2.16–21). Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix};\quad 2)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix};\quad 3)\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix};$$

$$4)\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix};\quad 5)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix};\quad 6)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

3.21 (**Икр** 3.2.16–21). Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители, предварительно преобразовав их:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix};\quad 2)\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix};\quad 3)\begin{vmatrix} 213 & 186 & 162 & 137 \\ 344 & 157 & 295 & 106 \\ 419 & 418 & 419 & 418 \\ 417 & 416 & 417 & 416 \end{vmatrix}.$$

4. Матрицы

$m \times n$–матрица $A = (a_{ij})$, $i = 1,\dots, m$, $j = 1,\dots, n$ – прямоугольная (в частности – квадратная) таблица из m строк и n столбцов, заполненная числами.

Столбцовый ранг матрицы – максимальное число линейно независимых столбцов (ранг системы столбцов). *Строчечныый ранг матрицы* – максимальное число линейно независимых строк (ранг системы строк). *Минорный ранг матрицы* – максимальный порядок минора, отличного от нуля. Любой отличный от нуля минор максимального порядка называется *базисным минором* матрицы A.

Минорный ранг (и базисный минор) можно найти *методом окаймления*. Если уже найден некоторый минор порядка k, отличный от нуля, надо построить миноры порядка k+1, *окаймляющие* его, т.е. полученные из него путем добавления одной новой строки и одного нового столбца. Если какой-то из них окажется отличным от нуля, надо таким же образом попытаться построить отличный от нуля минор порядка k+2 и т.д. Если же для ненулевого минора порядка k все окаймляющие миноры порядка k+1 равны нулю, этот минор является базисным (одним из базисных), а минорный ранг матрицы равен k. Суть этого метода заключается в том, что после того, как найден отличный от нуля минор порядка k, надо рассматривать не вообще все миноры порядка k+1, а только окаймляющие уже найденный ненулевой минор.

Теорема о ранге. Для любой данной матрицы все три ранга равны одному и тому же числу. Обозначение: $\mathrm{rank}(A)$.

Ранг матрица (но не базисный минор !) можно найти с помощью *элементарных преобразований* строк и столбцов следующих трех видов:

- умножение любого из векторов на число, отличное от нуля;
- перестановка любых двух векторов;
- прибавление к любому из векторов любого другого вектора, умноженного на любое число.

Такие преобразования строк и столбцов не меняют ранг матрицы. Чтобы найти этот ранг, надо привести матрицу к простейшему виду: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{bmatrix}$. После этого достаточно подсчитать идущие по диагонали единицы – их количество и есть ранг матрицы.

4.1 (**Про** 608–611). Найти ранг матриц. Найти базисные миноры матриц методом окаймления:

$$1)\begin{bmatrix}2&1&3&-2&4\\4&2&5&1&7\\2&1&1&8&2\end{bmatrix};\qquad 2)\begin{bmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{bmatrix};$$

$$3)\begin{bmatrix}3&1&3&2&5\\5&3&2&3&4\\1&3&-5&0&-7\\7&5&1&4&1\end{bmatrix};\qquad 4)\begin{bmatrix}4&8&-5&2&3\\8&6&-7&4&2\\4&3&-8&2&7\\4&3&1&2&-5\\8&6&-1&4&-6\end{bmatrix}.$$

4.2 (**Про** 613, **Ким** 16.14, **Бур** 841). Чему равен ранг матрицы при различных значениях λ?

$$1)\begin{bmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{bmatrix};\qquad 2)\begin{bmatrix}1-\lambda&1-2\lambda\\1+\lambda&1+3\lambda\end{bmatrix};\qquad 3)\begin{bmatrix}0&\lambda+2&0\\1&0&0\\0&0&\lambda^2-4\end{bmatrix}.$$

4.3 (**Про** 619–622). Найти ранг матриц методом элементарных преобразований

$$1)\begin{bmatrix}24&19&36&72&38\\49&40&73&147&80\\73&59&98&219&118\\47&36&71&141&72\end{bmatrix};\qquad 2)\begin{bmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{bmatrix};$$

$$3)\begin{bmatrix}47&26&16\\-67&98&-428\\35&23&1\\201&-294&1281\\155&86&52\end{bmatrix};\qquad 4)\begin{bmatrix}17&-28&45&11&39\\24&-37&61&13&50\\25&-7&32&-18&-11\\31&12&19&-43&-55\\42&13&29&-55&-68\end{bmatrix}.$$

Если матрицы A и B имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов, их можно сложить (вычесть): $C = A \pm B$, где $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$. Сложение матриц ассоциативно и коммутативно.

Если число n столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B (т.е. «длина» строки матрицы A равна «длине» столбца матрицы B), эти матрицы можно перемножить по правилу «строчка на столбец»: $C = A \cdot B$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Для *единичной матрицы* $E=\begin{bmatrix}1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$ и любой матрицы A выполняются равенства $A\cdot E = A$ и $E\cdot A = A$.

При сложении и умножении матриц

$\mathrm{rank}(A+B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$, $\mathrm{rank}(A\cdot B) \le \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$;

если матрица B невырожденная, то $\mathrm{rank}(A\cdot B) = \mathrm{rank}(A)$.

При умножении квадратных матриц их определители перемножаются: $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.

Умножение матриц ассоциативно, но, вообще говоря, некоммутативно. Умножение матриц дистрибутивно относительно их сложения и вычитания.

Имеет место свойство $(A\cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$ (символом $(\ )^{\mathrm{T}}$ обозначено транспонирование матрицы).

4.4 (**Икр** 5.4.1, 5.4.2). Найти произведения матриц *AB* и *BA*. Чему равны ранги этих произведений ?:

1) $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$. 2) $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$.

4.5 (**Ким** 1.3). Найти произведение матриц *ABC*

$$A=\begin{bmatrix}2008 & 2007 & 2006\\ 2005 & 2004 & 2003\\ 2002 & 2001 & 2000\\ 1999 & 1998 & 1997\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}12 & 6 & -2\\ 6 & 3 & -1\\ 18 & 9 & -3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Указание. Воспользуйтесь ассоциативностью умножения матриц и обдумайте, как удобнее расставить скобки: $(AB)C$ или $A(BC)$?

4.6 (**Ким** 1.3). Найти произведения матриц *AB* и *BA*. Чему равны ранги этих произведений ? Найти произведение матриц $(AB)^3$, где

$$A=\begin{bmatrix}10 & -4\\ 11 & -4\\ -3 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-5 & 7 & 11 & -3\\ -3 & 11 & 27 & 5\end{bmatrix}.$$

Указание. Воспользуйтесь ассоциативностью умножения матриц, возьмите $(AB)^3 = ABABAB$ и используйте найденное произведение *BA*.

4.7 (**Икр** 5.4.58). Квадратная $n\times n$–матрица C является произведением прямоугольных матриц A и B размерами соответственно $n\times m$ и $m\times n$, причем $m < n$. Доказать, что определитель матрицы C равен нулю.

4.8 (**Икр** 5.4.59). Доказать, что любую матрицу ранга 1 можно представить как произведение матрицы-столбца на матрицу-строчку.

4.9 (**Икр** 5.4.60). Пусть A – квадратная матрица ранга 1. Доказать, что найдется число α такое, что $A^2 = \alpha A$.

Комбинируя сложение матриц, их умножение и поэлементное умножение матрицы на число, можно вычислить значение многочлена от квадратной матрицы. Свободный член многочлена интерпретируется как единичная матрица с соответствующим коэффициентом.

4.10 (**Бур** 108). Для матрицы $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ найти значения многочленов

$$f_1(t) = t^2-2t+5;\ \ f_2(t) = t^2-5t+10;\ \ f_3(t) =(2t^5-4t^2+7)\cdot f_2(t) + t+5$$

Элементарные преобразования строк (столбцов) матрицы равносильны ее умножению слева (справа) на матрицы специального вида, которые получаются из единичной матрицы с помощью тех же элементарных преобразований.

4.11 (**Доп**). Рассмотреть умножение матрицы $\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$ слева (справа) на каждую из матриц

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & \alpha & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель $\det(A) \neq 0$.

Для невырожденной матрицы A существует единственная *обратная матрица* A^{-1} такая, что $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$.

Имеет место свойство $(A\cdot B)^{-1}= B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Первый способ построения обратной матрицы. Сначала для данной матрицы $A = (a_{ij})$ строится так называемая *присоединенная* (или *союзная*) матрица

$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$, строки которой заполнены алгебраическими дополнениями к элементам соответствующих столбцов заданной матрицы *А*. Произведение матрицы A на *присоединенную* (союзную) равно единичной матрице $A{\cdot}A^* = A^*{\cdot}A = E \cdot d$, где $d = \det(A)$. Если $d \neq 0$, то $A^{-1} = \frac{1}{d} \cdot A^*$.

Для матрицы второго порядка $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ с определителем $d = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$ этот метод позволяет сразу написать явное выражение обратной матрицы: $A^{-1} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$. Однако для матриц большего порядка этот способ слишком трудоемок, потому что требует вычисления значительного количества определителей.

Другой способ построения обратной матрицы заключается в том, что из заданной матрицы A и единичной матрицы E (того же порядка) строится блочная матрица $[A \mid E]$ и элементарными преобразованиями строк ее приводят к виду $[E \mid B]$, где левый блок есть единичная матрица. Если это удалось, то блок $B = A^{-1}$, если нет – матрица A вырожденная и A^{-1} не существует.

Можно использовать и столбцовый вариант этого способа: строится блочная матрица $\left[\frac{A}{E}\right]$ и элементарными преобразованиями столбцов ее приводят к виду $\left[\frac{E}{B}\right]$. Если это удалось, то блок $B = A^{-1}$.

4.12 (**Про** 836–849). Для следующих матриц найти обратные и сделать проверку:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$;

7) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$;   8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$;

9) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;   10) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$;

11) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ 0 & 1 & 1 & .. & 1 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{bmatrix}$;   12) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 1 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{bmatrix}$;

13) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & .. & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & .. & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & .. & a^{n-2} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{bmatrix}$;   14) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & a & 1 \end{bmatrix}$

(порядок матрицы n+1).

4.13 (**Бур** 130). Найти обратную матрицу для матрицы A, если:

(1) $A^2–4A+E=0$;   (2) $A^3+5A^2–3A–E=0$.

4.14 (**Икр** 5.5.46). Пусть I – квадратная матрица, все элементы которой равны 1. Доказать, что $(E-I)^{-1} = E - \dfrac{1}{n-1} I$, где n – порядок матриц I и E.

4.15 (**Про** 861–865, **Ким** 9.51). Решить матричные уравнения:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$;   2) $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$;

$$3)\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{bmatrix}\cdot X\cdot\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{bmatrix};\qquad 4)\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{bmatrix};$$

$$5)\ X\cdot\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{bmatrix};\qquad 6)\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Пусть в пространстве V задано два базиса:

“старый” $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ и “новый” $E' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n\}$.

Разложим каждый вектор $\boldsymbol{e}'_k$ нового базиса E' по старому базису E: $\boldsymbol{e}'_k = p_{1k}\cdot\boldsymbol{e}_1 + p_{2k}\cdot\boldsymbol{e}_2 + \dots + p_{nk}\cdot\boldsymbol{e}_n$ и сформируем *n×n-матрицу перехода* P, столбцы которой заполнены коэффициентами в разложениях векторов базиса E' по базису E.

Пример. Зададим связь старого и нового базисов формулами: $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$. **Тогда матрица перехода** $P = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.

Пусть произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in V$ разложен по обоим базисам: $\boldsymbol{x} = x_1\cdot\boldsymbol{e}_1 + x_2\cdot\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\cdot\boldsymbol{e}_n = x'_1\cdot\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\cdot\boldsymbol{e}'_2 + \dots + x'_n\cdot\boldsymbol{e}'_n$. Тогда координаты вектора в старом и в новом базисах связаны формулой $[x] = P\cdot[x']$,
где $[x] = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ – столбец, составленный из координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе E,
$[x'] = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]^T$ – столбец, составленный из координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе E',
P – матрица перехода.

Пример (продолжение). Формулы, связывающие координаты вектора в старом и новом базисах:
$$x_1 = x_1' + x_2',$$
$$x_2 = x_1' - x_2'.$$

Если P – матрица перехода от E к E', а Q – матрица перехода от E' к E'', то $P\cdot Q$ – матрица перехода от E к E'', а P^{-1} – матрица перехода от E' к E.

Пусть в арифметическом пространстве F^n заданы две системы линейно независимых векторов $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\dots, \boldsymbol{a}_n\}$ и $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2,\dots, \boldsymbol{b}_n\}$. Матрицы, составленные из столбцов A и B, являются матрицами перехода от базиса из единичных столбцов E к базисам A и B соответственно. Матрицу перехода от базиса A к базису B можно найти так. Сформируем блочную матрицу $[A \mid B]$ и элементарными преобразованиями строк превратим ее в $[E \mid P]$ – тогда $P = A^{-1}\cdot B$ и есть матрица перехода.

4.16 (**Про** 1280, 1, **Бек** 22.9, **Ким** 44.79, 80). Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом соответствующего арифметического пространства и найти матрицу перехода:

(1) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $e'_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, e'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}.$

(2) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ и

$$e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}, e'_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, e'_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(3) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 2+3i \\ -3i \end{bmatrix}$ и $e'_1 = \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix} 3+i \\ 7-6i \end{bmatrix}.$

(4) $e_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 3+2i \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} -1+2i \\ 3-i \end{bmatrix}$ и $e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9+3i \end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix} -1+3i \\ 9 \end{bmatrix}.$

(5) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}, e'_3 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

(6) $e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1+i \\ 1 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} -2+i \\ 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$ и

$$e'_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2+i \\ 3 \end{bmatrix}, e'_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.17 (**Бек** 20.27). Доказать, что каждая из двух систем многочленов

$\{t - t^2, t^3, 1 + 5t + t^3, (1 + t)^3\}$ и

$\{(1 + t)^3, (1 - t)^3, t - t^2 + t^3, 1 + t + t^2 + t^3\}$

является базисом в пространстве многочленов степени ≤ 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты многочлена

x_1, x_2, x_3, x_4 в первом базисе, если известны его координаты $x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}, x_4^{'}$ во втором базисе.

4.18 (**Бек** 20.28). Доказать, что каждая из двух систем многочленов $\{(1 + t^2)^2, (1 - t^2)^2, 1\}$ и $\{1 + t^2 + t^4, 1 - t^2 + t^4, t^4\}$ является базисом в пространстве четных многочленов степени ≤ 4. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты четного многочлена степени ≤ 4 в первом базисе – числа x_1, x_2, x_3, если известны его координаты $x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}$ во втором базисе.

4.19 (**Ким** 44.89). Описать (словами) характер связи между базисами

$$E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} \text{ и } E' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\},$$

если матрица перехода

(1) скалярная,

(2) диагональная,

(3) верхняя треугольная,

(4) нижняя треугольная.

5. Системы линейных уравнений

Систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x \ = b_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

кратко записывают в виде $A{\cdot}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, (2)
где $A = (a_{\mathbf{ij}})$ – матрица коэффициентов, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2,..., x_n]^T$ – столбец неизвестных, $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2,..., b_m]^T$ – столбец правых частей (свободных членов).

Если представить матрицу коэффициентов как систему столбцов
$A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ \ldots \ , \boldsymbol{a}_n]$, то система уравнений (1) будет описывать столбец правых частей, как линейную комбинацию столбцов матрицы:

$$x_1{\cdot}\boldsymbol{a}_1 + x_2{\cdot}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n{\cdot}\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}. \qquad (3)$$

Основными характеристиками системы уравнений, от которых зависит существование и единственность решения, являются

n – число неизвестных (число столбцов),
r – ранг матрицы коэффициентов: $r = \mathrm{rank}(A)$,
R – ранг расширенной матрицы: $R = \mathrm{rank}(A \mid b)$.

Имеют место следующие положения:

1. Система совместна (имеет решение) тогда и только тогда, когда $r = R$ (теорема Кронекера-Капелли); в случае $r<R$ система несовместна (не имеет решения). Другая формулировка этого предложения: система совместна тогда и только тогда, когда $b \in L(A)$.
2. Решение системы единственно тогда и только тогда, когда $r = R = n$,
3. В случае $r = R < n$ система является неопределенной (имеет бесконечно много решений). Очевидно, что число уравнений (число строк матрицы) $m \geq R$.

Система уравнений с квадратной невырожденной матрицей называется *крамеровской*. Для этой системы $n = m = r = R$.

Единственное решение крамеровской системы можно найти путем умножения уравнения (2) на обратную матрицу: $\boldsymbol{x} = A^{-1}{\cdot}\boldsymbol{b}$.

В частности, если столбец правых частей $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, единственным решением системы является $\boldsymbol{x} = [0, 0,..., 0]^T$.

Другой способ – правило Крамера: $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, где $\Delta = \det(A)$, а Δ_k – определитель, который получается из определителя Δ путем замены столбца $\boldsymbol{a}_k$ столбцом правых частей $\boldsymbol{b}$:

$$\Delta_k = \det\, [\, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots , \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots , \boldsymbol{a}_n].$$

Оба эти способа практически приемлемы только для небольших систем с двумя-тремя неизвестными, либо в случае, когда обратная матрица или определители Δ и Δ_k легко вычисляются.

5.1 (**Бек** 17.1, **Фад** 400,108, **Кос** 2004). Доказать, что система имеет единственное решение, найти его:

1) $2x_1 + x_2 = 10$, $x_1 + x_2 = 17$

2) $3x + 5y = 2$, $5x + 9y = 4$

3) $2x_1 + x_2 - x_3 = 2$, $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$, $x_1 + x_3 = 3$

4) $y + 3z = -1$, $2x + 3y + 5z = 3$, $3x + 5y + 7z = 6$

5) $2x_1 - x_2 - x_3 = 4$, $3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11$, $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11$

6) $x_1 + x_2 + 2x_3 = -1$, $2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4$, $4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2$

7) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$, $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$, $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$

8) $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31$, $5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29$, $3x_1 - x_2 + x_3 = 10$

9) $(3-i)x + (4+2i)y = 2+6i$, $(4+2i)x + (2+3i)y = 5+4i$

10) $(2+i)x + (2-i)y = 6$, $(3+2i)x + (3-2i)y = 8$

11) $(1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i$, $(1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i$

12) $iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i$, $2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i$

13) $x + iy - 2z = 10$, $x - y + 2iz = 20$, $ix + 3iy - (1+i)z = 30$

14) $(2+i)x + iy + z = 1+i$, $x + (2+i)y + iz = 2i$, $ix + y + (2+i)z = 2i$

Ценность правила Крамера заключается в том, что оно дает решение системы в виде формулы и может применяться, например, для решения и исследования систем с буквенными коэффициентами.

5.2 (**Про** 26, 27, 35). Решить и исследовать системы уравнений

1) $ax+by=ad$, $bx+cy=bd$.

2) $x\cdot\mathrm{tg}\alpha+y=\sin(\alpha+\beta)$, $x-y\,\mathrm{tg}\alpha=\cos(\alpha+\beta)$.

3) $x\cdot\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta$, $x\cdot\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta$.

4) $x + y + z = 1$, $a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z = d$, $a^2\cdot x + b^2\cdot y + c^2\cdot z = d^2$.

5) $a\cdot x + y + z = 1$, $x + a\cdot y + z = b$, $x + y + a\cdot z = c$.

6) $a\cdot x + y + z = 1$, $x + b\cdot y + z = 1$, $x + y + c\cdot z = 1$.

Крамеровские системы линейных уравнений получаются, в частности, при решении задач о полиномиальной аппроксимации. Пусть на координатной плоскости заданы точки (x_k, y_k), $k = 0, 1, ..., n$ (все x_k различны). Через них можно провести единственный график многочлена степени $\le n$. Существуют формулы (Лагранжа и Ньютона), позволяющие получить этот многочлен сразу, но в “свернутом виде”. Построим интерполяционный многочлен методом *неопределенных коэффициентов*. Запишем

$$y = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n$$

и подставим в это уравнение заданные точки (x_k, y_k). Получим систему уравнений с неизвестными $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Ее определитель носит название определителя Вандермонда, он равен произведению всевозможных разностей $x_k - x_s$, где $0 \le s < k \le n$ и отличен от нуля, если все x_k различны.

5.3 (**Про** 585, 6). Найти коэффициенты многочленов $y = f(x)$, зная, что

1. $f(1) = -1$, $f(-1) = 9$, $f(2) = -3$, многочлен степени 2;
2. $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$, $f(2) = 3$, $f(3) = 16$, многочлен степени 3.

В случае $r = R < n$ система является неопределенной (имеет бесконечно много решений). Общее решение такой системы может быть записано в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u},$$

где $\boldsymbol{x}_0$ – частное решение неоднородной системы $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,
$\boldsymbol{u}$ – общее решение однородной системы $A \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Множество решений однородной системы представляет собой подпространство в арифметическом пространстве $F^{\,n}$, где F – поле, которому принадлежат элементы матрицы A. Общее решение этой системы можно представить как произвольную линейную комбинацию базисных решений с произвольными коэффициентами: $\boldsymbol{u} = t_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + t_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 + \ldots + t_k \cdot \boldsymbol{u}_k$.

Базис пространства решений называется *фундаментальной системой решенийоднородной системы уравнений*.

Размерность пространства решений $k = n - r$.

5.4 (**Бек** 19.2). Доказать, что:

1) разность двух решений неоднородной системы линейных уравнений есть решение соответствующей однородной системы;
2) сумма любого решения неоднородной системы линейных уравнений и любого решения соответствующей однородной системы есть также решение данной системы.

5.5 (**Бек** 19.3). На сколько единиц ранг основной матрицы может отличаться от ранга расширенной?

5.6 (**Бек** 19.10). Пусть столбец свободных членов линейной системы уравнений равен сумме всех столбцов ее основной матрицы. Указать какое-либо частное решение системы.

5.7 (**Бек** 19.13). Доказать, что если столбцы основной матрицы линейно независимы, то система линейных уравнений имеет не более одного решения.

5.8 (**Бек** 19.14). Доказать, что если строки основной матрицы линейно независимы, то система линейных уравнений совместна при любом столбце свободных членов.

5.9 (**Бек** 19.15). Доказать следующее утверждение: если система линейных уравнений совместна при любом столбце свободных членов, то строки ее основной матрицы линейно независимы.

5.10 (**Бек** 19.17). Сформулировать условия (и доказать их необходимость и достаточность), которым должна удовлетворять основная матрица системы линейных уравнений для того, чтобы число решений, в зависимости от столбца свободных членов $\boldsymbol{b}$, равнялось:

(1) 0 или 1; (2) 1 или ∞; (3) 0 или ∞; (4) 1 при всех $\boldsymbol{b}$.

5.11 (**Бек** 19.16). Доказать, что всегда имеет место ровно одна из двух возможностей (*альтернатива Фредгольма*):

- система линейных уравнений совместна при любом столбце свободных членов,
- соответствующая система однородных уравнений имеет ненулевое решение.

Основной метод решения систем линейных уравнений – *метод Гаусса* – основан на элементарных преобразованиях строк или столбцов матрицы A (расширенной матрицы $[A \mid b]$, если решается неоднородная система). Метод Гаусса не требует предварительного вычисления рангов и анализа совместности и определенности системы – все это выясняется в процессе решения.

Более распространен вариант метода Гаусса, основанный на преобразованиях строк. Если получаются нулевые строки, они отбрасываются, так что строки матрицы, оставшиеся к концу преобразований, линейно независимы. Если в процессе решения неоднородной системы получается нулевая строка коэффициентов при ненулевом свободном члене в этой строке – система несовместна.

Целью преобразований является формирование набора *базисных столбцов*. В каждом таком столбце ровно один элемент отличен от нуля, причем ненулевые элементы разных базисных столбцов стоят в разных линейно независимых строках. Количество базисных столбцов равно рангу матрицы коэффициентов r. (Столбец, содержащий свободные члены неоднородной системы,не может быть использован в качестве базисного) Неизвестные, соответствующие базисным столбцам называются базисными, остальные – небазисными (иногда – *свободными*); их количество равно $n - r$.

Если матрица приведена к такому виду, система уравнений разрешена относительно базисных неизвестных. Придав небазисным неизвестным произвольные значения, из нее можно найти значения базисных неизвестных и, таким образом, получить частное решение системы.

Для получения фундаментальная системы решений однородной системы сформируем $n - r$ наборов небазисных неизвестных, в каждом из которых только одна из этих переменных отлична от нуля, причем в различных наборах отличны от нуля различные небазисные неизвестные. Эти наборы линейно независимы. Для каждого такого набора найдем соответствующие значения всех базисных неизвестных и, таким образом, получим фундаментальную систему решений.

Пример. Рассмотрим систему $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 2, \\ x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -5. \end{cases}$ Составим расширенную матрицу и выполним элементарные преобразования строк. Комментарий $(i)\pm(j)\cdot\alpha$ означает, что к i-й строке прибавляется (вычитается) j-я, умноженная на α. Удаление пропорциональных строк производится без комментариев.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 4 & 2 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2)-(1)\cdot 2 \\ (3)-(1)\cdot 1 \end{array} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right] (1)-(3)\cdot 1 \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

Получилось $R = r = 2$ – система совместна, размерность пространства решений соответствующей однородной системы $n - r = 2$. Разрешив систему относительно базисных неизвестных x_1 и x_3, получим $\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_4 + 3, \\ 2x_3 = -3x_2 + x_4 - 4. \end{cases}$

Чтобы найти частное решение неоднородной системы, придадим небазисным неизвестным значения, например, $x_2 = x_4 = 0$. Из уравнений преобразованной системы найдем значения базисных неизвестных $x_1 = 3$, $x_3 = -2$. Таким образом, частное решение неоднородной системы $\boldsymbol{x}_0 = [3, 0, -2, 0]^T$.

Чтобы получить фундаментальную систему решений однородной системы,

сформируем два линейно независимых набора небазисных неизвестных:

($x_2 = 2$, $x_4 = 0$) и ($x_2 = 0$, $x_4 = 2$). Для каждого из них найдем соответствующие значения

базисных неизвестных и получим два линейно независимых решения однородной системы: $\boldsymbol{u}_1 = [–4, 2, –3, 0]^T$ и $\boldsymbol{u}_2 = [–8, 0, 1, 2]^T$. Значение 2 для небазисных неизвестных x_2 и x_4 было взято для того, чтобы получить целочисленные результаты.

Введем произвольные параметры t_1, t_2 и запишем общее решение неоднородной системы в векторном виде: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + t_2 \cdot \boldsymbol{u}_2$ или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

в компонентах решение имеет вид $\begin{cases} x_1 = \ \ 3 - 4t_1 - 8t_2 \\ x_2 = \qquad 2t_1 \\ x_3 = -2 - 3t_1 + t_2 \\ x_4 = \qquad\qquad 2t_2. \end{cases}$.

Общее решение однородной системы уравнений есть линейная оболочка натянутая на фундаментальную систему решений (базис пространства решений).

Общее решение неоднородной системы есть линейное многообразие: линейная оболочка натянутая на фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений плюс частное решение неоднородной системы (см **6** стр.50)

5.12 (**Бек** 19.1, **Про** 689–:692, **Фад** 444). Исследовать совместность и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

1) $2x - 3y = 4$

2) $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$

3) $2x + y + z = 4$
$3x + z = 4$

4) $(\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}-1)y - \sqrt{2}\,z = (\sqrt{2}+1)$
$x + (3-2\sqrt{2})y + (\sqrt{2}-2)z = 1$

5) $x + 2y + 3z = -4$
$2x + 3y + 4z = 1$

6) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$
$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1$

$3x + 4y + 5z = 6$

7) $\begin{aligned} &2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ &3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ &9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} &2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ &4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ &2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} &3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ &6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ &9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} &3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ &7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ &5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{aligned}$

12) $\begin{aligned} &x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ &2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ &x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{aligned}$

13) $\begin{aligned} &2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ &3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ &4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ &x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{aligned}$

14) $\begin{aligned} &2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ &3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ &5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ &2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{aligned}$

15) $\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ &3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ &2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{aligned}$

16) $\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ &2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ &3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ &2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{aligned}$

17) $\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ &3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ &4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{aligned}$

18) $\begin{aligned} &x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ &x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ &3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ &4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{aligned}$

19) $\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ &x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ &x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ &-7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{aligned}$

20) $\begin{aligned} &2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ &x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ &3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ &4x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{aligned}$

5.13 (**Бек** 18.1, **Про** 729–730, **Фад** 449). Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

1) $x - y = 0$

2) $x - y + 2z = 0$

3) $x + y + z + u + v = 0$

4) $\begin{aligned} &x + 3y + 2z = 0 \\ &2x + 4y + 3z = 0 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} &5x - 8y + 3z = 0 \\ &2x - 3y + z = 0 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} &x + 2y + 3z = 0 \\ &2x + 3y + 4z = 0 \end{aligned}$

$x + y + z = 0$

7) $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

8) $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$
$2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$

9) $5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0$
$4x_1 - 8x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$

10) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

11) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$
$3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$
$3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0$

12) $x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$
$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$

13) $x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0$
$x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 0$
$x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 18x_5 = 0$

14) $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$
$3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 0$

15) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$
$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0$

16) $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0$
$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$

17) $x_1 - x_3 = 0$
$x_2 - x_4 = 0$
$-x_1 + x_3 - x_5 = 0$
$-x_2 + x_4 - x_6 = 0$
$-x_3 + x_5 = 0$
$-x_4 + x_6 = 0$

18) $x_1 - x_3 + x_5 = 0$
$x_2 - x_4 + x_6 = 0$
$x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0$
$x_2 - x_3 + x_6 = 0$
$x_1 - x_4 + x_5 = 0$

5.14 (**Про** 712–719). Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

1) $5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3$
$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1$
$8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9$
$7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda$

2) $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3$
$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 5$
$x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11$
$4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2$

3) $2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2$
$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4$
$4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4$
$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7$

4) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$
$4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7$
$6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9$
$\lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11$

5) $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$
$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$
$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7$
$8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9$

6) $\lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1$

7) $\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1$

8) $(1+\lambda)\, x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + (1+\lambda)\, x_2 + x_3 = \lambda$
$x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2$

9) $\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda$
$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2$

10) $(\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda$
$\lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda$
$3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 5$

11) $\lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda$
$\lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda-1)x_3 = \lambda$
$(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda+3)x_3 = 1$

12) $2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2$
$x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda$

5.15 (Про 741). Выяснить, образуют ли строки каждой из матриц

$$A = \begin{bmatrix} 30 & -24 & 43 & -30 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -5 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 &= 0. \end{aligned}$$

5.16 (Про 742). Определить, какие из строк матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0. \end{aligned}$$

5.17 (Про 733). Доказать, что для любой однородной системы уравнений с рациональными (в частности, с целыми) коэффициентами можно построить целочисленную фундаментальную систему решений (при условии, что ранг матрицы коэффициентов меньше числа неизвестных).

5.18 (**Фад** 453, **Ок** 369). Найти все решения матричных уравнений

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}.$$

5.19 (**Фад** 454). Найти все решения задачи (5.18.1), удовлетворяющие условию $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = X$.

5.20 (**Про** 874). Доказать, что матричное уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда rank(A) = rank(A|B).

5.21 (**Про** 875). Доказать, что матричное уравнение $AX = 0$, где A – квадратная матрица, имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(A) = 0$.

5.22 (**Доп**). Для заданных матриц A и B решить матричные уравнения $XA = B$, $AX = B$, $A = XB$, $A = BX$

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$.

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & -1+i \end{bmatrix}$.

6) $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 \\ 2 & 2(1-i) \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2(1-i) & 2(1+i) \\ 2(1+i) & 4 \end{bmatrix}$.

5.23 (**Икр** 5.4.14–15). Решить матричные уравнения:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X - X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

2) $X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Подпространства и линейные многообразия

Основной способ задания подпространства в любом пространстве – представление подпространства в виде линейной оболочки некоторой системы векторов. Говорят также, что подпространство *натянуто* на эту систему. Если эта система линейно независима, она является базисом подпространства. Такое задание подпространства будем называть *прямым*. Иначе этот способ называют *параметрическим*.

6.1 (**Про** 1309). Доказать, что размерность линейного подпространства L, натянутого на векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, равна рангу матрицы A, составленной из координатных столбцов данных векторов, а за базис подпространства L, можно взять любую базу данной системы векторов.

6.2 (**Про** 1295). Пусть линейное подпространство L_1 содержится в линейном подпространстве L_2. Доказать, что для их размерностей $\dim(L_1) \le \dim(L_1)$, причем эти размерности равны тогда и только тогда, когда $L_1 = L_2$. Верно ли последнее утверждение для произвольных подпространств данного пространства?

Подпространство в арифметическом пространстве может быть задано как пространство решений однородной системы уравнений. Такое задание подпространства будем называть *двойственным*. Иначе этот способ называют *неявным*.

В геометрии примерами подпространств являются прямые и плоскости, проходящие через начало координат. Параметрическое уравнение прямой или плоскости представляет собой прямое задание подпространства, общее уравнение плоскости (общие уравнения прямой) – двойственное задание.

Переход от двойственного задания к прямому сводится к построению системы фундаментальных решений однородной системы.

6.3 (**Про** 1307). Доказать, что решения любой системы однородных линейных уравнений ранга r с n неизвестными образуют подпространство n-мерного пространства F^{n} размерности $k = n - r$.

Обратно: для любого линейного подпространства L размерности k пространства F^{n} существует система однородных линейных уравнений с n неизвестными ранга $r = n - k$, решения которой заполняют в точности данное подпространство L.

6.4 (**Про** 1308). Найти (угадать!) какой-нибудь базис и определить размерность подпространства L арифметического пространства, если L задано уравнением $x_1 + x_2 + \ldots + x_{\text{n}} = 0$.

6.5 (**Бек** 22.8, **Доп**). Найти размерность и базис линейного подпространства, заданного в некотором базисе системой линейных уравнений $A{\cdot}x = 0$:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} -3 & 10 & -10 \\ -7 & 4 & -4 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ 6) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ 7) $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

5) $A=(2 \;\; -1 \;\; 1)^{\text{T}}$

8) $A=\begin{pmatrix} 1+i & 1+3i \\ 1-2i & 1+2i \end{pmatrix}$. 9) $A=\begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ 6-4i & 9+7i \end{pmatrix}$. 10) $A=\begin{pmatrix} 1+2i & i \\ 2-i & 1 \end{pmatrix}$.

11) $A=\begin{pmatrix} 1-i & -3+2i & 2-i \\ -4+6i & 4-3i & -3i \\ -9+i & 5-i & 4 \end{pmatrix}$ 12) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 2+i \\ 1-3i & -2-4i & 5-5i \\ 2i & 2+2i & -2+4i \end{pmatrix}$

Первый способ перехода от к прямого задания подпространства к двойственному основан на использовании неопределенных коэффициентов. Пусть на систему арифметических векторов $P = \{p_1, p_1, \ldots, p_{\text{k}}\}$ натянуто подпространство $V \subseteq F^{\text{n}}$. Запишем уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{\text{n}}x_{\text{n}} = 0$ и последовательно подставим в него в качестве значений неизвестных x_{t} компоненты каждого из векторов p_{s} ($s = 1, 2, \ldots, k$). Получится однородная система уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_{t}. Найдя для нее фундаментальную систему решений, получим искомую систему уравнений, являющуюся двойственным заданием подпространства V.

Пример. Пусть

$$P = \{p_1 = [1,-1,1,0]^{\mathrm{T}},\ p_2 = [1,1,0,1]^{\mathrm{T}},\ p_1 = [2,0,1,1]^{\mathrm{T}}\}.$$

Однородная система уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_{i} имеет вид $\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 + a_2 + a_4 = 0, \\ 2a_1 + a_3 + a_4 = 0. \end{cases}$ Здесь третье уравнение является следствием (суммой) первых двух, из которых выразим $\begin{cases} a_3 = -a_1 + a_2, \\ a_4 = -a_1 - a_2. \end{cases}$ Фундаментальная система решений: $[1,0,-1,-1]^{\mathrm{T}}$ и $[0,1,1,-1]^{\mathrm{T}}$. Таким образом, найдена система уравнений $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ являющаяся двойственным заданием подпространства $V = L(P)$.

Второй способ основан на использовании элементарных преобразованиях строк матрицы, столбцами которой являются арифметические векторы заданной системы $P = \{p_1, p_2,..., p_{\mathrm{k}}\}$. Обозначим эту матрицу так же P, введем вектор $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2,..., x_{\mathrm{n}}]^{\mathrm{T}}$, составленный из символов неизвестных и построим расширенную матрицу $[P \mid \boldsymbol{x}]$

Последовательностью преобразований строк приведем эту матрицу к такому виду, чтобы первые $r = \mathrm{rank}(P)$ строк блока P стали заведомо линейно независимыми, а остальные – равны нулю. Тогда в нижних строках блока x получатся некоторые линейные выражения, зависящие от компонент вектора $\boldsymbol{x}$. Приравняв каждое из этих выражений нулю, получим искомую систему уравнений.

<u>*Пример*</u> (продолжение). Выпишем расширенную матрицу и преобразуем ее строки:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (2)+(1)\cdot 1 \\ (3)-(1)\cdot 1 \\ \\ \end{array} \to \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & -1 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (2)+(3)\cdot 2 \\ (4)+(3)\cdot 1 \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 0 & -1 & -1 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 + x_4 \end{array}\right] (2) \leftrightarrow (3) \to \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & -1 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_3 + x_4 \end{array}\right].$$

Получили систему уравнений $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$ которая равносильна ранее найденной другим способом.

6.6 (**Бек** 20,24, **Про** 1313, **Доп**). Составить системы линейных уравнений, задающие линейные подпространства, натянутые на следующие системы векторов:

1) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1,2, 3)$. 2) $a_1 = (1, –1)$, $a_2 = (–1, 1)$.

3) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1,2,1,3)$. 4) $a_1 = (–1, 1)$, $a_2 = (3, 2)$.

5) $a_1 = (1, 1, 2, 2)$. 6) $a_1 = (0, 0, 0, 0)$

7) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_3 = (3,–5,7,2)$, $a_2 = (1,1,1,3)$, $a_4 = (1,–7,5,2)$,

8) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_3 = (1,1,2,2)$, $a_2 = (1,1,1,3)$, $a_4 = (1,1,1,3)$,

9) $a_1 = (1,–1,1,–1,1)$, $a_3 = (3,1,1,–1,7)$, $a_2 = (1,1,0,0,3)$, $a_4 = (0,2,–1,1,2)$.

10) $a_1 = (1, i, –1)$, $a_2 = (i, –1, 0)$.

6.6 (**Доп**). Построить прямое и двойственное описание подпространства многочленов вида $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, для которых $f(0) = f(1) = 0$.

Пересечением подпространств V_1 и V_2 пространства V называется множество $P = V_1 \cap V_2$ векторов из V, каждый из которых принадлежит как V_1, так и V_2. Она является подпространством. В геометрии пересечение подпространств (прямых и плоскостей, проходящих через начало координат) совпадает с пересечением в геометрическом смысле.

Замечание. Объединение подпространств $V_1 \cup V_2$, вообще говоря, не является подпространством.

Суммой подпространств V_1 и V_2 пространства V называется множество $S = V_1 + V_2$ векторов из V, каждый из которых можно представить в виде

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_1 \in V_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in V_2$. Сумма является подпространством пространства V. В геометрии суммой двух неколлинеарных прямых, проходящих через начало координат, является плоскость, содержащая эти прямые. Суммой плоскости и прямой, которая не лежит в этой плоскости, или двух некомпланарных плоскостей является все трехмерное геометрическое пространство

Для размерностей пересечения и суммы имеет место *формула Грассмана*: $\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

6.7 (**Про** 1319). Пусть в некотором пространстве заданы L_1 – подпространство с базисом $a_1, a_2,\ldots a_k$ и L_2 – подпространство с базисом $b_1, b_2,\ldots, b_p$..Доказать что для суммы подпространств $S = L_1 + L_2$

1. $s = \dim(S) = \mathrm{rank}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2,\ldots a_k, b_1, b_2,\ldots b_p)$, а базисом суммы служит любая база этой системы векторов,

2. базис суммы S можно получить, добавляя к векторам $a_1, a_2, .., a_k$ (линейно независимым) некоторые из векторов b_1, $b_2, \dots$, b_p. Меняя, если потребуется, порядок последних векторов, можно считать, что векторы a_1, $a_2, \dots$, a_k, $b_1, b_2, \dots$, b_{s-k} образуют базис суммы S.

6.8 (**Про** 1315). Доказать, что сумма $S = L_1 + L_2$ двух подпространств некоторого пространства V равна пересечению всех подпространств из V, содержащих как L_1, так и L_2.

6.9 (**Про** 1296). Доказать, что если сумма размерностей двух подпространств n-мерного пространства больше n, то эти подпространства имеют общий ненулевой вектор.

6.10 (**Ким** 44.67). Пусть V_1, V_2, V_3 – три подпространства в некотором пространстве V. Доказать, что

(1) $(V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3) \subseteq (V_1 + V_2) \cap V_3$.

(2) $(V_1 \cap V_2) + V_3 \subseteq (V_1 + V_3) \cap (V_2 + V_3)$.

Для каждого из этих соотношений привести пример подпространств V_1, V_2, V_3, для которых оно выполняется как равенство и пример подпространств, для которых оно выполняется как строгое включение

Сумма двух подпространств V_1 и V_2 называется *прямой* и обозначается $V_1 \oplus V_2$, если $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. В этом (и только в этом) случае разложение любого вектора $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, является однозначным. Вектор x_1 в этом случае называется проекцией вектора x на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2. Аналогично, вектор x_2 называется *проекцией вектора x на подпространство V_2 параллельно подпространству* V_1. Подпространство V_2 называется *прямым дополнением* к V_1; для данного V_1 прямое дополнение V_2 определяется неоднозначно

6.11 (**Про** 1327).. Доказать, что для любого подпространства L_1 пространства V можно найти прямое дополнение – подпространство L_2, такое , что все пространство $V = L_1 \oplus L_2$.

6.12 (**Бек** 21.4). Доказать, что n–мерное арифметическое пространство является прямой суммой подпространств, натянутых на системы векторов $A = \{a_1,...\}$ и $B = \{b_1,...\}$:

1) $a_1 = (-1, 1)$, $b_1 = (1,4)$, $a_2 = (2, 2)$,.

2) $a_1 = (2, 1, 1)$, $b_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 4, 1)$, $b_2 = (4, 4, 4)$,.

3) $a_1 = (1, 1, 1, 3)$,
$a_2 = (1, 2, 1, 3)$,
$b_1 = (1, 1, 2, 2)$
$b_2 = (1, 1, 1, 1)$
$b_3 = (2, 2, 3, 3)$.

4) $a_1 = (1, 2, 1, 3)$,
$a_2 = (1, 1, 1, 3)$,
$a_3 = (1, 0, 1, 3)$,
$a_4 = (3, -5, 7, 2)$
$b_1 = (1, 1, 1, 1)$
$b_2 = (3, 3, 3, 3)$.

6.13 (**Ким** 45.77). Найти два различных дополнительных подпространства для подпространства в $\mathbf{R}^4$, натянутого на векторы

$$a_1 = (1,3,0,-1),\ a_2 = (2,5,1,2),\ a_3 = (1,2,1,3).$$

6.14 (**Бек** 21.5). Представить данный вектор $\boldsymbol{x}$ в виде суммы двух векторов, один из которых лежит в L_1, а другой – в L_2, где L_1 – линейная оболочка системы векторов $A = \{a_1,...\}$, а L_2 –линейная оболочка системы векторов $B = \{b_1,...\}$. Проверить единственность разложения:

1) $a_1 = (-1, 6)$, $b_1 = (-1, 1)$, $x = (3, 2)$.

2) $a_1 = (4, 3, 1)$, $b_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 3)$, $x = (2, -1, -5)$.

3) $a_1 = (4, 3, 1)$, $b_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 3)$, $x = (2, 0, -1)$.

4) $a_1 = (4, 3, 1)$, $b_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 3)$, $x = (-2, -2, -2)$.

5) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $b_1 = (1, 0, 1, 3)$,
$a_2 = (1, 1, 1, 2)$, $b_2 = (0, 0, 1, 1)$,
$a_3 = (1, 1, 1, 3)$, $x = (-1,8, -6, 5)$.

6.15 (**Бек** 21.6, **Ким** 44.75). Найти проекцию данного вектора x на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2, где L_1 – линейная оболочка системы векторов $A = \{a_1,...\}$, а L_2 –линейная оболочка системы векторов $B = \{b_1,...\}$.

1) $a_1 = (-1, 1)$, $b_1 = (1, 3)$,

2) $a_1 = (-1, 1)$, $b_1 = (1, 3)$,

3) $a_1 = (i, 2)$, $b_1 = (1 + i, 3)$,

$x = (2, -2)$. $x = (2, 6)$. $x = (-1, 2i)$.

4) $a_1 = (-1, 1)$, $b_1 = (1, 3)$, $x = (1, 4)$.

5) $a_1 = (-1, 1)$, $b_1 = (1, 3)$, $x = (2, 6)$.

6) $a_1 = (1, 1, 1)$,
$a_2 = (-3, 2, 0)$,
$a_3 = (-2, 3, 1)$,
$b_1 = (2, 0, -1)$,
$x = (1, 4, 1)$.

7) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$a_2 = (3, -5, 7, 2)$,
$b_1 = (1, 1, 2, 2)$,
$b_2 = (1, 1, 1, 3)$,
$x = (1, -7, 5, -2)$.

6.16 (**Про** 1323). Доказать, что если размерность суммы двух подпространств на единицу больше размерности их пересечения, то сумма совпадает с одним из этих подпространств, а пересечение – с другим.

6.17 (**Доп**). Пусть V_1 – пространство нечетных многочленов степени $\leq n$, а V_2– пространство четных многочленов степени $\leq n$. Что представляют собой объединение $V_1 \cup V_2$ и сумма $V_1 + V_2$? Является ли сумма прямой?

6.18 (**Доп**). В условиях предыдущей задачи найти проекции многочлена f на V_1 параллельно V_2 и на V_2 параллельно V_1:

(1) $f = 3t^5 + 2t^4 + t^3 - t - 2$, (2) $f = t^3 (2t - 3)^3$.

6.19 (**Доп**). Пусть V_1 – пространство верхних треугольных матриц порядка n, а V_2 – пространство нижних треугольных матриц порядка n. Что представляют собой пересечение $V_1 \cap V_2$ и сумма $V_1 + V_2$? Является ли сумма прямой?

6.20 (**Доп**). Пусть V_1 – пространство симметрических матриц порядка n, а V_2 – пространство кососимметрических матриц. порядка n. Что представляют собой пересечение $V_1 \cap V_2$ и сумма $V_1 + V_2$? Является ли сумма прямой?

6.21 (**Про** 1329, **Доп**). В условиях предыдущей задачи найти проекции матрицы A на V_1 параллельно V_2 и на V_2 параллельно V_1:

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, (2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, (3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & .. & 2 \\ 0 & 2 & .. & 2 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 2 \end{bmatrix}$,

(4) квадратная матрица A общего вида.

6.22 (**Про** 1328). Доказать, что $F^{\,n} = V_1 \oplus V_2$, где:

$$V_1 = \{\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

$$V_2 = \{\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$$

6.23 (**Про** 1328, дополнено). В условиях предыдущей задачи найти проекции арифметического вектора x на V_1 параллельно V_2 и на V_2 параллельно V_1

(1) $\boldsymbol{x} = [1, 2, 3, 4, 5]^{\mathrm{T}}$, (2) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_k = [0, 0, \dots,0, 1, 0,\dots, 0]^{\mathrm{T}}$ (единственная единица занимает k-ю позицию из n)

(3) вектор $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^{\mathrm{T}}$ общего вида.

6.24 (**Бек**. 21.3.). Дана матрица A из n строк. Доказать, что n–мерное арифметическое пространство является прямой суммой линейной оболочки столбцов A и подпространства решений системы линейных уравнений $A^{\mathrm{T}}\cdot x = 0$.

Пересечение подпространств V_1 и V_2 пространства V легко найти, объединив в одну систему их двойственные задания: если

$$V_1 = \{x \mid A_1 \cdot x = 0\} \text{ и } V_2 = \{x \mid A_2 \cdot x = 0\}, \text{ то } V_1 \cap V_2 = \left\{ x \,\middle|\, \begin{matrix} A_1 \cdot x = 0 \\ A_2 \cdot x = 0 \end{matrix} \right\}$$

Способ построения пересечения с использованием прямых заданий покажем на примере.

Пусть $V_1 = L\left(a_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}\right)$ и $V_2 = L\left(b_1 = \begin{bmatrix}3\\2\\4\\5\end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix}3\\5\\4\\4\end{bmatrix}\right)$. Рассмотрим вектор $x \in V_1 \bigcap V_2$ и представим его как линейную комбинацию
$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \beta_1 b_1 + \beta_{12} b_2$. Получим однородную систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1 + 4\alpha_2 - 3\beta_1 - 3\beta_2 = 0,\\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\beta_1 - 5\beta_2 = 0,\\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\beta_1 - 4\beta_2 = 0,\\ 4\alpha_1 + 1\alpha_2 - 5\beta_1 - 4\beta_2 = 0.\end{cases}$$

Одним из ее ненулевых решений является $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$.
С помощью этих коэффициентов найдем $x = [6,7,8,9]^T$.

Сумму подпространств V_1 и V_2 пространства V проще всего найти, используя их прямые задания: если $V_1 = L(A_1)$, $V_2 = L(A_2)$, то $V_1 + V_2 = L(A_1 \mid A_2)$ (линейные оболочки столбцов матриц).

6.25 (**Про** 1317,18,20–22, **Икр** 1.5.10–12, **Бек** 21.7). Найти базисы суммы и пересечения двух подпространств, натянутых на заданные системы векторов $A = \{a_1,...\}$, и $B = \{b_1,...\}$.

1) $a_1 = (1, 3)$, $b_1 = (-2, 1)$,
$a_2 = (2, 6)$, $b_2 = (3, -3)$,
$a_3 = (1, 4)$, $b_3 = (2, -2)$.

2) $a_1 = (4, 2, 1)$, $b_1 = (-2, 3, 1)$,
$a_2 = (-3, 2, 0)$, $b_2 = (5, 3, 13)$,
$a_3 = (-1, 4, 0)$, $b_1 = (7, 0, 12)$.

3) $a_1 = (1, 1, 1)$, $b_1 = (3, 2, 1)$,
$a_2 = (-2, -2, 2)$, $b_2 = (2, 1, 1)$,
$a_3 = (4, 4, 4)$, $b_1 = (5, 3, 2)$.

4) $a_1 = (1, 1, 1)$, $b_1 = (-2, 3, 1)$,
$a_2 = (4, 2, 1)$, $b_2 = (1, 5, 1)$,
$a_3 = (2, 0, -1)$, $b_3 = (5, -2, -1)$.

5) $a_1 = (1, 2, 1)$, $b_1 = (2, 3, -1)$,
$a_2 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 2, 2)$,
$a_3 = (1, 3, 3)$, $b_1 = (1, 1, -3)$.

6) $a_1 = (2, 1, 0)$, $b_1 = (1, 1, 2)$,
$a_2 = (1, 2, 3)$, $b_2 = (-1, 3, 0)$,
$a_3 = (-5, -2, 1)$, $b_3 = (2, 0, 3)$.

7) $a_1 = (1, 2, 0, 1)$,
$a_2 = (1, 1, 1, 0)$,
$b_1 = (1, 0, 1, 0)$,
$b_2 = (1, 3, 0, 1)$.

8) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$a_2 = (1, -1, 1, -1)$,
$b_1 = (1, 2, 0, 2)$,
$b_2 = (3, 1, 3, 1)$.

9) $a_1 = (1, 2, 1, 3)$,

10) $a_1 = (1, 2, 1, 3)$,

$a_2 = (-1,\ 8,\ -6,\ 5)$,
$a_3 = (0,\ 10,\ -5,8)$,
$b_1 = (1,\ 4,\ -1,\ 5)$,
$b_2 = (3,\ -2,\ 6,\ 3)$.
$b_3 = (4, 2, 5, 8)$.

$a_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 3)$,
$a_3 = (1,\ 0,\ 1,\ 3)$,
$b_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$b_2 = (3,\ 3,\ 3,\ 3)$.
$b_3 = (1, 1, 2, 2)$.

11) $a_1 = (1,1,1,1)$,
$a_2 = (1,\ 2,\ 1,\ 3-i)$,
$a_3 = (2,\ 3,\ 2,\ 4-i)$,
$a_4 = (1, 1, 1, 2-i)$,
$b_1 = (0, 1, 0, 3-i)$,
$b_2 = (0,\ 2,\ 0,\ 5-2i)$,
$b_3 = (0,\ 2+i,\ 0,\ 6+i)$,
$b_4 = (1, 4+i, 5-i, -2-i)$.

12) $a_1 = (1,\ 2,\ 1,\ -2)$,
$a_2 = (2,\ 3,\ 1,\ 0)$,
$a_3 = (1,\ 2,\ 2,\ -3)$,
$b_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$b_2 = (1,\ 0,\ 1,\ -1)$,
$b_3 = (1, 3, 0, -4)$.

13) $a_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$,
$a_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 0)$,
$a_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 1)$,
$b_1 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$,
$b_2 = (0,\ 2,\ 1,\ 1)$,
$b_3 = (1, 2, 1, 2)$.

14) $a_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$a_2 = (1, 1, -1, -1)$,
$a_3 = (1, -1, 1, -1)$,
$b_1 = (1, -1, -1, 1)$,
$b_2 = (2,\ -2,\ 0,\ 0)$,
$b_3 = (3, -1, 1, 1)$.

15) $a_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 1)$,
$a_2 = (2,\ 3,\ 1,\ 0)$,
$a_3 = (3,\ 1,\ 1,\ -2)$,
$b_1 = (0,\ 4,\ 1,\ 3)$,
$b_2 = (1, 0, -2, -6)$,
$b_3 = (1, 0, 3, 5)$.

16) $a_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$a_2 = (1,\ 2,\ 1,\ 3)$,
$a_3 = (1,\ 1,\ 2,\ 2)$,
$b_1 = (2,\ 2,\ 2,\ 2)$,
$b_2 = (0,\ 0,\ 1,\ 1)$,
$b_3 = (2, 2, 3, 3)$.

17) $a_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$a_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 3)$,
$a_3 = (1,\ 2,\ 1,\ 3)$,
$a_4 = (1,\ 0,\ 1,\ 3)$,
$b_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 2)$,
$b_2 = (3,\ 3,\ 3,\ 3)$,
$b_3 = (1,\ 1,\ 2,\ 2)$,
$b_4 = (0, 0, 1, 1)$.

18) $a_1 = (1,\ 2,\ 3)$,
$a_2 = (1,\ -2,\ i)$,
$a_3 = (2,\ 0,\ 3+i)$,
$b_1 = (1,\ 0,\ 3i)$,
$b_2 = (1,\ 4,\ 3+2i)$,
$b_3 = (-1, 4, 3-4i)$.

19) $a_1 = (1,\ -i,\ 1+i)$,
$a_2 = (1,\ 0,\ 3i)$,
$a_3 = (-1, 2i, -2+i)$,
$b_1 = (1,\ -2,\ i)$,
$b_2 = (2,\ 1+i,\ -i)$,
$b_3 = (0, 5+i, -3i)$.

6.26 (**Икр** 1.5.13). Для вектора $x = [1,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}$ найти два различных разложения по подпространствам задачи 6.25.6.

6.27 (**Доп**). В пространстве $\mathbf{R}^4$ заданы два подпространства V_1 и V_2 в виде линейных оболочек столбцов двух матриц. Найти базис пересечения V_1 и V_2, а также базисы подпространств V_1 и V_2, включающие найденный базис $V_1 \bigcap V_2$. Какое пространство натянуто на объединение этих двух базисов?

$$V_1 = L\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = L\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

6.28 (**Бек** 21.9.). Найти размерность и базис суммы и пересечения подпространств пространства многочленов степени ≤ 3, натянутых на две системы многочленов:

$$1+2t+t^3,\ 1+t+t^2,\ t-t^2+t^3 \text{ и } 1+t^2,\ 1+3t+t^3,\ 3t-t^2+t^3.$$

Линейное многообразие – это подмножество векторного пространства, которое получается, если к каждому вектору некоторого *направляющего подпространства* V прибавить один и тот же *вектор сдвига* x_0. Символически: $M = x_0 + V$. Если $x_0 \in V$, многообразие $M = V$, т.е. само является подпространством. Векторы линейного многообразия часто называют его *точками*. Если направляющее подпространство задано прямым способом, т.е. $V = L(P)$, то формула $M = x_0 + V$ является прямым способом описания многообразия. Двойственным способом является задание многообразия в виде множества решений совместной (обязательно!) неоднородной системы линейных уравнений: $M = \{x |\ A \cdot x = b\}$. Чтобы гарантировать совместность, обычно для описания линейного многообразия используют систему уравнений с линейно независимыми строками матрицы A.

Еще один способ описания линейного многообразия (близкий к прямому) – задание некоторого набора принадлежащих ему векторов (в этом контексте лучше говорить «точек»). Пусть это $\{y_1, y_2,..., y_k\}$. Тогда в качестве вектора сдвига можно взять, например, y_1, а в качестве направляющего подпространства – линейную оболочку разностей $y_2–y_1$, ..., $y_k–y_1$.

Размерностью линейного многообразия $M = x_0 + V$. называется размерность направляющего подпространства V, которое определяется по заданному M единственным образом (это обосновывается в задаче 6.29). Изложенный выше способ прямого описания многообразия, заданного набором точек, порождает многообразие минимальной (для заданного набора) размерности.

В геометрии линейными многообразиями являются прямые и плоскости, не обязательно проходящие через начало координат.

6.29 (**Про** 1331). Пусть даны два линейных многообразия: $M_1 = x_1 + V_1$ и $M_2 = x_2 + V_2$. Доказать, что $M_1 = M_2$ тогда и только тогда, когда $V_1 = V_2$ и $x_1 - x_2 \in V_1$. Таким образом, подпространство, сдвигом которого получается многообразие, определено однозначно, а вектор сдвига – с точностью до слагаемого из V_1.

6.30 (**Ким** 46.7). Найти вектор сдвига и направляющее подпространство линейного многообразия, описанного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$$

6.31 (**Ким** 46.11, 12). Найти вектор сдвига и направляющее подпространство линейного многообразия в комплексном пространстве, описанного системой линейных уравнений в зависимости от значения λ:

$$(1)\begin{cases}\lambda x_1 + i x_2 - 2x_3 = -2\lambda,\\ -x_1 - i x_2 - 2\lambda x_3 = 2\lambda.\end{cases}\quad (2)\begin{cases}x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = \lambda,\\ x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda - i,\\ -x_1 + x_2 - 8x_3 + \lambda x_4 = 3i - 2.\end{cases}$$

Переход от двойственного описания линейного многообразия к прямому сводится к построению общего решения неоднородной системы уравнений.

Пусть $M = x_0 + V$, где $V = L(u_1, u_2,..., u_k)$ – прямое описание линейного многообразия. Чтобы получить его двойственное описание, надо сначала любым способом построить двойственное описание направляющего подпространства V, т.е. однородную систему $A{\cdot}x = 0$. Подставив в нее вектор сдвига x_0, получим столбец правых частей $b = A{\cdot}x_0$. Окончательно имеем неоднородную систему уравнений $A{\cdot}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ – двойственное описание линейного многообразия.

6.32 (**Ким** 22.32). Построить двойственные описания линейных многообразий минимальной размерности, содержащих точки

(1) $y_1 = [3,0,0,2,1]^T$, $y_2 = [0,1,1,0,0]^T$.

(2) $y_1 = [1,–1,2,0,3]^T$, $y_2 = [5,–3,0,–2,1]^T$, $y_3 = [–1,0,3,1,4]^T$.

Для многообразий малой размерности часто используется геометрическая терминология: одномерные многообразия называют *прямыми*, двумерные – *плоскостями*. Многообразие размерности $n – 1$ в n-мерном пространстве называется *гиперплоскостью*. Ее двойственное описание состоит из одного линейного уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + ...+ a_nx_n = b$.

Вещественное пространство $\mathbf{R}^n$ разбивается гиперплоскостью на два *полупространства*, в одном из которых $a_1x_1 + a_2x_2 + ...+ a_nx_n > b$, а в другом $a_1x_1 + a_2x_2 + ...+ a_nx_n < b$ (иногда для задания полупространств используются нестрогие неравенства ≥ и ≤).

6.33 (**Про** 1333). Доказать, что если прямая имеет две общие точки с линейным многообразием, то вся она содержится в этом многообразии.

6.34 (**Про** 1334,42). Доказать, что любые две прямые пространства F^n содержатся в некотором линейным многообразии размерности ≤3, а любые две плоскости – в некотором линейным многообразии размерно-сти ≤5.

Пересечение и сумма многообразий определяются так же. как пересечение и сумма подпространств: $P = M_1 \bigcap M_2$ есть множество векторов, каждый из которых принадлежит как M_1, так и M_2, сумма $S = M_1 + M_2$ есть множество векторов, каждый из которых можно представить в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$.

Пересечение многообразий M_1 и M_2 пространства V проще всего найти, используя их двойственные описания: если

$$M_1 = \{x|\, A_1 \cdot x = b_1\} \text{ и } M_2 = \{x|\, A_2 \cdot x = b_2\},$$

$$\text{то } M_1 \bigcap M_2 = \left\{ x \left| \begin{array}{l} A_1 \cdot x = b_1 \\ A_2 \cdot x = b_2 \end{array} \right. \right\}$$

<u>*Замечание*</u> 1. Пересечение многообразий может оказаться пустым.

<u>*Замечание*</u> 2. Пересечение многообразий можно найти и с помощью прямых описаний, причем этот метод более эффективен для многообразий малой размерности (например. для прямых).

<u>*Пример*</u>. Рассмотрим две прямые, каждая из которых заданна с помощью вектора сдвига и направляющего вектора: $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot t_1$ и $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot t_2$ (параметры в двух уравнениях прямых обозначены разными буквами !).

Приравняв два выражения вектора x, получим систему уравнений

$$\begin{cases} t_1 - 3t_2 = 3 - 4 = -1, \\ 2t_1 - 5t_2 = 2 - 3 = -1, \\ 3t_1 - 4t_2 = 4 - 2 = 2, \\ 4t_1 - 4t_2 = 5 - 1 = 4, \end{cases}$$

которая имеет решение $t_1 = 2$, $t_2 = 1$ (хотя могла оказаться и несовместной). «Точка пересечения» данных прямых $x = [6,7,8,9]^T$.

Сумму многообразий M_1 и M_2 проще всего найти, используя их прямые описания: если $M_1 = x_1 + L(A_1)$, $M_2 = x_2 + L(A_2)$, (линейные оболочки столбцов матриц), то $M_1 + M_2 = x_1 + x_2 + L(A_1 \mid A_2)$.

6.35 (**Про** 1337,8). Найти пересечение и сумму двух прямых $a_0 + a_1 \cdot t$ и $b_0 + b_1 \cdot t$ в $\mathbf{R}^5$.

(1) $a_0 = [2,1,1,3,-3]^T$, $a_1 = [2,3,1,1,-1]^T$, $b_0 = [1,1,2,1,2]^T$, $b_1 = [1,1,1,0,1]^T$,

(2) $a_0 = [3,1,2,1,3]^T$, $a_1 = [1,0,1,1,2]^T$, $b_0 = [2,2,-1,-1,-2]^T$, $b_1 = [2,1,0,1,1]^T$.

6.36 (**Про** 1335,6). Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы заданные в F^n прямые $M_1 = a_1 + L(b_1)$ и $M_2 = a_2 + L(b_2)$.

(1) лежали в одной плоскости

(2) проходили через одну точку, но не совпадали.

6.37 (**Доп**). Пусть $M_1 = a_1 + L(b_1)$ и $M_2 = a_2 + L(b_2)$ – две прямые в F^n, причем направляющие векторы b_1 и b_2 линейно независимы. Написать уравнения плоскости

(1) проходящей через прямую M_1 параллельно прямой M_2,

(2) проходящей через прямую M_2 параллельно прямой M_1.

Что представляет собой сумма $M_1 + M_2$?

6.38 (**Мод** 1616). Определить взаимное расположение в $\mathbf{R}^4$ гиперплоскости $5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20$ и прямой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7, \end{cases}.$$

6.39 (**Доп**). В пространстве многочленов степени $\leq n$ задано множество $M = \{f \mid f(\alpha) = \beta\}$, где α, β – некоторые константы. Доказать, что M – линейное многообразие, построить его прямое и двойственное описание, найти размерность. Является ли это многообразие гиперплоскостью?