Министерство образования Российской Федерации

Нижегородский государственный университет
им. Н.И.Лобачевского

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра математической логики и высшей алгебры

«Задачи по геометрии»

(методическая разработка)

Нижний Новгород, 2004

УДК: 512.12
Задачи по геометрии:
Методическая разработка / Составители:
Л.Г.Киселева,М.М.Шульц. - Н.Новгород:
Нижегородский государственный университет, 2004. – 30с.

Методическая разработка предназначена для студентов 1-го курса факультета ВМК, изучающих курс "Геометрия и алгебра".

Источники:

Мод – П.С.Моденов, А.С.Пархоменко, Сборник задач по аналитической геометрии. М. 1976.

Кле – Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, 1986.

Бек – Л.А.Беклемишева и др., Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М. 1987.

Бур – А.А.Бурдун и др. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Минск, 1989.

Доп – Дополнительные задачи, предлагаемые составителями.

Составители: Л.Г.Киселева, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. МлиВА,
М.М.Шульц, ст. преподаватель каф. МлиВА.
Рецензент: О. А. Кузенков, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. численного и функционального анализа факультета ВМК.

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского.

2004

1. Уравнения линий на координатной плоскости

Основы теории.

В декартовой системе координат

расстояние между точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ равно

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

расстояние между точкой $M(x, y)$ и прямо́й $x = a$ равно $|x - a|$,

расстояние между точкой $M(x, y)$ и прямой $y = b$ равно $|y - b|$.

1.1. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до точек A и B равна $2a^2$ при условии, что $a > c$. (**Мод** 291)

1.2. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найти геометрическое место точек, абсолютная величина разности квадратов расстояний которых до точек A и B равна $4a^2$ (**Мод** 292)

1.3. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух противоположных вершин заданного прямоугольника равна сумма расстояний до двух других противоположных вершин этого прямоугольника. (**Мод** 297)

1.4. Найти геометрическое место точек, для которых квадрат расстояния до двух точки пересечения двух взаимно перпендикулярных прямых в k раз больше произведения их расстояний до этих прямых. Рассмотреть случаи $k = 2$ и . $k = 2{,}5$. (**Мод** 304)

1.5. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых до прямых, на которых лежат две противоположные стороны квадрата, равно произведению расстояний до прямых, на которых лежат две другие стороны квадрата. (**Мод** 306)

1.6. Даны две различные точки A и B и положительное число k. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых до точек A и B равно k. (**Мод** 298)

1.7. Даны две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до точек F_1 и F_2 равна $2a$ при условии, что $a > c$. (**Мод** 315)

1.8. Дана окружность $x^2 + y^2 = a^2$. Во что превратиться эта окружность, если, не меняя абсцисс ее точек. Уменьшить их ординаты в k раз. (**Мод** 319)

1.9. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. Точка M делит этот отрезок на две части, длины которых a и b. Найти линию, описываемую точкой M при движении отрезка. (**Мод** 318)

1.10. Даны две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$. Найти геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых до точек F_1 и F_2 равна $2a$ при условии, что $a < c$. (**Мод** 321)

1.11(Мод 322-323). Дана точка F, прямая d и положительное число ε. Найти геометрическое место точек, отношение расстояния которых от точки F к расстоянию от прямой d равно ε. Указание. При $\varepsilon \neq 1$ взять точку $F(c,0)$, прямую d с уравнением $x = \dfrac{c}{\varepsilon}$. При $\varepsilon = 1$ взять точку $F(\dfrac{p}{2},0)$, прямую d с уравнением. $x = -\dfrac{p}{2}$. (**Мод** 322-323)

2. Линейные операции с векторами

Основы теории.

Базис на плоскости состоит из двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{e}_1$ $\boldsymbol{e}_2$. Координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ называются коэффициенты a_1, a_2 в разложении этого вектора по базису: $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$. Координаты вектора определяются однозначно. Если базис зафиксирован, вектор можно кратко записать через его координаты $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2\}$.

Базис в трехмерном пространстве состоит из трех некомпланарных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ называются коэффициенты a_1, a_2, a_3 в разложении этого вектора по базису: $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$. Координаты вектора определяются однозначно. Если базис зафиксирован, вектор можно кратко записать через его координаты $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

При сложении (вычитании) векторов соответствующие координаты складываются (вычитаются), при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число. Это справедливо как для координат на плоскости, так и в трехмерном пространстве.

Система координат на плоскости (в трехмерном пространстве) определяется заданием начальной точки O и базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$). Ориентированные прямые, несущие базисные векторы, называются осями координат. Обычно их обозначают Ox, Oy, Oz.

С каждой точкой M связывают ее радиус-вектор $\overline{OM}$. Его координаты в базисе, связанном с системой координат, называются координатами точки M. Если $\overline{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$, координаты точки M записываются в виде $M(x,y,z)$. (На плоскости сохраняются только координаты x,y). Если заданы две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то вектор

$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ (правило "конец минус начало").

2.1. Две перпендикулярные прямые, проходящие через точку M, пересекают окружность в точках A,B и C,D. Доказать, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 2 \cdot \overline{OM}$. (**Бур** 388)

2.2. В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина отрезка BC, а точка O – точка пересечения диагоналей. Принимая за базисные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overline{BD}, \overline{CO}, \overline{KD}$. (**Бек** 1.12)

2.3. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{BD}, \overline{CF}$. (**Бек** 1.16)

2.4. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AE}$, найти координаты вершин шестиугольника и его центра. (**Бек** 1.20)

2.5. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно 4. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overline{AD}$ и $\overline{AB}$, найти координаты вершин трапеции, точки M пересечения ее диагоналей и точки S пересечения продолжений боковых сторон.

(**Бек** 1.21)

2.6. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$, найти координаты

1) вершин C, B_1 и C_1;

2) точек K и L – середин ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно;

3) точек M и N пересечения диагоналей граней $A_1B_1C_1D_1$ и ABB_1A_1 соответственно;

4) точки O пересечения диагоналей параллелепипеда.

(**Бек** 1.22)

2.7. Векторы $\overline{AC} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{BD} = \boldsymbol{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. (**Мод** 1)

2.8. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Представить векторы $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ в виде линейных комбинаций векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Найти сумму векторов $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$. (**Мод** 4-5)

2.9. Точки K и L служат серединами сторон $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ через векторы $\overline{AK}$, $\overline{AL}$. (**Мод** 8)

2.10. В плоскости треугольника ABC найти такую точку M, что сумма векторов $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ равна нулю. Указание. Выразить радиус-вектор $\overline{OM}$ через радиусы-векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. (**Мод** 9)

2.11. Докажите, что точка M из задачи **Мод** 9 является точкой пересечения медиан треугольника ABC. (**Доп** 1)

2.12. В плоскости треугольника ABC найти такую точку M, что сумма векторов $\overline{MA} + 2\overline{MB} + 3\overline{MC} = \mathbf{0}$. (**Бур** 380)

2.13. На стороне треугольника AD параллелограмма $ABCD$ отложен вектор $\overline{AK} = \frac{1}{5}\overline{AD}$, а на диагонали AC – вектор $\overline{AL} = \frac{1}{6}\overline{AC}$. Докажите, что векторы $\overline{KL}$ и $\overline{LB}$ коллинеарны и найдите коэффициент λ в соотношении $\overline{KL} = \lambda \cdot \overline{LB}$.(**Мод** 11)

2.14. В тетраэдре $ABCD$ найти такую точку M, что сумма векторов $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$ равна нулю. Указание. Выразить радиус-вектор $\overline{OM}$ через радиусы-векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$. (**Доп** 2)

2.15. Медианой тетраэдра $ABCD$ называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Доказать, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 3:1, считая от вершины. Указание. Эта точка совпадает с точкой M из задачи 2.14. (**Доп** 3)

2.16. Один из концов отрезка AB находится в точке $A(2,3)$, его серединой служит точка $M(1,-2)$. Найти другой конец отрезка. (**Мод** 90)

2.17. Даны середины сторон треугольника (2,4), (–3,0), (2,1). Найти его вершины. (**Мод** 91)

2.18. Точка M пересечения медиан треугольника лежит на оси абсцисс, две вершины треугольника – точки $A(2,-3)$ и $B(-5,1)$, третья вершина C лежит на оси ординат. Найти точки M и C. (**Кле** 109)

2.19. Даны две смежные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-4,-7)$, $B(2,6)$ и точка пересечения диагоналей $M(3,1)$..Найти две другие вершины параллелограмма. (**Мод** 92)

2.20. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-4,-1,2)$ и $B(3,5,-16)$. Найти третью вершину C, зная, что середина стороны AC лежит на оси Ox, а середина стороны BC – на плоскости Oyz. (**Мод** 109)

2.21. Найти отношение, в котором плоскость Oyz делит отрезок AB, если $A(2,-1,7)$, $B(4,5,-2)$. (**Мод** 110)

2.22. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2,0,2)$ и $D(5,-2,0)$ разделен на три равные части. (**Кле** 742)

2.23. Найти координаты центра тяжести проволочного треугольника со сторонами 3, 4, 5. Ось Ox направлена по меньшему катету, ось Oy – по большему катету. Указание. Центр тяжести однородного отрезка – его средина. Если имеется система отрезков с длинами L_1, L_2,... и центрами тяжести C_1, C_2,..., то радиус-вектор точки C – центра тяжести системы можно найти по формуле.

$$\overline{OC} = \frac{L_1 \cdot \overline{OC_1} + L_2 \cdot \overline{OC_2} + \cdots}{L_1 + L_2 + \cdots}.$$ (**Мод** 106)

3.Скалярное произведение

Основы теории.

Скалярным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число (скаляр) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot \cos\varphi$ (угол φ берется между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, отложенными от одной точки).

Свойства скалярного произведения:

1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ – коммутативность;

2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ – дистрибутивность;

3) если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны;

4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2$ – скалярный квадрат вектора (квадрат длины).

В ортонормированном базисе, состоящем из попарно ортогональных единичных векторов скалярное произведение векторов

$\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ выражается формулой

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

Модуль вектора (длина) $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ выражается формулой

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Косинус угла φ между векторами $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ выражается формулой

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|} = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Если вектор $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ образует с векторами ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ углы α_1, α_2, α_3 соответственно, то величины $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ называются направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{a}$. Эти величины связаны с координатами вектора соотношениями: $\cos\alpha_i = \dfrac{a_i}{|a|}$.

Для направляющих косинусов выполняется равенство:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$$

(трехмерное обобщение основного тригонометрического тождества)

Для векторов на плоскости во всех приведенных формулах сохраняются только первые две координаты.

3.1. Дан равносторонний треугольник A,B,C длины сторон которого равны 1. Вычислить $\left(\overline{AB}, \overline{BC}\right) + \left(\overline{BC}, \overline{CA}\right) + \left(\overline{CA}, \overline{AB}\right)$. (**Мод** 131)

3.2. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Вычислить $\left(\overline{AD}, \overline{BC}\right) + \left(\overline{BE}, \overline{CA}\right) + \left(\overline{CF}, \overline{AB}\right)$. (**Мод** 133)

3.3. Даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Представить вектор $\boldsymbol{b}$ в виде суммы двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ так, чтобы вектор $\boldsymbol{x}$ был коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, а вектор $\boldsymbol{y}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{a}$. (**Мод** 141)

3.4. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\{-14,2,5\}$ на прямую с направляющим вектором $\{2,-2,1\}$. (**Мод** 148)

3.5. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\{8,4,1\}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\{2,-2,1\}$. (**Мод** 149)

3.6. Найти внутренние углы треугольника с вершинами A (1,2,3), B (3,0,4), C (2,1,3). (**Мод** 152)

3.7. Даны вершины треугольника $A(1,2,-1)$, $B(2,-1,3)$ и $C(-4,7,5)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B. (**Кле** 743)

3.8. Вычислить углы φ_1, φ_2, φ_3, образованные противоположными ребрами тетраэдра с вершинами A (3,–1,0), B (0,–7,3), C (–2,1,–1), D (3,2,6). (**Мод** 154)

3.9. Найти угол между двумя векторами $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} + 4\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ – единичные векторы, угол между которыми равен 120°. (**Бур** 424)

3.10. Найти угол между двумя биссектрисами плоских углов прямого трехгранного угла. (**Бур** 443)

3.11. Луч образует со всеми осями декартовой системы координат равные углы. Какие значения может иметь этот угол ? (**Доп** 4)

3.12. Луч образует с осью Ox декартовой системы координат угол $\dfrac{\pi}{4}$, а с осью Oy – угол $\dfrac{\pi}{3}$. Какие значения может иметь угол между этим лучом и осью Oz ? (**Бур** 457)

3.13. Даны два луча. Первый составляет с осями декартовой системы координат углы $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$. Второй луч образует со всеми осями декартовой системы координат равные тупые углы. Найти угол между лучами. (**Доп** 5)

3.14. Доказать, что для произвольного прямоугольника $ABCD$ и для произвольной точки M (лежащей или не лежащей в плоскости прямоугольника) имеют место равенства:

1) $\left(\overline{MA}, \overline{MC}\right) = \left(\overline{MB}, \overline{MD}\right)$;

2) $\left|\overline{MA}\right|^2 + \left|\overline{MC}\right|^2 = \left|\overline{MB}\right|^2 + \left|\overline{MD}\right|^2$. (**Бек** 2.17)

3.15. Доказать, что все три высоты треугольника пересекаются в одной точке. Указание. В треугольнике ABC взять точку H, в которой пересекаются высоты, проведенные из вершин A и B, ввести векторы $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}$. Из условий перпендикулярности $\left(\overline{HA}, \overline{BC}\right) = 0$ и $\left(\overline{HB}, \overline{AC}\right) = 0$ вывести условие перпендикулярности $\left(\overline{HC}, \overline{AB}\right) = 0$. (**Доп** 6)

3.16. Объяснить геометрический смысл всех решений векторного уравнения $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = p$, а также его частного решения, коллинеарного вектору $\boldsymbol{a}$.

1) в плоском случае;.

2) в пространственном случае.

(**Бек** 2.31)

3.17. Объяснить геометрический смысл.

1) решения системы векторных уравнений $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = p$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = q$ (векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны);

2) решения системы векторных уравнений $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = p$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) = q$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) = s$ (векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ некомпланарны).

(**Бек** 2.32)

3.18. Дан произвольный тетраэдр $ABCD$. Доказать: если перпендикулярны ребра AB и CD, а также ребра AC и BD, то ребра AD и BC также перпендикулярны. (**Бек** 2.41)

3.19. Дан вектор $\boldsymbol{a} = \{x, y\}$. Найти вектор $\boldsymbol{a}' = \{x', y'\}$, получающийся поворотом вектора $\boldsymbol{a}$ на заданный угол φ. (**Доп** 7)

3.20. Даны две соседние вершины квадрата $A(-3, 2)$ и $B(2, 4)$. Найти две другие вершины. (**Доп** 8)

3.21. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-3, 2)$ и $C(5, -4)$. Найти две другие вершины этого квадрата. (**Доп** 9)

4. Векторное и смешанное произведения

Основы теории.

Векторным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, задаваемый следующими условиями:

• $|c| = |a|\cdot|b|\cdot\sin\varphi$ (угол φ берется между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, отложенными от одной точки), модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях;

• $c \perp a$, $c \perp b$;

• тройка векторов $\langle a, b, c\rangle$ ориентирована так же, как базисная тройка $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$.

Свойства векторного произведения:

1. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ – антикоммутативность;
2. для любого скаляра k $[k\cdot \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = k\cdot[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$;
3. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ – дистрибутивность;
4. если $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = 0$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны.

В ортонормированном базисе, состоящем из попарно ортогональных единичных векторов, произведение $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ векторов $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ имеет координаты

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, c_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Эти три формулы можно свести в одну, где векторное произведение выражается в виде "символического определителя":

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется число, обозначаемое $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c})$. Смешанное произведение равно ориентированному объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях. Свойства смешанного произведения вытекают из свойств векторного и скалярного произведения. В частности, если

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны.

В декартовой системе координат смешанное произведение выражается через координаты сомножителей в виде определителя:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4.1. Даны два луча. Первый составляет с осями декартовой системы координат углы $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$. Второй луч составляет со всеми осями равные тупые углы. Третий луч перпендикулярен к двум данным и образует с ними положительно ориентированную тройку. Найти направляющие косинусы третьего луча (координаты единичного вектора, направленного по этому лучу). (**Мод** 185)

4.2. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки $A(-1,0,-1)$, $B(0,2,-3)$, $C(4,4,1)$. (**Мод** 189)

4.3. Однородная пластинка имеет форму четырехугольника $ABCD$ с вершинами в точках $A(3,1)$, $B(7,3)$, $C(0,4)$, $D(-1,2)$. Найти площадь пластинки и координаты ее центра тяжести. Указание. Центр тяжести однородной треугольной пластинки – точка пересечения медиан; центр тяжести параллелограмма – точка пересечения диагоналей. Если имеется система площадок с площадями S_1, S_2,... и центрами тяжести C_1, C_2,..., то радиус-вектор точки C – центра тяжести системы, можно найти по формуле. $\overline{OC} = \dfrac{S_1\cdot\overline{OC_1} + S_2\cdot\overline{OC_2} + \cdots}{S_1 + S_2 + \cdots}$. (**Бек** 1.34)

4.4. Доказать, что площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC равна ¾ площади треугольника ABC. (**Бек** 3.32)

4.5. Одна из вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ находится в точке $A(1,2,3)$, а концы выходящих из нее векторов – в точках $B(9,6,4)$,

D (3,0,4), $A'(5,2,6)$. Найти угол между диагональю AC' и плоскостью грани $ABCD$ этого параллелепипеда. (**Мод** 187)

4.6. Пусть A', B', C', D' – точки пересечения медиан граней BCD, CDA, ABD, ABC тетраэдра $ABCD$. Найти отношение ориентированного объема тетраэдра $A'B'C'D'$ к ориентированному объему тетраэдра $ABCD$. (**Мод** 188)

4.7. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, зная его вершину $A(1,2,3)$ и концы выходящих из нее ребер $B(9,6,4)$, $D(3,0,4)$, $A'(5,2,6)$. (**Мод** 190)

4.8. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарны. При каких значениях скаляра λ компланарны векторы $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{c}$, $4\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} + 6\boldsymbol{c}$, $7\boldsymbol{a} + 8\boldsymbol{b} + \lambda^2\boldsymbol{c}$?

(**Бек** 3.21)

4.9. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна вектору $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$. (**Мод** 196)

4.10. При каком условии векторного уравнения $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ имеет решение? Объяснить геометрический смысл всех его решений, а также его частного решения, коллинеарного вектору $[\boldsymbol{a}., \boldsymbol{b}]$. (**Бек** 3.16)

4.11. Ко всем сторонам произвольного многоугольника построены внешние нормали, длины которых равны длинам соответствующих сторон. Доказать, что сумма векторов внешних нормалей равна нулю. Указание. Если ввести единичный вектор $\boldsymbol{p}$, перпендикулярный плоскости, в которой лежит многоугольник, то для вектора стороны $\boldsymbol{a}_i$ вектор нормали $\boldsymbol{n}_i = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}_i]$. Так как $\Sigma \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$, то и $\Sigma \boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{0}$. (**Доп** 7)

4.12. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням произвольного тетраэдра, равных по длине площадям этих граней и направленных во внешнюю сторону, равна нулю. Замечание. Утверждение можно обобщить на любой многогранник, разбив его "грань в грань" на тетраэдры. Для выпуклого многогранника возможность такого разбиения легко доказать, а для невыпуклого "интуитивно правдоподобно".(**Бек** 3.11)

5. Прямая на координатной плоскости

Основы теории.

Первый способ задания прямой на координатной плоскости предполагает, что известны начальная точка M_0 и направляющий вектор

$\boldsymbol{l} = \{\alpha, \beta\} \neq \boldsymbol{0}$. Тогда уравнение прямой в векторной форме имеет вид:

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{t}, \text{ где}$$

$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор "текущей точки" $M(x,y)$;

$\boldsymbol{r_0} = \overline{OM_0}$ – радиус-вектор начальной точки $M_0(x_0,y_0)$;

$\boldsymbol{t}$– параметр, каждому вещественному значению которого соответствует некоторая точка прямой.

В координатной форме ***параметрические уравнения прямой на плоскости имеют вид:***

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha \cdot t, \\ y - y_0 = \beta \cdot t, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \beta \cdot t. \end{cases}$$

Если разрешить эти уравнения относительно параметра $\boldsymbol{t}$ и приравнять найденные выражения, то получится ***каноническое уравнение прямой на плоскости:***

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}.$$

Здесь один из знаменателей (любой) может обратиться в нуль. Так, если $\alpha = 0$, то и $x - x_0 = 0$, – в этом случае прямая параллельна оси $\boldsymbol{O\,y}$.

При $\beta = 0$ получается $y - y_0 = 0$ – прямая параллельна оси $\boldsymbol{O\,x}$.

Второй способ задания прямой на координатной плоскости предполагает, что известны начальная точка M_0 и вектор нормали $\boldsymbol{n} = \{a, b\} \neq 0$. Тогда ***уравнение прямой в векторной форме*** имеет вид:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0.$$

В координатной форме получаем общее уравнение прямой на плоскости, проходящей через заданную точку:

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0.$$

Если раскрыть скобки и обозначить $-(a \cdot x_0 + b \cdot y_0)$ через c, получиться ***общее уравнение прямой на плоскости:***

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0.$$

Множество точек плоскости, удовлетворяющих неравенству

$a \cdot x + b \cdot y + c > 0$ (или < 0) представляет собой одну из двух

полуплоскостей, на которые делит координатную плоскость прямая

$a \cdot x + b \cdot y + +c = 0.$

Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ выражается формулой

$$h = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Угол между прямыми определяется как угол между их направляющими или нормальными векторами.

5.1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3,4)$ и параллельной прямой

1) $x - 2y + 5 = 0$; 4) $y = -1$;

2) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{2}$; 5) $x = 3 + t,\ y = 4 - 7t$.

3) $x = 2$;

(**Бек** 5.8)

5.2. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

1) $A(-3,1)$ и $B(1,2)$; 3) $A(0,2)$ и $B(-1,0)$;

2) $A(2,1)$ и $B(2,-5)$; 4) $A(1,-3)$ и $B(3,-3)$.

(**Бек** 5.9)

5.3. Установить взаимное расположение прямых данной пары; если прямые пересекаются, найти координаты точки пересечения:

1) $x - 3y - 2 = 0$ и $2x + y - 1 = 0$;

2) $x + 3y - 1 = 0$ и $2 - 2x - 6y = 0$;

3) $-x - y - 3 = 0$ и $3x + 3y + 1 = 0$;

4) $x = 1 + 2t,\ y = 1 - 7t$ и $x = 2 - t,\ y = 2 + t$.

Замечание. Использование одной и той же буквы для обозначения параметра в уравнениях различных прямых может привести к ошибке. (**Бек** 5.10)

5.4. При каких a прямые $ax - 4y = 6$ и $x - ay = 3$:

1) пересекаются; 2) параллельны: 3) совпадают. (**Бек** 5.11)

5.5. При каких a три прямые $ax + y = 1,\ x - y = a,\ x + y = a^2$ имеют общую точку ? (**Бек** 5.12)

5.6. Площадь треугольника $S = 8$, две его вершины $A(1,-2)$, $B(2,3)$, а третья вершина C лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$. Определить ее координаты. (**Кле** 218)

5.7. Площадь треугольника $S = 3/2$, две его вершины $A(2,-3)$,

$B(3,-2)$, центр тяжести этого треугольника лежит на прямой

$3x - y - 8 = 0$. Определить координаты третьей вершины C (**Кле** 218)

5.8. Определить, лежит ли начало координат внутри или вне треугольника, стороны которого даны уравнениями $7x - 5y - 11 = 0$,

$8x + 3y + 31 = 0$, $x - 8y - 19 = 0$. (**Кле** 343).

5.9. Определить, лежит ли точка $M(-3,2)$ внутри или вне треугольника, стороны которого даны уравнениями $x + y - 4 = 0$,

$3x - 7y + 8 = 0$, $4x - 3y - 31 = 0$. (**Кле** 344)

5.10. Точка $M(3,2)$ является центром параллелограмма, а его стороны лежат на некоторых четырех прямых. На каждой из этих прямых расположена одна из точек $P(2,1)$, $Q(4,-1)$, $R(-2,0)$, $S(1,5)$. Найти уравнения прямых. (**Бек** 5.14)

5.11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2)$ так, что отрезок этой прямой, заключенный между прямыми $3x + y + 2 = 0$ и $4x + y - 1 = 0$, в точке A делится пополам. (**Бек** 5.16)

5.12. Составить уравнение прямой, если точка $P(2,3)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую. (**Кле** 233)

5.13. Известны уравнения двух сторон треугольника $2x - y = 0$,

$5x - y = 0$ и уравнение одной из его медиан $3x - y = 0$. Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка $(3,9)$, и найти координаты вершин треугольника. (**Мод** 377)

5.14. Дано уравнение $x - 2y + 7 = 0$ стороны треугольника и уравнения $x + y - 5 = 0$, $2x + y - 11 = 0$ медиан, выходящих из вершин треугольника, лежащих на данной прямой. Составить уравнения двух других сторон треугольника. (**Мод** 379)

5.15. Известны уравнения двух сторон параллелограмма

$x - y - 1 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,-1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма. (**Мод** 391)

5.16. Стороны треугольника ABC заданы уравнениями

$2x - y + 2 = 0$ (AB), $x + y - 4 = 0$ (BC), $2x + y = 0$ (CA). Определить положение точек $M(3,1)$, $N(7,-6)$, $P(3,2)$ относительно данного треугольника. (**Мод** 412)

5.17. Даны две вершины треугольника $A(-10,2)$ и $B(6,4)$, его высоты пересекаются в точке $H(5,2)$. Найти третью вершину треугольника C. (**Кле** 267)

5.18. Дана точка $P(-5,6)$. Найти ее проекцию на прямую

$7x - 13y - 105 = 0$. (**Мод** 423)

5.19. Найти точку, симметричную относительно прямой

$2x - 3y + 18 = 0$ точке $M(-2,9)$. (**Мод** 424)

5.20. На прямой $2x - y - 5 = 0$ найти такую точку P, сумма расстояний которой до точек $A(-7,1)$ и $B(-5,5)$ наименьшей. Указание. Взять точку, симметричную одной из данных относительно прямой и применить неравенство треугольника: "сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны". (**Кле** 251)

5.21. На прямой $3x - y - 1 = 0$ найти такую точку P, разность расстояний которой до точек $A(4,1)$ и $B(0,4)$ наибольшей. Указание. Аналогично 5.20, неравенство треугольника использовать в форме: "разность двух сторон треугольника меньше третьей стороны". (**Кле** 252)

5.22. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $B(4,-1)$, а также уравнения высоты $2x - 3y + 12 = 0$ и медианы $2x + 3y = 0$, проведенных из вершины A. (**Кле** 275)

5.23. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $B(2,-7)$, а также уравнения высоты $3x + y + 11 = 0$, проведенной из вершины A и медианы $x + 2y - 7 = 0$, проведенной из вершины C. (**Кле** 276)

5.24. Среди прямых, проходящих через точку $P(3,0)$, найти такую, отрезок которой, заключенный между прямыми $x - 2y - 3 = 0$ и

$x - 2y + 17 = 0$, делился бы в точке P пополам. (**Кле** 280)

5.25. Через точку $P(0,1)$ проведены всевозможные прямые. Доказать, что среди них нет прямой, отрезок которой, заключенный между прямыми $2x - y - 2 = 0$ и $x + y + 3 = 0$, делится в точке P пополам.

(**Кле** 282)

5.26. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(3,1)$ и наклоненных к прямой $2x + 3y - 1 = 0$ под углом 45°. (**Бур** 586)

5.27. Составить уравнения прямых, параллельных прямой

$5x + 12y - 1 = 0$ и отстоящих от нее на расстояние 5. (**Мод** 450)

5.28. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(3,5)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-7, 3)$ и $B(11,-15)$. (**Кле** 246)

5.29. Найти расстояние между параллельными прямыми

$12x - 16y - 48 = 0$ и $3x - 4y + 43 = 0$. (**Мод** 451)

5.30. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $x + 2y = 0$ и $2x - 11y + 30 = 0$. (**Мод** 452)

5.31. Найти касательные к окружности с центром (1,1) и радиусом 3, параллельные прямой $5x - 12y = 0$. (**Мод** 453)

5.32. Найти общие касательные к окружностям, центры которых находятся в точках (1,1) и (2,3), а радиусы соответственно равны 2 и 4. (**Мод** 455)

5.33. Найти центр C и радиус r круга, вписанного в треугольник со сторонами $x + y + 12 = 0$, $7x + y = 0$, $7x - y + 28 = 0$. (**Мод** 455)

5.34. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $B(2,6)$, а также уравнения высоты $3x - 4y + 27 = 0$ и биссектрисы $x + 2y - 5 = 0$, проведенных из вершины A. (**Кле** 273)

5.35. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $B(2,-1)$, а также уравнения высоты $3x - 4y + 27 = 0$, проведенной из вершины A и биссектрисы $x + 2y - 5 = 0$, проведенной из вершины C. (**Кле** 274)

5.36. Составить уравнения сторон квадрата, зная его центр (1,6) и по точке на двух непараллельных сторонах: (4,9) на стороне AB, (–5,4) на стороне BC. (**Мод** 472)

5.37. Доказать, что фигура, ограниченная прямыми $x - 3y + 1 = 0$, $x - 3y + 12 = 0$, $3x + y - 1 = 0$, $3x + y + 10 = 0$, является квадратом и вычислить его площадь. (**Бур** 608)

6. Плоскость и прямая в пространстве

Основы теории.

Первый способ задания плоскости предполагает, что известны начальная точка M_0 и два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{l}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \chi_1\} \neq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{l}_2 = \{\alpha_2, \beta_2, \chi_2\} \neq \boldsymbol{0}$. Тогда ***параметрическое уравнение плоскости в векторной форме имеет вид:***

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{l}_1 \cdot u + \boldsymbol{l}_2 \cdot v, \text{ где}$$

$\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ – радиус-вектор “текущей точки” $M(x,y,z)$;

$\boldsymbol{r_0} = \overline{OM_0}$ – радиус-вектор начальной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

u и v – параметры; каждой паре их вещественных значений соответствует некоторая точка плоскости.

В ***координатной форме параметрические уравнения плоскости***

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha_1 \cdot u + \alpha_2 \cdot v, \\ y - y_0 = \beta_1 \cdot u + \beta_2 \cdot v, \\ z - z_0 = \gamma_1 \cdot u + \gamma_2 \cdot v, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 \cdot u + \alpha_2 \cdot v, \\ y = y_0 + \beta_1 \cdot u + \beta_2 \cdot v, \\ z = z_0 + \gamma_1 \cdot u + \gamma_2 \cdot v. \end{cases}$$

Второй способ задания плоскости в трехмерном пространстве предполагает, что известны начальная точка M_0 и нормальный вектор $\boldsymbol{n} = \{a, b, c\} \neq \boldsymbol{0}$. Тогда ***уравнение плоскости в векторной форме*** имеет вид:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0.$$

В координатной форме получаем общее уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M_0

$$\boldsymbol{a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0}.$$

Если раскрыть скобки и обозначить $-(a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0)$ через d, получиться ***общее уравнение плоскости***:

$$\boldsymbol{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0}.$$

Множество точек пространства, удовлетворяющих неравенству

$a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z + d > 0$ (или < 0) представляет собой одно из полупространств, на которые делит пространство плоскость

$a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z + d = 0$.

Расстояние от точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости

$\boldsymbol{a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z + d = 0}$ выражается формулой

$$h = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Угол между плоскостями определяется как угол между их нормальными векторами.

Первый способ задания прямой в трехмерном пространстве предполагает, что известны начальная точка M_0 и направляющий вектор

$\boldsymbol{l} = \{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \boldsymbol{0}$. Тогда уравнение прямой в векторной форме имеет вид:

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{t}, \text{ где}$$

$\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ – радиус-вектор "текущей точки" $M(x,y,z)$;

$\boldsymbol{r_0} = \overline{OM_0}$ – радиус-вектор начальной точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$;

$\boldsymbol{t}$ – параметр, каждому вещественному значению которого соответствует некоторая точка прямой.

В координатной форме параметрические уравнения прямой в трехмерном пространстве имеют вид:

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha \cdot t, \\ y - y_0 = \beta \cdot t, \\ z - z_0 = \gamma \cdot t, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \beta \cdot t, \\ z = z_0 + \gamma \cdot t.. \end{cases}$$

Если выразить параметр $\boldsymbol{t}$ из этих уравнений и приравнять полученные выражения, получатся ***канонические уравнения прямой в трехмерном пространстве***

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Здесь один или два знаменателя могут обратиться в нуль.

Чтобы найти ***расстояние от прямой*** $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}$

до точки $M(x,y,z)$, надо разделить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{l}$ и $\overline{M_0M}$, на модуль вектора $\boldsymbol{l}$. В результате получится формула

$$h = \frac{|[l, M_0M]|}{|l|} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x - x_0 & y - y_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ z - z_0 & x - x_0 \end{vmatrix}^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}..$$

Угол между прямыми определяется как угол между их направляющими векторами.

Второй способ задания прямой в трехмерном пространстве представляет собой систему уравнений, определяющих две непараллельные плоскости:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z + d_1 = 0, \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z + d_2 = 0, \end{cases}$$

где нормальные векторы плоскостей $\boldsymbol{n}_1 = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2 = \{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2\}$ неколлинеарны.

6.1. Дана точка $A(1,2,3)$.

1) Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку A и параллельных координатным плоскостям.

2) Составить уравнения прямых, проходящих через точку A и параллельных осям координат.

3) Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку A и через оси координат.

4) Составить уравнение прямой, проходящей через точку A и начало координат.

(**Мод** 491)

6.2. Дана точка $A(1,2,3)$.

1) Написать уравнения перпендикуляров, опущенных из точки A на координатные плоскости.

2) Написать уравнения перпендикуляров, опущенных из точки A на оси координат.

3) Написать уравнения плоскостей, проходящих через точку A и перпендикулярных к осям координат.

(**Мод** 492)

6.3. В пространстве дана прямая $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=5$. Найти направляющий вектор этой прямой. (**Мод** 493)

6.4. Найти ортогональные проекции прямой

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

на координатные плоскости $\boldsymbol{Oyz}$, $\boldsymbol{Ozx}$, $\boldsymbol{Oxy}$. (**Мод** 498)

6.5. Даны точки пересечения прямой с координатными плоскостями $(0, y_1, z_1)$, $(x_2, 0, z_2)$. Вычислить координаты точки пересечения этой прямой с координатной плоскостью Oxy. (**Мод** 499)

6.6. Через точки $M_1(-6,6,-5)$ и $M_2(12,-6,1)$ проведена прямая. Найти точки ее пересечения с координатными плоскостями. (**Кле** 1011)

6.7. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям $x=2+3u-4v$, $y=4-v$, $z=2+3u$. (**Мод** 503)

6.8. В тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью $2x+3y-5z+10=0$, вписан куб так, что одна из его вершин лежит в начале координат, три ребра, выходящие из этой вершины, направлены по осям координат, а вершина, противоположная началу координат, лежит в данной плоскости. Определить длину ребра куба. (**Мод** 506)

6.9. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и равноудаленной от точек $(2,7,3)$ и $(-1,1,0)$. (**Мод** 510)

6.10. Составить уравнение плоскости, параллельной вектору

$l=\{2,1,-1\}$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки 3 и 5 соответственно. (**Кле** 954)

6.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку

$(-2.3.0)$ и прямую $x=1$, $y=2+t$, $z=2-t$. (**Мод** 514)

6.13. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(1.2.3)$ и пересекающей прямые $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ и $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z}{3}$.

(**Мод** 516)

6.14. Показать, что прямые

$x=1+2t$, $y=2t$, $z=t$ и $x=11+8t$, $y=6+4t$, $z=2+t$

пересекаются, написать уравнения биссектрисы тупого угла между ними. Замечание. Использование одной и той же буквы для обозначения параметра в уравнениях различных прямых может привести к ошибке. (**Мод** 517)

6.15. Проверить, лежит ли данная прямая в плоскости

$x - 3y + z + 1 = 0$, параллельна этой плоскости или пересекает ее в единственной точке (в последнем случае найти координаты точки пересечения). Прямая задана уравнениями:

1) $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{7}$.

2) $x = 2 + 3t,\ y = 7 + t,\ z = 1 + t$.

3) $x - y + 2z = 0,\ x + y - 3z + 2 = 0$.

4) $3x - 2y - 1 = 0,\ 7y - 3z - 4 = 0$.

5) $x = 2, y = 5 + t, z = 4 + 3t$.

(**Бек** 6.23)

6.16. При каких a прямая $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z-2}{-1}$:

1) пересекает плоскость $3a^2x + ay + z - 4a = 0$;

2) параллельна этой плоскости;

3) лежит в этой плоскости.

(**Бек** 6.24)

6.17. Даны две прямые. Установить, пересекаются они, скрещиваются, параллельны или совпадают. Если прямые пересекаются или параллельны, составить уравнение плоскости, в которой они лежат. Если прямые пересекаются, найти также координаты точки их пересечения:

1) $x + z - 1 = 0,\ 3x + y - z + 13 = 0$ и $x - 2y + 3 = 0,\ y + 2z - 8 = 0$;

2) $x = 3 + t,\ y = -1 + 2t,\ z = 4$ и $x + y - z = 0,\ 2x - y + 2z = 0$;

3) $x = 2 + 4t,\ y = -6t,\ z = -1 - 8t$ и $x = 7 - 6t,\ y = 2 + 9t,\ z = 12t$;

4) $x = 9t,\ y = 5t,\ z = -3 + t$ и $2x - 3y - 3z - 9 = 0, x - 2y + z + 3 = 0$;

5) $x = 1 + 2t,\ y = 7 + t,\ z = 3 + 4t$ и $x = 6 + 3t,\ y = -1 - 2t,\ z = -2 + t$.

(**Бек** 6.25)

6.18. При каких a прямые

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a} \quad \text{и} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}:$$

1) пересекаются;

2) скрещиваются;

3) параллельны;

4) совпадают.

(**Бек** 6.26)

6.19. Найти проекцию точки $P(1,2,1)$ на плоскость

$3x + 7y - 2z + 5 = 0$ и расстояние точки от плоскости. Найти также точку, симметричную P относительно плоскости. (**Бур** 682)

6.20. Найти проекцию точки $P(1,2,3)$ на прямую $x = 8 + 3t$,

$y = 1 + t,\ z = 6 - 2t$ и расстояние точки от прямой. Найти также точку, симметричную P относительно прямой. (**Бур** 698)

6.21. На плоскости $2x - 3y + 3z - 17 = 0$ найти такую точку P, сумма расстояний которой до точек $A(3,-4,7)$ и $B(-5,-14,17)$ была бы наименьшей. Указание. См. 5.20. (**Кле** 1057)

6.22. На плоскости $2x + 3y - 4z - 15 = 0$ найти такую точку P, разность расстояний которой до точек $A(5,2,-7)$ и $B(7,-25,10)$ была бы наибольшей. Указание. См. . 5.21. (**Кле** 1058)

6.23. Спроектировать на плоскость $2x - 2y + 3z - 5 = 0$ прямую $x = 3 + 5t,\ y = -1 + t,\ z = 4 + t$. (**Мод** 584)

6.34. Составить уравнение плоскости, проектирующей прямую

$\{3x+2y-z-1=0,\ 2x-3y+2z-2=0\}$ на плоскость $x+4y-z+1=0$. **(Кле** 1005)

6.35. Составить уравнения проекции прямой

$\{3x-4y-2z-5=0,\ x+2z-2=0\}$ на плоскость $2x-y+z-1=0$.

(Кле 1006)

6.36. Найти угол между плоскостями:

1) $x+4y-z+1=0$ и $x+y-z-3=0$;

2) $x+2y-z=1$ и $x-y=3$;

3) $x+2y-2z=0$ и $z=5$

(Бек 6.60)

6.37. Написать уравнения общего перпендикуляра к двум прямым

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1} \text{ и } \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}.$$

Найти расстояние между этими прямыми и точки пересечения общего перпендикуляра с данными прямыми. **(Мод** 585)

6.38. Найти центр и радиус шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный плоскостью $11x-10y-2z-57=0$ и плоскостями координат. **(Мод** 612)

6.39. В каждом из следующих случаев определить, лежат ли точки $M(2,-1,1)$ и $N(1,2,-3)$ в одном, в смежных или в вертикальных двугранных углах, образованных при пересечении двух плоскостей:

1) $3x-y+2z-3=0$ и $x-2y-z+4=0$;

2) $2x-y+5z-1=0$ и $3x-2y+6z-1=0$.

(Кле 975)

Содержание

«Задачи по геометрии»

(методическая разработка по курсу

“ Геометрия и алгебра”)

Составители: Лариса Георгиевна Киселева

Михаил Михайлович Шульц

Подписано к печати 07.09.04г. Формат 60x84 1/16.
Печать офсетная. Бумага газетная. Усл. печ. л.2. Тираж 500 экз. Заказ 826.
Бесплатно.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского.
603600, ГСП-20, Н.Новгород, просп. Гагарина, 23.

Типография ННГУ, 603000, Н.Новгород, ул. Б. Покровская, 37.