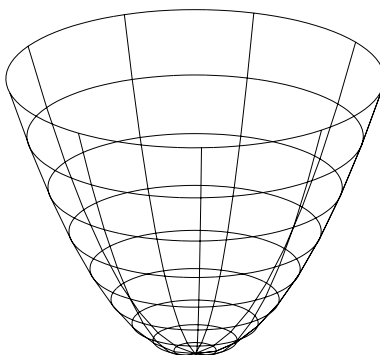


Н.Ю. Золотых, А.П. Ильичев, В.А. Таланов

---

# БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

<http://vmk.ucoz.net/>



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»

<http://vmk.ucoz.net/>

Н.Ю. Золотых  
А.П. Ильичев  
В.А. Таланов

## БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Учебное пособие

*Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлениям подготовки  
010500 «Прикладная математика и информатика»,  
010502 «Прикладная информатика»,  
010400 «Информационные технологии»*

Нижний Новгород  
2005

ББК 22.151.5  
380  
УДК 512.647.2

<http://vmk.ucoz.net/>

*Золотых Н.Ю., Ильичев А.П., Таланов В.А.* **Билинейные функции и их применение:** Учебное пособие. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2005. — 68 с.

Пособие содержит необходимый теоретический материал, примеры решения задач и упражнения по теме «Билинейные функции» курса «Геометрия и алгебра». Часть материала предназначена для самостоятельной работы студентов.

Для студентов, обучающихся по направлениям (специальностям) «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика», «Информационные технологии»

*Рецензенты:*

С.А. Белов, к.ф.-м.н., доц. каф. ЧиФА,  
С.Н. Карпенко, к.т.-н., доц. каф. МО ЭВМ

УДК 512.647.2

© Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 2005

## Предисловие

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям (специальностям) «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика», «Информационные технологии» и содержит необходимый теоретический материал, примеры решения задач и упражнения по темам «Билинейные и полуторалинейные функции», «Евклидовы и унитарные пространства» курса «Геометрия и алгебра». Часть материала предназначена для самостоятельной работы студентов. Пособие представляет собой расширенное издание методической разработки [3].

Мы предполагаем, что читатель знаком с темами «Линейные векторные пространства», «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений».

В разделах 1, 2 под термином «пространство» понимается конечномерное вещественное линейное пространство, в разделе 3 — конечномерное комплексное линейное пространство. В некоторых задачах мы иногда обращаемся к примерам бесконечномерных пространств.

## Обозначения

$\mathbf{R}$	поле действительных чисел;
$\mathbf{C}$	поле комплексных чисел;
$F^n$	линейное арифметическое пространство столбцов высоты $n$ над полем $F$ ;
$F^{n \times m}$	линейное пространство матриц размера $n \times m$ над полем $F$ ;
$\mathbf{R}(a, b)$	пространство вещественных непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$ ;
$\mathbf{V}_2$	линейное пространство радиус-векторов плоскости;
$\mathbf{V}_3$	линейное пространство радиус-векторов пространства;
$F[t]$	линейное пространство многочленов над полем $F$ ;
$F_n[t]$	линейное пространство многочленов над полем $F$ степени не большей $n$ ;
$A^T$	матрица, транспонированная к $A$ ;
$\overline{A}$	матрица, полученная из $A$ заменой всех элементов на сопряженные;
$\dim V$	размерность линейного пространства $V$ ;
$L(a_1, \dots, a_k)$	линейная оболочка системы векторов $a_1, \dots, a_k$ ;
$\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$	диагональная матрица с элементами $d_1, \dots, d_n$ на диагонали;
$\text{diag}(D_1, \dots, D_k)$	блочно-диагональная матрица с блоками $D_1, D_2, \dots, D_k$ на диагонали;
$E$	единичная матрица (порядок ясен из контекста);
$\det A$	определитель матрицы $A$ ;
$\text{tr } A$	след матрицы $A$ (сумма диагональных элементов);
$[x]_{\mathbf{e}}$	столбец координат вектора $x$ в базисе $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ :

$$[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \dots, x_n)^T \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^n x_i e_i;$$

$[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$  матрица перехода от базиса  $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$  к базису  $\mathbf{e}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ :

$$[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = (q_{ij}) \Leftrightarrow e'_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} e_i.$$

## 1. Вещественные билинейные функции

### 1.1. Определения

Рассмотрим линейное векторное пространство  $V$  над полем вещественных чисел  $\mathbf{R}$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение

$$f : V \times V \rightarrow \mathbf{R}, \quad (1)$$

ставящее каждой паре векторов  $x, y$  из  $V$  число  $f(x, y)$  из  $\mathbf{R}$ , называется *билинейной функцией*, если для любых  $x, y, z$  из  $V$  и любых  $\alpha, \beta$  из  $\mathbf{R}$  выполнены соотношения

- 1)  $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$ ,
- 2)  $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$ ,
- 3)  $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$ ,
- 4)  $f(x, \beta y) = \beta f(x, y)$ .

Обозначим множество всех билинейных функций, действующих в пространстве  $V$ , через  $\mathcal{F}(V)$ .

ПРИМЕР 2. Легко проверить, что следующие функции являются билинейными:

- 1)  $f(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  в  $\mathbf{R}^n$ ;
- 2) скалярное произведение  $f(x, y) = (x, y) = |x||y| \cos \varphi$  в пространствах  $\mathbf{V}_2$  и  $\mathbf{V}_3$ , где  $\varphi$  — угол между векторами  $x$  и  $y$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.

- 1) Доказать, что  $f(o, x) = 0$  для любой билинейной функции  $f$  и любого вектора  $x \in V$ .
- 2) Доказать, что для любых  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_l$  из  $V$  и любых  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_l$  из  $\mathbf{R}$  справедливо

$$f \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^l \beta_j y_j \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^l \beta_j f(x_i, y_j).$$

- 3) Доказать, что для любой матрицы  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  отображение  $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , заданное формулой

$$f(x, y) = x^T A y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j,$$

является билинейной функцией.

- 4) Доказать, что для любой функции  $k(t) \in \mathbf{R}(a, b)$  отображение  $f : \mathbf{R}(a, b) \times \mathbf{R}(a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ , заданное формулой

$$f(x, y) = \int_a^b k(t) x(t) y(t) dt,$$

является билинейной функцией.

- 5) Привести пример отображения  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , не являющегося билинейной функцией.

## 1.2. Матрица билинейной функции

### 1.2.1. Определение матрицы билинейной функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть  $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — базис пространства  $V$ . Матрицу

$$A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n},$$

в которой

$$a_{ij} = f(e_i, e_j) \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n),$$

назовем *матрицей билинейной функции*  $f \in \mathcal{F}(V)$  в базисе  $\mathbf{e}$  и обозначим  $[f]_{\mathbf{e}} = A$ .

ПРИМЕР 5. Определим в  $\mathbf{R}^3$  билинейную функцию  $f$  следующим образом: если  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ , то  $f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ . Найдем матрицу функции  $f$  в базисе  $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 0)^T$ ,

$e_2 = (1, 0, 1)^T$ ,  $e_3 = (0, 1, 1)^T$ . По определению имеем:

$$\begin{aligned} a_{11} &= f(e_1, e_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2, \\ a_{22} &= f(e_2, e_2) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2, \\ a_{33} &= f(e_3, e_3) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2, \\ a_{12} &= f(e_1, e_2) = a_{21} = f(e_2, e_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1, \\ a_{13} &= f(e_1, e_3) = a_{31} = f(e_3, e_1) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1, \\ a_{23} &= f(e_2, e_3) = a_{32} = f(e_3, e_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

откуда

$$[f]_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

### 1.2.2. Матричное представление билинейной функции

Пусть

$$[x]_e = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad [y]_e = (y_1, \dots, y_n)^T,$$

тогда

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j f(e_i, e_j),$$

или на матричном языке

$$f(x, y) = [x]_e^T [f]_e [y]_e. \quad (2)$$

**ПРИМЕР 6.** Найдем в базисе  $e = \{1, t, t^2\}$  пространства  $\mathbf{R}_2[t]$  матрицу билинейной функции

$$f(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 1 \cdot 1 dt = 1, & a_{12} &= a_{21} = \int_0^1 1 \cdot t dt = 1/2, \\ a_{22} &= \int_0^1 t \cdot t dt = 1/3, & a_{13} &= a_{31} = \int_0^1 1 \cdot t^2 dt = 1/3, \\ a_{33} &= \int_0^1 t^2 \cdot t^2 dt = 1/5, & a_{23} &= a_{32} = \int_0^1 t \cdot t^2 dt = 1/4, \end{aligned}$$



откуда

$$[f]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу  $[f]_{\mathbf{e}}$ , вычислим

$$\int_0^1 x(t)y(t)dt,$$

где  $x(t) = 1 + t + t^2$ ,  $y(t) = 1 + t + t^2$ . Так как  $[x]_{\mathbf{e}} = (1, 1, 1)^T$ ,  $[y]_{\mathbf{e}} = (1, 1, 1)^T$ , то

$$\int_0^1 (1+t+t^2)(1+t+t^2)dt = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{37}{10}.$$

В данном примере обратим внимание на специальный вид матрицы  $[f]_{\mathbf{e}}$ . Нетрудно видеть, что в случае произвольного  $n$  матрица рассматриваемой билинейной функции в базисе  $\mathbf{e} = \{1, t, \dots, t^n\}$  является *матрицей Гильберта*, т. е. матрицей вида

$$A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{(n+1) \times (n+1)}, \quad \text{где } a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}.$$

УПРАЖНЕНИЕ. В базисе  $\mathbf{e} = \{1, t, t^2, t^3\}$  пространства  $\mathbf{R}_3[t]$  найти матрицу билинейной функции

$$f(x, y) = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt.$$

### 1.2.3. Представление билинейных функций билинейными формами

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть  $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный базис пространства  $V$ ,  $A = (a_{ij})$  — произвольная матрица из  $\mathbf{R}^{n \times n}$ . Функция

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = [x]_{\mathbf{e}}^T A [y]_{\mathbf{e}} \quad (3)$$

является билинейной, причем  $A = [f]_{\mathbf{e}}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственной проверкой свойств 1–4 убеждаемся, что функция  $f$  — билинейная. Кроме того, по формуле (3) получаем  $f(e_i, e_j) = a_{ij}$ , следовательно,  $A = [f]_{\mathbf{e}}$ .  $\square$

Итак, формула (3) задает общий вид билинейной функции.

Заметим, что в стандартном базисе пространства  $\mathbf{R}^n$  матрица билинейной функции, задаваемой формулой  $f(x, y) = x^T A y$  (см. упражнение 3(3)), есть  $A$ . Таким образом, формула  $f(x, y) = x^T A y$  задает общий вид билинейной функции пространства  $\mathbf{R}^n$ .

Выражения вида

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

называются *билинейными формами*. Таким образом, в заданном базисе произвольная билинейная форма определяет билинейную функцию и, наоборот, любая билинейная функция определяется некоторой билинейной формой.

Переформулировка результатов последних двух пунктов приводит нас к следующему.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть  $\mathbf{e}$  — базис пространства  $V$ . отображение, ставящее в соответствие всякой билинейной функции  $f \in \mathcal{F}(V)$  ее матрицу  $[f]_{\mathbf{e}}$ , является биекцией из  $\mathcal{F}(V)$  в  $\mathbf{R}^{n \times n}$ .

#### 1.2.4. Связь матриц билинейной функции в разных базисах

Пусть  $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  и  $\mathbf{e}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  — два базиса пространства  $V$ . Исследуем, как меняется матрица билинейной функции  $f \in \mathcal{F}(V)$  при переходе от первого базиса ко второму. Для произвольных векторов  $x, y$  из  $V$  имеем

$$f(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^T [f]_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}} = ([\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} [x]_{\mathbf{e}'})^T [f]_{\mathbf{e}} [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}'} = [x]_{\mathbf{e}'}^T ([\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^T [f]_{\mathbf{e}} [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}) [y]_{\mathbf{e}'}$$

Из утверждения 7

$$[f]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^T [f]_{\mathbf{e}} [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$$

Так как  $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$  — матрица невырожденная, то  $\text{rank}[f]_{\mathbf{e}'} = \text{rank}[f]_{\mathbf{e}}$ . Таким образом, ранг матрицы билинейной функции не зависит от базиса и называется *рангом билинейной функции*. Обозначение:  $\text{rank } f$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Матрицы  $A$  и  $B$  называются *конгруэнтными*, если существует такая невырожденная матрица  $Q$ , что  $B = Q^T A Q$ .

Таким образом, матрицы конгруэнтны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одной и той же билинейной функции в разных базисах.

УПРАЖНЕНИЕ 10. Докажите, что отношение конгруэнтности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

### 1.3. Синхронные элементарные преобразования строк и столбцов вещественной матрицы

Пусть  $E_{ij}$  — матрица, полученная из единичной перестановкой ее  $i$ -й и  $j$ -й строк;  $E_i(\alpha)$  — матрица, полученная из единичной умножением  $i$ -й строки на число  $\alpha$ ;  $E_{ij}(\alpha)$  — матрица, полученная из единичной прибавлением к  $i$ -й строке  $j$ -й, умноженной на  $\alpha$ . Матрицы  $E_{ij}$ ,  $E_i(\alpha)$ ,  $E_{ij}(\alpha)$  называются матрицами *элементарных преобразований*.

Напомним, что три типа элементарных преобразований со строками матрицы  $A$  можно осуществить домножая  $A$  *слева* на эти матрицы:

- умножение на  $E_{ij}$  осуществляет перестановку строк с номерами  $i$  и  $j$ ,
- умножение на  $E_i(\alpha)$  — умножение  $i$ -й строки на число  $\alpha$ ,
- умножение на  $E_{ij}(\alpha)$  — прибавление к  $i$ -й строке  $j$ -й, умноженной на  $\alpha$ .

Элементарные преобразования со столбцами матрицы  $A$  можно осуществить умножая  $A$  *справа* на те же матрицы:

- умножение на  $E_{ij}$  осуществляет перестановку столбцов с номерами  $i$ ,  $j$ ,
- умножение на  $E_i(\alpha)$  — умножение  $i$ -го столбца на число  $\alpha$ ,
- умножение на  $E_{ij}(\alpha)$  — прибавление к  $j$ -му столбцу  $i$ -го, умноженного на  $\alpha$ .

Так как

$$E_{ij}^T = E_{ij}, \quad E_i(\alpha)^T = E_i(\alpha), \quad E_{ij}(\alpha)^T = E_{ji}(\alpha),$$

то каждое из следующих пар *синхронных* элементарных преобразований переводит матрицу в конгруэнтную ей:

- перестановка строк с номерами  $i, j$  вместе с перестановкой столбцов с номерами  $i, j$ ,
- умножение  $i$ -й строки на  $\alpha$ , умножение  $i$ -го столбца на  $\alpha$ ,
- прибавление к  $i$ -й строке  $j$ -й, умноженной на  $\alpha$ , прибавление к  $i$ -му столбцу  $j$ -го, умноженного на  $\alpha$ .

#### 1.4. Симметричные билинейные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Билинейную функцию  $f \in \mathcal{F}(V)$  назовем *симметричной*, или *симметрической*, если для любых  $x, y$  из  $V$

$$f(x, y) = f(y, x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Матрица  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  называется *симметричной*, или *симметрической*, если  $A^T = A$ .

УПРАЖНЕНИЕ 13. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

1. Билинейная функция  $f$  — симметричная.
2. В произвольном базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрица  $[f]_{\mathbf{e}}$  симметрична.
3. Существует базис  $e_1, \dots, e_n$ , в котором матрица  $[f]_{\mathbf{e}}$  симметрична.

ТЕОРЕМА 14 (ЛАГРАНЖ). *Любая симметричная матрица  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  конгруэнтна некоторой диагональной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем алгоритм приведения матрицы  $A = (a_{ij})$  к диагональному виду с помощью синхронных элементарных преобразований. Возможны два исчерпывающих случая.

I.  $a_{11} \neq 0$ . Выполним над матрицей  $A$  следующие синхронные элементарные преобразования: для каждого  $i \in \{2, \dots, n\}$  вычтем из  $i$ -й строки 1-ю строку, умноженную на  $a_{i1}/a_{11}$ , и вычтем из  $i$ -го столбца 1-й столбец, умноженный на  $a_{1i}/a_{11}$ . Очевидно, что после этих преобразований матрица  $A$  перейдет в конгруэнтную ей матрицу следующего вида

$$\left( \begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & B^{(1)} \end{array} \right), \quad (4)$$

причем матрица  $B^{(1)}$  симметрична.

II.  $a_{11} = 0$ . Возможны следующие варианты:

1.  $\forall i \in \{2, 3, \dots, n\} a_{i1} = a_{1i} = 0$ . Матрица  $A$  уже имеет вид (4). В данном случае никаких действий производить не нужно.
2.  $\exists k \in \{2, 3, \dots, n\} a_{k1} = a_{1k} \neq 0$ . Выберем такое  $k$ .
  - 1) Если  $a_{kk} \neq 0$ , то переставляем строки и столбцы с номерами 1 и  $k$  и тем самым приходим к случаю I.
  - 2) Если  $a_{kk} = 0$ , то прибавляем к 1-ой строке  $k$ -ю строку и 1-му столбцу  $k$ -й столбец, тем самым снова приходим к случаю I.

После выполнения описанных здесь действий матрица  $A$  перейдет в конгруэнтную ей матрицу вида (4). Далее достаточно те же действия провести с матрицей  $B^{(1)}$  и т. д.  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 15.** *Любая симметричная матрица  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  конгруэнтна некоторой диагональной матрице с диагональными элементами  $0, \pm 1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Можем считать, что матрица  $A$  уже имеет диагональный вид:

$$A = \text{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Для каждого  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , если  $d_i \neq 0$ , поделим  $i$ -ю строчку и  $i$ -й столбец на  $\sqrt{|d_i|}$ . При этом исходная матрица переходит в конгруэнтную матрицу, обладающую требуемым свойством.  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  называется *каноническим* для симметричной билинейной функции  $f$ , если

$$f(e_i, e_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j),$$

иными словами, если матрица  $[f]_{\mathbf{e}}$ , называемая в данном случае *каноническим представлением* функции  $f$ , диагональна.

Заметим, что если базис  $e_1, \dots, e_n$  — канонический для симметричной функции  $f$  и  $[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $[y]_{\mathbf{e}} = (y_1, \dots, y_n)^T$ , то

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^n d_j x_j y_j,$$

где  $d_j = f(e_j, e_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

СЛЕДСТВИЕ 17. Для любой симметричной билинейной функции  $f$  существует канонический базис.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для матрицы  $[f]_{\mathbf{e}}$  построим конгруэнтную ей диагональную матрицу  $B$  такую, что  $B = Q^T [f]_{\mathbf{e}} Q$  для некоторой невырожденной матрицы  $Q$ . Осталось рассмотреть  $Q$  как матрицу перехода к новому базису  $\mathbf{e}'$ , тогда  $[f]_{\mathbf{e}'} = B$ , следовательно, базис  $\mathbf{e}'$  — канонический.  $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  называется *нормальным* для симметричной билинейной функции  $f$ , если

$$f(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \pm 1 \text{ или } 0 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

В данном случае матрица  $[f]_{\mathbf{e}}$  называется *нормальным представлением* функции  $f$ .

СЛЕДСТВИЕ 19. Для любой симметричной билинейной функции  $f$  существует нормальный базис.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Билинейная форма  $\sum_{j=1}^n d_j x_j y_j$  называется *канонической*. Если при этом коэффициенты  $d_j$  канонической билинейной формы равны  $\pm 1$  или 0, то она называется *нормальной*.

Итак, базис является каноническим (соответственно нормальным) для симметричной билинейной функции  $f$  тогда и только тогда, когда в этом базисе функция  $f$  представляется канонической (соответственно нормальной) билинейной формой.

**ПРИМЕР 21.** Найдем нормальный базис  $\mathbf{e}'$  для симметричной билинейной функции  $f$ , заданной в базисе  $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  матрицей

$$[f]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 9 & 12 \\ 4 & 10 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

Припишем к  $[f]_{\mathbf{e}}$  справа единичную матрицу. С полученной матрицей будем делать преобразования строк одновременно с преобразованиями столбцов.

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 12 & 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Имеет место случай I:  $a_{11} \neq 0$ . Выполним соответствующие этому случаю преобразования.

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Для подматрицы, расположенной в строках и столбцах с номерами 2, 3, 4 имеет место случай II-2. Прибавим ко второй строке третью и такое же преобразование сделаем с соответствующими столбцами.

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Теперь для подматрицы, расположенной в строках со 2-й по 4-ю и в столбцах с теми же номерами, имеем случай I. Из третьей строки

вычтем вторую, умноженную на  $1/2$ , из четвертой вычтем вторую и такие же преобразования сделаем с соответствующими столбцами.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Для подматрицы, расположенной в строках 3-й и 4-й и в столбцах с теми же номерами, имеем случай I. Из четвертой строки вычтем удвоенную третью и такое же преобразование сделаем с соответствующими столбцами.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Приведение матрицы билинейной функции к каноническому виду закончено. Для приведения матрицы к нормальному виду поделим вторую строчку и второй столбец на  $\sqrt{2}$ , третью строчку и третий столбец умножим на  $\sqrt{2}$ , четвертую строчку и четвертый столбец поделим на 2.

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1/2 \end{array} \right)$$



Матрицу перехода получаем, транспонируя матрицу, стоящую справа:

$$[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -5\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получен нормальный базис

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1, \\ e'_2 &= -5\sqrt{2}/2 e_1 + \sqrt{2}/2 e_2 + \sqrt{2}/2 e_3, \\ e'_3 &= -\sqrt{2}/2 e_1 - \sqrt{2}/2 e_2 + \sqrt{2}/2 e_3, \\ e'_4 &= e_1 - e_3 + 1/2 e_4. \end{aligned}$$

По матрице билинейной функции в найденном нормальном базисе легко определяется соответствующая нормальная форма:  $f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4$ , где  $[x]_{\mathbf{e}'} = (x'_1, \dots, x'_4)^T$ ,  $[y]_{\mathbf{e}'} = (y'_1, \dots, y'_4)^T$ . По матрице перехода к нормальному базису определяются формулы, связывающие координаты в старом и новом базисах  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}'$  соответственно:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 - 5\sqrt{2}/2 x'_2 - \sqrt{2}/2 x'_3 + x'_4, \\ x_2 = \sqrt{2}/2 x'_2 - \sqrt{2}/2 x'_3 \\ x_3 = \sqrt{2}/2 x'_2 + \sqrt{2}/2 x'_3 \\ x_4 = -x'_3 + 1/2 x'_4. \end{cases}$$

**УПРАЖНЕНИЕ.** Построить канонический вид и канонический базис для билинейной функции, действующей в пространстве  $\mathbf{R}_2[t]$ , из примера 6.

**УПРАЖНЕНИЕ.** Построить канонический вид и канонический базис для билинейной функции, действующей в пространстве  $\mathbf{R}_3[t]$ , из примера б/н на стр. 8.

В разделе 1.6 будет описан другой алгоритм нахождения нормального базиса билинейной функции (метод выделения полного квадрата).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.** Минор  $\Delta_k$ , расположенный в первых  $k$  строках и первых  $k$  столбцах матрицы  $A$  называется *угловым* минором порядка  $k$ .

ТЕОРЕМА 23 (ЯКОБИ). Пусть матрица  $A = [f]_{\mathbf{e}}$  симметричной билинейной функции ранга  $r$  имеет отличные от нуля угловые миноры  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  (при  $r < n$  угловые миноры большего порядка, очевидно, равны 0). Тогда существует канонический базис  $e'_1, \dots, e'_n$ , для которого

$$f(e'_i, e'_i) = \begin{cases} \Delta_1, & \text{если } i = 1, \\ \Delta_i / \Delta_{i-1}, & \text{если } i = 2, \dots, r, \\ 0, & \text{если } i = r + 1, \dots, n. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем индукцией по количеству шагов, что в условиях теоремы алгоритм, приведенный в доказательстве теоремы Лагранжа, не изменяет угловых миноров матрицы  $A$ . Так как  $a_{11} = \Delta_1 \neq 0$ , то на первом шаге имеем случай I. Выполняемые при этом преобразования (строка вычитается из строк, расположенных ниже; столбец вычитается из столбцов, расположенных правее) не изменяют угловых миноров матрицы  $A$ . По окончании преобразований первого шага матрица  $A$  переходит в матрицу вида (4), в которой  $\Delta_2 = a'_{11}b'_{11} \neq 0$ , откуда  $b'_{11} \neq 0$ .

На  $k$ -м шаге ( $k \leq r$ ) матрица приобретает вид  $\text{diag}(a'_{11}, \dots, a'_{kk}, B_k)$ . По предположению индукции угловые миноры этой матрицы совпадают с  $\Delta_i$ . Так как  $\Delta_{k+1} = a'_{11} \cdot \dots \cdot a'_{kk} \cdot b'_{11} \neq 0$ , то  $b'_{11} \neq 0$  и снова имеем случай I. Выполняемые при этом преобразования не меняют угловых миноров.

После  $r$  шагов получаем матрицу  $\text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$ , в которой  $\Delta_i = d_1 \cdot \dots \cdot d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), откуда получаем доказываемое.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 24. Докажите, что для любой билинейной функции  $f$  ранга  $r$  найдется базис  $\mathbf{e}$ , такой, что все угловые миноры матрицы  $[f]_{\mathbf{e}}$  порядка не большего  $r$  не равны 0.

ТЕОРЕМА 25 (ЗАКОН ИНЕРЦИИ). Нормальное представление симметричной билинейной функции определено однозначно с точностью до перестановок диагональных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $e_1, \dots, e_n$  и  $e'_1, \dots, e'_n$  — два нормальных базиса пространства  $V$  для функции  $f$ , такие, что

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^t x_j y_j - \sum_{j=t+1}^r x_j y_j, \quad (5)$$

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{t'} x'_j y'_j - \sum_{j=t'+1}^{r'} x'_j y'_j, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} [x]_{\mathbf{e}} &= (x_1, \dots, x_n)^T, & [x]_{\mathbf{e}'} &= (x'_1, \dots, x'_n)^T, \\ [y]_{\mathbf{e}} &= (y_1, \dots, y_n)^T, & [y]_{\mathbf{e}'} &= (y'_1, \dots, y'_n)^T. \end{aligned}$$

Имеем  $\text{rank } f = r = r'$ . Предположим, что  $t > t'$ . Обозначим

$$L_1 = L(e_1, \dots, e_t), \quad L_2 = L(e_{t'+1}, \dots, e_n).$$

Имеем

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \underbrace{\dim L_1}_{=t} + \underbrace{\dim L_2}_{=n-t'} - \underbrace{\dim(L_1 + L_2)}_{\leq n} \geq t - t' > 0,$$

поэтому найдется  $x \neq 0$  такой, что  $x \in L_1 \cap L_2$ . Так как  $x \in L_1$ , то  $x_j = 0$  ( $j = t + 1, \dots, n$ ), поэтому из (5) получаем

$$f(x, x) = \sum_{j=1}^t x_j x_j = \sum_{j=1}^t x_j^2 > 0.$$

Однако, так как  $x \in L_2$ , то  $x'_j = 0$  ( $j = 1, \dots, t'$ ), поэтому из (6) получаем

$$f(x, x) = - \sum_{j=t'+1}^r x'_j x'_j = - \sum_{j=t'+1}^r x_j'^2 \leq 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26.** *Положительным индексом  $s_+(f)$  (соответственно отрицательным индексом  $s_-(f)$ ) симметричной билинейной функции  $f$  называется число положительных (соответственно отрицательных) диагональных элементов в каноническом виде. Сигнатурой функции называется величина  $\sigma(f) = s_+(f) - s_-(f)$ .*

**ЗАМЕЧАНИЕ 27.** Из теоремы инерции следует, что положительный и отрицательный индексы инерции, и, следовательно, сигнатура, есть величины, не зависящие от базиса.

### 1.5. Знакоопределенные симметричные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. Пусть  $f$  — симметричная билинейная функция.

Функция  $f$  называется *положительно определенной* (обозначение  $f > 0$ ), если для любого  $x \neq 0$  выполнено  $f(x, x) > 0$ .

Функция  $f$  называется *отрицательно определенной* (обозначение  $f < 0$ ), если для любого  $x \neq 0$  выполнено  $f(x, x) < 0$ .

Функция  $f$  называется *неотрицательно определенной* (обозначение  $f \geq 0$ ), если для любого  $x$  выполнено  $f(x, x) \geq 0$ .

Функция  $f$  называется *неположительно определенной* (обозначение  $f \leq 0$ ), если для любого  $x$  выполнено  $f(x, x) \leq 0$ .

В остальных случаях  $f$  называется *знакопеременной*.

УПРАЖНЕНИЕ 29. Пусть  $f \in \mathcal{F}(V)$ ,  $\dim V = n$ . Докажите следующие утверждения:

$$\begin{aligned} f > 0 &\Leftrightarrow s_+(f) = n, & f \geq 0 &\Leftrightarrow s_-(f) = 0, \\ f < 0 &\Leftrightarrow s_-(f) = n, & f \leq 0 &\Leftrightarrow s_+(f) = 0. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 30. Докажите, что для положительной определенности симметричной билинейной функции необходима, но не достаточна положительность всех диагональных элементов ее матрицы в любом базисе.

ТЕОРЕМА 31 (КРИТЕРИЙ СИЛЬВЕСТРА). *Следующие три условия эквивалентны:*

- 1) билинейная функция  $f$  положительно определена;
- 2) для любого базиса  $e_1, \dots, e_n$  все угловые миноры матрицы  $[f]_e$  положительны;
- 3) существует базис  $e_1, \dots, e_n$ , в котором все угловые миноры матрицы  $[f]_e$  положительны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем импликацию 1)  $\Rightarrow$  2). Пусть  $f > 0$ , тогда в любом базисе диагональные элементы матрицы этой функции положительны. Следовательно, во время приведения алгоритмом, описанным при доказательстве теоремы Лагранжа, матрицы к

каноническому виду никогда не возникает случая II, поэтому угловые миноры  $\Delta_i$  не изменяются. Однако по предыдущему утверждению  $\Delta_i = d_1 \cdot \dots \cdot d_i > 0$ .

Импликация 2)  $\Rightarrow$  3) тривиальна, а импликация 3)  $\Rightarrow$  1) немедленно следует из теоремы Якоби.  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32.** Пусть  $A$  — симметричная матрица, а  $\mathbf{e}$  — некоторый базис пространства. По матрице  $A$  определим билинейную функцию  $f$ , такую, что  $A = [f]_{\mathbf{e}}$ . Матрица  $A$  называется положительно определенной, если функция  $f$  положительно определена. Аналогично вводятся определения отрицательно, неположительно и неотрицательно определенной симметричной матрицы, а также ее положительного и отрицательного индексов и сигнатуры. Легко видеть, что эти определения не зависят от выбранного базиса  $\mathbf{e}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ.** Говорят, что матрица  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  имеет *диагональное преобладание*, если  $a_{ii} > |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|$ . Докажите, что симметричная матрица с диагональным преобладанием положительно определена. **УКАЗАНИЕ:** Воспользоваться неравенством  $2|a_{ij}| \cdot |x_i| \cdot |x_j| \leq |a_{ij}| \cdot x_i^2 + |a_{ij}| \cdot x_j^2$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 33.** Докажите, что для того, чтобы  $f < 0$ , необходимо и достаточно, чтобы  $(-1)^i \Delta_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**УПРАЖНЕНИЕ 34.** Докажите, что для того, чтобы  $f \geq 0$ , необходимо, но не достаточно, чтобы  $\Delta_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Аналогично, для  $f \leq 0$  необходимо, но не достаточно, чтобы  $(-1)^i \Delta_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**УПРАЖНЕНИЕ 35.** Минор матрицы  $A$  называется *диагональным* (или *главным*), если в нем с каждой строкой участвует столбец матрицы  $A$  с таким же номером. Докажите, что для того, чтобы  $f \geq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы  $[f]_{\mathbf{e}}$  были неотрицательны. Докажите, что для того, чтобы  $f \leq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка матрицы  $[f]_{\mathbf{e}}$  были неотрицательны, а все главные миноры нечетного порядка — неположительны.

**УПРАЖНЕНИЕ.** Доказать, что билинейные функции из упражнений 5, 6 являются положительно определенными.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что в линейном пространстве  $\mathbf{R}^{n \times n}$  отображение  $f(X, Y) = \text{tr}(X^T Y)$  является симметричной положительно определенной билинейной функцией.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что в линейном пространстве  $\mathbf{R}^{n \times n}$  отображение  $f(X, Y) = \text{tr} X^2$  является симметричной билинейной функцией. Найти ее ранг и сигнатуру. ОТВЕТ:  $n^2$  и  $n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 36 (РАЗЛОЖЕНИЕ ХОЛЕЦКОГО). Пусть  $A = (a_{ij})$  — симметричная положительно определенная матрица. Доказать, что найдется единственная нижнетреугольная матрица  $L$  с положительными диагональными элементами, такая, что

$$A = LL^T. \quad (7)$$

Разложение (7) называется *разложением Холецкого*, или *треугольным разложением* матрицы  $A$ .

Пусть все угловые миноры матрицы  $A$  не равны нулю. Доказать, что тогда найдется единственная нижнетреугольная матрица  $L$  с единичными диагональными элементами и диагональная матрица  $D$ , такие, что

$$A = LDL^T. \quad (8)$$

Разложение (8) называется *LDL<sup>T</sup>-разложением* матрицы  $A$ .

УПРАЖНЕНИЕ. Показать, что элементы матрицы  $L = (\ell_{ij})$  в разложении (7) можно вычислить последовательно в порядке

$$\ell_{11}, \ell_{21}, \dots, \ell_{n1}, \ell_{22}, \ell_{32}, \dots, \ell_{n2}, \ell_{33}, \dots, \ell_{nn}$$

по формулам:

$$\ell_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2}, \quad \ell_{ij} = -\frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} \ell_{jk}}{\ell_{jj}} \quad (i > j).$$

Далее показать, что

$$\max_{i, j} |\ell_{ij}| \leq \max_i \sqrt{a_{ii}}.$$

Таким образом, при вычислении разложения Холецкого не происходит (в указанном смысле) роста элементов.

УПРАЖНЕНИЕ (МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ). Пусть  $A$  — положительно определенная симметричная матрица из  $\mathbf{R}^{n \times n}$ , а  $b$  — столбец высоты  $n$ . Если разложение Холецкого  $A = LL^T$  известно, то для решения системы  $Ax = b$  достаточно решить последовательно две треугольные системы  $Ly = b$  и  $L^T x = y$ . На этой основе предложить метод решения систем линейных уравнений с положительно определенной матрицей (*метод квадратных корней*). Сравнить суммарное число арифметических операций в этом методе с числом арифметических операций, используемых в методе Гаусса. ОТВЕТ: Метод Гаусса требует  $(2/3)n^3 + O(n^2)$  арифметических операций, в то время как метод квадратных корней —  $(1/3)n^3 + O(n^2)$  арифметических операций. Таким образом, метод квадратных корней примерно вдвое экономичнее метода Гаусса.

### 1.6. Квадратичные вещественные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. Пусть  $f \in \mathcal{F}(V)$ , тогда функция  $g : V \rightarrow \mathbf{R}$ , определяемая равенством  $g(x) = f(x, x)$ , называется *квадратичной*.

ПРИМЕР 38. Функция  $g(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$  в  $\mathbf{R}^2$  является квадратичной. Действительно, функция  $f(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$  — билинейная и  $g(x) = f(x, x)$ . Заметим, что по квадратичной функции соответствующая ей билинейная восстанавливается неоднозначно. Например, функции  $g$  соответствует также билинейная функция  $f_1(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 2x_2y_2$  и бесконечно много других.

УТВЕРЖДЕНИЕ 39. Пусть  $g$  — квадратичная функция, тогда билинейная симметричная функция  $f$ , для которой  $g(x) = f(x, x)$ , существует и единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что билинейная функция  $f$  с указанными в утверждении свойствами существует. Докажем ее ЕДИНСТВЕННОСТЬ. Имеем

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y, x+y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y), \\ g(x-y) &= f(x-y, x-y) = f(x, x) - 2f(x, y) + f(y, y). \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, после очевидных преобразований получаем

$$f(x, y) = \frac{1}{4} (g(x+y) - g(x-y)). \quad (9)$$

Таким образом,  $f$  по  $g$  восстанавливается однозначно.

**СУЩЕСТВОВАНИЕ.** Легко проверить, что  $f$ , определяемая формулой (9), симметрична и  $g(x) = f(x, x)$ .  $\square$

В силу доказанного утверждения на квадратичные функции переносятся основные определения и теоремы теории симметричных билинейных функций. Так, *матрицей квадратичной функции* называется матрица соответствующей билинейной симметрической функции. Вводятся понятия *канонического* и *нормального* базиса, *знакопостоянной* и *знакопеременной* квадратичной функции, переносятся теорема Якоби, закон инерции и критерий Сильвестра.

Пусть  $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — произвольный базис пространства  $V$ . Если  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $A^T = A$ , то, легко проверить, что

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = [x]_{\mathbf{e}}^T A [x]_{\mathbf{e}} \quad (10)$$

является квадратичной функцией, причем  $A = [f]_{\mathbf{e}}$ . Таким образом, формула (10) задает общий вид квадратичной функции. Выражения вида  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  называются *квадратичными формами*. Квадратичная форма  $\sum_{j=1}^n d_j x_j^2$  называется *канонической*. Если коэффициенты  $d_j$  канонической квадратичной формы равны  $\pm 1$  или  $0$ , то она называется *нормальной*.

Для нахождения канонического базиса квадратичной функции мы можем воспользоваться алгоритмом, приведенным в доказательстве теоремы Лагранжа. Можно также воспользоваться другим методом, называемым *методом выделения полного квадрата*. Объясним его на двух примерах.

**ПРИМЕР 40.** Рассмотрим квадратичную форму

$$g(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

которую преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} g(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \\ &= x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2. \end{aligned}$$



где

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица  $Q$  невырождена, поэтому можно положить  $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} = Q^{-1}$ . Базис  $\mathbf{e}'$  — нормальный.

ПРИМЕР 41. Форма  $g(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$  не содержит ни одного квадрата  $x_j^2$ , поэтому сначала сделаем замену

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2, \\ x_2 = x'_1 - x'_2, \\ x_3 = x'_3. \end{cases} \quad (11)$$

Тогда получим  $g(x) = x_1'^2 - x_2'^2 + 2x'_1x'_3$ . Теперь можно выделить полный квадрат:  $g(x) = (x'_1 + x'_3)^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2$ , где

$$\begin{cases} x_1'' = x'_1 + x'_3, \\ x_2'' = x'_2, \\ x_3'' = x'_3. \end{cases} \quad (12)$$

Объединяя (11) и (12), получаем следующие формулы, связывающие старые  $x_j$  и новые  $x_j''$  координаты:

$$\begin{cases} x_1 = x_1'' + x_2'' - x_3'', \\ x_2 = x_1'' - x_2'' - x_3'', \\ x_3 = x_3'', \end{cases}$$

по которым легко определяется матрица перехода.

Очевидно, метод выделения полного квадрата можно применять также для нахождения канонического (или нормального) базиса *билинейных* функций.

## 2. Евклидовы пространства

### 2.1. Основные определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42. Линейное вещественное пространство  $V$  называется *евклидовым*, если задано отображение  $V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ , ставящее каждой паре векторов  $x, y \in V$  число  $(x, y) \in \mathbf{R}$ , называемое *скалярным произведением*, обладающее следующими свойствами:

1.  $(x, y) = (y, x)$ ,
2.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ,
3.  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ ,
4.  $x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0$

для любых  $x, y, z$  из  $V$  и  $\alpha$  из  $\mathbf{R}$ . Свойства 1)–4) называются *аксиомами евклидова пространства*.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 43.** *Скалярное произведение в евклидовом пространстве есть положительно определенная симметричная билинейная функция. И наоборот, любую положительно определенную симметричную функцию можно выбрать в качестве скалярного произведения.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Аксиомы 2, 3 означают линейность по первому аргументу. Далее,

$$\begin{aligned}
 (x, y + z) &= (y + z, x) && \text{(по аксиоме 1)} \\
 &= (y, x) + (z, x) && \text{(по аксиоме 2)} \\
 &= (x, y) + (x, z) && \text{(по аксиоме 1)}
 \end{aligned}$$

для любых  $x, y, z$  из  $V$ . Аналогично можно показать, что

$$(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$$

для любых  $x, y$ , из  $V$  и  $\alpha$  из  $\mathbf{R}$ . Итак скалярное произведение  $(x, y)$  является билинейной функцией. По аксиоме 1 эта функция симметричная и по аксиоме 4 — положительно определенная.

Вторая часть утверждения очевидна. □

**ПРИМЕР 44.** Следующие билинейные функции являются симметричными положительно определенными и, следовательно, их можно выбрать в качестве скалярного произведения:

1. скалярное произведение  $(x, y) = |x||y| \cos \varphi$  в пространствах  $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ ;

2. в пространстве  $\mathbf{R}^n$ :

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad \text{где } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};$$

3. в пространстве  $\mathbf{R}(a, b)$  непрерывных функций, заданных на отрезке  $[a, b]$

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Приведенные функции будем называть *стандартными скалярными произведениями* в соответствующих пространствах.

## 2.2. Матрица Грама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 45. *Матрицей Грама*, построенной по системе векторов  $a_1, \dots, a_k$  называется матрица

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 46. Пусть  $A \in \mathbf{R}^{n \times k}$ . Рассмотрим столбцы  $a_1, \dots, a_k$  матрицы  $A$  как систему векторов арифметического пространства  $\mathbf{R}^n$  со стандартным скалярным произведением. Легко видеть, что

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = A^T A.$$

Если  $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$  — базис пространства, то  $\Gamma_{\mathbf{e}} = \Gamma(e_1, \dots, e_n)$  — матрица билинейной функции  $f(x, y) = (x, y)$ , записанная в этом базисе. Поэтому справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 47. (ВЫРАЖЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ.)

$$(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^T \Gamma_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}}.$$



УТВЕРЖДЕНИЕ 50 (Неравенство Коши–Буняковского). Для любых векторов  $a, b$  евклидова пространства  $V$  выполнено неравенство

$$|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы  $a$  и  $b$  линейно зависимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойству определителя Грама (утверждение 48) для системы векторов  $a, b$

$$0 \leq \Gamma(a, b) = \begin{vmatrix} (a, a) & (a, b) \\ (b, a) & (b, b) \end{vmatrix} = (a, a)(b, b) - (a, b)(b, a) = |a|^2|b|^2 - (a, b)^2,$$

откуда  $(a, b)^2 \leq |a|^2|b|^2$ . Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, приходим к неравенству  $|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|$ , причем равенство получаем тогда и только тогда, когда  $a, b$  линейно зависимы.  $\square$

ПРИМЕР 51. Рассмотрим неравенство Коши–Буняковского в пространствах  $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{R}^n, \mathbf{R}(a, b)$ , с введенными в них стандартными скалярными произведениями:

1.  $|(a, b)| \leq |a||b|$  в пространствах  $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$  следует также из определения  $(a, b) = |a||b| \cos \varphi$ ;
2. в пространстве  $\mathbf{R}^n$ :

$$\left( \sum_{j=1}^n x_j y_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n x_j^2 \sum_{j=1}^n y_j^2;$$

3. в пространстве  $\mathbf{R}(a, b)$ :

$$\left( \int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt.$$

Неравенство Коши–Буняковского позволяет ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 52. Углом между векторами  $a, b$  называется вещественное число

$$\varphi = \arccos \frac{(a, b)}{|a||b|}.$$

Данное определение согласуется с понятием угла в геометрических пространствах  $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 53 (НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА). Для любых векторов  $a, b$  евклидова пространства  $V$  выполнено неравенство

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое неравенство следует из цепочки соотношений:

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b, a + b) \\ &= (a, a) + 2(a, b) + (b, b) \\ &\leq |a|^2 + 2|(a, b)| + |b|^2 && \text{так как } (a, b) \leq |(a, b)| \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 && \text{так как } |(a, b)| \leq |a||b| \\ &= (|a| + |b|)^2. \end{aligned}$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 54. Дайте геометрическую интерпретацию неравенству треугольника в пространствах  $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ .

УПРАЖНЕНИЕ 55. Докажите, что (15) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда  $a = \alpha b$  или  $b = \alpha a$  для некоторого  $\alpha \geq 0$  (в геометрических пространствах  $\mathbf{V}_2$  и  $\mathbf{V}_3$  векторы  $a$  и  $b$  коллинеарны и сонаправлены).

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите следующие свойства нормы вектора. Пусть  $a, b$  — произвольные векторы евклидова пространства  $V$ ,  $\alpha$  — произвольное вещественное число, тогда

- 1)  $|\alpha a| = |\alpha| \cdot |a|$ ;
- 2)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ ;
- 1)  $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$  (равенство параллелограмма — дайте геометрическую интерпретацию).

### 2.3. Ортогональность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 56. Векторы  $a, b$  называются *ортогональными* (в пространствах  $\mathbf{V}_2$  и  $\mathbf{V}_3$  — *перпендикулярными*), если  $(a, b) = 0$ . Обозначение:  $a \perp b$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 57. Система векторов  $a_1, \dots, a_k$  называется *ортогональной*, если  $a_i \perp a_j$  при  $i \neq j, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k$ .

Система векторов  $a_1, \dots, a_k$  называется *ортонормированной*, если

$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \quad (\text{т. е. } a_i \perp a_j), \\ 1 & \text{при } i = j \quad (\text{т. е. } |a_i| = 1). \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 58 (ТЕОРЕМА ПИФАГОРА). Если  $a \perp b$ , то

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое равенство следует из соотношений:

$$|a + b|^2 = (a + b, a + b) = (a, a) + \underbrace{(a, b)}_0 + \underbrace{(b, a)}_0 + (b, b) = |a|^2 + |b|^2.$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 59 (ТЕОРЕМА, ОБРАТНАЯ К ТЕОРЕМЕ ПИФАГОРА). Докажите, что если  $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2$ , то  $a \perp b$ .

УПРАЖНЕНИЕ 60 (ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА). Докажите, что если система  $a_1, \dots, a_k$  ортогональна, то

$$|a_1 + \dots + a_k|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_k|^2.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 61. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. Ортонормированная система линейно независима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, матрица Грама ортогональной системы ненулевых векторов — диагональная с ненулевыми диагональными элементами. Матрица Грама ортонормированной системы единичная. По свойству определителя Грама (утверждение 48) в обоих случаях системы линейно независимы. □

## 2.4. Ортогональный и ортонормированный базисы

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 62.** Базис  $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$  называется *ортогональным* (*ортонормированным*), если он представляет собой ортогональную (соответственно ортонормированную) систему.

**ЗАМЕЧАНИЕ 63.** В ортогональном базисе матрица Грама диагональная:

$$\Gamma_{\mathbf{e}} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n),$$

поэтому, если  $[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $[y]_{\mathbf{e}} = (y_1, \dots, y_n)^T$ , то

$$(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^T \Gamma_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}} = d_1 x_1 y_1 + \dots + d_n x_n y_n.$$

В ортонормированном базисе матрица Грама единичная, поэтому

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Из теоремы Лагранжа получаем, что в любом евклидовом пространстве существует ортогональный и, следовательно, ортонормированный базисы. Ниже мы опишем алгоритм нахождения ортонормированного базиса любого подпространства евклидова пространства.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 64.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортогональный базис и  $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ , тогда

$$\alpha_j = \frac{(a, e_j)}{(e_j, e_j)}. \quad (16)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Домножая скалярно справа равенство

$$a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

на  $e_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), получаем  $(a, e_j) = \alpha_1 (e_1, e_j) + \dots + \alpha_n (e_n, e_j)$ . Так как базис ортогональный, то в правой части этого равенства останется только одно ненулевое слагаемое  $(e_j, e_j)$ , откуда и следуют доказываемые формулы.  $\square$

Аналогично доказывается



УТВЕРЖДЕНИЕ 65. Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный базис и  $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ , тогда  $\alpha_j = (a, e_j)$ .

ПРИМЕР 66. В пространствах  $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$  со стандартным скалярным произведением  $j$ -ая координата вектора в ортонормированном базисе  $e_1, \dots, e_n$  ( $n = 2, 3$  соответственно) равна  $(x, e_j) = |x| \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между вектором  $x$  и  $e_j$ .

ПРИМЕР 67. В трехмерном линейном вещественном пространстве  $V$  определим скалярное произведение так, чтобы система векторов  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ , заданных своими координатными столбцами в базисе  $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ :

$$[a_1]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [a_2]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [a_3]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

стала ортонормированной.

Так как система  $\mathbf{a}$  линейно независима, то она образует базис трехмерного пространства  $V$ . Скалярное произведение однозначно определяется матрицей Грама в некотором базисе. Например, в базисе  $\mathbf{a}$  матрица Грама  $\Gamma_{\mathbf{a}}$  — это единичная матрица. Таким образом, решение задачи существует и единственно. Чтобы найти матрицу Грама в исходном базисе  $\mathbf{e}$  воспользуемся соотношением  $\Gamma_{\mathbf{a}} = A^T \Gamma_{\mathbf{e}} A$ , где

$$A = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\Gamma_{\mathbf{e}} = (A \cdot A^T)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что любую ортогональную систему ненулевых векторов евклидова пространства можно дополнить до ортогонального базиса.

ПРИМЕР. Пусть в пространстве  $\mathbf{R}^4$  введено стандартное скалярное произведение. Очевидно, что векторы  $a_1 = (1, 1, 1, 1)^T$ ,  $a_2 =$

$(1, -1, 1, -1)^T$  ортогональны. Дополним систему  $a_1, a_2$  до ортогонального базиса пространства  $\mathbf{R}^4$ . Вектор  $a_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  определим из условий  $(a_1, a_3) = 0, (a_2, a_3) = 0$ . Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве  $a_3$  возьмем любое ненулевое частное решение этой системы, например,  $a_3 = (1, 1, -1, -1)^T$ . Вектор  $a_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  определим из условий  $(a_1, a_4) = 0, (a_2, a_4) = 0, (a_3, a_4) = 0$ . Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве  $a_4$  возьмем любое ненулевое частное решение этой системы, например,  $a_4 = (1, -1, -1, 1)^T$ . Построенная система  $a_1, a_2, a_3, a_4$  образует ортогональный базис пространства  $\mathbf{R}^4$ .

УПРАЖНЕНИЕ. Систему векторов

$$\left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T, \quad \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T$$

дополнить до ортонормированного базиса пространства  $\mathbf{R}^3$ . Найти все способы, какими это можно сделать. Скалярное произведение стандартное.

## 2.5. Изоморфизм евклидовых пространств

Пусть  $V, V'$  — два линейных пространства над полем  $F$ . Напомним, что *изоморфизмом линейных пространств* называется взаимно однозначное отображение  $\varphi : V \rightarrow V'$ , ставящее в соответствие каждому вектору  $x \in V$  вектор  $\varphi x \in V'$ , такое, что для любых векторов  $x, y$  из  $V$  и любого скаляра  $\alpha$  из  $F$  выполняются равенства

1.  $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y,$
2.  $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x).$

Линейные пространства  $V$  и  $V'$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм  $\varphi : V \rightarrow V'$ .

УПРАЖНЕНИЕ 68. Доказать, что отношение изоморфности линейных пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно.

УПРАЖНЕНИЕ 69. Доказать, что линейные пространства  $V$  и  $V'$ , заданные над произвольным полем  $F$ , изоморфны тогда и только тогда, когда  $\dim V = \dim V'$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 70. Пусть  $V$  и  $V'$  — евклидовы пространства. Взаимно однозначное отображение  $\varphi : V \rightarrow V'$  называется *изоморфизмом евклидовых пространств*, если для любых векторов  $x, y$  из  $V$  и любого вещественного числа  $\alpha$  выполняются равенства

1.  $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y$ ,
2.  $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x)$ ,
3.  $(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$ .

Евклидовы пространства  $V$  и  $V'$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм  $\varphi : V \rightarrow V'$ .

УПРАЖНЕНИЕ 71. Доказать, что отношение изоморфности евклидовых пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно.

ТЕОРЕМА 72. *Евклидовы пространства  $V$  и  $V'$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $\dim V = \dim V'$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из свойств отношения изоморфности линейных пространств. Для доказательства достаточности покажем, что произвольное евклидово пространство  $V$  изоморфно арифметическому пространству  $\mathbf{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, далее необходимо воспользоваться транзитивностью отношения изоморфности. Выберем в  $V$  произвольный ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$  и определим изоморфизм  $\varphi$  по правилу:  $\varphi x = [x]_{\mathbf{e}}$ . Тогда

$$(\varphi x, \varphi y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j = (x, y).$$

Таким образом, свойство 3) из определения изоморфизма евклидовых пространств также выполнено.  $\square$

## 2.6. Ортогональные матрицы

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 73.** Матрица  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  называется *ортогональной*, если  $A^T = A^{-1}$ , т. е.  $AA^T = A^T A = E$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 74.** Докажите, что строки (столбцы) ортогональной матрицы  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , рассматриваемые как векторы арифметического пространства  $\mathbf{R}^n$  со стандартным скалярным произведением, образуют ортонормированную систему.

**УПРАЖНЕНИЕ.** Докажите, что определитель ортогональной матрицы по модулю равен 1.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 75.** Пусть  $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  — ортонормированный базис евклидова пространства  $V$ . Для того чтобы система векторов  $\mathbf{e}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  также образовывала ортонормированный базис необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода  $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$  была бы ортогональной.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как базис  $\mathbf{e}$  — ортонормированный, то  $(e'_i, e'_j) = [e'_i]_{\mathbf{e}}^T [e'_j]_{\mathbf{e}}$ . Поэтому базис  $\mathbf{e}'$  — ортонормированный тогда и только тогда, когда

$$[e'_i]_{\mathbf{e}}^T [e'_j]_{\mathbf{e}} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (17)$$

Условие (17) эквивалентно ортогональности матрицы  $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ .  $\square$

## 2.7. Ортогональные суммы и ортогональные дополнения

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 76.** Множества  $S$  и  $T$  векторов евклидова пространства  $V$  называются *ортогональными*, если  $(a, b) = 0$  для любых  $a \in S, b \in T$ . Обозначение:  $S \perp T$ .

Условие  $\{a\} \perp T$  будем записывать  $a \perp T$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 77.** Для того, чтобы  $a \perp L(a_1, \dots, a_k)$ , необходимо и достаточно выполнения условий  $a \perp a_i$  для любого  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть  $x$  — произвольный вектор из  $L(a_1, \dots, a_k)$ . Рассмотрим его разложение по векторам  $a_1, \dots, a_k$ :

$$x = x_1 a_1 + \dots + x_k a_k,$$

откуда получаем

$$(x, a) = x_1 \underbrace{(a_1, a)}_0 + \dots + x_k \underbrace{(a_k, a)}_0 = 0,$$

следовательно,  $x \perp a$ . □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 78. Сумму попарно ортогональных подпространств  $W_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) назовем *ортогональной* ( $k \geq 2$ ).

Напомним, что сумма подпространств  $W_1 + W_2 + \dots + W_k$  называется *прямой* суммой, если для любого вектора  $a \in V$  векторы  $a_1, \dots, a_k$ , такие, что

$$a = a_1 + \dots + a_k, \tag{18}$$

$a_i \in W_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), определяются единственным образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 79. *Ортогональная сумма подпространств является прямой суммой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность разложения (18) достаточно доказать для нулевого вектора. Пусть

$$0 = a_1 + \dots + a_k, \tag{19}$$

$a_i \in W_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ),  $W_i \perp W_j$  ( $i \neq j$ ). Последовательно скалярно домножая равенство (19) на векторы  $a_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) получаем  $0 = (a_i, a_i)$ , откуда  $a_i = 0$ . Таким образом, векторы  $a_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) в (19) определяются единственным образом, следовательно, рассматриваемая сумма — прямая. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 80. *Ортогональным дополнением* подпространства  $W \subseteq V$  называется множество  $W^\perp$  всех векторов из  $V$ , ортогональных с каждым вектором из  $W$ :

$$W^\perp = \{x \in V : x \perp W\}.$$

**ТЕОРЕМА 81.** *Для любого подпространства  $W$  евклидова пространства  $V$  ортогональное дополнение  $W^\perp$  является подпространством и  $V = W + W^\perp$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $W = \{o\}$ , то утверждение очевидно. Предположим теперь, что подпространство  $W$  ненулевое. Выберем в  $V$  произвольный ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$ , а в  $W$  произвольный базис  $a_1, \dots, a_k$ , тогда условия ортогональности произвольного вектора  $x \in V$  подпространству  $W$  примут вид  $(a_i, x) = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Записанные в координатной форме эти условия представляют собой систему линейных однородных уравнений. Матрица этой системы составлена из координат базисных векторов  $a_1, \dots, a_k$  и поэтому имеет ранг  $k$ , отсюда  $\dim W^\perp = n - k$ , и, так как сумма  $W + W^\perp$  — прямая, то  $\dim(W + W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = k + (n - k) = n$ , откуда  $W + W^\perp = V$ .  $\square$

**СЛЕДСТВИЕ 82.** *Пусть  $W$  — подпространство евклидова пространства  $V$ , тогда  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ .*

**СЛЕДСТВИЕ 83.** *Пусть  $W$  — произвольное подпространство евклидова пространства  $V$ . Любой вектор  $a$  из  $V$  однозначно можно представить в виде*

$$a = b + c, \quad \text{где } b \in W, \quad c \in W^\perp. \quad (20)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 84.** Вектор  $b$  в (20) называется *ортогональной проекцией* вектора  $a$  на подпространство  $W$ , вектор  $c$  называется *перпендикуляром*, или *ортогональной составляющей*, вектора  $a$  на подпространство  $W$ . Обозначения:  $b = \text{pr}_W a$ ,  $c = \text{ort}_W a$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 85.** Из определения следует, что

$$\text{ort}_W a = \text{pr}_{W^\perp} a, \quad \text{pr}_W a = \text{ort}_{W^\perp} a.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 86.** Пусть  $W, W_1, W_2$  — подпространства евклидова пространства  $V$ . Доказать утверждения

1.  $V^\perp = \{o\}$ ,
2.  $(W^\perp)^\perp = W$ ,

3.  $W_1 \subseteq W_2 \Leftrightarrow W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$ ,
4.  $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ ,
5.  $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$ .

### 2.8. Способы описания линейных подпространств

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — произвольный базис линейного пространства  $V$ . Из теории систем линейных уравнений известно, что произвольное подпространство  $W$  пространства  $V$  можно представить двумя способами: как множество векторов  $x$ , координаты которых получаются по формулам вида

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + \dots + a_{k1}t_k, \\ x_2 = a_{12}t_1 + \dots + a_{k2}t_k, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = a_{1n}t_1 + \dots + a_{kn}t_k, \end{cases} \quad (21)$$

где  $t_1, t_2, \dots, t_k$  — произвольные числа, или как множество векторов, координаты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = 0, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Выражения (21) можно записать в векторной форме:

$$x = a_1t_1 + \dots + a_kt_k.$$

Этот способ описания соответствует равенству

$$W = L(a_1, \dots, a_k),$$

где

$$[a_i]_{\mathbf{e}} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})^T \quad (i = 1, \dots, k). \quad (23)$$

Пусть пространство  $V$  — евклидово, а базис  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный. Определим векторы  $b_1, \dots, b_m$ :

$$[b_i]_{\mathbf{e}} = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im})^T \quad (i = 1, \dots, m). \quad (24)$$





Выражения (25) можно записать в векторной форме:

$$x = a_0 + a_1 t_1 + \dots + a_k t_k.$$

Этот способ описания соответствует равенству

$$a_0 + W = a_0 + L(a_1, \dots, a_k),$$

где

$$[a_i]_{\mathbf{e}} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})^T \quad (i = 0, \dots, k). \quad (27)$$

Пусть пространство  $V$  — евклидово, а базис  $e_1, \dots, e_n$  — ортонормированный. Определим векторы  $b_1, \dots, b_m$ :

$$[b_i]_{\mathbf{e}} = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im})^T \quad (i = 1, \dots, m). \quad (28)$$

Теперь уравнения (26) можно записать в векторном виде

$$(b_i, x) = b_{0i} \quad \text{или} \quad (b_i, x - a_0) = 0, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Этот способ описания соответствует равенству

$$a_0 + W = a_0 + L(b_1, \dots, b_m)^\perp.$$

Напомним, что *размерностью* многообразия  $a_0 + W$  называется  $\dim W$ . *Прямой* называется одномерное линейное многообразие (по аналогии с геометрическими пространствами  $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ ). *Гиперплоскостью* называется  $(n - 1)$ -мерное линейное многообразие, где  $n = \dim V$ . Из вышесказанного следует, что прямую можно задать параметрически  $x = a_0 + a_1 t$ , где  $a_1 \neq 0$ , а гиперплоскость можно задать уравнением  $(x, b_1) = \beta$ , где  $b_1 \neq 0$ .

## 2.10. Метод нахождения проекции и перпендикуляра

Пусть  $a_1, \dots, a_k$  — произвольный базис подпространства  $W$  евклидова пространства  $V$ ,  $a$  — произвольный вектор из  $V$ . Задача заключается в нахождении вещественных коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , для которых

$$\begin{aligned} \text{pr}_W a &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k; \\ \text{ort}_W a &= a - \text{pr}_W a; \\ (\text{ort}_W a, a_j) &= 0; \quad (j = 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (29)$$



ЗАМЕЧАНИЕ 90. Пусть  $a_1, \dots, a_k$  — столбцы матрицы  $A \in \mathbf{R}^{n \times k}$ , рассматриваемые как векторы евклидова пространства  $\mathbf{R}^n$  со стандартным скалярным произведением,  $a \in \mathbf{R}^n$ , тогда

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = A^T A$$

и система уравнений (30) приобретает вид:

$$A^T A y = A^T a, \text{ где } y = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T. \quad (31)$$

С помощью любого решения  $y$  этой системы можно найти искомую проекцию:

$$\text{pr}_W a = Ay.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 91. Так как

$$\text{ort}_W a = a - \alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_k a_k,$$

то

$$L(a_1, \dots, a_k, a) = L(a_1, \dots, a_k, \text{ort}_W a)$$

и, следовательно,

1. если  $a \notin L(a_1, \dots, a_k)$ , то  $\text{ort}_W a \neq 0$ ,
2. если  $a \in L(a_1, \dots, a_k)$ , то  $\text{ort}_W a = 0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 92. Если  $k = 1$ , то система (30) приобретает вид

$$\alpha_1(a_1, a_1) = (a, a_1),$$

откуда при  $a_1 \neq 0$

$$\text{pr}_W a = \frac{(a, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 93. Если система векторов  $a_1, \dots, a_k$  — ортогональная, то система уравнений (30) приобретает простой вид

$$\alpha_i(a_i, a_i) = (a, a_i) \quad (i = 1, \dots, k),$$

откуда при  $a_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ) (ср. с (16))

$$\alpha_i = \frac{(a, a_i)}{(a_i, a_i)} \quad (i = 1, \dots, k),$$

ПОЭТОМУ

$$\operatorname{pr}_W a = \frac{(a, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1 + \frac{(a, a_2)}{(a_2, a_2)} a_2 + \dots + \frac{(a, a_k)}{(a_k, a_k)} a_k, \quad (32)$$

$$\operatorname{ort}_W a = a - \frac{(a, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1 - \frac{(a, a_2)}{(a_2, a_2)} a_2 - \dots - \frac{(a, a_k)}{(a_k, a_k)} a_k. \quad (33)$$

По теореме Пифагора

$$|a|^2 = |\operatorname{pr}_W a|^2 + |\operatorname{ort}_W a|^2, \quad (34)$$

поэтому  $|a|^2 \geq |\operatorname{pr}_W a|^2$ . Теперь, применяя обобщенную теорему Пифагора к правой части последнего неравенства, с помощью (32) получаем *неравенство Бесселя*:

$$|a|^2 \geq \frac{(a, a_1)^2}{(a_1, a_1)} + \dots + \frac{(a, a_k)^2}{(a_k, a_k)} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{(a, a_i)}{|a_i|} \right)^2.$$

Из (34) следует, что равенство

$$|a|^2 = \frac{(a, a_1)^2}{(a_1, a_1)} + \dots + \frac{(a, a_k)^2}{(a_k, a_k)}$$

возможно тогда и только тогда, когда  $\operatorname{ort}_W a = 0$ , т.е.  $a \in W$  (*равенство Парсеваля*).

УТВЕРЖДЕНИЕ 94 (ТЕОРЕМА О ДЛИНЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА).

Пусть  $a_1, \dots, a_k$  — базис подпространства  $W$ , тогда для произвольного вектора  $a$  справедливо равенство

$$|\operatorname{ort}_W a| = \sqrt{\frac{\det \Gamma(a_1, \dots, a_k, a)}{\det \Gamma(a_1, \dots, a_k)}}. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\operatorname{pr}_W a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$ . Вычтем из последнего столбца определителя Грама  $\det \Gamma(a_1, \dots, a_k, a)$  линейную комбинацию остальных столбцов с коэффициентами  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ .

Тогда

$$\det \Gamma(a_1, \dots, a_k, a) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) & (a_1, a) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_k) & (a_2, a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) & (a_k, a) \\ (a, a_1) & (a, a_2) & \dots & (a, a_k) & (a, a) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) & (a_1, a - \alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_k a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_k) & (a_2, a - \alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_k a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) & (a_k, a - \alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_k a_k) \\ (a, a_1) & (a, a_2) & \dots & (a, a_k) & (a, a - \alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_k a_k) \end{vmatrix}.$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} a - \alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_k a_k &= \text{ort}_W a, \\ (a_i, \text{ort}_W a) &= 0, \\ (a, \text{ort}_W a) &= (\text{ort}_W a, \text{ort}_W a), \end{aligned}$$

получаем

$$\det \Gamma(a_1, \dots, a_k, a) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_k) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_k) & 0 \\ (a, a_1) & \dots & (a, a_k) & (\text{ort}_W a, \text{ort}_W a) \end{vmatrix}.$$

Теперь, с помощью теоремы Лапласа раскрывая определитель по последнему столбцу, получаем

$$\det \Gamma(a_1, \dots, a_k, a) = (\text{ort}_W a, \text{ort}_W a) \det \Gamma(a_1, \dots, a_k),$$

откуда и следует доказываемая формула.  $\square$

## 2.11. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта

Опишем процедуру нахождения ортогонального базиса  $b_1, \dots, b_k$  подпространства  $W$  по заданному произвольно заданному базису  $a_1, \dots, a_k$ . Положим

$$W_i = L(a_1, \dots, a_i) \quad (i = 1, \dots, k)$$

и построим векторы

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_i &= \text{ort}_{W_{i-1}} a_i, \quad (i = 2, \dots, k). \end{aligned} \quad (36)$$

Имеем  $W_i = L(b_1, \dots, b_i)$  и поэтому, учитывая замечание 93,  $b_i = \text{ort}_{W_{i-1}} a_i$  можно вычислять по формуле

$$b_i = a - \frac{(a, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1 - \frac{(a, a_2)}{(a_2, a_2)} a_2 - \dots - \frac{(a, a_{i-1})}{(a_{i-1}, a_{i-1})} a_{i-1}. \quad (37)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 95. Из теоремы Пифагора следует, что  $|b_i| \leq |a_i|$  ( $i = 1, \dots, k$ ).

ЗАМЕЧАНИЕ 96. Описанная процедура годится и для случая, когда  $W = L(a_1, \dots, a_k)$ , но векторы  $a_1, \dots, a_k$  не обязательно являются линейно независимыми. По замечанию 91,  $b_i$  в (37) равен нулю тогда и только тогда, когда  $a_i \in W_i$ .

ПРИМЕР. Найдем какой-либо ортонормированный базис линейной оболочки  $L$  системы векторов  $(97, 60, 29, -29)^T$ ,  $(36, 36, -17, 17)^T$ ,  $(-48, -11, 20, -20)^T$  пространства  $\mathbf{R}^4$  со стандартным скалярным произведением.

Прежде чем применять процесс ортогонализации найдем эквивалентную систему векторов «попроще». Для удобства запишем компоненты векторов в матрицу (по строкам):

$$\begin{pmatrix} 97 & 60 & 29 & -29 \\ 36 & 36 & -17 & 17 \\ -48 & -11 & 20 & -20 \end{pmatrix},$$

с которой будем осуществлять элементарные преобразования строк. Прибавим к 3-й строке 1-ю и разделим 3-ю на 49. Получим:

$$\begin{pmatrix} 97 & 60 & 29 & -29 \\ 36 & 36 & -17 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ко 2-й строке прибавим 3-ю, умноженную на 17, и разделим 2-ю строку на 53:

$$\begin{pmatrix} 97 & 60 & 29 & -29 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из 1-й строки вычтем 2-ю, умноженную на 31, и 3-ю, умноженную на 29. Разделим 1-ю строку на 37:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Полученная система векторов  $a_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ ,  $a_2 = (1, 1, 0, 0)^T$ ,  $a_3 = (1, 1, 1, -1)^T$  эквивалентна исходной системе. Применяя к векторам  $a_1, a_2, a_3$  процесс ортогонализации, по формулам (37) получим

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \\ b_2 &= a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} \cdot b_1 = (0, 1, 0, 0)^T, \\ b_3 &= a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} \cdot b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} \cdot b_2 = (0, 0, 1, -1)^T. \end{aligned}$$

Векторы  $b_1, b_2, b_3$  составляют ортогональный базис подпространства  $L$ . Для нахождения ортонормированного базиса нормируем эти векторы:

$$(1, 0, 0, 0)^T, \quad (0, 1, 0, 0)^T, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (0, 0, 1, -1)^T.$$

ПРИМЕР 97 (МНОГОЧЛЕНЫ ЛЕЖАНДРА). Пусть в пространстве многочленов скалярное произведение задано формулой:

$$(x, y) = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt \quad (38)$$

Можно показать, что следующие многочлены, известные под названием *многочленов Лежандра*:

$$L_0(t) = 1, \quad L_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

— образуют ортогональную систему в этом пространстве. Оказывается, что многочлены, полученные из системы  $1, t, t^2, t^3 \dots$  с помощью процесса ортогонализации только постоянными множителями отличаются от многочленов Лежандра.

Применим процесс ортогонализации к системе многочленов

$$a_1(t) = 1, \quad a_2(t) = t, \quad a_3(t) = t^2, \quad a_4(t) = t^3.$$

По формуле (37) имеем:

$$b_1(t) = 1;$$

$$b_2(t) = t - \frac{\int_{-1}^1 t \cdot 1 \, dt}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dt} \cdot 1 = t;$$

$$b_3(t) = t^2 - \frac{\int_{-1}^1 t^2 \cdot 1 \, dt}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dt} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^1 t^2 \cdot t \, dt}{\int_{-1}^1 t \cdot t \, dt} \cdot t = t^2 - \frac{1}{3};$$

$$b_4(t) = t^3 - \frac{\int_{-1}^1 t^3 \cdot 1 \, dt}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dt} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^1 t^3 \cdot t \, dt}{\int_{-1}^1 t \cdot t \, dt} \cdot t - \frac{\int_{-1}^1 t^3 \cdot (t^2 - 1/3) \, dt}{\int_{-1}^1 (t^2 - 1/3)^2 \, dt} \cdot (t^2 - 1/3).$$

Итак, мы нашли следующие многочлены:

$$b_1(t) = 1, \quad b_2(t) = t, \quad b_3(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad b_4(t) = t^3 - \frac{3}{5}t \quad (39)$$

(Ср. с упражнением б/н на стр. 16).

**ПРИМЕР 98.** Пусть в пространстве многочленов  $\mathbf{R}[t]$  скалярное произведение задано формулой (38). Найдём проекцию многочлена  $x(t) = t^5$  на подпространство  $W$  многочленов степени не выше 3. Воспользуемся тем, что нам известен ортогональный базис (39) данного подпространства. По формуле (32) получаем:

$$\text{pr}_W x = \frac{\int_{-1}^1 t^5 \cdot 1 \, dt}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dt} \cdot 1 + \frac{\int_{-1}^1 t^5 \cdot t \, dt}{\int_{-1}^1 t \cdot t \, dt} \cdot t + \frac{\int_{-1}^1 t^5 \cdot (t^2 - 1/3) \, dt}{\int_{-1}^1 (t^2 - 1/3)^2 \, dt} \cdot (t^2 - 1/3)$$



$$+ \frac{\int_{-1}^1 t^5 \cdot (t^3 - 3/5t) dt}{\int_{-1}^1 (t^3 - 3/5t)^2 dt} \cdot (t^3 - 3/5t) = \frac{10}{9}t^3 - \frac{5}{21}t.$$

УПРАЖНЕНИЕ 99. Решить задачу из предыдущего примера другим способом, взяв за базис подпространства  $W$  многочлены  $1, t, t^2, t^3$  и воспользовавшись методом решения системы нормальных уравнений (30). Постройте график многочлена  $t^5$  и найденной проекции. Объясните, почему для  $t \in [-1, 1]$  проекция хорошо приближает многочлен  $t^5$ .

УПРАЖНЕНИЕ 100 (Многочлены Чебышёва). Пусть в пространстве многочленов скалярное произведение задано формулой:

$$(x, y) = \int_{-1}^1 \frac{x(t) \cdot y(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Можно показать, что многочлены, известные под названием *многочленов Чебышёва*:

$$T_k(t) = \cos(k \arccos t) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

— образуют ортогональную систему в этом пространстве. Оказывается, что многочлены, полученные из системы  $1, t, t^2, t^3 \dots$  с помощью процесса ортогонализации отличаются от многочленов Чебышёва только постоянными множителями. Постройте первые 4 многочлена.

УПРАЖНЕНИЕ 101 ( $qR$ - и  $QR$ -разложения). Докажите, что для любой матрицы  $A \in \mathbf{R}^{n \times k}$  существуют матрица  $Q \in \mathbf{R}^{n \times k}$  с ортонормированными (относительно стандартного скалярного произведения в  $\mathbf{R}^n$ ) столбцами и верхнетреугольная матрица  $R \in \mathbf{R}^{k \times k}$  с положительными диагональными элементами, для которых

$$A = QR. \tag{40}$$

Представление матрицы  $A$  в виде (40) называется ее  $qR$ -разложением. УКАЗАНИЕ: к столбцам матрицы  $A$  применить процесс ортогонали-

зации.

Докажите, что для любой матрицы  $A \in \mathbf{R}^{n \times k}$  существуют ортогональная матрица  $\tilde{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  и верхнетреугольная матрица  $\tilde{R} \in \mathbf{R}^{n \times k}$ , для которых

$$A = \tilde{Q}\tilde{R}. \quad (41)$$

Представление матрицы  $A$  в виде (41) называется ее  $QR$ -разложением.

Докажите, что если матрица  $A$  — квадратная и невырожденная, то ее  $qR$ - и  $QR$ -разложения единственны.

## 2.12. Объем гиперпараллелепипеда

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 102.** Пусть  $a_1, \dots, a_k$  — линейно независимая система векторов линейного пространства  $V$ . *Гиперпараллелепипедом*, построенным на векторах  $a_1, \dots, a_k$ , называется множество

$$\Pi(a_1, \dots, a_k) = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 103.** Дайте геометрическую интерпретацию множеств  $\Pi(a_1)$ ,  $\Pi(a_1, a_2)$ ,  $\Pi(a_1, a_2, a_3)$  в пространствах  $\mathbf{V}_2$ ,  $\mathbf{V}_3$ . Особо рассмотрите случай, когда векторы  $a_1, a_2, a_3$  линейно зависимы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 104.** *Объемом гиперпараллелепипеда*  $\Pi(a_1, \dots, a_k)$  называется величина

$$V(a_1, \dots, a_k) = \begin{cases} |a_1|, & \text{если } k = 1, \\ V(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot |\text{ort}_{L(a_1, \dots, a_{k-1})} a_k|, & \text{если } k \geq 2. \end{cases} \quad (42)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 105.** Дайте геометрическую интерпретацию формулам (42) в пространствах  $\mathbf{V}_2$ ,  $\mathbf{V}_3$ .

**ТЕОРЕМА 106.** Пусть  $b_1, \dots, b_k$  — векторы, полученные из системы  $a_1, \dots, a_k$  с помощью процесса ортогонализации, тогда

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_k) &= V(b_1, \dots, b_k) \\ &= \sqrt{\det \Gamma(a_1, \dots, a_k)} = \sqrt{\det \Gamma(b_1, \dots, b_k)} \\ &= |b_1| \cdot \dots \cdot |b_k| \leq |a_1| \cdot \dots \cdot |a_k|. \end{aligned}$$

Последнее неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда система векторов  $a_1, \dots, a_k$  — ортогональная или по крайней мере один из векторов  $a_i$  нулевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя несколько раз формулы (35), (36), (42), получаем

$$\begin{aligned}
 V(a_1, \dots, a_k) &= |a_1| \cdot |\operatorname{pr}_{W_1} a_2| \cdot |\operatorname{pr}_{W_2} a_3| \cdot \dots \cdot |\operatorname{pr}_{W_{k-1}} a_k| \\
 &= |b_1| \cdot \dots \cdot |b_k| \\
 &= \sqrt{\det \Gamma(a_1) \cdot \frac{\det \Gamma(a_1, a_2)}{\det \Gamma(a_1)} \cdot \dots \cdot \frac{\det \Gamma(a_1, \dots, a_k)}{\det \Gamma(a_1, \dots, a_{k-1})}} \\
 &= \sqrt{\det \Gamma(a_1, \dots, a_k)}.
 \end{aligned}$$

Так как  $|b_i| = |\operatorname{ort}_{W_{i-1}} a_i| \leq |a_i|$ , то

$$V(a_1, \dots, a_k) \leq |a_1| \cdot \dots \cdot |a_k|.$$

Теорема доказана.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 107. Доказанная теорема обладает следующим геометрическим содержанием: определитель Грама системы векторов является квадратом объема гиперпараллелепипеда, построенного на этой системе; объем гиперпараллелепипеда не превосходит произведения длин его ребер.

Пусть  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  и  $a_1, \dots, a_n$  — столбцы матрицы  $A$ . Если в  $\mathbf{R}^n$  введено стандартное скалярное произведение, то  $\Gamma(a_1, \dots, a_n) = A^T A$ , откуда получаем

$$(\det A)^2 = \det(A^T A) = \det \Gamma(a_1, \dots, a_n) = \left( V(a_1, \dots, a_n) \right)^2,$$

следовательно,  $|\det A| = V(a_1, \dots, a_n)$ . Таким образом, в случае стандартного скалярного произведения модуль определителя квадратной матрицы есть объем гиперпараллелепипеда, построенного на системе столбцов этой матрицы. Аналогичное утверждение справедливо и для строк матрицы.

### 2.13. Неравенство Адамара

Во многих задачах необходимо уметь оценивать сверху величину определителя, исходя из величин его элементов. Неравенство Адамара, которое мы выведем, является одной из таких оценок.

**ТЕОРЕМА 108 (НЕРАВЕНСТВО АДАМАРА).** Пусть  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  и  $|a_{ij}| \leq \alpha$ , тогда

$$|\det A| \leq (\alpha\sqrt{n})^n. \quad (43)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим арифметическое пространство  $\mathbf{R}^n$  со стандартным скалярным произведением. Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — столбцы матрицы  $A$ . Тогда  $\Gamma(a_1, \dots, a_n) = A^T A$ . Из теоремы 106 получаем, что

$$\sqrt{\det(A^T A)} \leq |a_1| \cdot \dots \cdot |a_n|.$$

Теперь воспользуемся равенством  $\det(A^T A) = (\det A)^2$  и очевидной оценкой  $|a_j| \leq \alpha\sqrt{n}$  ( $j = 1, \dots, n$ ).  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ.** Доказать, что максимум модуля определителя с элементами, принадлежащими отрезку  $[-1, 1]$ , совпадает с максимумом модуля определителя с элементами  $\pm 1$ . **УКАЗАНИЕ:** Проследить, как изменяется определитель при замене  $a_{ij}$  на 1 или  $-1$  в зависимости от знака алгебраического дополнения к элементу  $a_{ij}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 109.** Доказать, что максимальная величина определителя 3-го порядка с элементами  $\pm 1$  равна 4. Таким образом, на вещественных ненулевых матрицах 3-го порядка оценка (43) не достигается.

**УПРАЖНЕНИЕ 110.** Доказать, что для матриц Адамара  $H_i$ , определяемых по формулам

$$H_0 = (1), \quad H_i = \left( \begin{array}{c|c} H_{i-1} & -H_{i-1} \\ \hline H_{i-1} & H_{i-1} \end{array} \right) \text{ при } i \geq 1,$$

неравенство (43) превращается в равенство. **УКАЗАНИЕ:** Доказать, что строки (столбцы) матрицы Адамара образуют в пространстве  $\mathbf{R}^n$  со стандартным скалярным произведением ортогональный базис (т. е. матрица  $1/\sqrt{2^i} \cdot H_i$  ортогональна).

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что если для некоторой ненулевой вещественной матрицы  $A$  в (43) имеет место знак равенства, то  $n$  равно 2 либо кратно 4. Задание можно переформулировать следующим образом. В пространстве  $\mathbf{R}^n$  со стандартным скалярным произведением имеется ортогональный базис такой, что все компоненты каждого из векторов этого базиса равны  $\pm 1$ . Доказать, что  $n$  равно 2 либо кратно 4. РЕШЕНИЕ: Пусть  $n \geq 3$ . Не нарушая общности, можно считать, что первая строка матрицы  $A$  состоит из единиц. Тогда в первых трех строках возможны столбики лишь одного из следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Число столбиков каждого из указанных видов обозначим  $x, y, z, t$  соответственно. Имеем

$$x + y + z + t = n.$$

Из условия ортогональности первых трех строк матрицы  $A$  получаем

$$\begin{aligned} x + y - z - t &= 0, \\ x - y + z - t &= 0, \\ x - y - z + t &= 0. \end{aligned}$$

Полученная система имеет единственное решение  $x = y = z = t = n/4$ . Таким образом,  $n$  должно быть кратно 4.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что если  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  и  $|a_{ij}| \leq \alpha$ , то

$$|\det A| \leq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \cdot \sqrt{(n+1)^{n+1}}.$$

УКАЗАНИЕ: Приписать к матрице слева нулевой столбец и сверху строку, составленную из чисел  $\alpha/2$ , а затем вычесть эту строку из всех остальных.

УПРАЖНЕНИЕ 111. Доказать, что если матрица  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  симметрична и положительно определена, то  $\det A \leq a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ .

УКАЗАНИЕ: Рассмотреть  $A$  как матрицу Грама для некоторой системы векторов.

## 2.14. Метрические задачи в евклидовых пространствах

В этом разделе, имея ввиду геометрическую интерпретацию, векторы евклидова пространства иногда будем называть точками.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 112.** Вектор  $l$  называется *наклонной* из точки  $x$  к подпространству  $W$ , если  $l = x - y$  для некоторого  $y \in W$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 113 (ТЕОРЕМА О ДЛИНЕ НАКЛОННОЙ).** *Величина*

$$\inf_{y \in W} |x - y|$$

*достигается в единственной точке  $y = \text{pr}_W x$ . Иными словами,*

$$\inf_{y \in W} |x - y| = |x - \text{pr}_W x| = |\text{ort}_W x|,$$

$$z \neq \text{pr}_W x \Rightarrow \inf_{y \in W} |x - y| < |x - z|.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для произвольного  $y \in W$ , используя теорему Пифагора, получаем

$$|x - y| = |\text{ort}_W x + \underbrace{\text{pr}_W x - y}_{\in W}| = \sqrt{|\text{ort}_W x|^2 + |\text{pr}_W x - y|^2} \geq |\text{ort}_W x|,$$

причем равенство возможно тогда и только тогда, когда  $|\text{pr}_W x - y| = 0$ , т. е.  $y = \text{pr}_W x$ .  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 114.** Дайте геометрическую интерпретацию теореме о длине наклонной.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 115.** *Расстоянием между точками  $x, y$  евклидова пространства называется величина*

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 116.** *Расстоянием между множествами  $S, T$  векторов евклидова пространства называется величина*

$$\rho(S, T) = \inf_{\substack{x \in S \\ y \in T}} \rho(x, y).$$

ТЕОРЕМА 117. Пусть  $U, W$  — подпространства, а  $x_0, y_0$  — произвольные векторы евклидова пространства  $V$ , тогда

$$\rho(x_0 + W, y_0 + U) = |\text{ort}_{W+U}(x_0 - y_0)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} \rho(x_0 + W, y_0 + U) &= \inf_{\substack{x \in x_0 + W \\ y \in y_0 + U}} |x - y| \\ &= \inf_{\substack{x \in W \\ y \in U}} |(x_0 + x) - (y_0 + y)| \\ &= \inf_{\substack{x \in W \\ y \in U}} |(x_0 - y_0) - \underbrace{(y - x)}_{z \in W+U}| \\ &= \inf_{z \in W+U} |(x_0 - y_0) - z| \\ &= \rho(x_0 - y_0, W + U). \end{aligned}$$

По теореме о длине наклонной  $\rho(x_0 - y_0, W + U) = |\text{ort}_{W+U}(x_0 - y_0)|$ .  $\square$

СЛЕДСТВИЕ 118. Пусть  $W$  — подпространство, а  $x, x_0$  — произвольные векторы евклидова пространства  $V$ , тогда

1.  $\rho(x, W) = |\text{ort}_W x|$ ,
2.  $\rho(x, x_0 + W) = |\text{ort}_W(x - x_0)|$ .

ПРИМЕР 119. Найдем расстояние  $\rho$  между линейными многообразиями  $W = x_0 + L(a_1)$  и  $U = y_0 + L(a_2)$ , если координаты векторов заданы в некотором ортонормированном базисе  $e$ :

$$[x_0]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, [a_1]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [y_0]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [a_2]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Имеем:

$$[a] = [x_0 - y_0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad W + U = L(a_1, a_2)$$

Для нахождения  $\text{pr}_{W+U} a$  составим систему нормальных уравнений по формуле (30):

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1, \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 = 3, \end{cases}$$

откуда  $\alpha_1 = -1/3$ ,  $\alpha_2 = 2/3$  и поэтому, по формулам (29),

$$[\text{pr}_{W+U} a]_e = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\text{ort}_{W+U} a]_e = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

откуда находим искомое расстояние:

$$\rho = |\text{ort}_{W+U} a| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

ВТОРОЙ СПОСОБ. Для нахождения  $|\text{ort}_{W+U} a|$  воспользуемся формулой (35):

$$\rho^2 = |\text{ort}_{W+U} a|^2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{4}{3}, \quad \rho = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

ПРИМЕР 120. Найдём общую формулу, выражающую расстояние между прямыми  $W = x_1 + L(a_1)$  и  $U = x_2 + L(a_2)$  в предположении, что векторы  $a_1, a_2$  линейно независимы.

$$\begin{aligned} \rho^2(W, U) &= |\text{ort}_{L(a_1, a_2)}(x_1 - x_2)|^2 = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & (a_1, x_1 - x_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & (a_2, x_1 - x_2) \\ (x_1 - x_2, a_1) & (x_1 - x_2, a_2) & (x_1 - x_2, x_1 - x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$



В частности, в  $\mathbf{V}_3$  многообразия  $W, U$  — скрещивающиеся или пересекающиеся прямые. Если  $[x_i]_{\mathbf{e}} = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}), [a_i]_{\mathbf{e}} = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$  ( $i = 0, 1$ ) и базис  $\mathbf{e}$  — ортонормированный, то

$$\rho^2(W, U) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & x_{01} - x_{11} \\ a_{12} & a_{22} & x_{02} - x_{12} \\ a_{13} & a_{23} & x_{03} - x_{13} \end{vmatrix}^2}{\det \left[ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \right]}$$

и по теореме Бинэ–Коши

$$\rho(W, U) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & x_{01} - x_{11} \\ a_{12} & a_{22} & x_{02} - x_{12} \\ a_{13} & a_{23} & x_{03} - x_{13} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}^2}}.$$

ПРИМЕР 121. Найдём общую формулу, выражающую расстояние между точкой  $x_0$  и прямой  $W = x_1 + L(a_1)$  ( $a_1 \neq 0$ ).

$$\rho^2(x_0, W) = |\text{ort}_{L(a_1)}(x_0 - x_1)|^2 = \frac{\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, x_0 - x_1) \\ (x_0 - x_1, a_1) & (x_0 - x_1, x_0 - x_1) \end{vmatrix}}{|a_1|^2}.$$

В частности, в  $\mathbf{V}_3$ , если  $[x_i]_{\mathbf{e}} = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$  ( $i = 0, 1$ ),  $[a_1]_{\mathbf{e}} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$  и базис  $\mathbf{e}$  — ортонормированный, то

$$\rho^2 = \frac{\det \left[ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_{01} - x_{11} & x_{02} - x_{12} & x_{03} - x_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & x_{01} - x_{11} \\ a_{12} & x_{02} - x_{12} \\ a_{13} & x_{03} - x_{13} \end{pmatrix} \right]}{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2}$$

и по теореме Бинэ–Коши

$$\rho = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_{12} & x_{02} - x_{12} \\ a_{13} & x_{03} - x_{13} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & x_{01} - x_{11} \\ a_{13} & x_{03} - x_{13} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & x_{01} - x_{11} \\ a_{12} & x_{02} - x_{12} \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2}}.$$

**ПРИМЕР 122.** Найдем общую формулу, выражающую расстояние между точкой  $x_0$  и гиперплоскостью  $W = \{x : (x, a_1) = \alpha\}$  ( $a_1 \neq 0$ ). Пусть  $x_1 \in W$ , тогда  $(x_1, a_1) = \alpha$ .

$$\rho(x_0, W) = |\text{pr}_{W^\perp}(x_0 - x_1)| = \left| \frac{(x_0 - x_1, a_1) a_1}{(a_1, a_1)} \right| = \frac{|(x_0, a_1) - \alpha|}{|a_1|}.$$

Для нахождения проекции мы воспользовались замечанием 92.

В частности, в пространстве  $\mathbf{V}_3$  многообразию  $W$  — плоскость. Если  $[x_i]_{\mathbf{e}} = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$  ( $i = 0, 1$ ),  $[a_1]_{\mathbf{e}} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$  и базис  $\mathbf{e}$  — ортонормированный, то

$$\rho(x_0, W) = \frac{|a_{11}x_{01} + a_{12}x_{02} + a_{13}x_{03} - \alpha|}{|a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2|}.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 123.** Найти формулу для нахождения расстояния между *параллельными* прямыми  $x_1 + L(a)$  и  $x_2 + L(a)$ . Привести вариант этой формулы, удобный в пространстве  $\mathbf{V}_3$

**УПРАЖНЕНИЕ 124.** Найти формулу для нахождения расстояния между *параллельными* гиперплоскостями  $(x, b) = \beta_1$ ,  $(x, b) = \beta_2$ . Привести вариант этой формулы, удобный в пространстве  $\mathbf{V}_3$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 125.** Найти формулу для нахождения расстояния между прямой  $x_0 + L(a)$  и гиперплоскостью  $(x, b) = \beta$ . Рассмотреть два случая: 1)  $(a, b) = 0$ , 2)  $(a, b) \neq 0$ . Привести вариант формул, удобный в пространстве  $\mathbf{V}_3$ .

## 2.15. Нормальное решение системы линейных уравнений

Пусть  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ . Пусть в  $\mathbf{R}^n$  введено некоторым образом скалярное произведение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 126.** Решение  $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$  системы линейных уравнений  $Ax = b$  минимальной нормы называется ее *нормальным* решением.

Напомним, что множество всех решений совместной системы  $Ax = b$  есть линейное многообразие  $x_0 + W$ , где  $x_0$  — частное решение системы  $Ax = b$ , а  $W$  — множество всех решений системы  $Ax = 0$ .

Из определения нормального решения получаем

$$|\hat{x}| = \inf_{x \in x_0 + W} |x| = \inf_{y \in W} |x_0 + y|.$$

По теореме о длине наклонной нормальное решение определяется единственным образом и равно

$$\hat{x} = \text{ort}_W x_0 = \text{pr}_{W^\perp} x_0.$$

Теперь предположим, что скалярное произведение в  $\mathbf{R}^n$  стандартное. Тогда  $W^\perp = L(a'_1, \dots, a'_m)$  (см. теорему 81) и, кроме того,  $\Gamma(a'_1, \dots, a'_m) = AA^\top$ . Теперь система нормальных уравнений (30) для нахождения  $\text{pr}_{W^\perp} x_0$  примет вид  $AA^\top y = Ax_0$ , или

$$AA^\top y = b, \quad (44)$$

где  $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^\top$ . По решению  $y$  системы (44) можно найти нормальное решение:

$$\hat{x} = A^\top y. \quad (45)$$

ПРИМЕР 127. Найдём нормальное решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Система (44) принимает вид:

$$\begin{cases} 7y_1 - 2y_2 = 3, \\ -2y_1 + 3y_2 = 1, \end{cases}$$

откуда

$$y = \begin{pmatrix} 11/17 \\ 13/17 \end{pmatrix}.$$

По формуле (45) находим нормальное решение:

$$\hat{x} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

## 2.16. Псевдорешения несовместной системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений  $Ax = b$ , где  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 128. *Невязкой вектора  $x \in \mathbf{R}^n$  относительно системы  $Ax = b$  называется столбец  $Ax - b \in \mathbf{R}^m$ .*

Предположим, что в  $\mathbf{R}^m$  введено скалярное произведение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 129. *Псевдорешением системы  $Ax = b$  называется вектор  $\tilde{x}$ , на котором норма невязки  $|Ax - b|$  минимальна:*

$$|A\tilde{x} - b| = \inf_{x \in \mathbf{R}^n} |Ax - b|.$$

Заметим, что если система совместна, то любое ее решение является псевдорешением и других псевдорешений нет.

ТЕОРЕМА 130. *Множество всех псевдорешений системы  $Ax = b$  есть множество решений системы  $Ax = \text{pr}_W b$ , где  $W = L(a_1, \dots, a_n)$  и  $a_1, \dots, a_n$  — столбцы матрицы  $A$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначая  $y = Ax \in \mathbf{R}^m$ , по теореме о длине наклонной получаем

$$\inf_{x \in \mathbf{R}^n} |Ax - b| = \inf_{y \in W} |y - \text{pr}_W b|.$$

Теорема доказана.  $\square$

Теперь предположим, что скалярное произведение в  $\mathbf{R}^m$  стандартное. Тогда  $\Gamma(a_1, \dots, a_n) = A^T A$ . Теперь система (30) для нахождения  $\text{pr}_W b$  примет вид  $A^T Ax = A^T b$ , откуда  $\text{pr}_W b = Ax$ . Последнее равенство показывает, что множество решений системы

$$A^T Ax = A^T b \tag{46}$$

совпадает со множеством всех псевдорешений системы  $Ax = b$ .

ПРИМЕР 131. Найдем все псевдорешения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5, \end{cases}$$

если скалярное произведение в  $\mathbf{R}^3$  — стандартное.

ПЕРВЫЙ СПОСОБ. В нашем примере  $a_1 = a_2 = a_3 = (1, 1, 1)^T$ ,  $a_4 = (1, -1, 0)^T$ ,  $b = (2, 2, 5)^T$  и  $W = L(a_1, a_2, a_3, a_4) = L(a_1, a_4)$ . Найдем  $\text{pr}_W b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_4$ . Система для определения  $\alpha_1, \alpha_2$  имеет вид:

$$\begin{cases} (a_1, a_1)\alpha_1 + (a_1, a_4)\alpha_2 = (b, a_1), \\ (a_4, a_1)\alpha_1 + (a_4, a_4)\alpha_2 = (b, a_2), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 0\alpha_2 = 9, \\ 0\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

откуда  $\alpha_1 = 3$  и  $\alpha_2 = 0$ , следовательно,  $\text{pr}_W b = (3, 3, 3)^T$ . Решая систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \end{cases}$$

находим, что множество псевдорешений исходной системы есть линейное многообразие

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_2, \\ x_2 = 1 - t_1, \\ x_3 = 1 - t_2, \\ x_4 = 0, \end{cases} \quad (47)$$

где  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ . Для каждого вектора этого многообразия норма невязки равна  $|(2, 2, 5)^T - (3, 3, 3)^T| = \sqrt{6}$ .

ВТОРОЙ СПОСОБ. В нашем примере система (46) имеет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 9, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Множество ее решений можно представить, например, в виде (47).

УПРАЖНЕНИЕ. Найти множество всех псевдорешений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 97x_1 + 36x_2 - 48x_3 = 74, \\ 60x_1 + 36x_2 - 11x_3 = 37, \\ 29x_1 - 17x_2 + 20x_3 = 114, \\ -29x_1 + 17x_2 - 20x_3 = -110, \end{cases}$$

УКАЗАНИЕ: см. пример б/н на стр. 45.

Далее до конца раздела предполагается, что скалярное произведение — стандартное.

УПРАЖНЕНИЕ 132. Доказать, что каждое псевдорешение  $\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)^T$  системы уравнений

$$\begin{cases} a_{01} + t_1 a_{11} = b_{01} + t_2 b_{11}, \\ a_{02} + t_1 a_{12} = b_{02} + t_2 b_{12}, \\ a_{03} + t_1 a_{13} = b_{03} + t_2 b_{13} \end{cases}$$

определяет пару точек на прямых

$$\begin{cases} x_1 = a_{01} + t_1 a_{11}, \\ x_2 = a_{02} + t_1 a_{12}, \\ x_3 = a_{03} + t_1 a_{13} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = b_{01} + t_2 b_{11}, \\ x_2 = b_{02} + t_2 b_{12}, \\ x_3 = b_{03} + t_2 b_{13}, \end{cases}$$

таких, что расстояние между этими точками равно расстоянию между прямыми.

УПРАЖНЕНИЕ. Пусть  $Q$  — ортогональная матрица. Доказать, что множества псевдорешений систем  $Ax = b$  и  $QAx = Qb$  совпадают.

УПРАЖНЕНИЕ 133. Пусть  $A = QR$  —  $qR$ -разложение матрицы  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ . Докажите, что множество всех псевдорешений системы  $Ax = b$  совпадает с множеством решений треугольной системы  $Rx = Q^T b$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 134. Задача нахождения псевдорешения возникает, например, при *аппроксимации* данных. Предположим, что имеются пары значений

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m). \quad (48)$$

Пусть  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  — заданные функции. Требуется найти функцию вида

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x), \quad (49)$$

для которой  $f(x_i) \approx y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), т. е. функцию, приближающую данные (48). Более точно: требуется найти значения параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , на которых достигается минимум

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \sum_{i=1}^m (y_i - \alpha_1 f_1(x_i) - \dots - \alpha_n f_n(x_i))^2.$$

Задача отыскания таких  $\alpha_j$  называется *линейной задачей наименьших квадратов*.

Легко видеть, что набор этих параметров является псевдорешением системы

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_1) + \dots + \alpha_n f_n(x_1) = y_1, \\ \alpha_1 f_1(x_2) + \alpha_2 f_2(x_2) + \dots + \alpha_n f_n(x_2) = y_2, \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_1 f_1(x_m) + \alpha_2 f_2(x_m) + \dots + \alpha_n f_n(x_m) = y_m. \end{cases} \quad (50)$$

И наоборот, если  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — псевдорешение указанной системы, то функция  $f(x)$ , определяемая по формуле (49), является решением задачи наименьших квадратов.

Часто в качестве  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  рассматриваются многочлены  $1, x, \dots, x^{n-1}$ . Таким образом, речь идет об аппроксимации данных полиномами.

Например, при аппроксимации данных (48) линейной функцией  $y = \alpha_1 + \alpha_2 x$  система уравнений (50) примет вид

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_1 = y_1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_2 = y_2, \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_m = y_m. \end{cases}$$

Согласно (46), система линейных уравнений для определения неизвестных  $\alpha_1, \alpha_2$  имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_1 + \left(\sum_{i=1}^m x_i\right) \alpha_2 = \sum_{i=1}^m y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^m x_i\right) \alpha_1 + \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right) \alpha_2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i. \end{cases}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 135.** Псевдорешение  $\tilde{x}$  системы  $Ax = b$ , имеющее среди всех псевдорешений минимальную норму, называется *нормальным псевдорешением*.

Обозначим через  $e_j \in \mathbf{R}^m$  столбец, в котором  $j$ -я компонента равна 1, а все остальные равны 0 ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 136.** Пусть  $\tilde{x}_j$  — нормальное псевдорешение системы  $Ax = e_j$ , где  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Матрица размеров  $n \times m$ , составленная из столбцов  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$ , называется *псевдообратной* к матрице  $A$  и обозначается  $A^+$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 137.** Докажите, что для любой матрицы  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  и столбца  $b \in \mathbf{R}^m$  нормальное псевдорешение  $\tilde{x}$  системы  $Ax = b$  можно найти по формуле  $\tilde{x} = A^+b$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 138.** Докажите, что если строки матрицы  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  линейно независимы, то  $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$ . Если столбцы матрицы  $A$  линейно независимы, то  $A^+ = (A^T A)^{-1}A^T$ .

### 3. Полуторалинейные функции и унитарные пространства

В данном разделе понятия и результаты предыдущих разделов распространяются на случай комплексного линейного пространства.

#### 3.1. Полуторалинейные функции

Рассмотрим комплексное линейное пространство  $V$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 139.** Отображение

$$f : V \times V \rightarrow \mathbf{C},$$

ставящее каждой паре векторов  $x, y$  из  $V$  число  $f(x, y)$  из  $\mathbf{C}$ , называется *полуторалинейной функцией*, если для любых  $x, y, z$  из  $V$  и любых  $\alpha, \beta$  из  $\mathbf{C}$  выполнены соотношения

1.  $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$ ,



2.  $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$ ,
3.  $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$ ,
4.  $f(x, \beta y) = \bar{\beta} f(x, y)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 140. Пусть  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n \times n}$ . Доказать, что следующая функция в  $\mathbf{C}^n$  является полуторалинейной:

$$f(x, y) = x^T A y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \bar{y}_j.$$

Основные результаты о билинейных функциях переносятся на случай полуторалинейных функций. Утверждения с несколькими изменениями сохраняются, а доказательства легко переносятся на комплексный случай, поэтому дадим только краткий обзор основных результатов.

Из свойств 1)–4) вытекает их обобщение:

$$f\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^l \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^l \bar{\beta}_j f(x_i, y_j).$$

Как и в случае билинейных функций, вводится понятие *матрицы*  $[f]_{\mathbf{e}}$  *полуторалинейной функции*. Легко видеть, что формула, выражающая значение функции через координаты векторов, примет вид

$$f(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^T [f]_{\mathbf{e}} \bar{[y]}_{\mathbf{e}},$$

причем формула

$$f(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^T A \bar{[y]}_{\mathbf{e}},$$

где  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ , задает общий вид билинейной функции. Формула, связывающая матрицы одной и той же билинейной функции в базисах  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}'$ , примет вид

$$[f]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^T [f]_{\mathbf{e}} \bar{[\mathbf{e}']}_{\mathbf{e}}.$$

Матрицы  $A$  и  $B$  называются *соединенными*, если существует такая невырожденная матрица  $Q$ , что  $B = Q^T A \bar{Q}$ . Таким образом, соединенные матрицы являются матрицами одной и той же полуторалинейной функции в разных базисах. Каждая из следующих пар элементарных преобразований матрицы переводит ее в соединенную:

- перестановка строк с номерами  $i, j$  вместе с перестановкой столбцов с номерами  $i, j$ ,
- умножение  $i$ -й строки на  $\alpha$ , умножение  $i$ -го столбца на  $\bar{\alpha}$ ,
- прибавление к  $i$ -й строке  $j$ -й, умноженной на  $\alpha$ , прибавление к  $i$ -му столбцу  $j$ -го, умноженного на  $\bar{\alpha}$ .

Полуторалинейная функция называется *эрмитовой*, если для любых  $x, y$  из  $V$  справедливо равенство  $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$ . Матрица  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  называется *эрмитовой*, или *самосопряженной*, если  $A^T = \bar{A}$ . Можно доказать

УТВЕРЖДЕНИЕ 141. Пусть  $f$  — полуторалинейная функция, тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $f$  — эрмитова;
2. для произвольного базиса  $\mathbf{e}$  матрица  $[f]_{\mathbf{e}}$  эрмитова;
3. существует базис  $\mathbf{e}$ , в котором матрица  $[f]_{\mathbf{e}}$  эрмитова;
4. для любого  $x \in V$  справедливо  $f(x, x) \in \mathbf{R}$ .

Теорема Лагранжа также справедлива для полуторалинейных функций, однако алгоритм нахождения канонического базиса несколько усложнится.

- I.  $a_{11} \neq 0$ . Выполним над матрицей  $A$  следующие синхронные элементарные преобразования: для каждого  $i \in \{2, \dots, n\}$  вычтем из  $i$ -й строки 1-ю строку, умноженную на  $a_{i1}/a_{11}$ ; для каждого  $j \in \{2, \dots, n\}$  вычтем из  $j$ -го столбца 1-й столбец, умноженный на  $a_{1j}/a_{11}$ . Заметим, что  $a_{11} \in \mathbf{R}$  и  $a_{1j} = \bar{a}_{j1}$ . Очевидно, что после этих преобразований матрица  $A$  перейдет в соединенную матрицу следующего вида

$$\left( \begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & B^{(1)} \end{array} \right). \quad (51)$$

- II.  $a_{11} = 0$ . Возможны следующие варианты:

1.  $\forall i \in \{2, 3, \dots, n\} a_{i1} = a_{1i} = 0$ . Матрица  $A$  уже имеет вид (4). В данном случае никаких действий производить не нужно.
2.  $\exists k \in \{2, 3, \dots, n\} a_{k1} = \bar{a}_{1k} \neq 0$ .
  - 1) Если  $a_{kk} \neq 0$ , то переставляем строки и столбцы с номерами 1 и  $k$  и тем самым приходим к случаю I.
  - 2) Если  $a_{kk} = 0$ , то
    - а) если  $\operatorname{Re} a_{1k} \neq 0$ , то прибавляем к 1-й строке  $k$ -ю строку и 1-му столбцу  $k$ -й столбец, тем самым снова приходим к случаю I;
    - б) если  $\operatorname{Re} a_{1k} = 0$ , то прибавляем к 1-й строке  $k$ -ю строку, умноженную на  $i$ ; вычитаем из 1-го столбца  $k$ -й столбец, умноженный на  $i$ ; мы снова приходим к случаю I.

После выполнения описанных здесь действий матрица  $A$  перейдет в соединенную матрицу вида (51). Далее достаточно те же действия провести с матрицей  $B^{(1)}$  и т. д.

На полуторалинейные функции переносятся понятия *канонического* и *нормального* базисов, (не)положительно и (не)отрицательно определенных функций, сохраняются теорема Якоби, закон инерции, критерий Сильвестра.

**ПРИМЕР 142.** Найдем нормальный базис  $e'$  для эрмитовой полуторалинейной функции  $f$ , заданной в базисе  $e = \{e_1, e_2\}$  формой  $f(x, y) = ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1$ .

Построим матрицу  $[f]_e$  и припишем к ней справа единичную:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 0 & i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Имеем случай II-2.2б. Прибавляем к первой строке вторую, умноженную на  $i$ ; вычитаем из первого столбца второй, умноженный на  $i$ . Получаем:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & i & 1 & i \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Приходим к случаю I. Прибавляем ко второй строке первую, умноженную на  $i/2$ ; вычитаем из второго столбца первый, умноженный

на  $i/2$ . Получаем:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & i \\ 0 & -1/2 & i/2 & 1/2 \end{array} \right).$$

Приведение матрицы полуторалинейной функции к каноническому виду закончено. Для приведения матрицы к нормальному виду поделим первую строку и первый столбец на  $\sqrt{2}$  и умножим вторую строку и второй столбец на  $\sqrt{2}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 \\ 0 & -1 & i\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{array} \right).$$

Матрицу перехода получаем, транспонируя матрицу, стоящую справа:

$$[e']_e = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & i\sqrt{2}/2 \\ i\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получен нормальный базис

$$\begin{aligned} e'_1 &= \sqrt{2}/2 e_1 + i\sqrt{2}/2 e_2, \\ e'_2 &= i\sqrt{2}/2 e_1 + \sqrt{2}/2 e_2. \end{aligned}$$

По матрице полуторалинейной функции в найденном базисе легко определяется соответствующая нормальная форма:  $f(x, y) = x_1 \bar{y}_1 - x_2 \bar{y}_2$ , где  $[x]_{e'} = (x'_1, x'_2)^T$ ,  $[y]_{e'} = (y'_1, y'_2)^T$ . По матрице перехода к нормальному базису определяются формулы, связывающие координаты в старом и новом базисах  $e$  и  $e'$  соответственно:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2}/2 x'_1 + i\sqrt{2}/2 x'_2, \\ x_2 = i\sqrt{2}/2 x'_1 + \sqrt{2}/2 x'_2. \end{cases}$$

### 3.2. Квадратичные комплексные функции

Функция  $g : V \rightarrow \mathbf{C}$  называется *квадратичной*, если  $g(x) = f(x, x)$  для некоторой полуторалинейной функции  $f$ .

**ПРИМЕР 143.** Функция  $g(x) = |x_1|^2 - 2x_1 \bar{x}_2 + 2|x_2|^2$  в  $\mathbf{C}^2$  является квадратичной. Действительно, функция  $f(x, y) = x_1 \bar{y}_1 - x_2 \bar{y}_1 + 2x_2 \bar{y}_2$  — полуторалинейная и  $g(x) = f(x, x)$ .

Напомним, что в вещественном пространстве по квадратичной функции соответствующую ей билинейную можно восстановить бесконечным числом способов. В отличие от этого в комплексном пространстве по квадратичным функциям соответствующая полуторалинейная восстанавливается единственным образом.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 144.** Пусть  $g : V \rightarrow \mathbf{C}$  — квадратичная функция, тогда полуторалинейная функция  $f$ , для которой  $g(x) = f(x, x)$ , существует и единственна.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как  $g$  — квадратичная функция, то соответствующая ей полуторалинейная функция  $f$  существует по определению. Докажем ее единственность. Имеем

$$\begin{aligned} g(x + y) &= f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y), \\ g(x - y) &= f(x - y, x - y) = f(x, x) - f(x, y) - f(y, x) + f(y, y), \\ g(x + iy) &= f(x + iy, x + iy) = f(x, x) - if(x, y) + if(y, x) + f(y, y), \\ g(x - iy) &= f(x - iy, x - iy) = f(x, x) + if(x, y) - if(y, x) + f(y, y), \end{aligned}$$

откуда, умножая полученные равенства на 1,  $-1$ ,  $i$  и  $-i$  соответственно, после очевидных преобразований получаем

$$f(x, y) = \frac{1}{4} (g(x + y) - g(x - y) + ig(x + iy) - ig(x - iy)). \quad (52)$$

Таким образом,  $f$  по  $g$  восстанавливается однозначно.  $\square$

*Матрицей квадратичной функции* называется матрица соответствующей полуторалинейной функции.

Квадратичная функция  $g : V \rightarrow \mathbf{C}$  называется *эрмитовой*, если соответствующая ей полуторалинейная функция  $f$  эрмитова.

В силу доказанного утверждения на эрмитовы квадратичные функции переносятся основные определения и теоремы теории эрмитовых полуторалинейных функций: вводятся понятия *канонического* и *нормального* базиса, *знакопостоянной* и *знакопеременной* эрмитовой квадратичной функции, переносятся теорема Якоби, закон инерции и критерий Сильвестра.

### 3.3. Унитарные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 145. Линейное комплексное пространство  $V$  называется *унитарным*, если задано отображение  $V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ , ставящее каждой паре векторов  $x, y \in V$  число  $(x, y) \in \mathbf{C}$ , называемое *скалярным произведением*, обладающее следующими свойствами:

1.  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ,
2.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ,
3.  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ ,
4.  $x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0$

для любых  $x, y, z$  из  $V$  и  $\alpha$  из  $\mathbf{R}$ . Свойства 1)–4) называются *аксиомами унитарного пространства*.

ЗАМЕЧАНИЕ 146. Если 1-ю аксиому унитарного пространства заменить на  $(x, y) = (y, x)$ , то выполнение 4-й аксиомы не будет возможно. Действительно, в этом случае, если  $(x, x) > 0$ , то  $(ix, ix) = i^2(x, x) = -(x, x) < 0$ .

Аналогично евклидовому пространству можно показать, что скалярное произведение в унитарном пространстве есть положительно определенная эрмитова полуторалинейная функция, и наоборот, любую положительно определенную эрмитову полуторалинейную функцию можно выбрать в качестве скалярного произведения.

ПРИМЕР 147. Симметричная эрмитова функция

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j, \quad \text{где } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

в пространстве  $\mathbf{C}^n$  является положительно определенной и, следовательно, может быть выбрана в качестве скалярного произведения в пространстве  $\mathbf{C}^n$  (*стандартное скалярное произведение в  $\mathbf{C}^n$* ).

На случай унитарных пространств переносится понятие *матрицы Грама*. Определитель матрицы Грама неотрицателен и равен нулю тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы. Формула выражения скалярного произведения через координаты векторов примет вид:

$$(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^T \Gamma_{\mathbf{e}} \overline{[y]_{\mathbf{e}}}.$$

На случай унитарных пространств переносится понятие нормы вектора, угла между векторами, ортогональности векторов и систем векторов, сохраняется неравенство Коши–Буняковского, неравенство треугольника, теорема Пифагора. Доказательства в целом повторяют доказательства соответствующих утверждений для евклидовых пространств, однако требуют аккуратного обращения с операцией комплексного сопряжения.

**УПРАЖНЕНИЕ.** Привести пример, показывающий, что утверждение, обратное к теореме Пифагора, в унитарном пространстве неверно.

В унитарных пространствах вводится понятие ортогонального и ортонормированного базисов, причем свойства координат векторов в этих базисах (см. утверждения 64, 65) сохраняются. В ортонормированном базисе скалярное произведение выражается через координаты векторов по формуле:

$$(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Пусть  $V$  и  $V'$  — унитарные пространства. Взаимно однозначное отображение  $\varphi : V \rightarrow V'$  называется *изоморфизмом унитарных пространств*, если для любых векторов  $x, y$  из  $V$  и любого вещественного числа  $\alpha$  выполняются равенства

1.  $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y$ ,
2.  $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x)$ ,
3.  $(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$ .

*Унитарные пространства  $V$  и  $V'$  называются изоморфными*, если существует изоморфизм  $\varphi : V \rightarrow V'$ .

Как и в случае евклидовых пространств, можно показать, что унитарные пространства  $V$  и  $V'$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $\dim V = \dim V'$ .

Матрица  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  называется *унитарной*, если  $\overline{A}^T = A^{-1}$ , т. е.  $\overline{A}A^T = A^T\overline{A} = E$ . Очевидно, что определитель унитарной матрицы по модулю равен 1. Легко показать, что строки (столбцы) унитарной матрицы  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ , рассматриваемые как векторы арифметического пространства  $\mathbf{C}^n$  со стандартным скалярным произведением, образуют ортонормируемую систему. Пусть  $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  — ортонормированный базис унитарного пространства. Для того, чтобы система векторов  $\mathbf{e}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  также образовывала ортонормированный базис необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода  $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$  была бы унитарной.

В унитарных пространствах вводится понятие *ортогонального дополнения*, справедлива теорема 81 о разложении пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Вводятся понятия *ортогональной проекции* и *перпендикуляра*.

Сохраняется алгоритм из раздела 2.10 нахождения проекции с помощью решения системы нормальных уравнений (30). Если  $a_1, \dots, a_k$  — столбцы матрицы  $A \in \mathbf{C}^{n \times k}$ , рассматриваемые как векторы унитарного пространства  $\mathbf{C}^n$  со стандартным скалярным произведением,  $a \in \mathbf{C}^n$ , то

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = A^T \overline{A}$$

и система уравнений (30) приобретает вид:

$$\overline{A}^T A y = \overline{A}^T a, \text{ где } y = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T.$$

В унитарном пространстве справедлива теорема о длине перпендикуляра. Ее доказательство требует аккуратного обращения со знаками комплексного сопряжения. Сохраняется процесс ортогонализации Грама–Шмидта и теорема 106.

Неравенство Адамара переносится и на случай комплексных матриц. Действительно, из теоремы 106 получаем, что

$$|\det A|^2 = \det(A^T \overline{A}) \leq |a_1|^2 \cdot \dots \cdot |a_k|^2,$$

откуда  $|\det A| \leq (\alpha \sqrt{n})^n$ .



УПРАЖНЕНИЕ 148. Докажите, что для матриц вида

$$A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n \times n}, \quad \text{где} \quad a_{ij} = \varepsilon^{(i-1)(j-1)}, \quad \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

неравенство Адамара превращается в равенство. УКАЗАНИЕ: Найти  $\det(A^T \bar{A})$ .

Как и в евклидовом пространстве, в унитарном пространстве вводятся понятия наклонной и расстояния, сохраняется теорема о длине наклонной и теорема о выражении расстояния между линейными многообразиями через длину перпендикуляра.

Для систем линейных уравнений с комплексными коэффициентами определяется понятие *нормального* решения. Нормальное решение можно найти по формуле  $\tilde{x} = \text{ort}_W x_0 = \text{pr}_{W^\perp} x_0$ , где  $x_0$  — частное решение исходной системы, а  $W$  — пространство решений соответствующей однородной системы. Если скалярное произведение стандартное, то нормальное решение  $\tilde{x}$  системы  $Ax = b$  определяется из равенства  $\tilde{x} = \bar{A}^T y$ , где  $y$  — частное решение системы  $A\bar{A}^T y = b$ .

Для несовместных систем определяется понятие *псевдорешения*. Как и в вещественном случае, все псевдорешения системы  $Ax = b$  можно найти из решений системы  $Ax = \text{pr}_W b$ , где  $W$  — линейная оболочка столбцов матрицы  $A$ . В случае стандартного скалярного произведения все псевдорешения можно найти из решений системы  $\bar{A}^T Ax = \bar{A}^T b$ .

## Список литературы

- [1] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1983.
- [2] Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987.
- [3] *Билинейные функции и их применение*: Методическая разработка / Составители: Ильичев А. П., Таланов В. А. — 1-е издание: Горький: Горьковский государственный университет, 1980. 2-е издание: Н. Новгород: Нижегородский государственный университет, 1990.
- [4] Воеводин В. В. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1974.
- [5] Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975.
- [6] *Задачи в евклидовых пространствах*: Методическая разработка / Составители: Веселов С. И., Ильичев А. П., Чирков А. Ю. — Н. Новгород: Нижегородский государственный университет, 1998.

## Содержание

<b>Предисловие</b>	<b>3</b>
<b>Обозначения</b>	<b>4</b>
<b>1. Вещественные билинейные функции</b>	<b>5</b>
1.1. Определения	5
1.2. Матрица билинейной функции	6
1.2.1. Определение матрицы билинейной функции	6
1.2.2. Матричное представление билинейной функции	7
1.2.3. Представление билинейных функций билинейными формами	8
1.2.4. Связь матриц билинейной функции в разных базисах	9
1.3. Синхронные элементарные преобразования строк и столбцов вещественной матрицы	10
1.4. Симметричные билинейные функции	11
1.5. Знакоопределенные симметричные функции	19
1.6. Квадратичные вещественные функции	22
<b>2. Евклидовы пространства</b>	<b>24</b>
2.1. Основные определения	24
2.2. Матрица Грама	26
2.3. Ортогональность	30
2.4. Ортогональный и ортонормированный базисы	31
2.5. Изоморфизм евклидовых пространств	33
2.6. Ортогональные матрицы	35
2.7. Ортогональные суммы и ортогональные дополнения	35
2.8. Способы описания линейных подпространств	38
2.9. Способы описания линейных многообразий	39
2.10. Метод нахождения проекции и перпендикуляра	40
2.11. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта	44
2.12. Объем гиперпараллелепипеда	49
2.13. Неравенство Адамара	51
2.14. Метрические задачи в евклидовых пространствах	53
2.15. Нормальное решение системы линейных уравнений	57
2.16. Псевдорешения несовместной системы линейных уравнений	59
<b>3. Полуторалинейные функции и унитарные пространства</b>	<b>63</b>
3.1. Полуторалинейные функции	63
3.2. Квадратичные комплексные функции	67
3.3. Унитарные пространства	69
<b>Литература</b>	<b>72</b>

*Николай Юрьевич Золотых*  
*Александр Павлович Ильичев*  
*Владимир Александрович Таланов*

БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ  
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Учебное пособие

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского»  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Подписано в печать                                  Формат 60 × 84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern.  
Усл. печ. л. 4,25. Уч.-изд. л. 4,75. Заказ                                  Тираж 250 экз.

Отпечатано в типографии  
Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского  
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37  
Лицензия ПД № 18 – 0099 от 14.05.01