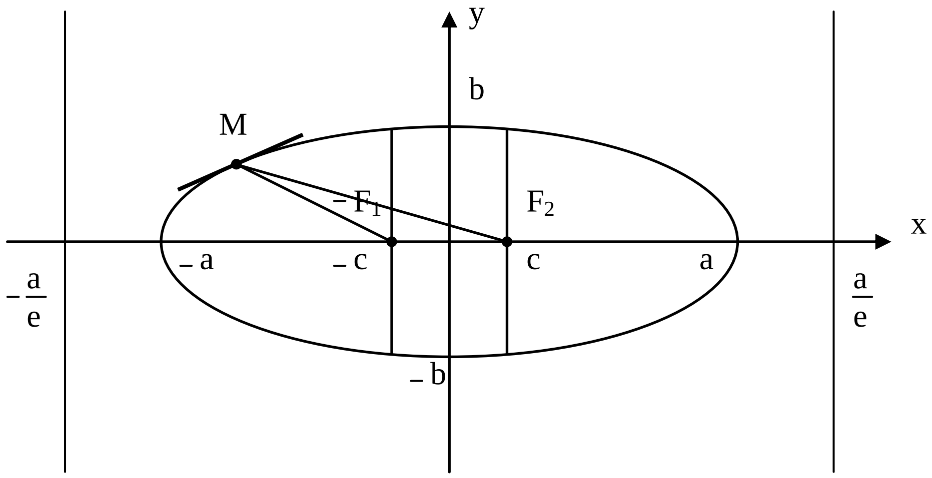
Кривые и поверхности второго порядка

Эллипс – кривая на плоскости, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a\geq b>0) \qquad (*)$$



Уравнение и система координат называются каноническими. a, b – соответственно большая и малая полуоси. Точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – называются фокусами ($c=\sqrt{a^2-b^2}$). Точки $(\pm a,0),(\pm b,0)$ - вершины, эксцентриситет:: $e=\frac{c}{a}<1$, директрисы – две прямые с уравнениями: $x=\pm\frac{a}{e}$, $p=\frac{b^2}{a}$ - фокальный параметр (равен длине полухорды, проходящей через фокус перпендикулярно оси Ox). Касательная к эллипсу имеет вид $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

Фокальный радиус – расстояние от точки на кривой до фокуса.

(1) $MF_1^2=(x+c)^2+y^2=$ *расстояние от т.M(x, y) до F_1*

(*выражаем x^2 из* (*))

$$=x^2+2xc+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+2xc+a^2=\frac{c^2}{a^2}x^2+2xc+a^2=$$

$$=(\frac{c}{a}x+a)^2=(ex+a)^2 \qquad \textit{извлекаем квадрат}$$

$$(ex+a)>0 \quad \textit{всегда, т.к.} \quad |x|<a, \quad e<1$$

$MF_1=a+ex$ Аналогично доказывается, что $MF_2=a-ex$.

Эллипс – это множество точек, для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до одноименной директрисы есть величина постоянная (равная эксцентриситету).

Доказательство:

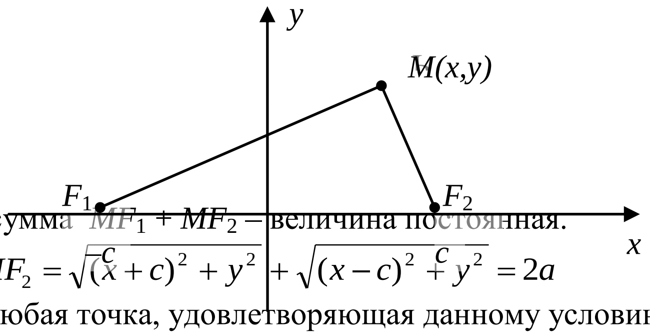
1) Любая точка, удовлетворяющая 2-ому определению, удовлетворяет уравнению (*).
2) Проверить, что отношение равно эксцентриситету:

Из рисунка для т.M $$\frac{MF_1}{x+\frac{a}{e}}=\frac{a+ex}{x+\frac{a}{e}}=e$$

Эллипс – это множество точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная, равная $2a$.

Доказательство:

Из этого определения нужно вывести уравнение (*).



Докажем, что сумма $MF_1 + MF_2$ – величина постоянная.

$$MF_1 + MF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Доказать, что любая точка, удовлетворяющая данному условию, удовлетворяет условию (*):

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 2\cdot 2a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$ - возведем уравнение в квадрат и преобразуем

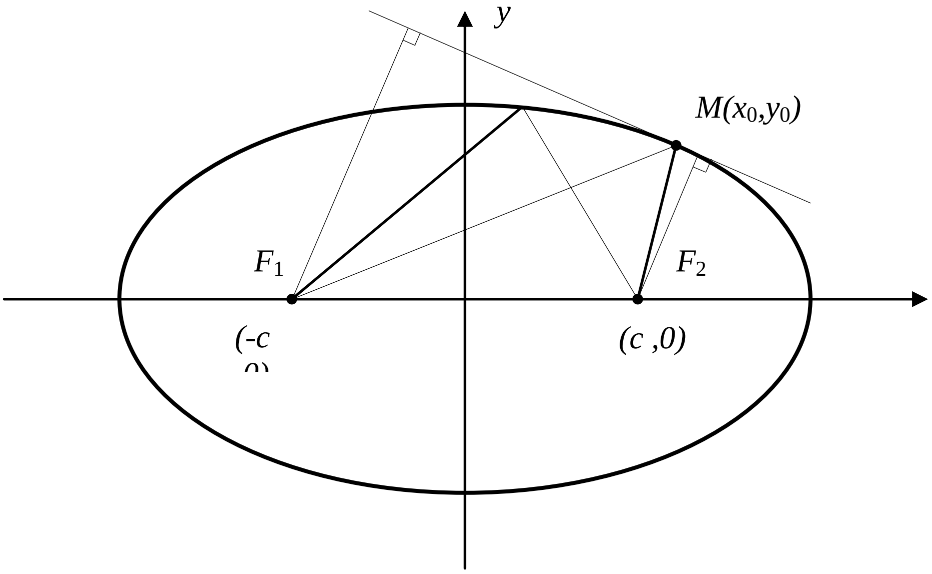
$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(a^2 - xc)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (получено уравнение (*), что и требовалось доказать)

Оптическое свойство эллипса



d_1, d_2 - расстояние от фокусов до касательной к эллипсу, проведенной в точке M, r_1, r_2 – фокальные радиусы.

Координаты F_1 нужно подставить в нормированное уравнение прямой

$$d_1 = \frac{\left|-\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|ex_0 + a|}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{r_1}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$$

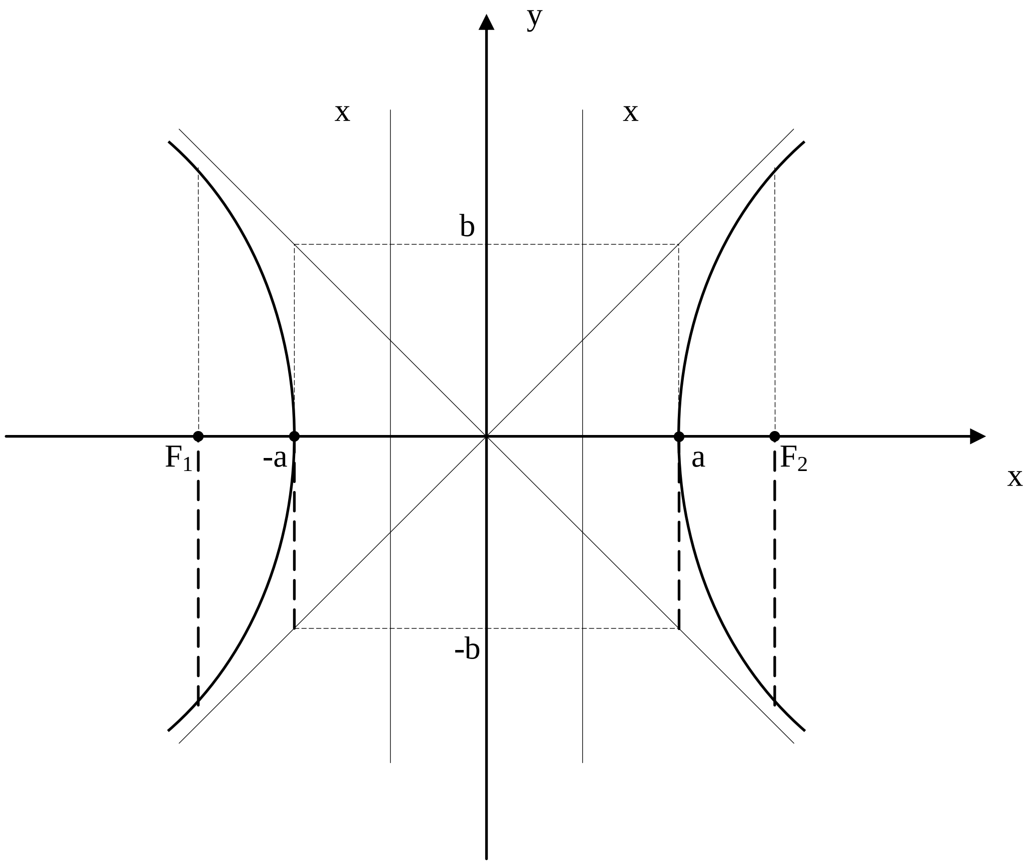
$$d_2 = \frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{r_2}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} \qquad \frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2}$$

Следовательно: треугольники подобны, углы с касательной равны. Лучи от источника света, помещенные в один из фокусов, отражаясь собираются в другом фокусе.

Гипербола

Гиперболой называется кривая с уравнением в некоторой прямоугольной системе координат

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a, b > 0$$



Уравнение и система координат называются каноническими. a, b – соответственно вещественная и мнимая полуоси. Точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – называются фокусами ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$). Точки $(\pm a, 0)$ - вершины, эксцентриситет:: $e = \frac{c}{a}$, директрисы – две прямые с уравнениями: $x = \pm\frac{a}{e}$, $p = \frac{b^2}{a}$ - фокальный параметр (равен длине полухорды, проходящей через фокус перпендикулярно оси Ox), $y = \pm\frac{b}{a}x$ - асимптоты.

Касательная к эллипсу имеет вид $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

$MF_{1,2} = |a \pm ex|$ - фокальные радиусы

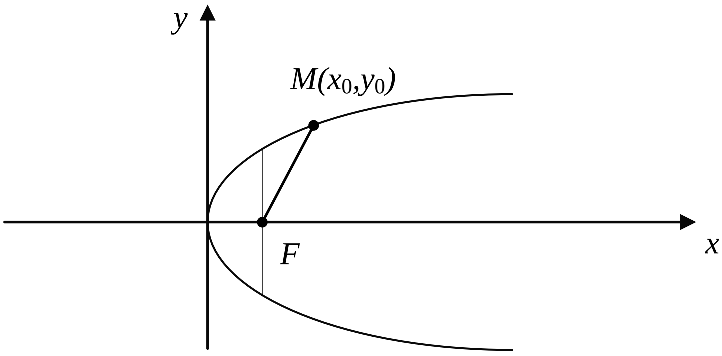
Гипербола – это множество точек, для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до одноименной директрисы есть величина постоянная, больше единицы, равная эксцентриситету (доказывается аналогично соответственному утверждению для эллипса через фокусные радиусы).

Гипербола – есть множество точек, для которых абсолютная величина (модуль) разности для двух фиксированных точек есть величина постоянная, равная $2a$.

Парабола

Линия называется параболой, если существует декартова система координат, в которой уравнение этой линии имеет вид:

$$y^2 = 2px$$



Уравнение и система координат называются каноническими. Точка F($\frac{p}{2}$,0) – называется фокусом (р – фокальный параметр). Директриса – прямая : $x = \pm\frac{a}{e}$, ось параболы - Ox).

Касательная к эллипсу имеет вид $yy_0 = 2p(x + x_0)$.

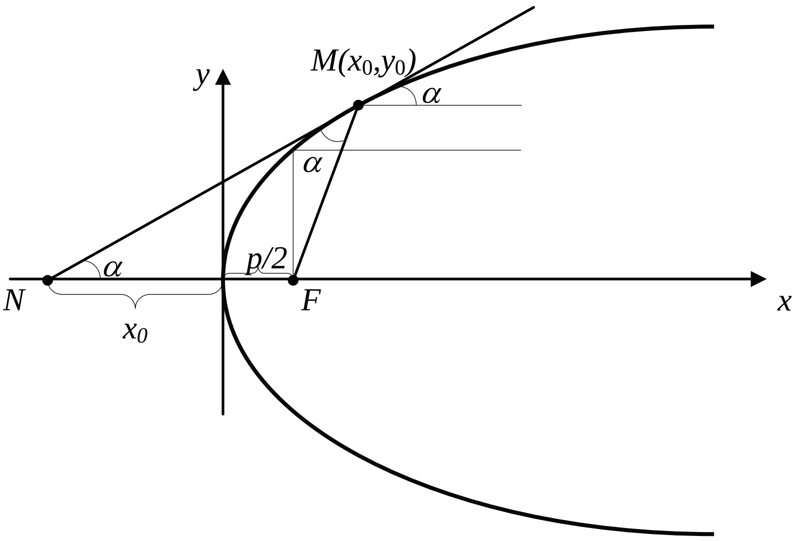
F(x, y) = 0 (вывод уравнения касательной)

$F_x^I(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y^I(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ Довести доказательство до конца вы можете самостоятельно (для других кривых доказывается аналогично)

Парабола – есть множество точек, для которых расстояние до фиксированной точки (фокуса), равно расстоянию до фиксированной прямой (директрисы).

Выводится непосредственно из уравнения параболы.

Оптическое свойство



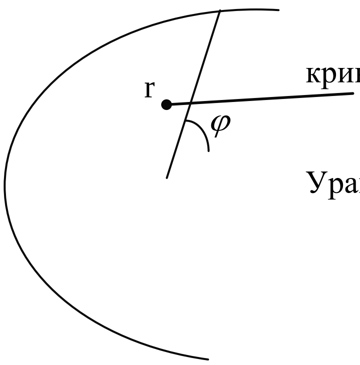
Докажем, что *NF = FM* (из этого мы найдем, что лучи из источника света, помещенного в фокус, отразившись от параболы параллельны ее оси).

Из уравнения касательной (подставим координаты N): 2*p*(*x* + *x*$_0$) = $y_0 \cdot 0$,т.е. $x = -x_0$

Откуда получаем

$NF = FM = x_0 + \frac{p}{2}$

Уравнение в полярных координатах



При доказательстве удобнее распологать полюс в фокусе кривой. Провести доказательство рекомендуется самостоятельно.

Уравнение всех кривых в полярных координатах выглядит так:

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\varphi}$$

	Эллипс	**Гипербола**	**Парабола**
Уравнения	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a \geq b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a, b > 0$	$y^2 = 2px$ $p > 0$
Фокусы	$F_{1,2} = (\mp c, 0)$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$F_{1,2} = (\mp c, 0)$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$F = (\frac{p}{2}, 0)$
Эксцентриситет	$e = \frac{c}{a} < 1$	$e = \frac{c}{a} > 1$	$e = 1$
Фокальный параметр	$p = \frac{b^2}{a}$	$p = \frac{b^2}{a}$	p
Директрисы	$x = \pm \frac{a}{e}$	$x = \pm \frac{a}{e}$	$x = -\frac{p}{2}$
Фокальный радиус	$MF_{1,2} = a \pm ex$ (1)	$MF_{1,2} = \lvert a \pm ex \rvert$	$\frac{p}{2} + x$
Касательные	$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0)	$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0)	$yy_0 = 2p(x + x_0)$ в точке (x_0, y_0)

Лекция № 2
Квадрики (гиперповерхности 2-го порядка)

Определение:

Уравнение $F(x) = x^{\mathrm{T}} Ax + 2a^{\mathrm{T}} + \alpha = 0$ (1) называется **уравнением квадрики**, а множество точек x, удовлетворяющих ему, — ***квадрикой*** (гиперповерхностью второго порядка).

В этом уравнении $x^{\mathrm{T}} Ax$ -квадратичная функция $2a^{\mathrm{T}} x + \alpha$ -линейная функция

$a \in R^n$, $\alpha \in R$, $A \in R^{nxn}$ - ненулевая симметричная матрица

$x \in R^n$ - столбец неизвестных (квадрика).

В частности, при *n=2* (1) является уравнением кривой 2-го порядка, а при *n=3* — уравнением поверхности 2-го порядка.

Пример:

Рассмотрим уравнение квадрики $x_1^2 - x_2^2 = 1$ - гипербола

В данном уравнении: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha = -1$

Преобразование $\varphi : R^n \to R^n$ **аффинное**, если оно задается следующей формулой:

$$x = Qy + q \qquad (2)$$

где Q — произвольная невырожденная $(n \times n)$ - матрица и q – произвольный n-мерный вектор-столбец.

$y = Q^{-1}x - Q^{-1}q$ - каждому x ставим в соответствие y

Отображение, обратное к аффинному преобразованию, является аффинным преобразованием (это не линейное преобразование). Линейным ему быть мешает q.

Когда $Q = E$, то $x = y + q$ - геометрический смысл этого преобразования – сдвиг вектора на q.

Пример аффинного преобразования:

$q = 0$, Q получим из E перестановкой столбцов (получится линейное преобразование).

x = Qy – линейное преобразование

Изменение квадрики при аффинном преобразовании

Применим к уравнению (1) аффинное преобразование (2):

$(Qy+q)^{\mathrm{T}} A(Qy+q) + 2a^{\mathrm{T}}(Qy+q) + \alpha = 0$ - квадрики в аффинном преобразовании

$y^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} AQy + y^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} Aq + q^{\mathrm{T}} AQy + q^{\mathrm{T}} Aq + 2a^{\mathrm{T}} Qy + 2a^{\mathrm{T}} q + \alpha = 0$

$y^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} AQy + 2(q^{\mathrm{T}} A + a^{\mathrm{T}})Qy + q^{\mathrm{T}} Aq + 2a^{\mathrm{T}} q + \alpha = 0$

$(y^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} Aq)^{\mathrm{T}} = (q^{T} AQy)^{T} = (1\times n)(n\times n)(n\times n)(n\times 1) = 1\times 1$ - это число (матрица 1×1). (транспонированное число есть число)

Тогда будут выполнены следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &B = Q^{\mathrm{T}} AQ \\ &b = (q^{\mathrm{T}} A + a^{\mathrm{T}})Q \\ &\beta = q^{\mathrm{T}} Aq + 2a^{\mathrm{T}} q + \alpha = F(q) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

По определению матрица B конгруэнтна матрице A, значит B - тоже ненулевая симметричная матрица

$y^{\mathrm{T}} By + 2by + \beta = 0$ - полученное уравнение квадрики.

При аффинном преобразовании уравнение квадрики переходит в уравнение квадрики.

Рассмотрим расширенную матрицу квадрики

$\overline{A} = \begin{pmatrix} \alpha & a^{\mathrm{T}} \\ a & A \end{pmatrix}$ $\qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ $\qquad (i, j = 0,1,\ldots n)$

Тогда левую часть уравнения (1)можно записать в простом виде:

$\overline{x}^{\mathrm{T}} \overline{A}\overline{x} = 0$ $\qquad$ (1')

Действительно,

$(1, x^{T})\begin{pmatrix} \alpha & a^{T} \\ a & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = (1, x^{T})\begin{pmatrix} \alpha + a^{T} x \\ a + Ax \end{pmatrix} = \alpha + x^{T} a + a^{T} x + x^{T} Ax.$

Аналогично поступим и с переменным y: введём $\overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ и $\overline{B} = \begin{pmatrix} \beta & b^{T} \\ b & B \end{pmatrix}$. Тогда

$\overline{y}^{T}\overline{B}\overline{y} = y^{T} By + 2b^{T} y + \beta,$ и мы можем записать

$F(Qy + c) = \overline{y}^{T}\overline{B}\overline{y} = 0.$

Напишем расширенную матрицу $\overline{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & Q \end{pmatrix}$ легко проверить, что

из (3) следует $\overline{B} = \overline{Q}^{\mathrm{T}}\overline{A}\overline{Q}$

Расширенные матрицы квадрики также конгруэнтны.

Следствие:

при аффинном преобразовании матрица квадратичной формы и расширенная матрица квадрики переходят в конгруэнтные матрицы.

Раз матрицы A и $\overline{A}$, B и $\overline{B}$ конгруэнтны, следовательно у них совпадают ранги и положительные индексы:

r = r(A) = r(B) $\qquad$ *S = S(A) = S(B)*

S – положительный индекс $\sigma = S_{+} - S_{-}$

$\sigma = \sigma(A) = \sigma(B)$

$\bar{r} = r(\bar{A}) = r(\bar{B})$

$\bar{S} = S(\bar{A}) = S(\bar{B})$

$\bar{\sigma} = \sigma(\bar{A}) = \sigma(\bar{B})$

Указанные величины называются аффинными инвариантами квадрики (не меняющиеся).

$f(\bar{A}) = f(\bar{B})$ - функции, зависящие от коэффициентов уравнения квадрики, не меняющиеся при аффинном преобразовании.

Пример:

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1 \quad /\times(-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

$\Rightarrow -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = -1$

$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = -1$ / переобозначили

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (5)$$

матрицы не конгруэнтны.

От (4) к (5) нельзя перейти при аффинном преобразовании.

Два уравнения квадрики называются **аффинно-эквивалентными**, если от одного к другому можно перейти в результате аффинного преобразования или (u) умножения уравнения на произвольное ненулевое число (при этом ранг не меняется, а сигнатура меняет знак). Нетрудно показать (сделайте это сами), что введённое нами отношение аффинной эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теорема.

Любое уравнение квадрики аффинно-эквивалентно одному из следующих уравнений:

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{S} y_j^2 - \sum_{S+1}^{r} y_j^2 = \begin{cases} \left.\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right\} & \text{- уравнения центральной квадрики} \\ 2y_{r+1} & \text{- нецентральной} \end{cases}$$

причем $S \geq 2r$

Уравнения разных типов (разные S или (u), r или (u) разные правые части) аффинно неэквивалентны. Эти уравнения называются **каноническими** для аффинного преобразования.

Доказательство:

Берем произвольное уравнение и с помощью аффинного преобразования переведем его к виду (6).

$x^{\mathrm{T}} A x + 2a^{\mathrm{T}} x + \alpha = 0$

По теореме Лагранжа существует такая квадратичная невырожденная матрица Q, что

$$Q^T A Q = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right),$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{s}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{r-s}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n-r}$$

причём числа $s = s(A)$ и $r = r(A)$ определены единственным образом (закон инерции для квадратичных форм.

Мы уже выше доказали, что при подстановке $x=Qu$ уравнение (1) приводится к виду (1') и в квадратичной форме выглядит так:

$$\sum_{j=1}^{S} u_j^2 - \sum_{j=S+1}^{r} u_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} b_j u_j + \alpha = 0$$ - теперь преобразуем уравнение

$$\sum_{j=1}^{S}(u_j^2 + 2u_j b_j + b_j^2) - \sum_{j=S+1}^{r}(u_j^2 - 2u_j b_j + b_j^2) + \alpha - \sum_{j=1}^{S} b_j^2 + \sum_{j=S+1}^{r} b_j^2 + 2\sum_{j=r+1}^{n} b_j u_j = 0$$

$$\alpha + \sum_{j=S+1}^{r} b_j^2 - \sum_{j=1}^{S} b_j^2 = \gamma$$ - новое обозначение

$$\sum_{j=1}^{S}(u_j + b_j)^2 - \sum_{j=S+1}^{r}(u_j - b_j)^2 - \gamma + 2\sum_{j=r+1}^{n} b_j u_j = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &v_j = u_j + b_j && (j = 1,\dots,S)\\ &v_j = u_j - b_j && (j = S+1,\dots,r)\\ &v_j = u_j && (j = r+1,\dots,n)\end{aligned}\right\}$$ переобозначили (аффинное преобразование)

$$\sum_{j=1}^{S} v_j^2 - \sum_{j=S+1}^{r} v_j^2 + 2\sum_{j=r+1}^{n} b_j v_j - \gamma = 0$$ - в новых переменных

Возможны несколько случаев:

1) $b_j = 0 \quad (j = r+1,\dots,n)$, тогда 3 слагаемое равно 0, γ – переносим вправо и делим все на γ, после чего делаем замену

а) $\gamma = 0$ тогда $y_j = \upsilon$ (j = 1,…,n)

$$-\sum_{j=S+1}^{r} v_j^2 + \sum_{j=1}^{S} v_j^2 = 0$$ - канонический вид

б) $\gamma > 0$ положив $y_j = \dfrac{\upsilon_j}{\sqrt{\gamma}}$ (j = 1,…,n) (аффинное преобразование) и разделив обе части уравнения на γ получим в правой части единицу

в) $\gamma < 0$ $y_j = \dfrac{\upsilon_j}{\sqrt{-\gamma}}$ (j = 1,…,n) и разделив обе части уравнения на $(-\alpha')$, в правой части получим -1

2) существует хотя бы один коэффициент $b_{r+1} \neq 0$, Не уменьшая общности, можно считать, что $b_{r+1} \neq 0$ (В противном случае поменяем переменные местами, это – невырожденное преобразование).

$$\begin{cases} y_{r+1} = -\sum\limits_{j=r+1}^{n} b_j \upsilon_j + \dfrac{\gamma}{2} \\ y_j = \upsilon_j \quad (j \neq r+1)\end{cases} \Longrightarrow$$ получаем последний тип уравнения.

Лекция № 3

Доказательство:

Единственности канонического уравнения, которое мы получили.

$$\sum_{j=1}^{S} y_j^2 - \sum_{j=S+1}^{r} y_j^2 = \begin{cases} -1 \\ +1 \\ 0 \\ 2y_{r+1} \end{cases} \qquad (1)$$

Во-первых, как уже отмечалось, из закона инерции следует, что s и r, а значит, и матрица B, определяются единственным образом. Далее рассмотрим расширенные матрицы $\overline{B}$ для каждого из четырёх случаев. Нетрудно показать, что все эти матрицы попарно не конгруэнтны, откуда по *теореме 1* следует, что уравнение квадрики каждого из четырёх видов нельзя аффинным преобразованием привести к другому виду

для -1

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline & \left.\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}\right\}S & & \\ & & r\text{-}S\left\{\begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix}\right. & \\ & & & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} \end{array}\right) \qquad \begin{matrix}\bar r = r \\ \bar S = S\end{matrix}$$

для 0

$$\left(\begin{array}{c|ccc} -1 & & & \\ \hline & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & & \\ & & \begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix} & \\ & & & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} \end{array}\right) \qquad \begin{matrix}\bar r = r+1 \\ \bar S = S\end{matrix}$$

для 1

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & & \\ & & \begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix} & \\ & & & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} \end{array}\right) \qquad \begin{matrix}\bar r = r+1 \\ \bar S = S+1\end{matrix}$$

для $2y_{r+1}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & S & r & r+1 & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|ccc|c|c} 0 & & & & -1 & \\ \hline & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & & & & \\ & & \begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix} & & & \\ \hline -1 & & & & 0 & \\ \hline & & & & & \begin{matrix}\ddots & \\ & 0\end{matrix} \end{array}\right) \\ M \end{array} \qquad \begin{matrix}\bar r = r+2 \\ \bar S = S+1\end{matrix} \qquad |M| \neq 0$$

Нельзя одно и то же уравнение привести к двум разным типам.

Ранг не меняется – инвариант. Положительный индекс не меняется (инвариант). Везде ранги или положительные индексы разные. Единственность следует из инвариантов.

Уравнение (1) – каноническое уравнение квадрики, получено из исходного уравнения аффинным преобразованием (для любого n).

Замечание. Рассмотрим два уравнения: $x^2 - y^2 = 1$ и $-x^2 + y^2 = -1$.

Очевидно, что они описывают одну и туже кривую, но аффинно не эквивалентны, так как соответствующие расширенные матрицы $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ – не конгруэнтны. Чтобы исключить из рассмотрения такие случаи, договоримся считать, что $2s \geq r$ (в противном случае все коэффициенты уравнения можно умножить на -1).

n = 2, n = 3 – рассмотрим эти случаи.

Аффинная классификация кривых второго порядка.

Аффинная система координат – точка и базис.

Теорема.

Для любой кривой второго порядка

$$\sum_{j=1}^{S} y_j^2 - \sum_{j=S+1}^{r} y_j^2 = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \\ 2y_{r+1} \end{cases} \qquad (2S \geq r)$$

существует аффинная система координат, в которой она задается одним из девяти аффинно-неэквивалентных друг другу уравнений, перечисленных в следующей таблице.

n = 2

Название кривой	Каноническое уравнение для аффинной классификации	Расширенная матрица	r	S	$\bar{r}$	$\bar{S}$
Эллипс	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	diag(–1, 1, 1)	2	2	3	2
Мнимый эллипс	$x_1^2 + x_2^2 = -1$	diag(1, 1, 1)	2	2	3	3
Гипербола	$x_1^2 - x_2^2 = 1$	diag(–1, 1, –1)	2	1	3	1
Пара мнимых пересекающихся прямых	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	diag(0, 1, 1)	2	2	2	2
Пара пересекающихся прямых	$x_1^2 - x_2^2 = 0$ $(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0$ $x_1=x_2$, $x_1=-x_2$	diag(0, 1, –1)	2	1	2	1
Парабола	$x_1^2 = 2x_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	1	3	2
Пара параллельных прямых	$x_1^2 = 1$	diag(–1, 1, 0)	1	1	2	1
Пара мнимых параллельных прямых	$x_1^2 = -1$	diag(1, 1, 0)	1	1	2	2
Пара совпавших параллельных	$x_1^2 = 0$	diag(0, 1, 0)	1	1	1	1

прямых						

Для доказательства теоремы нам достаточно убедиться в том, что любую кривую 2-го порядка в соответствующих аффинных координатах можно описать одним из перечисленных канонических уравнений. Так как $r = rank\,B$ может принимать лишь два значения $(r = 1{,}2)$, и $2s \geq r$, то матрица В может иметь один из следующих трёх видов: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, причём только в последнем случае может получиться нецентральная кривая. Очевидно, приведённая таблица исчерпывает все возможные варианты расширенных матриц, соответствующих каждой из трёх матриц B.

Аффинная классификация поверхностей второго порядка.

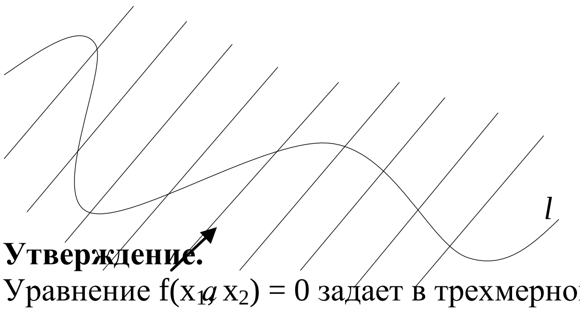
Для любой поверхности второго порядка существует аффинная система координат, в которой поверхность задается одним из семнадцати аффинно-неэквивалентных уравнений перечисленных в следующей таблице:

Название кривой	Каноническое уравнение для аффинной классификации	Расширенная матрица	r	S	$\bar{r}$	$\bar{S}$
Эллипсоид	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	diag(–1, 1, 1, 1)	3	3	4	3
Мнимый эллипсоид	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$	diag(1, 1, 1,1)	3	3	4	4
Однополостный гиперболоид	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$	diag(–1, 1, 1, –1)	3	2	4	2
Двуполостный гиперболоид	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$	diag(1, 1, 1, –1)	3	2	4	3
Мнимый конус	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	diag(0, 1, 1, 1)	3	3	3	3
Конус	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	diag(0, 1, 1, –1)	3	2	3	2
Эллиптический параболоид	$x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$	$\begin{pmatrix} 0 & \ldots\ldots\ldots & -1 \\ . & \ldots\ldots\ldots & \\ . & 1 & \\ . & & 1 \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}$	2	2	4	3
Гиперболический параболоид (седло)	$x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$	$\begin{pmatrix} 0 & \ldots\ldots\ldots & -1 \\ . & \ldots\ldots\ldots & \\ . & 1 & \\ . & & -1 \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}$	2	1	4	2

Для доказательства достаточно перебрать все возможные варианты, как это было сделано выше.

Цилиндрическая поверхность:

Пусть дана некоторая произвольная кривая в пространстве – образующая (l) и прямая с известным направлением - направляющая (a).



Через каждую точку образующей l проведем прямую, параллельную направляющей a , полученное множество точек называется цилиндрической поверхностью, с образующей l и направляющей a.

Утверждение.

Уравнение $f(x_1, x_2) = 0$ задает в трехмерном пространстве цилиндрическую поверхность с образующей $\begin{cases} f(x_1, x_2) = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ и направляющей Oz.

Таким образом, 9 поверхностей, канонические уравнения которых не зависят от координаты x_3, представляют собой цилиндры с образующими, параллельными оси x_3; в сечениях этих цилиндров плоскостью $0x_1x_2$ лежат соответствующие кривые 2-го порядка, перечисленные выше.

Приведем список цилиндрических поверхностей:

$x_1^2 + x_2^2 = 1$ - эллиптический цилиндр;

$x_1^2 + x_2^2 = -1$ - мнимый эллиптический цилиндр;

$x_1^2 - x_2^2 = 1$ - гиперболический цилиндр;

$x_1^2 = 2x_2$ - параболический цилиндр;

$x_1^2 - x_2^2 = 0$ - пара плоскостей $x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 = 0$, пересекающихся по оси x_3;

$x_1^2 + x_2^2 = 0$ - пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой – оси x_3;

$x_1^2 - 1 = 0$ - пара параллельных плоскостей $x_1 = 1, x_2 = -1$;

$x_1^2 + 1 = 0$ - пара мнимых параллельных плоскостей;

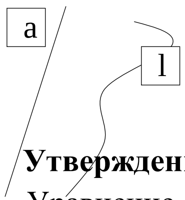
$x_1^2 = 0$ - пара совпадающих плоскостей $x_1 = 0$.

Уравнения оставшихся поверхностей должны включать все 3 координаты. Переберём варианты строения матрицы B (с учётом условия $s \geq t$):

1) $B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$; 3) $B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$; 4) $B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

(В двух последних случаях необходимо, чтобы расширенная матрица $\overline{B}$ содержала ненулевой коэффициент при переменной x_3 (иначе получится один из перечисленных выше цилиндров), следовательно, здесь получаются нецентральные поверхности).

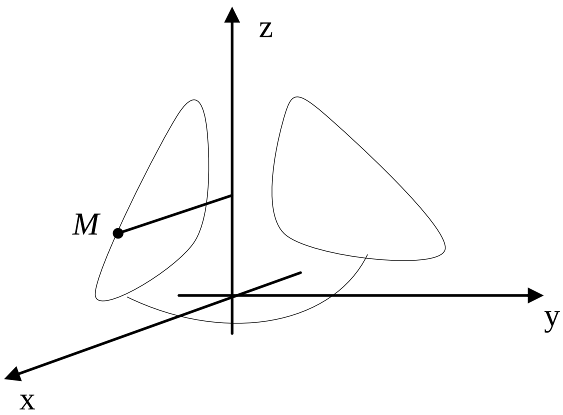
Поверхность вращения



– поверхность получается при вращении кривой l вокруг прямой a.

Утверждение:

Уравнение $f(x^2 + y^2, z) = 0$ (4) задает поверхность вращения, получаемую при вращении кривой $\begin{cases} f(x^2, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (3) вокруг оси Oz.



Доказательство:

получ. поверхность, которая задается уравнением $f(x^2 + y^2, z) = 0$ Возьмем точку M(x_0,y_0,z_0), лежащей на кривой (3)

$$\begin{cases} f(x_0, z_0) = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

При вращении т.M превращается в окружность, т.е. вместе с т.M искомой поверхности будут удовлетврять все точки лежащие на этой окружности

Проверим, что все точки удовлетворяют (4):

Расстояние от M до оси Z: $\begin{cases} x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ z=z_0 \end{cases}$

$(f(x_0^2+y_0^2,z_0)=f(x_0^2,z_0))$ из (3)

В обратную сторону: для любой точки M' (x', y', z'): $f(x'^2+y'^2,z')=0$

найдется на кривой (3) точка, лежащая на окружности $M(x_0,y_0,z_0)$: $\begin{cases} f(x_0^2,z_0)=0 \\ y_0=0 \end{cases}$

$x_0=\sqrt{x'^2+y'^2}$, тогда $x_0^2+y_0^2=x'^2+y'^2$ и $z_0=z'$. доказано

Лекция № 4

Привидение квадратичной функции к главным осям.

Любую билинейную симметричную функцию с помощью подходящего базиса можно привести к нормальному виду (любого вещественного случая).

Теорема:

Для любой квадратичной функции существует ортонормированный базис, в котором матрица этой квадратичной функции диагональна. (существует ортонормированный нормальный базис).

Доказательство:

Матрица квадратичной функции в некотором исходном базисе f:

$[F]_f=A$

$A^{\mathrm{T}}=A$ - на эту матрицу можно посмотреть как на матрицу симметричного вида

Существует ортогональная матрица Q, такая что:

$B=Q^{-1}AQ$ – где B – диагональна, причем

$B=Q^{\mathrm{T}}AQ$ – связь конгруэнтных матриц

Возьмем в качестве нового базиса тот, матрица перехода к которому равна Q

$Q=[e]_f$

$[F]_e=[e]_f^{\mathrm{T}}\cdot[F]_f\cdot[e]_f$ f – ортонормированный; значит и e – ортонормированный базис,

$Q^{\mathrm{T}}=Q^{-1}$

т.е это и есть диагональная матрица.

Изометрия.

Рассмотрим R^n - пространство, в котором существует преобразование: $x = Qy + q$, *где* Q – невырожденная матрица.

Преобразование называется **изометрическим** (движение), если матрица Q – ортогональна. Это частный случай аффинного преобразования. Если q=0, то такую изометрию назовём ортогональным преобразованием, если Q=E, то назовём изометрию сдвигом.

При изометрии скалярные произведения: $(x_1-x_2, x_3-x_4)=(y_1-y_2, y_3-y_4)$ не меняются, не меняются также расстояния между точками. Так как скалярное произведение стандартное, то

$$(Qy_1+q-Qy_2-q)^{\mathrm{T}}(Qy_3+q-Qy_4-q)=(y_1-y_2)^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Q(y_3-y_4)=(y_1-y_2)^{\mathrm{T}}(y_3-y_4)$$

Ортогональные инварианты

Рассмотрим уравнения квадрики и применим изометрическое преобразование:

$x^{\mathrm{T}}Ax+2a^{\mathrm{T}}x+\alpha=F(x)=0$

$x=Qy+q$ - после преобразования получается следующее уравнение

$y^{\mathrm{T}}By+2b^{\mathrm{T}}y+\beta=0$

Между этими уранениями выполняются соотношения:

$B = Q^{T}AQ$,т.к $Q^{T}=Q^{-1}$, то $B = Q^{-1}AQ \Rightarrow det\, A = det\, B$, $\lambda_B = \lambda_A$ (где $\lambda_1 \dots \lambda_r$ – ненулевые собственные числа, т.е. собственные числа матриц A и B равны).

$b = Q^{T}(Aq + a)$

$\beta = F(q)$ - эти равенства верны, т.к. изометрическое преобразование частный случай аффинного

Каждый коэффициент уравнения – главный минор соответствующего порядка:

$S_k = S_k(A) = S_k(B)$ (k = 1, …, n) - из равенства определителей

Вывод: при изометрии не меняются собственные числа основной матрицы квадрики, и суммы главные миноров S_k – (к- порядка).

Рассмотрим расширенные матрицы:

Известно соотношение: $\overline{B} = \overline{Q}^{T}\overline{A}\overline{Q}$

$\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a \\ \hline a & A \end{array}\right)$ $\overline{Q} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline q & Q \end{array}\right)$-в общем случае эта матрицы не ортогональна

Можем сосчитать определители расширенных матриц:

$\det \overline{B} = \det \overline{Q} \cdot \det \overline{A} \cdot \det \overline{Q} = \det \overline{A} \Rightarrow \det \overline{Q} = 1,$

Следствие: при изометрии не меняется определитель расширенной матрицы.

Когда преобразование не содержит сдвига: $x = Qy$, матрица $\overline{Q}$ – будет ортогональной, потому что система столбцов образует ортонормированную систему и система строк образует ортонормированную систему.

Следствие: при ортогональном преобразовании ($q = 0$) следующие величины не меняются:

$$\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_r \qquad \overline{S}_k = S_k(\overline{A}) = S_k(\overline{B}) \quad (k = 1, \dots, n + 1)$$

При ортогональном преобразовании величины собственных значений расширенной матрицы и сумма главных миноров к- порядка не меняются - **ортогональные полуинварианты**.

Теорема (упрощение уравнений квадрики при замене)**:**

Изометрия уравнения квадрики приводится к виду:

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j y_j^2 = \begin{cases} \gamma \\ 2\mu \cdot y_{r+1} \end{cases}$$ - полуканоническое уравнение.

Доказательство:

$$F(x) = x^{T}Ax + 2a^{T}x + \alpha = 0$$

Рассмотрим преобразование: $x = Qu$ где Q – ортогональная матрица

$$x^{T}Ax = \lambda_1 u_1^2 + \dots + \lambda_r u_r^2 \qquad 2a^{T}x = 2b_1u_1 + \dots + 2b_nu_n$$

$$(\cancel{\lambda_1 u_1^2} + \dots + \lambda_r u_r^2) + (2b_1u_1 + \dots + 2b_nu_n) + \alpha = 0$$

.Выделяем полный квадрат:

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j (u_j^2 + 2u_j \cdot \frac{b_j}{\lambda_j} + \frac{b_j^2}{\lambda_j^2}) + 2\sum_{j=r+1}^{n} b_ju_j + \alpha - \sum \frac{b_j^2}{\lambda_j} = 0$$

Обозначим $-\gamma = \alpha - \sum_{j=1}^{r} \frac{b_j^2}{\lambda_j}$ - это некоторая постоянная величина

Получим: $$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j (u_j + \frac{b_j}{\lambda_j})^2 + 2\sum_{j=r+1}^{n} b_ju_j - \gamma = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \upsilon_j = u_j + \dfrac{b_j}{\lambda_j} & (j = 1, \ldots, r) \\ \upsilon_j = u_j & (j = r+1, \ldots, n) \end{array}\right\}$$ - частный случай изометрии.

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \upsilon_j^{\,2} + 2\sum_{j=r+1}^{n} b_j \upsilon_j - \gamma = 0 \quad (*)$$

Рассмотрим соответствующую этому уравнению расширенную матрицу

$$\overline{B} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} \gamma & b_1 & \ldots & b_r & b_{r+1} & \ldots & b_n \\ \hline b_1 & \lambda_1 & & & & & \\ \ldots & & \ldots & & & 0 & \\ b_r & & & \lambda_r & & & \\ \hline b_{r+1} & & & & & & \\ \ldots & & 0 & & & 0 & \\ b_n & & & & & & \end{array}\right)$$

Мы получаем два случая:

1) $\overline{r} = r$ *или* $\overline{r} = r+1$ *, тогда* $b_{r+1} = \ldots = b_n = 0$ (один ненулувой минор) после подстановки в (*) получается уравнение необходимого нам вида

2) $\overline{r} = r + 2$ тогда вектора b ненулевые

возьмем вектор $e = (b_{r+1}, ..., b_n) \neq 0$ и найдем его норму $\mu = \sqrt{b_{r+1}^2 + \ldots + b_n^2}$

Рассмотрим систему, где $e_1 = \dfrac{e}{\mu}$

$\left.\begin{array}{l} e_2 \\ \ldots \\ e_{n-r} \end{array}\right\}$ – дополнение вектора e_1 до ортонормированного базиса в R^{n-r}

Тогда

$y_{r+1} = \dfrac{-1}{\mu} \cdot (\sum_{j=r+1}^{n} b_j \upsilon_j - \dfrac{\gamma}{2})$ мы получаем уравнение: $2\sum_{j=r+1}^{n} b_j \upsilon_j - \gamma = -2\mu y_{r+1}$

Применяется изометрическое преобразование:

$$Q_1 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \ldots\ldots & \\ . & \ldots\ldots & \\ . & 1 & \\ . & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \ldots\ldots \\ \\ 0 \\ \\ \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} -e_1 \\ \ldots \\ -e_{n-r} \end{matrix} \end{array}\right)$$ - ортогональная матрица

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \dfrac{\gamma}{2\mu} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} y = Q_1\upsilon + q_1 & \\ y_j = \upsilon_j & (j = 1, \ldots, r) \end{array}$$

Докажем, что при изометрии $\gamma = -\dfrac{\overline{S}_{r+1}}{S_r}$ $\mu^2 = -\dfrac{\overline{S}_{r+2}}{S_r}$

Лекция № 5

Надо показать единственность, с помощью изометрии (пока не рассматриваем умножение обеих частей уравнения на ненулевое число) перейти от одного такого уравнения к другому невозможно. С точностью до перенумерования переменных оно единственно.

Доказательство:

покажем, что γ – есть сумма главных миноров (r + 1) порядка расширенной матрицы на сумму главных миноров r-го порядка основной $(\gamma = -\dfrac{\overline{S}_{r+1}}{S_r}, \quad \mu^2 = -\dfrac{\overline{S}_{r+2}}{S_r})$.

Если $\overline{r} = r$ или $\overline{r} = r+1$, то $\overline{S}_{r+1}$ - не меняется = $\overline{S}_{r+1}(\overline{A})$ = $\overline{S}_{r+1}(\overline{B})$ (1)

Если $\overline{r} = r+2$, тогда $\overline{S}_{r+2}$ = $\overline{S}_{r+2}(\overline{A})$ = $\overline{S}_{r+2}(\overline{B})$ (2)

Покажем, что любую изометрии, ее можно осуществить следующими тремя шагами.

1) приводим нашу квадрику ортогональным преобразованием к каноническому виду:
   $x = Pu$ -ортогональное преобразование без сдвига
2) осуществляем некоторый сдвиг
   $u = \upsilon + t$
3) $\upsilon = Ry$ - (применяем ортогональное преобразование с матрицей R)

Надо подобрать 1), 2), 3) так, чтобы получилось $x = Qy + q$

$$x = P\upsilon + Pt = \underbrace{PR}_{Q}y + \underbrace{Pt}_{q}$$

Легко заметить, что данное равенство выполняется при следующих условиях:

$R = P^{-1}Q \qquad t = P^{-1}q \qquad PR=Q$

R – ортогональна, так как P – ортогональна и Q – ортогональна.

Рассматриваем произвольное изометрическое преобразование и смотрим, что $\overline{S}$ в (1) и (2) не меняются.

1), 2), 3) – преобразования осуществляют преобразование $x = Qy + q$

Привели квадрику к ортогональным осям без сдвига.

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j u_j^{\,2} + 2\sum_{j=1}^{n} c_j u_j + \alpha = 0 \qquad (\surd)$$

В 1) случае работают полуинварианты и S не меняется. Если уравнение квадрики имеет вид (√) и применили 2), то величины S в (1) и (2) одинаковы.

Матрица для (√):

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} \alpha & c_1\ c_2 & \dots & c_r & c_{r+1}\ \dots\ c_n \\ \hline c_1 & \lambda_1 & & & \\ \dots & & \dots & & \\ c_r & & & \lambda_r & \\ \hline c_{r+1} & & & & \\ \dots & & & & \\ c_n & & & & \end{array}\right) \qquad (3)$$

-матрица до сдвига на t, после него основная матрица не меняется (от $\lambda_1 до \lambda_к$), меняется свободный член.

После сдвига на t:

$$\left(\begin{array}{c|cccc|ccc} \sum_{j=1}^{r}\lambda_j t_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} c_j t_j + \alpha & \lambda_1 t_1 + c_1, & \lambda_2 t_2 + c_2, & \dots & \lambda_r t_r + c_r & c_{r+1} & \dots & c_n \\ \hline \lambda_1 t_1 + c_1 & \lambda_1 & & & & & & \\ \dots & & & \dots & & & & \\ \lambda_r t_r + c_r & & & & \lambda_r & & & \\ \hline c_{r+1} & & & & & 0 & & \\ \dots & & & & & & \dots & \\ c_n & & & & & & & 0 \end{array}\right) \qquad (4)$$

Рассмотрим каждый из двух случаев.

1) $\bar{r} = r$ или $\bar{r} = r+1$

(3): ранг основной матрицы равен r, тогда для того, чтобы $\bar{r} = r$ или $\bar{r} = r+1$ необходимо и достаточно, чтобы c_{r+1} …… $c_n = 0$ (ранг расширенной матрицы равен r или r+1).

(4): ранг такой же, как и у (3), так как получен прибавлением и умножением на t_i (ранг(3)=рангу(4)) т.е. $\bar{S}_{r+1}(\bar{A}) = \bar{S}_{r+1}(\bar{B})$

2) $\bar{r} = r+2$ (может быть несколько ненулевых миноров r+2 порядка)

Добавим к основной матрице (2) одну строку и один столбец c_j:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c|}
 & \alpha & c_1 & c_2 & \ldots & c_r & c_j \\
 & c_1 & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & c_r & & & & & \\
\hline
 & c_j & & & & & 0 \\
\hline
 & & & & & & \\
\end{array}\right)$$

(5) - главный минор r+2 порядка

$$\sum_{j=r+1}^{n} (5) = \sum_{j=r+1}^{n}$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
\sum_{j=1}^{r} \lambda_j t_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} c_j t_j + \alpha & & c_j \\
\hline
\lambda_1 t_1 + c_1 & \text{как в (4)} & \\
\ldots & & \\
\lambda_r t_r + c_r & & \\
\hline
c_j & & \\
 & & 0
\end{array}\right)$$

Таким образом, значения в (1) и (2) не меняются.

Если покажем равенства: $\gamma = -\dfrac{\bar{S}_{r+1}}{S_r}$, $\mu^2 = -\dfrac{\bar{S}_{r+2}}{S_r}$ (с точностью до знака μ), то докажем единственность.

Запишем расширенную матрицу для (1):

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
-\gamma & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
0 & \lambda_1 & & & & & \\
\ldots & & & & & & \\
0 & & & \lambda_r & & & \\
\hline
0 & & & & 0 & & \\
\ldots & & & & & \ldots & \\
0 & & & & & & 0
\end{array}\right)$$

$S_r = \lambda_1 * \ldots * \lambda_r$,

$\bar{S}_{r+1} = -\gamma * \lambda_1 * \ldots * \lambda_r$,т.е. $\gamma = -\dfrac{\bar{S}_{r+1}}{S_r}$

Запишем расширенную матрицу для (2):

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c|ccc}
0 & 0 & \ldots & 0 & -\mu & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
0 & \lambda_1 & & & & & & \\
\ldots & & \ldots & & & & & \\
0 & & & \lambda_r & & & & \\
\hline
-\mu & & & & 0 & & & \\
\hline
0 & & & & & 0 & & \\
\ldots & & & & & & . & \\
0 & & & & & & & 0
\end{array}\right)$$

$S_r = \lambda_1 * \ldots * \lambda_r$,

$\overline{S}_{r+2} = -\mu^2 * \lambda_1 * \ldots * \lambda_r$,т.е. $\mu^2 = -\dfrac{\overline{S}_{r+2}}{S_r}$

Мы доказали, что γ и μ определяются ортогонально.

Ортогональная классификация кривых и плоскостей второго порядка.

T1. Для любой кривой второго порядка существует прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение кривой имеет один из следующих типов или видов: (нельзя с помощью изометрии перейти от одного уравнения к другому)

Название кривой	Каноническое уравнение	Условия для коэффициентов
Эллипс	$\dfrac{z_1^2}{a_1^2} + \dfrac{z_2^2}{a_2^2} = 1$	$\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1\gamma < 0$
Мнимый эллипс	$-\dfrac{z_1^2}{a_1^2} - \dfrac{z_2^2}{a_2^2} = 1$	$\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1\gamma > 0$
Пара мнимых пересекающихся прямых	$z_1^2 + \dfrac{z_2^2}{a_2^2} = 0$	$\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\gamma = 0$
Гипербола	$\dfrac{z_1^2}{a_1^2} - \dfrac{z_2^2}{a_2^2} = 1$	$\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1\gamma < 0$
Пара пересекающихся прямых	$z_1^2 - \dfrac{z_2^2}{a_2^2} = 0$	$\lambda_1\lambda_2 < 0$, $\gamma = 0$
Пара параллельных прямых	$\dfrac{z_1^2}{a_1^2} = 1$	$\lambda_1\gamma < 0$, $\lambda_2 = 0$
Пара мнимых параллельных прямых	$-\dfrac{z_1^2}{a_1^2} = 1$	$\lambda_1\gamma > 0$, $\lambda_2 = 0$
Пара совпадающих прямых	$z_1^2 = 0$	$\gamma = \lambda_2 = 0$
Парабола	$qz_1^2 = 2z_2$	$\lambda_2 = 0$

T2. Для любой поверхности 2-го порядка существует прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение поверхности имеет один из следующих типов или видов:

Чтобы получить аналогичный результат для *n=3*, сначала, рассмотрим канонические уравнения поверхностей второго порядка, не содержащие переменной z_3. Очевидно, что все они представлены в предыдущей таблице (заменить название кривой на название соответствующей цилиндрической поверхности предоставляется читателю), а канонические уравнения восьми остальных поверхностей − в следующей таблице.

Название поверхности	Каноническое уравнение	Условия для коэффициентов
Эллипсоид	$\dfrac{z_1^2}{a_1^2} + \dfrac{z_2^2}{a_2^2} + \dfrac{z_3^2}{a_3^2} = 1$	$\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1\lambda_3 > 0$, $\lambda_1\gamma < 0$

Мнимый эллипсоид	$-\frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}-\frac{z_3^2}{a_3^2}=1$	$\lambda_1\lambda_2>0,$ $\lambda_1\lambda_3>0,$ $\lambda_1\gamma>0$
Мнимый конус	$z_1^2+\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=0$	$\lambda_1\lambda_2>0,$ $\lambda_1\lambda_3>0,$ $\gamma=0$
Однополостный гиперболоид	$\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}-\frac{z_3^2}{a_3^2}=1$	$\lambda_1\lambda_2>0,$ $\lambda_1\lambda_3<0,$ $\lambda_1\gamma<0$
Двуполостный гиперболоид	$-\frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=1$	$\lambda_1\lambda_2>0,$ $\lambda_1\lambda_3<0,$ $\lambda_1\gamma>0$
Конус	$z_1^2+\frac{z_2^2}{a_2^2}-\frac{z_3^2}{a_3^2}=0$	$\lambda_1\lambda_2>0,$ $\lambda_1\lambda_3<0,$ $\gamma=0$
Эллиптический параболоид	$\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}=2z_3$	$\lambda_1\lambda_2>0,$ $\lambda_3=0$
Гиперболический параболоид	$\frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}=2z_3$	$\lambda_1\lambda_2<0,$ $\lambda_3=0$

Лекция № 6

Пересечение прямой и квадрики

$x^{\mathrm{T}}Ax+2a^{\mathrm{T}}x+\alpha=0$ (*) - уравнение квадрики

$x = x_0 + lt$ – прямая, пересекающая квадрику. (l – напр. Вектор, x_0 - некоторая начальная точка, t – параметр).

Если подставить уравнение прямой в (*), то получим уравнение зависящее от t, где t – это точки, лежащие и на прямой и на квадрике.

$l^{\mathrm{T}}Alt^2+2l^{\mathrm{T}}(Ax_0+a)t+F(x_0)=0$

Асимптотические направления.

Ненулевой вектор l – называется **асимптотическим направлением** относительно уравнения (*), если $l^{\mathrm{T}}Al=0$.

Если прямая является асимптотическим направлением, то либо прямая целиком лежит в квадрике, либо не имеет точек пересечения, либо точка пересечения одна.

Рассмотрим пример. Пусть задано каноническое уравнение гиперболы: $x_1^2-x_2^2=1$. Найдём для неё асимптотические направления. Здесь $q=\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, то есть компоненты асимптотического вектора удовлетворяют уравнению $q_1^2-q_2^2=0$. Можно считать, что $q_2=1$; таким образом, эта гипербола имеет два асимптотических направления: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Пример асимптотической поверхности 2 порядка:

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=\begin{cases}\pm1\\0\end{cases}$$

Компоненты асимптотического вектора удовлетворяют уравнению: $l_1^2+l_2^2-l_3^2=0$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ – асимптотическое направление (α, β – любые, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$)

Центр квадрики

Центр квадрики – такая точка x_0, что $Ax_0 + a = 0$ (Точка x_0 центр поверхности, т.е. вместе с точкой x', принадлежащей поверхности, ей принадлежит и точка x'', симметричная точке x' относительно x_0, это будет доказано ниже).

Квадрика, которая имеет хотя бы один центр, называется центральной (центральная в сильном (обобщенном) смысле).

Уравнение центральной квадрики: $l^T A l t^2 + l^T(Ax_0+a)t + F(x_0)=0$

Квадрика – истинно центральная, у которой один центр. Если нет центра – квадрика является нецентральной. Центр квадрики – центр симметрии.

Утверждение 1.

Если $Ax_0 + a = 0 \Rightarrow x_0$ – центр симметрии.

Доказательство:

Уравнение центральной квадрики в нашем случае принимает вид:

$l^T A l t^2 + F(x_0)=0$ (*)

Пусть есть точка $x' = x_0 + \tilde{x} \in K$ – квадрике, тогда симметричная точка $x'' = x_0 - \tilde{x}$ тоже должна принадлежать квадрике.

Положим $l=x'-x_0$ *Тогда* $x'=x_0+1*l$, уравнение (*) будет иметь решения $t_1 = 1$, следоваьельно имеется и корень $t_2=-1$, поэтому точка $x_0-l=x''$ также принадлежит квадрике.

Утверждение 2.

Если x_0 – центр симметрии, то $\Rightarrow$ $Ax_0 + a = 0$ (x_0 – центр).

Доказательство: нужно показать, что если рассматриваем любые $x' = x_0 + \tilde{x} \in K$ и $x'' = x_0 - \tilde{x} \in K$, то $Ax_0 + a = 0$.

Рассмотрим прямую: $x = x_0 + \tilde{x}\, t$ и пересечем ее с нашими прямыми:

x', x'' – лежат на квадрике, из получившегося уравнения: $\pm t$

$l^T(Ax_0 + a) = 0\, l = \tilde{x} \neq 0$ получаем, что $Ax_0 + a = 0$.

Лекция № 7

$$l^T A l t^2 + l^T(Ax_0 + a)t + F(x_0) = 0 \qquad (1)$$

$$Ax_0 + a = 0 \qquad (2)$$

Следствие 1.

Квадрика истинно центральная $\Leftrightarrow$ rank A = n (размерности пространства)

Доказательство:

Квадрика истинно центральная $\Leftrightarrow$ имеет 1 центр $\Leftrightarrow$ $Ax_0 + a = 0 \Leftrightarrow$ rank A = n

Следствие 2.

Квадрика обобщенно центральная $\Leftrightarrow$ rank $\bar{A} \leq$ rank A+1, $\bar{r} \leq r + 1$

Доказательство:

Пусть квадрика обобщенно центральная, т. е. есть хотя бы один центр, поэтому система $Ax_0 + a = 0$ имеет хотя бы одно решение. Это выполняется тогда, когда *rank A* = *rank* (*A/a*) по теореме Кронекера-Капелли (*A/a* – расширенная матрица).

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a' \\ \hline a & A \end{array}\right)$$

если ранг A равен n, то ранг всей матрицы станет на единицу больше, т.к. при добавлении строки ранг может увеличиться только на единицу, либо вообще не увеличиться (если строка линейно выражается через другие строки).

Утверждение.

Перенос начала координат в центр квадрики уничтожает коэффициенты при линейной части.

Доказательство:

Если применим аффинное преобразование $x = Qy + x_0$, где x_0 – есть центр квадрики.

При преобразовании: $B = Q^T AQ$, $b = Q^T(Aq + a)$, $\beta = F(q)$

Подставляем уравнение преобразования:

$b = Q^T(Ax_0 + a) = 0$,т.е. коэффициенты уничтожаются

Диаметральная гиперплоскость

Гиперплоскость – линейное многообразие размерности n – 1 , где n – размерность всего пространства.

Любую гиперплоскость можно задать одним линейным уравнением вида:

(*) $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a_0$ $\exists\, j$ $a_j \neq 0$

Диаметральной гиперплоскостью, сопряженной не асимптотическому направлению l, называется гиперплоскость, задаваемая следующим уравнением:

$l^T(Ax + a) = 0$ (решать относительно x), уравнение примет вид (*), есть коэффициенты $\neq$ 0

$(l^TA)x = -l^Ta$ здесь (l^TA) - строка

Так как l не асимптотическое направление, то $l^TA \neq 0$.

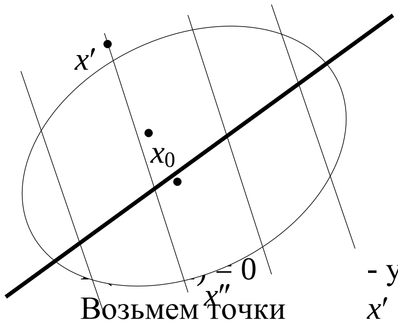
Следствие. Любой центр квадрики принадлежит любой диаметральной гиперплоскости этой квадрики.

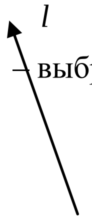
Доказательство: домножим уравнение (2) на l^T и получим 0.

Утверждение.

Центры хорд, параллельных одному не асимптотическому направлению, лежат на диаметральной гиперплоскости, сопряженной этому направлению (какую бы мы квадрику не рассматривали).

Доказательство:





l – выбранное направление

$) = 0$ - уравнение гиперплоскости

Возьмем точки $x' \in K$ и $x'' \in K$ - концы хорды (она проведена параллельно выбранному направлению), лежащие на квадрике

Запишем формулу для середины хорды ($x' = x_0 + lt_1$, $x'' = x_0 + lt_2$, где t_1, t_2 − различные вещественные корни уравнения (1)):

$\frac{x' + x''}{2} = x_0 + \frac{t_1 + t_2}{2} \cdot q$, где $\frac{t_1 + t_2}{2}$ находится по формуле Виета: $\frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{(x_0^T A + a^T)l}{l^T Al}$

Умножив обе части равенства $x = x_0 - l\frac{(x_0^T A + a^T)l}{l^T Al}$ на $q^T A$ слева, мы и получим уравнение гиперплоскости.

Лемма.

Для любой квадрики существует базис не асимптотических направлений.

Пусть $\{0, e_1, \ldots, e_n\}$ − аффинная система координат, в которой квадрика имеет канонический вид. Тогда можно считать, что матрица квадрики устроена следующим образом:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & & & & & & & & \\
 & \dots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & -1 & & & & & \\
 & & & & \dots & & & & \\
 & & & & & -1 & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & \dots & \\
 & & & & & & & & 0
\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{s}\quad\underbrace{\qquad\qquad}_{r-s}\quad\underbrace{\qquad\qquad}_{n-r}$$

Заметим, что векторы e_j, $j=r+1,\dots,n$ − асимптотические.

Рассмотрим систему векторов $e_1',\dots,e_n'$, где $e_j'=\begin{cases} e_j & , j=1,\dots,r; \\ e_1+e_j & , j=r+1,\dots,n. \end{cases}$

Очевидно, что $\{e_j'\}$ − базис, поскольку матрица перехода при таком преобразовании будет невырожденной. Докажем, что все векторы e_j', $j=1,\dots,n,$ − не асимптотические относительно квадрики *K*. Действительно, $e_j'^T Ae_j'=\begin{cases} 1, & j=1,\dots,s; \\ -1, & j=s+1,\dots,r; \\ 1, & j=r+1,\dots,n. \end{cases}$

Лемма доказана

Утверждение.

Пересечение всех диаметральных гиперплоскостей совпадает с множеством центров в квадрике.

Доказательство:

Рассмотрим $\{q_i\}$ − базис из не асимптотических направлений (предыдущая лемма утверждает, что такой базис всегда существует). Рассмотрим множество диаметральных гиперплоскостей, сопряжённых векторам q_i: $q_i(Ax+a)=0$. Так как $\{q_i\}$ − базис, то любой вектор *q* можно представить в виде линейной комбинации векторов q_i. Поэтому $q(Ax+a)=0$ для всех не асимптотических направлений квадрики, а так как множество решений системы уравнений $Ax+a=0$ совпадает с множеством центров квадрики, то этим теорема доказана

Касательная прямая.

Определение: Прямая $x = x_0 + lt$ называется касательной квадрики (1), если $l^T(Ax_0 + a) = 0$, $F(x_0) = 0$, $l^TAl \neq 0$, т. е. точка x_0 лежит на квадрике.

два действительных решения

Будем рассматривать прямую параллельную исходной которая касается квадрики в x_0

и этом остается,

, так как решение должно быть единственно.

$(x - x_0)^T(Ax_0 + a) = 0$ (*) – касательная гиперплоскость

Любая касательная прямая принадлежит касательной гиперплоскости.

Доказательство: нужно, чтобы x_0 принадлежала (*), тогда должно выполняться $l^T(Ax_0+a)=0$.

$(x - x_0)^T(Ax_0 + a) = 0$ соответствует однородное уравнение:

$x^T(Ax_0 + a) = 0$ значит $l^T(Ax_0 + a) = 0$

Любая прямая, принадлежащая (*) будет касательной прямой.

Прямолинейные образующие.

Прямолинейная образующая - прямая целиком лежащая в квадрике (бесконечно много решений) (все коэффициенты в уравнении (1) равны 0):

$$\begin{cases} l^T A l = 0 \\ l^T(Ax_0 + a) = 0 \qquad (3) \\ F(x_0) = 0 \end{cases}$$

Примерами поверхностей, обладающих прямолинейными образующими, являются конус и цилиндрические поверхности.

Утверждение.

Через каждую точке гиперболического параболоида проходят две различные прямые, целиком лежащие в параболоиде.

Доказательство:

$x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$

Пусть $l\ (l_1, l_2, l_3)$ – направляющий вектор, а точка x_0 (x_{01}, x_{02}, x_{03}) – произвольная точка, лежащая на гиперболическом параболоиде.

1 способ:

Нужно рассмотреть условия (3) и найти направляющий вектор (должно быть 2 решения).

Решением системы будут векторы (1, -1, $x_{01} - x_{02}$) и (1, 1, $x_{01} + x_{02}$)

$$\begin{cases} l_1^2 - l_2^2 = 0 \\ l_1 x_{01} - l_2 x_{02} - l_3 = 0 \\ x_{01}^2 - x_{02}^2 = 2x_{03} \end{cases}$$

Следовательно через каждую точке гиперболического параболоида проходят две различные прямолинейных образующих, целиком лежащие в параболоиде.

2 способ:

Направляющий вектор можно получить другим способом, преобразуем уравнение кривой:

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 2\,x_3$

Из этого равенства видно, что параболоиду принадлежат такие семейства прямых:

$$\begin{cases} \lambda(x_1 + x_2) = 2\,x_3 \\ (x_1 - x_2) = \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda(x_1 - x_2) = 2\,x_3 \\ (x_1 + x_2) = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in R$$

Мы получили 2 различные прямые как и в первом способе.

Пример:

Эллиптический параболоид не содержит в себе прямолинейных образующих.

Двуполостный гиперболоид также не содержит.

Утверждение.

Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит две несовпадающие прямые. Через каждую точку (кроме центра) конуса проходит одна прямая. Двуполостный гиперболоид не содержит в себе прямых.

Доказательство:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \begin{cases} 1 & \text{— однополостный} \\ -1 & \text{— двуполостный} \\ 0 & \text{— конус} \end{cases}$$

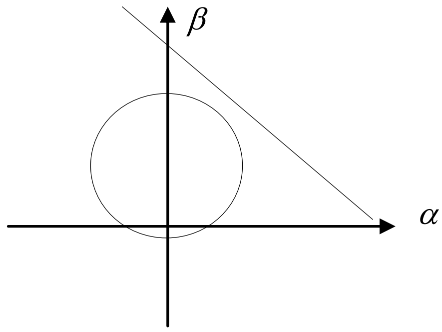
1) направление должно быть не асимптотическим:

$l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 = 0$ т.к. $l \neq 0$ то можно считать, что

$$l = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Из условия (3) мы получаем (точка x_0 (x_{01}, x_{02}, x_{03}) – произвольная точка), что

$$\begin{cases} l_1 x_{0_1} + l_2 x_{0_2} - l_3 x_{0_3} = 0 \\ l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 = 0 \\ x_{0_1}^2 + x_{0_2}^2 - x_{0_3}^2 = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \end{cases}$$



В этой системе 1 уравнение задает уравнение прямой, подставляя туда координаты l получим:

$$\begin{cases} \alpha x_{01} + \beta x_{02} = x_{03} & \text{- прямая} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 & \text{- окружность} \end{cases}$$

Дано x_{01}, x_{02}, x_{03}. Найти α и β

Расстояние от прямой до начала координат:

$$\rho = \frac{|x_{03}|}{\sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2}}$$

надо смотреть пересекает ли прямая окружность

для однополостного гиперболоида $\rho < 1$,т.к. $\sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2} = \sqrt{1 + x_{03}^2}$ -2 решения

для двуполостного гиперболоида $\rho > 1$ - нет решений

для конуса – одно решение $\rho = 1$ - 1 решения

Утверждение доказано.

Представим здесь более простое доказательство, например, для однополостного гиперболоида:

$x_1^2 - x_3^2 = 1 - x_2^2$ - переписали уравнение поверхности

$(x_1 - x_3)(x_1 + x_3) = (1 - x_2)(1 + x_2)$ (3)

Здесь мы видим целое семейство прямых:

$$\begin{cases} \lambda(x_1 + x_3) = \mu(1 + x_2) \\ \mu(x_1 - x_3) = \lambda(1 - x_2) \\ \lambda^2 + \mu^2 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda(x_1 + x_3) = \mu(1 - x_2) \\ \mu(x_1 - x_3) = \lambda(1 + x_2) \end{cases}$$

Легко проверить, что при $x_2^2 \neq 1$ получаются 2 различные прямые и любая точка из этих прямых удовлетворяет уравнению (3).