I. Линейные векторные пространства..

Следствия из аксиом .

1. Единственность нулевого элемента: $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$.
2. Единственность противоположного элемента:$x_1 = x_1 + x + x_2 = x_2$.
3. $\forall\, x \in V \quad 0 \cdot x = \theta : \quad 1 \cdot x = (1+0)\cdot x = x + 0 \cdot x$.
4. $\forall\, x \in V \quad -1 \cdot x = -x : \quad 0 \cdot x = (1+(-1))\cdot x = x + (-1)\cdot x$.
5. $\forall\, \alpha \in P \quad \alpha \cdot \theta = \theta : \quad \alpha \cdot \theta = \alpha \cdot (x + (-x)) = x \cdot (1 + (-1)) = 0 \cdot x$.
6. $\alpha \cdot x = \theta \to \alpha = 0$ или $x = \theta$.

Далее нулевой элемент будем обозначать символом 0.

Определение. Выражение $a_1x_1 + .. + a_kx_k$ называется линейной комбинацией векторов $a_1, .., a_k$.

Определение. Множество всех линейных комбинаций векторов системы A называется линейной оболочкой. Обозначение: $L(A)$.

Говорят, что вектор b линейно выражается через векторы $a_1, .., a_k$, если $b \in L(a_1, .., a_k)$.

Определение. Система векторов $a_1, ..a_k$ называется линейно независимой , если равенство $a_1x_1 + .. + a_kx_k = 0$ возможно только при $x_1 = .. = x_k = 0$.

Утверждение 1. Система векторов $a_1, ..a_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из ее векторов является линейной комбинацией остальных.

Утверждение 2. Подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.

Утверждение 3. Если система A линейно независима, а система $A \cup \{b\}$ линейно зависима, то $b \in L(A)$.

Определение. Пусть A, B - две системы векторов. Будем говорить, что A линейно выражается через B, если каждый вектор из A линейно выражается через векторы системы B. Обозначение: $A \prec B$.

Легко проверить, что $\{A \prec B\}$ & $\{B \prec C\} \to A \prec C$.

Определение. Системы A и B называются эквивалентными, если $A \prec B$ & $B \prec A$.

Утверждение 4. Если $A = \{a_1, .., a_n\} \prec B = \{b_1, .., b_m\}$ и A - линейно независима, то $n \le m$.

Доказательство. Запишем условие линейной выразимости в виде матричного равенства $(a_1...a_n) = (b_1....b_m)P$, где $P(mxn)$ - числовая матрица. Предположим, что $n > m$, тогда существует ненулевое решение x^0 уравнения $Px = 0$. Далее получаем

$$(a_1...a_n)x^0 = (b_1....b_m)Px^0 = 0,$$

то есть , система A линейно зависима вопреки условию.

Следствие 4.1. Эквивалентные линейно независимые системы векторов содержат одинаковое число векторов.

Следствие 4.2. Любые $n+1$ векторов из линейной оболочки n векторов линейно зависимы.

Определение. Базой системы векторов A называется эквивалентная ей линейно независимая подсистема. Количество векторов в базе называется рангом системы. Обозначение: $\mathrm{rg}\, A$.

Утверждение 5. Ранги эквивалентных систем векторов равны.

Определение. Пространство, в котором для любого натурального числа n существует система векторов ранга n, называется бесконечномерным. Если пространство содержит систему ранга n, но любая система из $n+1$ векторов линейно зависима, то пространство называется n - мерным(и конечномерным).

Мы будем рассматривать лишь конечномерные пространства.

Определение. Базисом n - мерного пространства называется линейно независимая система векторов ранга n.

Пример 1. Базисом P^n является, например, система $e_1, ..., e_n$, где e_i распостраненное обозначение вектора, у которого i - ая компонента равна 1, а остальные равны нулю.

Определение. Система $A = \{a_1, ..., a_m\} \subset V$ называется порождающей, если $V = L(A)$. Если, кроме этого, V не содержит порождающих систем из $(m-1)$- го векторов, то A называется минимальной порождающей системой.

Утверждение 6. Линейно независимая порождающая система является базисом.

Утверждение 7. Минимальная порождающая система является базисом.

Доказательство. Минимальность влечет линейную независимость.

Утверждение 8. Всякий вектор пространства можно единственным способом представить в виде линейной комбинации векторов базиса.

Утверждение 9. Всякую линейно независимую систему $A = \{a_1, ..., a_m\}$, не являющуюся базисом, можно дополнить до базиса пространства.

Доказательство. Если A - не базис, то найдется вектор b^1, который не выражается через A. Система $A^1 = A \cup \{b^1\}$ - линейно независима, $\mathrm{rg}A^1 = \mathrm{rg}A + 1$. Если A^1 не базис, то аналогично можно найти линейно независимую систему A^2, содержащую A^1, причем $\mathrm{rg}A^2 = \mathrm{rg}A^1 + 1$ и т.д. пока не получим систему ранга n.

Определение. Коэффициенты разложения вектора по базису , называются координатами вектора в этом базисе.

Установим связь между координатами вектора в разных базисах. Пусть x_e- столбец координат вектора в базисе $e_1, ..., e_n$, x_f- столбец координат вектора в базисе $f_1, ..., f_n$, S_{ef}- матрица, j-ый столбец которой состоит из координат вектора f_j базисе $e_1, ..., e_n$. Тогда $x_e = S_{ef}x_f$. S_{ef} называется матрицей перехода от базиса к базису.

Изоморфизм линейных пространств.

Определение. Взаимно-однозначное отображение φ линейного пространства V в линейное пространство W, заданное над тем же числовым полем P, называется изоморфизмом , а сами пространства изоморфными, если $\forall x, y \in V, \ \forall \lambda \in \ P \ \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$.

Утверждение 10. Линейное пространство V размерности n над полем P изоморфно арифметическому пространству P^n.

Рассмотрим произвольную матрицу $A(mxn)$, столбцы $a_1, ..., a_n$ которой являются векторами пространства P^n.

Утверждение 11. $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\{a_1, ..., a_n\}$

Доказательство. Для упрощения обозначений, считаем, что минор наибольшего порядка, расположен в левом верхнем углу матрицы A. Величину минора обозначим d, кроме того, положим $k = \mathrm{rg}\, A$.

Пусть $S = \{a_1, .., a_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$. Так как $\det(a_1, .., a_k, e_{k+1}, ..., e_n) = d \neq 0$, то система уравнений $a_1x_1 + ... + a_kx_k + e_{k+1}x_{k+1} + ... + e_nx_n = 0$ имеет лишь нулевое решение, следовательно, S линейно независима, значит, линейно независима ее подсистема $a_1, ..., a_k$.

Система $a_1x_1 + ... + a_kx_k + e_{k+1}x_{k+1} + ... + e_nx_n = a_j$ для всякого $j > k$ имеет решение $(x_1^0, ..., x_n^0)$, причем при $i > k \ \ x_i^0 = \dfrac{1}{d}\det(a_1, ...a_k, ...e_{i-1}, a_j, e_{i+1}..) = \pm\dfrac{1}{d}*$минор$(k+1)$-го порядка=0. Таким образом, любой столбец линейно выражается через $a_1, ..., a_k$ поэтому они составляют базу в системе $a_1, ..., a_n$.

Следствие 11.1. $\mathrm{rg}\, AB \leq \min\{\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B\}$

Определение. Непустое подмножество L пространства V называется подпространством если выполняется два условия.

1. $\forall\, a, b \in L \ \ a + b \in L$
2. $\forall\, a \in L, \lambda \in P \ \ \lambda a \in L$

Проверить, что линейная оболочка любой системы векторов является линейным подпространством.

Сумма и пересечение подпространств.

$L_1 + L_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x | x = x_1 + x_2, x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}, \ L_1 \cap L_2 = \{x | x \in L_1, x \in L_2\}$

Утверждение 12. $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$.

Определение. Сумма V подпространств $V_1, ..., V_k$ называется прямой, если любой вектор $x \in V$ однозначно представим в виде $x = x_1 + ... + x_k, \ x_i \in V_i \ (i = 1, .., n)$. Обозначение $V = V_1 \oplus ... \oplus V_k$.

Утверждение 13. Сумма V подпространств $V_1, ..., V_k$ является прямой тогда и только тогда, когда объединение базисов $V_1, ..., V_k$ составляет базис V.

Утверждение 14. Сумма двух подпространств является прямой тогда и только тогда , когда их пересечение есть нулевое пространство.

II. Аффинные пространства.

Определение. Аффинное n - мерное пространство F над полем P есть иножество, состоящее из "точек" и "векторов", относительно которых должны выполняться следующие условия:

1. множество V векторов из F является линейным пространством над P,называемое пространством трансляций;
2. всякие две точки A, B , данные в определенном порядке, определяют единственный вектор $u = \vec{AB}$;
3. для всякого u из V и всякой точки A существует единственная точка B, такая, что $u = \vec{AB}$;
4. если $u = \vec{AB}, v = \vec{BC}$, то $u + v = \vec{AC}$.

Следствия из аксиом.

1. $\vec{AB} = \vec{AC} \to B = C$.
2. $\vec{AA} = \vec{\theta}$.
3. $u = \vec{AB} \to -u = \vec{BA}$.
4. $\forall u \in V$ и всякой точки B существует точка A такая, что $u = \vec{AB}$.

Система координат в аффинном пространстве по определению состоит из некоторой точки O, называемой началом координат, и базиса $v_1, ..., v_n$ пространства трансляций.

Координатами вектора в аффинной системе координат являются его координаты в базисе пространства V. Координатами точки M являются координаты вектора OM.

Связь между координатами точки в системах $O, v_1, ..., v_n$ и $O', v_1', ..., v_n'$ устанавливается формулой $x_v = S_{vv'} x_{v'} + b$, где b - столбец координат точки O' в первой системе координат, $S_{vv'}$ - матрица перехода от базиса v к базису v'.

Определение. Подмножество G аффинного подпространства называется аффинным подпространством или линейным многообразием , если для всякого $g_0 \in G$ множество $L = \{g - g_0, g \in G\}$ является линейным подпространством.

Как следует из определения, всякое аффинное подпространство описывается параметрической формулой вида $x = x_0 + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s$

Определение. Аффинной комбинацией точек $x_1, ..., x_s$ называется такая их линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_s x_s$, в которой $\lambda_1 + \ldots \lambda_s = 1$. Множество всех аффинных комбинаций данного множества точек называется его аффинной оболочкой.

Определение. Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \alpha_0$ называется гиперплоскостью.

Определение. Если a - вектор, x_0 - точка, то множество точек вида $x = x_0 + a \cdot t$ - где t - любое число называется прямой. Если значения t ограничить пределами некоторого интервала, то та же формула определяет отрезок.

Системы линейных уравнений и аффинные пространства.

Рассмотрим систему уравнений в матричной форме $Ax = b$, где $A(mxn)$ - матрица. Набор x^0, удовлетворяющий этой системе можно интерпретировать двумя способами.

Во-первых это коэффициенты разложения вектора b по векторам-столбцам матрицы A, отсюда легко получается теорема Кронекера-Капелли
условие разрешимости системы уравнений: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A\, b)$.

Во-вторых, это точка в n - мерном аффинном пространстве, а множество M всех решений является аффинным подпространством, пространством трансляций которого является множество решений однородной системы $Ax = 0$. Пусть $(\bar{A}\bar{b})$ - матрица, строки которой составляют базу в системе строк матрицы $(A\, b)$. Тогда системы $Ax = b$ и $\bar{A}x = \bar{b}$ имеют одинаковые множества решений. Представим $\bar{A}$ в виде $\bar{A} = (B\, N)$, где B составлена из столбцов, образующих базу (базисная подматрица), N содержит остальные столбцы матрицы $\bar{A}$ (небазисная подматрица). Соответственно разобьем множество неизвестных на два подмножества: x_B (базисные неизвестные) x_N (небазисные неизвестные) . Записав систему уравнений в виде $Bx_B + Nx_N = \bar{b}$, выразим $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$. Для каждого набора значений небазисных неизвестных $x_N = \lambda \in P^{n - \operatorname{rg} A}$ по этой формуле вычисляются значения базисных неизвестных. Решение системы можно записать, таким образом, в матричном виде $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ E_{n-\operatorname{rg} A} \end{pmatrix} \lambda$. Столбцы матрицы $\begin{pmatrix} B^{-1}N \\ E_{n-\operatorname{rg} A} \end{pmatrix}$ линейно независимы, поэтому размерность множества решений равна $n - \operatorname{rg} A$.

Метод столбцовых преобразований. Пусть $r = \operatorname{rg} A$. Преобразуя столбцы матрицы $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ приведем ее к виду $\begin{pmatrix} T & O \\ P & Q \end{pmatrix}$, где $T(mxr), O(mx(n-r), P(nxr), Q(nx(n-r))$ матрицы, причем матрица O состоит из нулей.

Утверждение 1. Столбцы матрицы Q образуют фундаментальную систему решений.

Доказательство. Столбцовые преобразования эквивалентны умножению исходной матрицы справа на некоторую невырожденную матрицу H , которую представим в виде $H = (H_1\, H_2)$, где H_1 состоит из первых r столбцов матрицы H. Умножая, получаем равенства $P = H_1, Q = H_2, AH_1 = T, AH_2 = O$, то есть столбцы матрицы удовлетворяют системе $Ax = 0$, а так как они линейно независимы и их число равно $n - r$, то они образуют фундаментальную систему.

III. Евклидовы пространства.

Определение. Пространство V над полем P называется евклидовым, если определено правило, по которому всякой паре векторов $x, y \in V$ ставится в соответствие число (x, y), называемое скалярным произведением. При этом должны выполняться следующие условия.

1. $(x, y) = (y, x)$,
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

4. $(x,x) \geq 0, (x,x)=0 \to x=\theta$.

Скалярное произведение следующим образом выражается через координаты векторов в заданном базисе $\{a_1, ..., a_n\}$: $(x,y) = \sum_{i,j} x_i y_j (a_i, a_j)$.

Определение. Нормой или длиной вектора x называется число $|x| = \sqrt{(x,x)}$

Утверждение 1. Если $(x,y)=0$, то $|x+y| \geq |x|$.

Определение. Система $f_1, ..., f_k$ ненулевых векторов называется ортогональной , если $(f_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$. Ортогональная система, состоящая из векторов единичной длины, называется ортонормированной.

Утверждение 2. Ортогональная система линейно независима.

Скалярное произведение в ортонормированном базисе записывается наиболее просто: $(x,y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.

Процесс ортогонализации. Применяется для нахождения ортогонального базиса $h_1, ..., h_m$ заданного подпространства $L(a_1, ..., a_k)$.

Примем естественное допущение о том, что $a_1 \neq 0$ и положим $h_1 = a_1,\ r = 2$. Предположим, что уже найдены векторы $h_1, .., h_s$ $(s \geq 1)$. Очередной вектор ищем в виде $h_{s+1} = \lambda_1 h_1 + ... \lambda_s h_s + a_r$, выбирая коэффициенты так, чтобы выполнить условия $(h_i, h_{s+1}) = 0,\ (i = 1, .., s)$, т.е. полагая $\lambda_i = -(a_r, h_i)/(h_i, h_i),\ (i = 1, .., s)$. Если оказалось, что $h_{s+1} = 0$, и $r < k$, то увеличиваем r на 1 и вновь пытаемся найти ненулевой h_{s+1}. Если $h_{s+1} \neq 0$, приступаем к нахождению h_{s+2} и т.д.. Вычисления заканчиваются тогда, когда $r > k$.

Утверждение 3. Евклидовы пространства одинаковой размерности и заданные над одним полем изоморфны.(Скалярные произведения в ортонормированных базисах вычисляются по одинаковым формулам.)

Определение. Матрицей Грама системы векторов $a = \{a_1, ..., a_k\}$ называется матрица $\Gamma(a) = \Gamma(a_1, ..., a_k) = ((a_i, a_j))$ $k-$го порядка.

Если x_a, y_a - столбцы координат векторов x, y в базисе a, то $(x,y) = x_A^T \Gamma(a) y_A$.

Утверждение 4. 1) $\det \Gamma(a_1, ...a_k) \geq 0$,
2) $\det \Gamma(a_1, ...a_k) = 0 \ \leftrightarrow\ rg(a_1, ...a_k) < k$.

Доказательство. Пусть A - матрица, столбцами которой являются координаты векторов $a_1, ..., a_k$ в каком-нибудь ортонормированном базисе. Тогда $\Gamma(a_1, ..., a_k) = A^T A$ и по формуле Бине-Коши получаем $\det \Gamma(a_1, ...a_k) = \sum_{i_1...i_k} \det^2 A \begin{pmatrix} i_1...i_k \\ 1...k \end{pmatrix} \geq 0$, причем равенство возможно лишь тогда, когда все миноры k-го порядка равны нулю, то есть $rg\,A < k$.

Следствие 4.1. (Неравенство Коши-Буняковского.) $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$.

Следствие 4.2. (Неравенство треугольника) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Ортогонализация с помощью матрицы Грама* *Дана система векторов* $A = \{a_1, ..., a_s\}$. *Элементарными преобразованиями строк и столбцов приведем матрицу Грама системы к диагональной матрице* D *и одновременно найдем матрицу* T *такую, что* $D = T^T\,\Gamma(A)\,T$. *Ортогональный базис составляют ненулевые столбцы матрицы* $(a_1, ..., a_s)T$.

Задача: *Определить скалярное произведение так, чтобы линейно независимые векторы* $a_1, ..., a_n \in P^n$ *составляли ортонормированный базис.*

Решение: *Пусть* $A = (a_1...a_n)$. *Матрица* X *скалярного произведения должна удовлетворять равенствам* $a_i^T X a_j = \delta_{ij}\ \forall i,j$, *которые можно записать в матричной форме* $A^T X A = E$. *Следовательно,* $X = (AA^T)^{-1}$.

Проекция вектора на подпространство.

Если X, Y - множества в евклидовом пространстве, то выражение $X \perp Y$ будет означать, что $(x,y) = 0\ \forall x \in X, y \in Y$. Множества X, Y называются ортогональными. Если X состоит из единственного вектора x , то используется запись $x \perp Y$.

Утверждение 5. Пусть W - подпространство пространства V, $x \in V$. Существует единственное представление вектора x в виде $x = x_{prW} + x_{ortW}$, где $x_{prW} \in W, x_{ortW} \perp W$.

Доказательство. Пусть $\{a_1, .., a_k\}$ - ,базис W. Рассмотрим систему уравнений $(x - \lambda_1 a_1 - .... - \lambda_k a_k, a_i) = 0,\ (i = 1, ..., k)$ относительно $\lambda_1, .., \lambda_k$. Матрицей коэффициентов является матрица Грама, ее определитель не равен нулю, поэтому система имеет единственное решение $\lambda_1^0, .., \lambda_k^0$. Осталось заметить, что $x_{prW} = \lambda_1^0 a_1 + ... + \lambda_k^0 a_k$, $x_{ortW} = x - x_{prW}$.

x_{prW} называется проекцией, а x_{ortW} - ортогональной составляющей.

Ортогональное дополнение.

Определение. Ортогональным дополнением к множеству $X \subset V$ называется множество $X^{\perp} = \{y \in V | (x, y) = 0, \forall x \in X\}$.

Свойство 1. $X^{\perp}$ - линейное подпространство.

Свойство 2. $V^{\perp} = \{0\}$, $\{0\}^{\perp} = V$.

Свойство 3. Если L подпространство, то $L \oplus L^{\perp} = V$, $\dim V = \dim L + \dim L^{\perp}$.

Доказательство. См. утверждение 5.

Следствие 5.1. Размерность подпространства $L = \{x | Ax = 0\}$ равна $n - \operatorname{rg} A$.

Свойство 4. Если L линейное подпространство, то $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

Доказательство. $x \in (L^{\perp})^{\perp} \sim x \perp L^{\perp}$. Представим x в виде $x = x_1 + x_2, x_1 \in L, x_2 \in L^{\perp}$. Умножая это равенство на x_2, получим $(x_2, x_2) = 0 \to x_2 = \theta \to x \in L$, то есть $(L^{\perp})^{\perp} \subset L$.

Из равенств $\dim V = \dim L + \dim L^{\perp}$ и $\dim V = \dim L^{\perp} + \dim (L^{\perp})^{\perp}$ следует, что $\dim L = \dim (L^{\perp})^{\perp}$, поэтому $(L^{\perp})^{\perp} = L$ что и требовалось.

Свойство 5. $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$, $\quad (L_1 \cup L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$.

Свойство 6. $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

Свойство 7. $L_1 \subset L_2 \sim L_2^{\perp} \subset L_1^{\perp}$

Нормальные решения систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему уравнений $Ax = b$. Обозначим множество ее решений M. Предположим вначале, что M не пусто.

Утверждение 6. В M существует единственный вектор, имеющий наименьшую длину. Он называется нормальным решением.

Доказательство. Если система имеет единственное решение, то доказывать нечего.

Пусть L - подпространство, порожденное строками матрицы A. Пусть $x, y \in M$, тогда $A(x - y) = 0 \sim x - y \in L^{\perp}$, следовательно, все решения системы имеет одну и ту же проекцию на L. Обозначим ее буквой u. Таким образом, для всякого $x \in M$ справедливо равенство $x = u + h$, где $h \in L^{\perp}$. Теперь получаем

1. $0 = Ax = A(u + h) = Au + Ah = Au \to u \in M$,

2. $|x| = |u + h| \geq |u|$.

Итак, u - нормальное решение.

Замечание. Подчеркнем, что $\{u\} = M \cap L$, то есть u является **единственным** решением системы , которое принадлежит L.

Из доказательства выводится метод нахождения нормального решения: пусть p - любое решение системы $AA^T x = b$, тогда $A^T p$ - нормальное решение.

Утверждение 7. Если u^1 - нормальное решение системы $Ax = b^1$, а u^2 - нормальное решение системы $Ax = b^2$, то $u^3 = \lambda_1 u^1 + \lambda_2 u^2$ - нормальное решение системы

$$Ax = \lambda_1 b^1 + \lambda_2 b^2 \tag{1}$$

Доказательство. Вектор u^3 удовлетворяет системе (1) и принадлежит L, поэтому является нормальным решением.

Пусть строки матрицы $A(mxn)$ линейно независимы. Обозначим u^i нормальное решение системы $Ax = e_i$ при $i = 1, .., m$. Матрица $A^+ = (u^1 ... u^m)$ называется псевдообратной для A. Из предыдущего утверждения вытекает, что нормальное решение системы $Ax = b$ может быть найдено по формуле $u = A^+ b$.

Рассмотрим теперь случай, когда M - пусто.

Обозначим L - линейную оболочку столбцов матрицы A. Представим b в виде $b = b_1 + b_2$, где $b_1 \in L, b_2 \in L^{\perp}$. $|Ax - b| = |Ax - b_1 - b_2| = |(Ax - b_1) - b_2| = \sqrt{|Ax - b_1|^2 + |b_2|^2}$. Наименьшее значение $|Ax - b|$ достигается при условии

$$Ax = b_1, \tag{2}$$

следовательно, каждое решение системы (2) является псевдорешением исходной системы. Из цепочки соотношений $Ax = b_1 \sim b - Ax = b_2 \in L^{\perp} \sim A^T(b - Ax) = 0 \sim A^T A x = A^T b$ следует, что псевдорешения являются решениями(в обычном смысле) последнего уравнения цепочки. Именно его и следует использовать на практике.

Нормальное решение последнего уравнения называется нормальным псевдорешением системы $Ax = b$.

Определение. *Расстоянием от вектора* x *до подпространства* W *называется величина* $d(x, W) = \inf\limits_{y \in W} |x - y|$.

Имеет место равенство $d(x, W) = |x_{ortW}|$. *Действительно,* $|x - y| = |x_{prW} + x_{ortW} - y| \geq |x_{ortW}|$.

Утверждение 8. $d^2(x,W) = \dfrac{\det\Gamma(a_1,..a_k,x)}{\det\Gamma(a_1,..a_k)}$.

Доказательство. *Пусть* $x = x_1 + x_2$, *где* $x_1 \in W = L(a_1,..,a_k), x_2 \in W^\perp$ *и* $x_1 = \lambda_1 a_1 + .. + \lambda_k a_k$. *В матрице* $\Gamma(a_1,..a_k,x)$ *вычтем из последнего столбца линейную комбинацию с коэффициентами* $\lambda_1,...,\lambda_k$ *первых* k *столбцов.*

$$\det\Gamma(a_1,..a_k,x) = \det\begin{pmatrix} & & (a_1,x_2) \\ & \Gamma(a_1,...,a_k) & .. \\ & & (a_k,x_2) \\ (a_1,x)...(a_k,x) & & (x_2,x)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} & & 0 \\ & \Gamma(a_1,...,a_k) & .. \\ & & 0 \\ (a_1,x)...(a_k,x) & & |x_2|^2\end{pmatrix} = |x_2|^2\det\Gamma(a_1,...a_k)$$

Расстояние между линейными многообразиями. *Пусть* $M_1 = x_1 + L_1, M_2 = x_2 + L_2$. *Тогда* $d(M_1,M_2) = \inf|u-v| = \inf|x_1 + l_1 - x_2 - l_2| = \inf\limits_{l\in L_1+L_2} |(x_1-x_2) - l| = d(x_1-x_2, L_1+L_2)$.

Объем системы векторов. $\mathrm{vol}(a_1) \overset{\mathrm{def}}{=} |a_1|, \mathrm{vol}(a_1,...,a_k) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{vol}(a_1,...,a_{k-1})|\mathrm{ort}_{L_{k-1}} a_k| \to$
$\to \mathrm{vol}(a_1,...,a_k) = |a_1||\mathrm{ort}_{L_1} a_2|....|\mathrm{ort}_{L_{k-1}} a_k| = \sqrt{\det\Gamma(a_1,...,a_k)}$, *где* $L_s = L(a_1,...,a_s)$.

Неравенство Адамара. *Рассмотрим квадратную матрицу* A, *столбцы которой* $a_1,...,a_n$. *Используя предыдущую формулу получаем* $(\det A)^2 = \det A^T A = \det\Gamma(a_1,..,a_n) \le (|a_1|\cdot ... \cdot |a_n|)^2 \to$ $\boldsymbol{|\det A| \le |a_1|\cdot ... \cdot |a_n|}$.

Неравенство достигается на матрицах специального вида, называемых матрицами Адамара. Определим индуктивно: $H_1 = (1), H_k = \begin{pmatrix} H_{k-1} & -H_{k-1} \\ H_{k-1} & H_{k-1}\end{pmatrix}$ *при* $k \ge 2$. *Учитывая, что число строк в матрице* H_k *равно* 2^{k-1}, *докажем по индукции формулу* $\det H_k = 2^{(k-1)2^{k-2}}$.

$$(\det H_{k+1})^2 = \det\begin{pmatrix} 0 & -2H_k^2 \\ 2H_k^2 & 0\end{pmatrix} = 2^{2^k}(\det H_k)^4 = 2^{2^k}\cdot 2^{(k-1)2^k} = 2^{k2^k},\ \det H_{k+1} = 2^{k2^{k-1}}.$$

IV. Линейные отображения.

Определение. Пусть V, W два линейных пространства над одним полем P. Отображение $V \overset{\varphi}{\to} W$ называется линейным, если $\forall\alpha,\beta \in P$, $\forall x,y \in V$ выполняется равенство $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi x + \beta\varphi y$. Если $V = W$, вместо термина "отображение" используется термин "оператор".

Примеры

1. Дифференцирование в пространстве многочленов и тригонометрических функций.
2. Пусть $V = V_1 \oplus V_2$. Любой вектор x можно однозначно представить в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$. Отображение $\varphi x = x_1$ пространства V в себя является линейным и называется проектированием на V_1 параллельно V_2. Если $V_2 = V_1^\perp$, то проектирование называется ортогональным.
3. $\varphi x = [a,x]$, где a - фиксированный вектор трехмерного пространства.

Определение. Образом линейного отображения $V \overset{\varphi}{\to} W$ называется множество $\mathrm{im}\,\varphi = \{\varphi x | x \in V\}$. Размерность образа называется рангом. Обозначение: $\mathrm{rg}\,\varphi$.

Определение. Ядром линейного отображения $V \overset{\varphi}{\to} W$ называется множество $\ker\varphi = \{x \in V || \varphi x = 0.\}$ Размерность ядра называется дефектом. Обозначение: $\mathrm{def}\,\varphi$.

Утверждение 1. Ядро и образ отображения являются подпространствами.

Покажем что линейное отображение однозначно определяется своими значениями на базисных векторах пространства V.

Пусть $V \overset{\varphi}{\to} W, e = \{e_1,...,e_n\}$ - базис V, $f = \{f_1,...,f_m\}$ - базис W. Найдем разложения $\varphi e_j = (f_1...f_m)(a_{1j}...a_{mj})^T$, $(j = 1,..,n)$.

Определение. $A_{ef} = (a_{ij})$ называется матрицей отображения φ относительно базисов e, f.

Пусть $y = \varphi x$, $x_e = (x_1,..,x_n)^T$, $y_f = (y_1,..,y_m)^T$ - координаты векторов x, y в базисах e, f соответственно. Тогда $y = \varphi x = \varphi(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = (\varphi e_1....\varphi e_n)x_e = (f_1...f_m)A_{ef}x_e$. С другой стороны $y = (f_1...f_m)y_f$. Разложение по базису единственно, поэтому $\underline{y_f = A_{ef}x_e}$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Отображения совпадают, если совпадают их значения на базисных векторах.

Изменение матрицы отображения при изменении базисов. Выберем в V, W базисы e', f' соответственно. Пусть P - матрица перехода от e к e' Q - матрица перехода от f к f'. Тогда $x_e = Px_{e'}$, $y_f = Qy_{f'}$, $y_f = Aefx_e \to Qy_{f'} = A_{ef}Px_{e'} \to y_{f'} = Q^{-1}A_{ef}Px_{e'} \to A_{e'f'} = Q^{-1}A_{ef}P$.

Если φ - линейный оператор, то матрица обозначается A_e и изменяется по формуле $A_{e'} = P^{-1}A_eP$.

Определение. Матрицы A, B называются подобными, если для некоторой невырожденной матрицы P выполняется равенство $A = P^{-1}BP$.

Далее, по умолчанию, предполагается, что пространство обозначается символом V, оператор - символом φ, матрица оператора символом A, $\dim V = n$.

Примеры. 1. Матрица дифференцирования в пространстве многочленов степени $\leq n$.

2. Матрица проектирования на плоскость $n^T x = 0$ в R^3.

a) в естественном базисе $(A = E - \frac{1}{n^T n} nn^T)$.

b) в базисе n, a, b, где a, b принадлежат плоскости.

3. Матрица оператора, которое переводит заданные линейно независимые векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3.

Инвариантные подпространства.

Определение. Подпространство $L \subset V$ инвариантно относительно $V \xrightarrow{\varphi} V$, если $\varphi L \subseteq V$.

Утверждение 3. Сумма и пересечение инвариантных подпространств являются инвариантными подпространствами.

Пусть L инвариантное подространство, $H_1 = \{h_1, h_2, .., h_k\}$ - базис L. $H_2 = \{h_{k+1}, .., h_n\}$ - дополнение H_1 до базиса пространства. Тогда матрица оператора в базисе $H_1 \cup H_2$ имеет блочный вид $\begin{pmatrix} A & O \\ B & D \end{pmatrix}$, где A - матрица размеров (kxk), O - нулевая матрица размеров ((n-k)xk).

Если V есть прямая сумма инвариантных подпространств L_1, L_2 , то в базисе V, полученном объединением базисов L_1, L_2 матрица оператора имеет блочно-диагональный вид $\begin{pmatrix} A & O \\ O^T & D \end{pmatrix}$.

Более общая формулировка: Если V есть прямая сумма инвариантных подпространств $L_1, L_2, .., L_s$, то в базисе V, полученном объединением базисов $L_1, L_2, .., L_s$ матрица оператора имеет блочно-диагональный вид $\mathrm{diag}(A_1, A_2, .., A_s)$, порядок квадратной матрицы A_i равен $\dim L_i$.

Определение. Ненулевой вектор a называется собственным для оператора φ , если $\varphi(a) = \lambda a$ для некоторого числа λ. Это число называется собственным числом, отвечающим собственному вектору a.

Замечание. Собственный вектор оператора является базисом одномерного инвариантного подпространства.

Утверждение 4. Собственные векторы, отвечающие разным собственным числам, линейно независимы.(индукция)

Пусть оператор имеет систему n линейно независимых собственных векторов $H = \{h_1, .., h_n\}$, а $\lambda_1, .., \lambda_n$ - список соответствующих собственных чисел. Тогда в базисе H матрица оператора имеет диагональный вид $\mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$.

Нахождение собственных векторов. Пусть оператор задан своей матрицей A. Для нахождения собственного вектора надо решить нелинейную систему уравнений $Ax = \lambda x$, в которой неизвестны λ и x. Преобразуем систему к виду

$$(A \quad \lambda E)x = 0. \tag{3}$$

Как следует из правила Крамера, эта система имеет ненулевое решение лишь в случае, когда $\det(A - \lambda E) = 0$. Полученное уравнение называется *характеристическим*, а многочлен $\det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом*. Решая характеристическое уравнение, находим собственные числа $\lambda_1, .., \lambda_n$. Подставляя собственное число λ_k в уравнение (3) находим соответствующий собственный вектор h_k.