第二章　单变量函数的微分学

§1. 显函数的导函数

1° 导函数的定义　若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值，则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的增量．

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

有意义，则称为导函数，而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微分的函数．

函数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率$[\operatorname{tg}\alpha = f'(x)]$(图 2.1)．

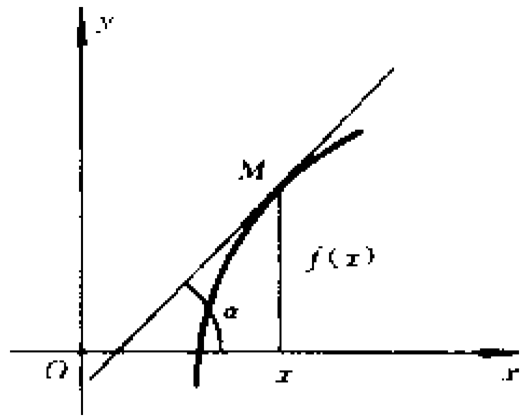


图 2.1

2° 求导函数的基本法则　若 c 为常数且函数 $u = u(x)$，$v = v(x)$，$w = w(x)$ 都有导函数，则

(1) $c' = 0$；(2) $(cu)' = cu'$；

(3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$；

(4) $(uv)' = u'v + v'u$；

(5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$；

(6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n 为常数)；

(7) 若函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数，则

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3° 基本公式　若 x 为自变数[*]，则

Ⅰ. $(x^n)' = nx^{n-1}$（n 为常数）；

Ⅱ. $(\sin x)' = \cos x$；　Ⅲ. $(\cos x)' = -\sin x$；

Ⅳ. $(\mathrm{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$；　Ⅴ. $(\mathrm{ctg}\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$；

Ⅵ. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅶ. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅷ. $(\mathrm{arc\,tg}\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$；

Ⅸ. $(\mathrm{arc\,ctg}\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$；

Ⅹ. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a>0)$；$(e^x)' = e^x$；

Ⅺ. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$；

Ⅻ. $(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$；　ⅩⅢ. $(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$；

ⅩⅣ. $(\mathrm{th}\,x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$；　ⅩⅤ. $(\mathrm{cth}\,x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

4° 单侧的导函数　表示式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数.

导函数 $f'(x)$ 存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

---

*) 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中，一些明显的定义域要求，例如本节公式Ⅴ中要求 $x\neq k\pi$（k 整数），Ⅵ 中要求 $|x|<1$ 等等，以及例如尔后 §5 中相应的限制，一般地就不再一一声明.

5° 无穷的导函数　若在某一点 x 有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 点有无穷的导函数. 在此种情形下，函数 $y=f(x)$ 的图形上在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

821. 若 x 由 1 变到 1000，求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\lg x$ 的对应的增量 Δy.

解　$\Delta x=1000-1=999$;

$$\Delta y=\lg 1000-\lg 1=3.$$

822. 若 x 由 0.01 变到 0.001，求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的对应的增量 Δy.

解　$\Delta x=0.001-0.01=-0.009$;

$$\Delta y=\frac{1}{(0.001)^2}-\frac{1}{(0.01)^2}=990000.$$

823. 设：

(a) $y=ax+b$; (б) $y=ax^2+bx+c$; (в) $y=a^x$.

若变量 x 得到增量 Δx，求增量 Δy.

解　(a) $\Delta y=[(ax+a\Delta x)+b]-[ax+b]=a\Delta x$;

$$(б)\ \Delta y=[a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c]-[ax^2+bx+c]=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2;$$

$$(в)\ \Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1).$$

824. 证明：

(a) $\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$;

(б) $\Delta[f(x)g(x)]$

$=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

证 (a) $\Delta[f(x)+g(x)]$

$$=[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]$$

$$=[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]$$

$$=\Delta f(x)+\Delta g(x),$$

于是，

$$\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x);$$

(б) $\Delta[f(x)g(x)]$

$$=[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)]-[f(x)g(x)]$$

$$=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x]$$

$$+[g(x+\Delta x)-g(x)]f(x)$$

$$=\Delta f(x)g(x+\Delta x)+\Delta g(x)f(x),$$

于是，

$\Delta[f(x)g(x)]$

$=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

同样，我们还可将(σ)的结果写成

$$\Delta[f(x)g(x)]=f(x+\Delta x)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x).$$

825. 过曲线 $y=x^2$ 上的二点 $A(2,4)$ 和 $A'(2+\Delta x,4+\Delta y)$ 引割线 AA'，求此割线的斜率，设：

(а)$\Delta x = 1$； (б)$\Delta x = 0.1$； (в)$\Delta x = 0.01$；

(г)Δx 为任意小.

在已知曲线上 A 点的切线的斜率等于甚么？

解 割线 AA' 的斜率 $k_{AA'} = \dfrac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x$，

(а)$k_{AA'} = 5$； (б)$k_{AA'} = 4.1$；

(в)$k_{AA'} = 4.01$； (г)$k_{AA'} = 4 + \Delta x$.

于是，在 A 点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A'\to A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x\to 0}(4 + \Delta x) = 4.$$

826. 把 Ox 轴上的线段 $1 \leqslant x \leqslant 1 + h$ 利用函数关系 $y = x^3$ 映变到 Oy 轴上．求其平均的伸长系数．设：

(а)$h = 0.1$；(б)$h = 0.01$；(в)$h = 0.001$，计算此系数的值．

当 $x = 1$ 时伸长的系数等于甚么？

解 平均伸长系数 $\bar{l} = \dfrac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = 3 + 3h + h^2$，

(а)$\bar{l} = 3 + 3(0.1) + (0.1)^2 = 3.31$；

(б)$\bar{l} = 3 + 3(0.01) + (0.01)^2 = 3.0301$；

(в)$\bar{l} = 3 + 3(0.001) + (0.001)^2 = 3.003001$.

于是，

$$l|_{x=1} = \lim_{h\to 0}\bar{l} = 3.$$

827. 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式表出

$$x = 10t + 5t^2$$

式中 t 以秒计的时间，x 为以米计的距离. 求在 $20 \leqslant t \leqslant 20 + \Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设：(a)$\Delta t = 1$；(б)$\Delta t = 0.1$；(в)$\Delta t = 0.01$，计算此速度的值. 当 $t = 20$ 时运动的速度等于甚么？

解 平均速度 $\bar{v} = \{[10(20+\Delta t) + 5(20+\Delta t)^2] - [10\times 20 + 5\times 20^2]\} \div \Delta t$

$= 210 + 5\Delta t$(米/秒)，

(a)$\bar{v} = 210 + 5 \times 1 = 215$(米/秒)；

(б)$\bar{v} = 210.5$(米/秒)；

(в)$\bar{v} = 210.05$(米/秒).

于是，

$$v|_{t=20} = \lim_{\Delta t \to 0}(210 + 5\Delta t) = 210(\text{米/秒}).$$

828. 根据导函数的定义，直接求下列函数的导函数：

(a)x^2；(б)x^3；(в)$\dfrac{1}{x}$；(г)$\sqrt{x}$；(д)$\sqrt[3]{x}$；

(е)$\operatorname{tg} x$；(ж)$\operatorname{ctg} x$；(з)$\arcsin x$；(и)$\arccos x$；

(к)$\operatorname{arc\,tg} x$.

解 (a)$y = x^2$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

(б) $y = x^3$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$
$$= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$$

(в) $y = \frac{1}{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(\Delta x + x)}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{1}{x(\Delta x + x)}\right)$$
$$= -\frac{1}{x^2}.$$

(г) $y = \sqrt{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0).$$

(д) $y = \sqrt[3]{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x \neq 0).$$

(e) $y = \operatorname{tg} x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\Delta x(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\Delta x \sec^2 x}{\Delta x(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x)}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg}\Delta x \sec^2 x}{\Delta x(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Delta x)}$$

$$= \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(ж) $y = \operatorname{ctg} x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} \Delta x - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x} - \operatorname{ctg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{-1 - \operatorname{ctg}^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}$$

$$= -\frac{\csc^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\csc^2 x}{\Delta x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}$$

$$= -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

(з) $y = \arcsin x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\,x]}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot \frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\arcsin t}{t}$$

$$\cdot\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}$$

$$\cdot\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$,

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}t=0$.

于是,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

其中 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1$;

(u) $y=\arccos x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\arccos(x+\Delta x)-\arccos x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin[(x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}-(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}]}{\Delta x}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t}$$

$$\cdot\frac{-(2x+2\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t=(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$,

从而$\lim\limits_{\Delta x\to 0} t = 0$.

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(2x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(к) $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(x+\Delta x) - \operatorname{arc\,tg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}$$

$$\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}.$$

于是，

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}\right.$$

$$\cdot\frac{1}{1+x(x+\Delta x)}\Big]=\frac{1}{1+x^2},$$

其中利用$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg}t}{t}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{tg}u}=1$.

829. 设:

$$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3,$$

求 $f'(1)$, $f'(2)$ 和 $f'(3)$.

解 $f'(x)=(x-2)^2(x-3)^3$

$$+2(x-1)(x-2)(x-3)^3$$

$$+3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$$

$$=2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9).$$

于是,

$$f'(1)=-8;f'(2)=f'(3)=0.$$

830. 设:

$$f(x)=x^2\sin(x-2),$$

求 $f'(2)$.

解 $f'(x)=2x\sin(x-2)+x^2\cos(x-2)$.

于是,

$$f'(2)=4.$$

831. 设:

$$f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}},$$

求 $f'(1)$.

解 方法一：

若用复合函数求导法，可得

$$f'(x)=1+\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是，

$$f'(1)=1+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\pi}{4}.$$

方法二：

若按定义作，注意到当 $x=1$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

即得

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)\\&=1+\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

832. 设函数 $f(x)$ 在 a 点可微分，求

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

解 设 $\Delta x=x-a$，则当 $x\to a$ 时，$\Delta x\to 0$. 于是，

得 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{\Delta x\to a}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a).$$

833. 证明：若函数 $f(x)$ 可微分及 n 为自然数，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \tag{1}$$

反之，若对于函数 $f(x)$ 有极限(1)存在，则可否断定这个函数有导函数?研究迪里黑里函数的例子(参阅第一章第734题).

证 $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}=f'(x).$$

反之，就不一定对了. 例如，对于迪里黑里函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ 0, \text{若 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

在任一有理点是不连续的，当然其导数也不存在. 但由于 $x+\frac{1}{n}$ 仍为有理数，故当 x 为有理数时，

$$\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)=1-1=0,$$

从而，极限(1)

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)\right]=0$$

存在.

利用导函数表，求下列函数的导函数:

834. $y=2+x-x^2$. 问 $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$ 等于甚么?

解 由于 $y'(x)=1-2x$，故得

$y'(0)=1$；$y'\left(\frac{1}{2}\right)=0$；$y'(1)=-1$；

$y'(-10)=21$.

835. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$. 当 x 为何值时：

(а) $y'(x)=0$；(б) $y'(x)=-2$；(в) $y'(x)=10$?

解 $y'(x)=x^2+x-2$.

(а) 令 $y'(x)=0$，得 $x^2+x-2=0$. 于是，$x=-2$ 或 $x=1$；

(б) 令 $y'(x)=-2$，得 $x^2+x=0$. 于是，$x=-1$ 或 $x=0$；

(в) 令 $y'(x)=10$；得 $x^2+x-12=0$. 于是，$x=-4$ 或 $x=3$.

836. $y=a^5+5a^3x^2-x^5$.

解 $y'=10a^3x-5x^4$.

837. $y=\frac{ax+b}{a+b}$.

解 $y'=\frac{a}{a+b}$.

838. $y=(x-a)(x-b)$.

解 $y'=x-a+x-b=2x-a-b$.

839. $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

解 $y'=(x+2)^2(x+3)^3+2(x+1)(x+2)(x+3)^3$

$+3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$

$$= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3)$$
$$+ 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2)]$$
$$= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9).$$

840. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

解 $y' = \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha)$
$$+ \cos\alpha(x\sin\alpha + \cos\alpha)$$
$$= x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha.$$

841. $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$.

解 $y' = mnx^{m-1}(1 + mx^n) + mnx^{n-1}(1 + nx^m)$
$$= mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}].$$

842. $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

解 $y' = -(1-x^2)^2(1-x^3)^3$
$$- 4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3$$
$$- 9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2$$
$$= -(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x$$
$$+ 15x^2 + 14x^3)$$
$$= -(1-x)^5(1+x)(1+2x)(1+4x$$
$$+ 7x^2)(1+x+x^2)^2.$$

843. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

解 $y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right)(x \neq 0)$.

844. 证明公式

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

证 $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$

$$= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

这里已暗设 $cx+d \neq 0$.

求下列函数之导函数：

845. $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

解 $y' = \dfrac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}$

$$= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \quad (|x| \neq 1).$$

846. $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

解 由于 $y = \dfrac{2}{1-x+x^2} - 1$，故

$$y' = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$$

847. $y = \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

解 $y' =$

$$\frac{(1-x)^2(1+x)^3 - x[3(1+x)^2(1-x)^2 - 2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1-x)^6}$$

$$= \frac{1 - x + 4x^2}{(1 - x)^3(1 + x)^4}, (|x| \neq 1).$$

848. $y = \frac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}$.

解 $y' =$

$$\frac{(1-x)^2[-2x(3-x^3)-3x^2(2-x^2)]+2(1-x)(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} (x \neq 1).$$

849. $y = \frac{(1 - x)^p}{(1 + x)^q}$.

解 $y' = \frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q-q(1+x)^{q-1}(1-x)^p}{(1+x)^{2q}}$

$$= -\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$$

$(x \neq -1)$.

850. $y = \frac{x^p(1 - x)^q}{1 + x}$.

解

$$y' = \frac{[px^{p-1}(1-x)^q-qx^p(1-x)^{q-1}](1+x)-x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]$$

$(x \neq -1)$.

851. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

解 $y' = 1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x > 0)$.

852. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

解 $y' = -\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)(x>0)$.

853. $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

解 $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}(x>0)$.

854. $y = x\sqrt{1+x^2}$.

解 $y' = \sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

855. $y = (1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}$.

解

$$y' = \sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3} + (1+x)\left[\frac{x\sqrt[3]{3+x^3}}{\sqrt{2+x^2}} + \frac{x^2\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}\right]$$

$$= \frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$$

$(x \neq \sqrt[3]{-3})$.

856. $y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

解

$$y' = \frac{-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n+n(1+x)^{n-1}(1-x)^m}{(m+n)\sqrt[m+n]{[(1-x)^m(1+x)^n]^{m+n-1}}}$$

$$= \frac{(n-m)-(n+m)x}{(m+n)\sqrt[m+n]{(1-x)^n(1+x)^m}}(|x|\neq 1).$$

857. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解 $y' = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2}$

$= \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}(|x| < |a|)$.

858. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}}$.

解 $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}\right)^2}}$

$\cdot \dfrac{3x^2(1 - x^3) + 3x^2(1 + x^3)}{(1 - x^3)^2}$

$= \dfrac{2x^2}{1 - x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}}(|x| \neq 1)$.

859. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}(x + \sqrt{1 + x^2})}$.

解 $y' = -\dfrac{1}{(1 + x^2)(x + \sqrt{1 + x^2})^2}$

$\left(\sqrt{1 + x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} + 2x\right)$

$= -\dfrac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

860. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

解 $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

$$\cdot\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$=\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$(x>0)$.

861. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

解 $y=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$

$$\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=\frac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}\cdot\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$$

$(x\neq 0, x\neq -1, x\neq -8)$.

862. $y=\cos 2x-2\sin x$.

解 $y'=-2\sin 2x-2\cos x$

$=-2\cos x(1+2\sin x)$.

863. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

解 $y'=-2x\cos x-(2-x^2)\sin x+2\sin x$

$+2x\cos x$

$=x^2\sin x$.

864. $y=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$.

解 $y' = -2\sin x\cos x\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

$-2\sin x\cos x\sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x)$

$= -\sin 2x[\cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

$+\sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x)]$

$= -\sin 2x\cos(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= -\sin 2x\cos(\cos 2x).$

865. $y = \sin^n x\cos nx.$

解 $y' = n\sin^{n-1}x\cos x\cos nx - n\sin^n x\sin nx$

$= n\sin^{n-1}x(\cos x\cos nx - \sin x\sin nx)$

$= n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x.$

866. $y = \sin[\sin(\sin x)].$

解 $y' = \cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)].$

867. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$

解 $y' = \dfrac{2\sin x(\cos x\sin x^2 - x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$

$(x^2 \neq k\pi; k = 1, 2, \cdots).$

868. $y = \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}.$

解 $y' = \dfrac{-2\sin^3 x - 4\sin x\cos^2 x}{4\sin^4 x}$

$= -\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}(x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

869. $y = \dfrac{1}{\cos^n x}.$

解 $y' = -\frac{1}{\cos^{2n}x}(-n\cos^{n-1}x\sin x)$

$= \frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k$ 为整数).

870. $y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

解 $y' = \frac{1}{(\cos x + x\sin x)^2}[(x\sin x - \cos x$

$+ \cos x)(\cos x + x\sin x) - (\sin x - \sin x$

$+ x\cos x)(\sin x - x\cos x)]$

$= \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$.

871. $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

解 $y' = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\csc^2\frac{x}{2}$

$= \frac{2}{\sin^2 x}(x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

872. $y = \operatorname{tg}x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

解 $y' = \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x\sec^2 x + \operatorname{tg}^4 x\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^6 x$

$(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

873. $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$.

解 $y' = \frac{8}{3}(\operatorname{ctg}x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 x)$

$+ \frac{8}{3}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2 x)$

$= -\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg}x}}$

$$(x \neq k\pi; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

874. $y = \sec^2\frac{x}{a} + \csc^2\frac{x}{a}$.

解 $$y' = \frac{2}{a}\sec^2\frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{x}{a} - \frac{2}{a}\csc^2\frac{x}{a}\operatorname{ctg}\frac{x}{a}$$

$$= \frac{2}{a}\left(\frac{\sin\frac{x}{a}}{\cos^3\frac{x}{a}} - \frac{\cos\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}}\right)$$

$$= \frac{2}{a}\cdot\frac{\sin^4\frac{x}{a} - \cos^4\frac{x}{a}}{\sin^3\frac{x}{a}\cos^3\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{16\left(\sin^2\frac{x}{a} - \cos^2\frac{x}{a}\right)}{a\left(2\sin\frac{x}{a}\cos\frac{x}{a}\right)^3} = \frac{-16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$$

$$(x \neq \frac{k\pi a}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

875. $y = \sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$.

解 $$y' = \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]\cdot\{-2\cos(\operatorname{tg}^3 x)\sin(\operatorname{tg}^3 x)\}\cdot[3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x]$$

$$= -3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x\cdot\sin(2\operatorname{tg}^3 x)\cdot\cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$$

$$(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

876. $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}$.

877. $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\cdot 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\ln 2 \quad (x \neq 0)$.

878. $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

解 $y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2e^x$.

879. $y = \left[\frac{1 - x^2}{2}\sin x - \frac{(1 + x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

解
$$y' = -e^{-x}\left[\frac{1 - x^2}{2}\sin x - \frac{(1 + x)^2}{2}\cos x\right]$$
$$+ e^{-x}\left[\frac{1 - x^2}{2}\cos x - x\sin x\right.$$
$$\left.+ \frac{(1 + x)^2}{2}\sin x - (1 + x)\cos x\right]$$
$$= x^2e^{-x}\sin x.$$

880. $y = e^x\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$.

解
$$y' = e^x\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}e^x\csc^2\frac{x}{2}$$
$$= \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}} \quad (x \neq 2k\pi;k \text{ 为整数}).$$

881. $y = \frac{\ln 3\cdot\sin x + \cos x}{3^x}$.

解
$$y' = \frac{3^x(\ln 3\cdot\cos x - \sin x) - 3^x\ln 3(\ln 3\cdot\sin x + \cos x)}{3^{2x}}$$
$$= -\frac{(1 + \ln^2 3)\sin x}{3^x}.$$

882. $y=e^{ax}\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

解 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{ax}[a(a\sin bx-b\cos bx)$

$+(ab\cos bx+b^2\sin bx)]$

$=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$.

883. $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

解 $y'=e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})]$.

884. $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\cdot\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\cdot\left(\dfrac{x}{a}\right)^b(a>0,b>0)$.

解 两边取对数,得

$$\ln y=x\ln\frac{a}{b}+a(\ln b-\ln x)+b(\ln x-\ln a).$$

两端同时对 x 求导数,得

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}.$$

于是,

$$y'=y\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^x\cdot\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)(x>0).$$

885. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}(a>0)$.

解 $y'=a^ax^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\ln^2a$.

886. $y=\lg^3x^2$.

解 $y'=3\lg^2x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}2x\lg e$

$=\dfrac{6}{x}\lg e\cdot\lg^2x^2\qquad(x\neq0)$.

或按　$y=(\lg e\cdot\ln x^2)^3=8\lg^3 e\cdot\ln^3|x|$ 求导数，有

$$y'=24\lg^3 e\cdot\left(\frac{1}{x}\ln^2|x|\right)^{*)}(x\neq 0).$$

*)　$(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x}$，以后不再说明.

887. $y=\ln[\ln(\ln x)]$.

解　$y'=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}(x>e)$.

888. $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$.

解
$$y'=\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)}\cdot 2\ln(\ln^3 x)\frac{1}{\ln^3 x}\cdot 3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}=\frac{6}{x\ln x\cdot\ln(\ln^3 x)}(x>e).$$

889. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

解
$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}(x>-1).$$

890. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

解
$$y'=\frac{1}{4}[\ln(x^2-1)-\ln(x^2+1)]'=\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2x}{x^2+1}\right)=\frac{x}{x^4-1}(|x|>1).$$

891. $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$.

解 $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)$，

$$y'=-\frac{4x^3}{4(1+x^4)^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x^4}\cdot 4x^3$$

$$=\frac{1}{x(1+x^4)^2}(x\neq 0).$$

892. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

解 $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}[\ln|x\sqrt{3}-\sqrt{2}|$

$$-\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{2}|]$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3x^2-2}\left(|x|>\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

893. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$

$(0<k<1)$.

解 $y'=\frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$

$$-\frac{\sqrt{k}}{1-k}\left(\frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}\right)$$

$$=\frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)}(|x|<1).$$

894. $y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$

$$= \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})} \quad (x > -1).$$

895. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

解 $$y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

896. $y = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

解 $$y' = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}^{*)}$$

$$- \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

*) 利用 895 题的结果,下同,不再说明.

897. $y = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x$.

解 $$y' = \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$+ \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$- \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$- 2\sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2$$

$$= \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}).$$

898. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

解 $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$

$+ \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$= \sqrt{x^2+a^2}.$

899. $y = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}(a>0,b>0).$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+x\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\right)$

$= \frac{1}{a-bx^2}\left(|x| < \sqrt{\frac{a}{b}}\right).$

900. $y = \frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2} + 3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$

解 $y' = \frac{6x^5 - 4x^3(2+3x^2)}{x^8}\sqrt{1-x^2}$

$- \frac{x(2+3x^2)}{x^4\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{3}{x}$

$= -\frac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}(0<|x|<1).$

901. $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

解 $y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= \frac{1}{\sin x}$($0 < x - 2k\pi < \pi$；k 为整数).

902. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

解 $$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$$

$\left(|x - 2k\pi| < \frac{\pi}{2}; k\ 为整数\right)$.

903. $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln\sin x$.

解 $$y' = -\operatorname{ctg} x \cdot \csc^2 x + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= -\operatorname{ctg}^3 x \quad (0 < x - 2k\pi < \pi; k\ 为整数).$$

904. $y = \ln\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$.

解 $$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$$

$$= -\frac{1}{\cos x}\left(x \neq \frac{2k - 1}{2}\pi; k\ 为整数\right).$$

905. $y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}$.

解 $$y' = \frac{\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x}{2\sin^4 x}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}(0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}).$$

906. $y = \ln \dfrac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x}(0 \leqslant |a| < |b|)$.

解 当 $a = 0$ 时，$y = \ln \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$. 由于 $1 + \sin x$ 非负，为使对数有意义，必须有

$$\begin{cases} 1 + \sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

当 $\left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi < x < \left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$（$k$ 为整数）时，上述不等式成立. 在此域内，得

$$y' = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

当 $a \neq 0$ 时，记 $y = \ln u(x)$，而

$$u(x) = \frac{1 + \frac{a}{b}\cos x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}\sin x}{\frac{a}{b} + \cos x}$$

$$= \frac{1 + \cos\varphi_0 \cos x + \sin\varphi_0 \sin x}{\cos\varphi_0 + \cos x}$$

$$= \frac{1 + \cos(x - \varphi_0)}{\cos x + \cos\varphi_0} = \frac{v_1(x)}{v_2(x)},$$

其中 $\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 显然 $v_1(x) \geqslant 0$. 为保证 y 可导，首先必须有 $u(x) > 0$，故应有 $v_1(x) \neq 0$（从而 $v_1(x) > 0$），进而应有 $v_2(x) > 0$. 于是，y 的存在域 R 为满足不等式

$$\begin{cases} v_1(x) \neq 0, \\ v_2(x) > 0 \end{cases}$$

的一切 x 值，记成

$$R = \{x \mid v_1(x) \neq 0, v_2(x) > 0\},$$

则

$$R = \{x \mid \cos x + \cos\varphi_0 > 0 \text{ 且 } x \neq (2k+1)\pi + \varphi_0;$$

$$k \text{ 为整数}\}.$$

在此域内，得

$$y' = \frac{-\sin(x-\varphi_0)}{1+\cos(x-\varphi_0)} + \frac{\sin x}{\cos x + \cos\varphi_0}$$

$$= \frac{-\sin x\cos\varphi_0 + \cos x\sin\varphi_0}{1+\cos x\cos\varphi_0 + \sin x\sin\varphi_0}$$

$$+ \frac{\sin x}{\cos x + \cos\varphi_0}$$

$$= \frac{-\frac{a}{b}\sin x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}}{1 + \frac{a}{b}\cos x + \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\sin x}$$

$$+ \frac{\sin x}{\cos x + \frac{a}{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x},$$

其实此结果也包含了 $a=0$ 时的情形.

907. $y = \frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6)$.

解 $$y' = -\frac{1}{x^2}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) + \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}\ln^2 x + \frac{6}{x}\ln x + \frac{6}{x}\right) = -\frac{\ln^3 x}{x^2} \quad (x > 0).$$

908. $y = \frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}$.

解 $$y' = -\frac{1}{x^5}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{4x^5} = \frac{1}{x^5}\ln x \quad (x > 0).$$

909. $y = \frac{3}{2}(1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3\ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2})$.

解 $$y' = \frac{3}{2}\cdot 2\left(1 - \sqrt[3]{1+x^2}\right)\left(-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\right) + \frac{3}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} = \frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

910. $y = \ln\left[\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 $$y' = \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)}\left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= -\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]}$$

$(x>0)$.

911. $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$.

解 $y' = [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$

$$+ x\left[\frac{1}{x}\cos(\ln x) + \frac{1}{x}\sin(\ln x)\right]$$

$$= 2\sin(\ln x) \quad (x>0).$$

912⁺. $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$.

解 $y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x$

$$- \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x$$

$= \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x \left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}\right.$;$k$ 为整数).

913. $y = \arcsin\frac{x}{2}$.

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} (|x| < 2)$.

914. $y = \arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$.

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad (|x-1|<\sqrt{2}).$$

915. $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{a}$.

解 $$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{a}\right)^2}\cdot\frac{2x}{a}=\frac{2ax}{a^2+x^4}(a\neq 0).$$

916. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{2}}{x}$.

解 $$y'=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2+2} \quad (x\neq 0).$$

917. $y=\sqrt{x}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$.

解 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \quad (x\geqslant 0).$$

918. $y=x+\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,cos}x$.

解 $$y'=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arc\,cos}x$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arc\,cos}x(|x|<1).$$

919. $y=x\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

解 $y' = \arc\sin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}$

$$\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}(x\geqslant 0).$$

920. $y = \arccos\frac{1}{x}$.

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}(|x|>1).$$

921. $y = \arcsin(\sin x)$.

解 $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \operatorname{sgn}(\cos x)$

$$(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi;k\text{ 为整数}).$$

922. $y = \arccos(\cos^2 x)$.

解 $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x(1+\cos^2 x)}}$

$$=\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}(x\neq k\pi;k\text{ 为整数}).$$

923. $y = \operatorname{arc}\sin(\sin x - \cos x)$.

解 $$y' = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$$\left(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}\right).$$

924. $y = \operatorname{arc}\cos\sqrt{1 - x^2}$.

解 $$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$$

925. $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\dfrac{1 + x}{1 - x}$.

解 $$y' = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^2} \cdot \frac{(1 - x) + (1 + x)}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \neq 1).$$

926. $y = \operatorname{arc}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$.

解

$$y' = \frac{-1}{1 + \left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)^2}$$

$$\cdot \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= 1 \quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}; k \text{ 为整数}\right).$$

927. $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)(a>b\geqslant 0)$.

解 $$y'=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{a+b\cos x}.$$

928. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 $$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$\cdot\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$=-\frac{2\operatorname{sgn}x}{1+x^2}\ (x\neq 0).$$

929. $y=\frac{1}{\arccos^2(x^2)}$.

解 $$y'=-\frac{2}{\arccos^3(x^2)}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$=\frac{4x}{\sqrt{1-x^4}\cdot\arccos^3(x^2)}\ (|x|<1).$$

930. $y=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(x^3)$.

解 $$y'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^6}=\frac{1+x^4}{1+x^6}.$$

931. $y=\ln(1+\sin^2x)-2\sin x\operatorname{arc\,tg}(\sin x)$.

解 $y' = \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} - 2\cos x \cdot \operatorname{arc\,tg}(\sin x)$

$- \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$

$= -2\cos x \cdot \operatorname{arc\,tg}(\sin x)$.

932. $y = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

解 $y' = \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^{-1}}} \cdot \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x > 1)$.

933. $y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{b}$.

解 $y' = \frac{1}{x+a} - \frac{x}{x^2+b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)}$

$= \frac{a^2+b^2}{(x+a)(b^2+x^2)} \quad (x > -a)$.

934. $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0)$.

解 $y' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$

$+ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$= \sqrt{a^2-x^2}$.

935. $y = \frac{1}{6}\ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

解 $$y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{1+x^3}\ (x \neq -1).$$

936. $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$

解 $$y' = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{2}(x^2-1)-2x^2\sqrt{2}}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^4}(|x| \neq 1).$$

937. $y = x(\text{arc sin}x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\text{arc sin}x - 2x.$

解 $$y' = (\text{arc sin}x)^2 + \frac{2x\text{arc sin}x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x\text{arc sin}x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 - 2$$

$$= (\text{arc sin}x)^2(|x| < 1).$$

938. $y = \frac{\text{arc cos}x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

解 $y' = \dfrac{-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos x}{x^2} - $

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}} + \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= -\frac{\arccos x}{x^2} \ (0 < |x| < 1).$$

939. $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^2-1} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

解 $y' = \dfrac{1}{1+(x^2-1)} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$+ \frac{x\ln x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \ (x > 1).$$

940. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 $y' = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$$

$$= \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \ (|x| < 1).$$

941. $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

解 $y' = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{4x^3-2x}{x^4-x^2+1} - \dfrac{4x}{x^2+1}\right)$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)^2}\left(\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2-1)^2}\right)$$

$$=\frac{x^3}{1+x^6}\left(|x|\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

942. $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}-\operatorname{arc\,ctg}x^6.$

解 $y'\ \frac{6x^5(1+x^{12})-12x^{17}}{(1+x^{12})^2}+\frac{6x^5}{1+x^{12}}$

$$=\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}.$$

943⁺. $y=\ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}}}+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$

解 $y'=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot(1-\sqrt[3]{x})}$

$$-\frac{1}{2(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$+\sqrt{3}\frac{1}{1+\left(\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}(-\infty<x<1,x\neq0).$$

944. $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

解 $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$

$$\cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ (|x|<1).$$

945. $y=\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} (a>0).$

解 $$y'=-\frac{1}{1+\dfrac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\cdot\frac{-2\sqrt{ax-x^2}-\dfrac{(a-2x)^2}{2\sqrt{ax-x^2}}}{ax-x^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \ (0<x<a).$$

946. $y=\dfrac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}.$

解 $$y'=-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}-\frac{3-x}{2}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$$

$$+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \ (|x+1|<\sqrt{2}).$$

947. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

解 $$y'=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\cdot\left(1+\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\left(\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-1\right)\Bigg\}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)^2}$$

$$\cdot\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-\sqrt[4]{1+x^4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\ (x\neq 0).$$

948. $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

解 $y'=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^4 x}\cdot 2\operatorname{tg}x\sec^2 x$

$$=\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\ \left(x\neq\frac{2k-1}{2}\pi;k\text{ 为整数}\right).$$

949. $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$+\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.

解 $y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$(0 < |x| < 1)$.

950. $y = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2$.

解 $$y' = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x$$

$$= \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x.$$

951. $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$.

解 $$y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

952. $y = \operatorname{arc\,tg}(x + \sqrt{1+x^2})$.

解 $$y' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

953. $y = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha \sin x}{1 - \cos\alpha \cos x}\right)$.

解

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin\alpha \sin x}{1-\cos\alpha\cos x}\right)^2}}$$

$$\cdot \frac{\sin\alpha\cos x(1-\cos\alpha\cos x)-\sin\alpha\cos\alpha\sin^2 x}{(1-\cos\alpha\cos x)^2}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha\cos x}{\sqrt{(\cos x-\cos\alpha)^2}}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot(\cos x-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha\cos x)^2}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\cos\alpha)}{1-\cos\alpha\cos x}$$

($\cos x\neq\cos\alpha$,即 $x\neq\alpha+2k\pi$,k 为整数).

954. $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$.

解 $$y'=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{3}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+\sqrt{3}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x^2+2}{x^2}}\cdot\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{x^2+2}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}\quad(0<|x|<1).$$

955. $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$.

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}.$$

解 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x^2}{1+x^4}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x^4} - \frac{2\sqrt{2}x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4}$$

$$- \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}\left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}\right.\right.$$

$$\left. - \sqrt{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}$$

$$\left.\left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} + \sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} \quad (|x| \neq 1).$$

956. $y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\text{arc ctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y' = \frac{1}{(1+x^2)^2}\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right.\right.$

$$\left.\left. - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)(1+x^2) - 2x^2\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{2}\left(1+\frac{2x^2}{1-x^2}\right)}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{4}{(x^2+1)^2\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

957⁺. $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$.

解　$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x^2 - \cos x^2)^2}}$

$\cdot 2x(\cos x^2 + \sin x^2)$

$= -\frac{2x(\sin x^2 + \cos x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$

$\left(0 < |x| < \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}; k = 0,1,2\cdots\right).$

958. $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$.

解　$y' = \frac{2x\cos(x^2)}{\sqrt{1-\sin^2(x^2)}} + \frac{2x\sin(x^2)}{\sqrt{1-\cos^2(x^2)}}$

$= 2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2) + \operatorname{sgn}(\sin x^2)]$

$\left(|x| \neq \sqrt{\frac{k\pi}{2}}; k = 0,1,2,\cdots\right).$

959. $y = e^{m\arcsin x}[\cos(m\arcsin x) + \sin(m\arcsin x)]$.

解　$y' = e^{m\arcsin x}\left\{\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}[\cos(m\arcsin x)\right.$

$+ \sin(m\arcsin x)]$

$+ \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}[\cos(m\arcsin x)$

$\left. - \sin(m\arcsin x)]\right\}$

$= \frac{2m}{\sqrt{1-x^2}} e^{m\arcsin x}\cos(m\arcsin x)$

$(|x|<1)$.

960. $y=\operatorname{arc\,tg} e^{x}-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

解 $y'=\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}-\frac{1}{2}\left(2-\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)$

$=\frac{e^{x}-1}{e^{2x}+1}$.

961. $y=x+x^{x}+x^{x^{x}}(x>0)$.

解 $y'=1+x^{x}(1+\ln x)+x^{x^{x}}(x^{x}\ln x)'$

$=1+x^{x}(1+\ln x)+x^{x}\cdot x^{x^{x}}\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^{2}x\right)$.

962. $y=x^{x^{a}}+x^{a^{x}}+a^{x^{x}}(a>0,x>0)$.

解 $y'=x^{x^{a}}\left(ax^{a-1}\ln x+\frac{x^{a}}{x}\right)$

$+x^{a^{x}}\left(a^{x}\ln a\cdot\ln x+\frac{a^{x}}{x}\right)$

$+a^{x^{x}}\cdot\ln a\cdot x^{x}(1+\ln x)$

$=x^{a-1}x^{x^{a}}(1+a\ln x)+a^{x}x^{a^{x}}\left(\frac{1}{x}+\ln a\ln x\right)$

$+x^{x}\cdot a^{x^{x}}\ln a(1+\ln x)$.

963. $y=\sqrt[x]{x}\qquad(x>0)$.

解 $y'=\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

964. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.

解 $y'=(\sin x)^{\cos x}\left[-\sin x\cdot\ln(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right]$

$+(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$

$=(\sin x)^{\cos x+1}[\operatorname{ctg}^2 x-\ln(\sin x)]$

$-(\cos x)^{\sin x+1}[\operatorname{tg}^2 x-\ln(\cos x)]$

$\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数}\right)$.

965[+*]. $y=(\ln x)^x : x^{\ln x}$.

解 $y=\frac{e^{x\ln(\ln x)}}{e^{\ln^2 x}}=e^{x\ln(\ln x)-\ln^2 x}$.

$$y'=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\{[x\ln(\ln x)]'-(\ln^2 x)'\}$$

$$=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}-\frac{2\ln x}{x}\right\}$$

$$=\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}\{x\ln x\cdot\ln(\ln x)+x-2\ln^2 x\}.$$

966. $y=\lg_x e$.

解 由 $y=\lg_x e$ 推得 $y=\frac{1}{\ln x}$.

于是，

$$y'=-\frac{1}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{x}(\lg_x e)^2 (x>0, x\neq 1).$$

---

* 题号右上角带"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明，中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

967. $y=\ln(\text{ch}x)+\dfrac{1}{2\text{ch}^2x}$.

解 $y'=\text{th}x-\dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}^3x}=\text{th}^3x$.

968. $y=\dfrac{\text{ch}x}{\text{sh}^2x}-\ln\left(\text{cth}\dfrac{x}{2}\right)$.

解 $$y'=\frac{\text{sh}^3x-2\text{sh}x\text{ch}^2x}{\text{sh}^4x}+\frac{1}{2\text{sh}^2\dfrac{x}{2}\cdot\text{cth}\dfrac{x}{2}}$$

$$=-\frac{2}{\text{sh}^3x}(x>0).$$

969. $y=\text{arc tg}(\text{th}x)$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+\text{th}^2x}\cdot\dfrac{1}{\text{ch}^2x}=\dfrac{1}{\text{ch}2x}$.

970. $y=\text{arc cos}\left(\dfrac{1}{\text{ch}x}\right)$.

解 $$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\text{ch}^2x}}}\left(-\frac{\text{sh}x}{\text{ch}^2x}\right)$$

$$=\frac{\text{sgn}(\text{sh}x)}{\text{ch}x}\quad(x\neq 0).$$

971. $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\text{arc tg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\text{th}\dfrac{x}{2}\right)$

$(0\leqslant|b|<a)$.

解 $$y'=\frac{b}{a}+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{a-b}{a+b}\text{th}^2\dfrac{x}{2}}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{2\text{ch}^2\dfrac{x}{2}}$$

$$=\frac{b}{a}+\frac{a^2-b^2}{a(b+a\text{ch}x)}=\frac{a+b\text{ch}x}{b+a\text{ch}x}.$$

972. 引入中间变量 $u=\cos^2x$ 求函数

$$y=\ln(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x})$$

的导函数.

解 $u=\cos^2x, y=\ln(u+\sqrt{1+u^2})$,

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x,$$

而

$$y'_u=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^4x}},$$

$$u'_x=-2\cos x\sin x=-\sin 2x,$$

于是,

$$y'_x=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4x}}.$$

利用 972 题所示的方法,求下列函数的导函数:

973$^+$. $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\frac{1}{2}\right]$.

解 设 $u=\arccos x$,则 $y=u^2\left(\ln^2u-\ln u+\frac{1}{2}\right)$.

由于

$$y'_u=2u\left(\ln^2u-\ln u+\frac{1}{2}\right)+u^2\left(\frac{2\ln u}{u}-\frac{1}{u}\right)$$

$$=2u\ln^2u=2\arccos x\cdot\ln^2(\arccos x),$$

$$u'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

于是,

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\cdot\ln^2(\arccos x)\quad(|x|<1).$$

974^{+}. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt[4]{1+x^4})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

解 设 $u=\sqrt[4]{1+x^4}$，则

$$y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}.$$

由于

$$y'_u=\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)$$

$$=\frac{1}{1-u^4}=-\frac{1}{x^4},$$

$$u'_x=\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},$$

于是，

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=-\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\quad(x\neq 0).$$

975. $y=\frac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

解 设 $u=e^{-x^2}$，则

$$y=\frac{u\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-u^2).$$

由于

$$y'_u=\frac{\left(\arcsin u+\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\sqrt{1-u^2}+\frac{u^2\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2}$$

$$-\frac{u}{1-u^2}$$

$$=\frac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$u'_x=-2xe^{-x^2},$$

于是，

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{-2xe^{-x^2}\text{arc sin}(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$(x \neq 0)$.

976. $y = \dfrac{a^x}{1+a^{2x}} - \dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\text{arc ctg}(a^{-x})$.

解 设 $u = a^x$，则

$$y = \frac{u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2}\text{arc ctg}(u^{-1}).$$

由于

$$y'_u = \frac{(1+u^2)-2u^2}{(1+u^2)^2}$$

$$-\frac{-2u(1+u^2)-2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\text{arc ctg}(u^{-1})$$

$$-\frac{1-u^2}{1+u^2}\cdot\frac{1}{u^2\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)}$$

$$= \frac{4u\text{arc ctg}(u^{-1})}{(1+u^2)^2} = \frac{4a^x \cdot \text{arc ctg}(a^{-x})}{(1+a^{2x})^2},$$

$$u'_x = a^x \ln a,$$

于是，

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2}\text{arc ctg}(a^{-x})$$

$(a > 0)$.

977. 求函数的导函数并作函数及导函数的图形，设：

(a) $y = |x|$；(б) $y = x|x|$；(в) $y = \ln|x|$.

解 (a) $y = \begin{cases} x, \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时}, \\ -x, \text{当 } x < 0 \text{ 时}. \end{cases}$ (图 2.2).

$y' = \begin{cases} 1, \text{当 } x > 0 \text{ 时}, \\ -1, \text{当 } x < 0 \text{ 时}, \end{cases}$ 或写成 $y' = \dfrac{|x|}{x}$.

在 $x=0$ 时 y' 不存在(图 2.3).

(б) $y=\begin{cases}x^2, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ -x^2, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases}$ (图 2.4).

$y'=\begin{cases}2x, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ -2x, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases}$ 而且易见有 $y'|_{x=0}=0$,

故 $y'=2|x|$ *)(图 2.5).

*) 以下各题,对于分界点的导数,不再单独讨论.

(в) $y=\ln|x|$(图 2.6).

$$y'=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x}(x\neq 0)\quad(图\ 2.7).$$

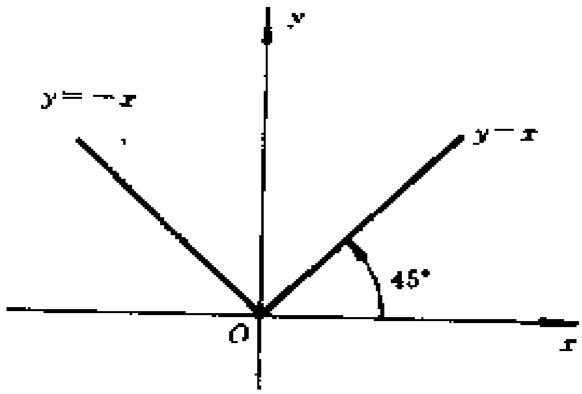


图 2.2

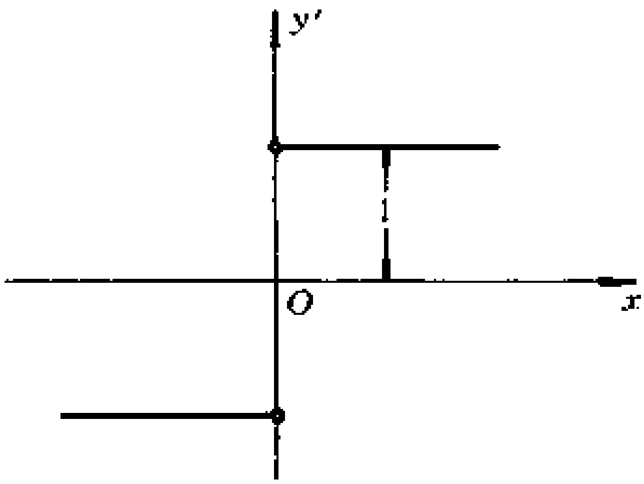


图 2.3

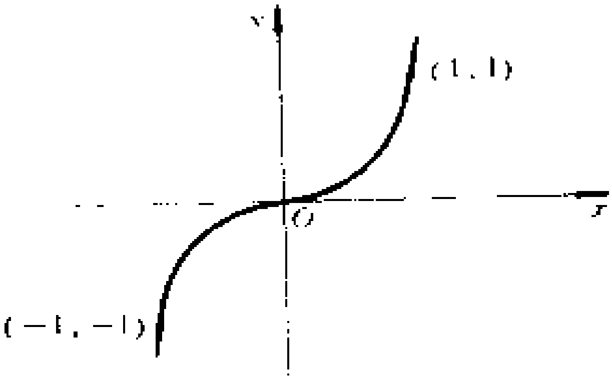


图 2.4

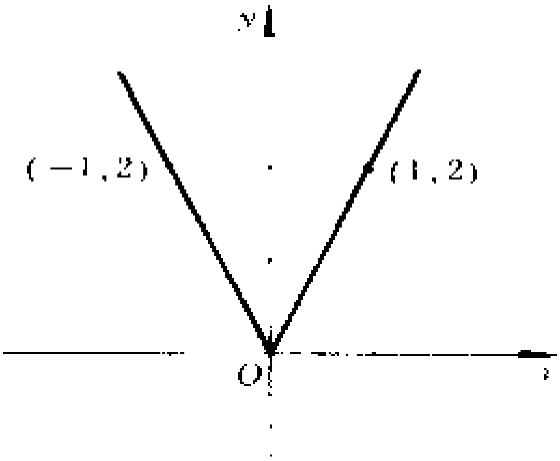


图 2.5

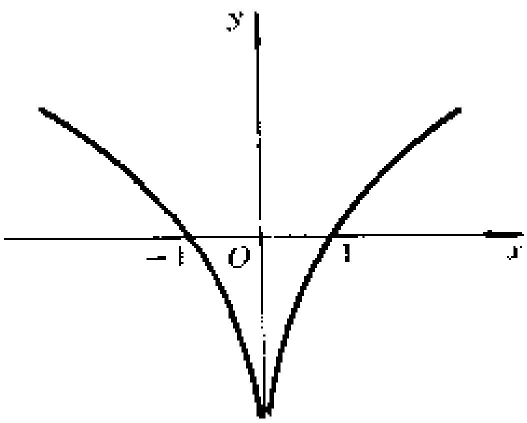


图 2.6

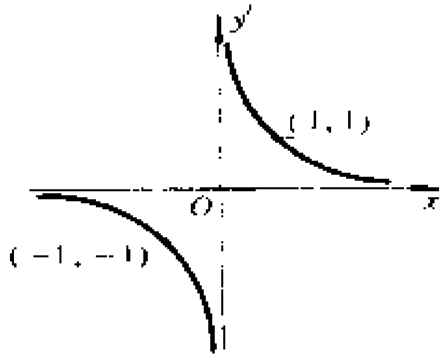


图 2.7

978. 求下列函数的导函数：

(a) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$；　(б) $y = |\sin^3 x|$；

(в) $y = \arccos \dfrac{1}{|x|}$；　(г) $y = [x]\sin^2 \pi x$.

解 (a) $y'=\frac{|(x-1)^2(x+1)|}{(x-1)^2(x+1)^3}[2(x-1)(x+1)^3$

$+3(x-1)^2(x+1)^2]$

$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$

$(|x|\neq 1)$;

(б) $y'=\frac{|\sin^3x|}{\sin^3x}3\sin^2x\cos x$

$=\frac{3}{2}\sin 2x|\sin x|\quad(x\neq k\pi,k$ 为整数);

(в) $y'=\left[-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right]\cdot\left[-\left(\frac{|x|}{x\cdot x^2}\right)\right]$

$=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\quad(|x|>1)$;

(г) 对于 $y=[x]$ 有 $y'=0$

$(x\neq k,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

于是,当 $x\neq k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,有

$\{[x]\sin^2\pi x\}'=2\pi\sin\pi x\cos\pi x\cdot[x]$

$=\pi[x]\sin 2\pi x.$

容易直接验证当 $x=k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时上式也成立.

求导函数并作出函数及其导函数的图形:

979. $y=\begin{cases}1-x & 当 -\infty<x<1;\\(1-x)(2-x) & 当 1\leqslant x\leqslant 2;\quad(图 2.8)\\-(2-x) & 当 2<x<+\infty.\end{cases}$

解 显然 $y'=\begin{cases}-1 & 当 -\infty<x<1;\\2x-3 & 当 1<x<2;\\1 & 当 2<x<+\infty.\end{cases}$

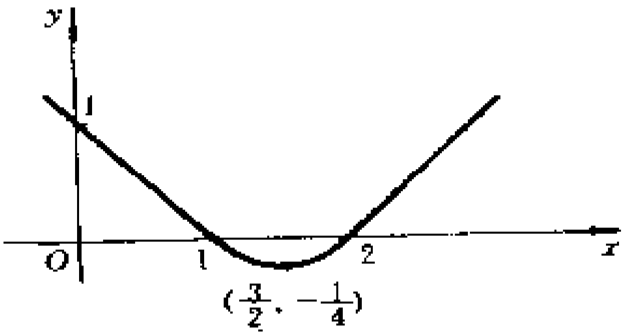


图 2.8

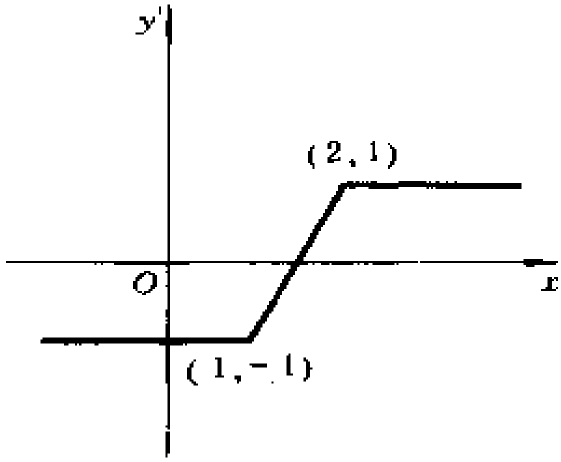


图 2.9

当 $x=1$ 时，右导数

$$y'_{+}|_{x=1}=(2x-3)|_{x=1}=-1,$$

左导数

$$y'_{-}|_{x=1}=-1.$$

因此 $x=1$ 的导数存在，且 $y'|_{x=1}=-1$. 同理，可得 $y'|_{x=2}=1$. 于是

$$y'=\begin{cases}-1, & \text{当} -\infty<x<1;\\ 2x-3, & \text{当} 1\leqslant x\leqslant 2;\\ 1, & \text{当} 2<x<+\infty.\end{cases} \qquad (\text{图 } 2.9)$$

注：在下面 980 题到 983 题中，求分段定义函数的导数时，在分段点，都要先求其左、右导数. 若左、右导数存在而且相等，则导数存在. 为简便计，我们只写出结果，而省去了(在分段点) 求左、右导数的过程.

980. $y=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2, & \text{当 } a\leqslant x\leqslant b;\\ 0 & \text{,在线段}[a,b]\text{之外}.\end{cases}$ (图 2.10)

解 $y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & \text{当 } x \in [a,b]; \\ 0, & \text{当 } x \overline{\in} [a,b]. \end{cases}$

(图 2.11)

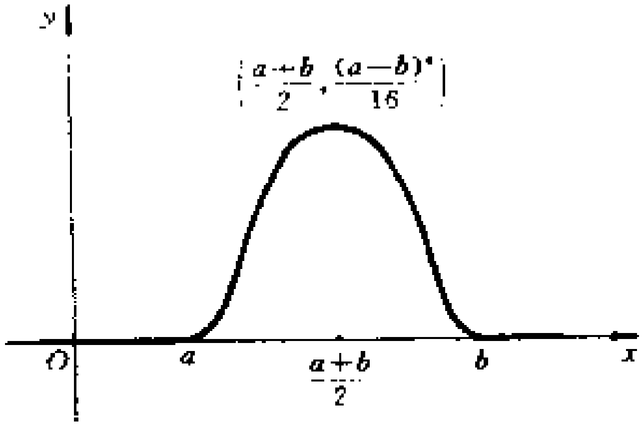


图 2.10

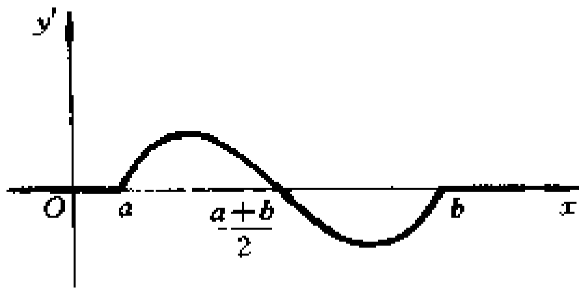


图 2.11

981. $y = \begin{cases} x & \text{当 } x < 0; \\ \ln(1+x) & \text{当 } x \geqslant 0. \end{cases}$ (图 2.12)

解 $y' = \begin{cases} 1 & \text{当 } x < 0; \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{当 } x \geqslant 0. \end{cases}$ (图 2.13)

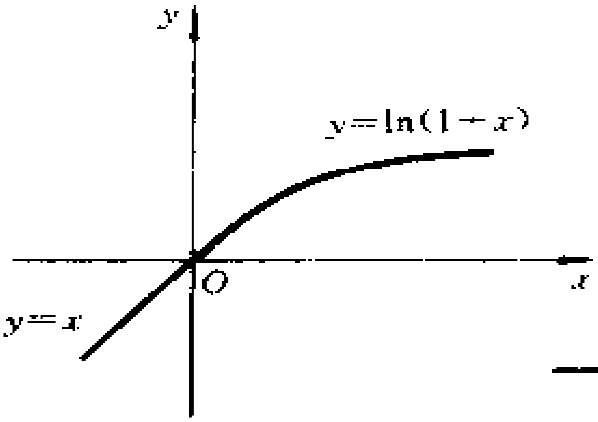


图 2.12

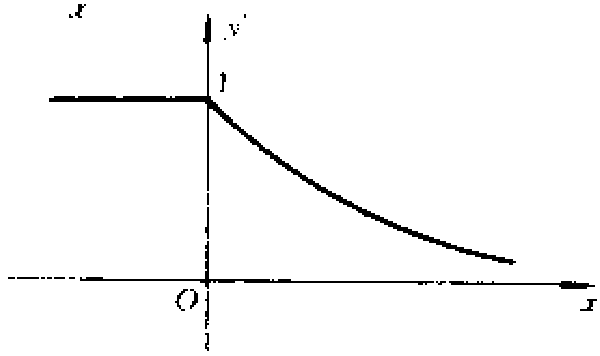


图 2.13

982. $y=\begin{cases}\text{arc tg}x, & \text{当 } |x| \leqslant 1; \\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x+\dfrac{x-1}{2} & \text{当 } |x|>1.\end{cases}$（图 2.14）

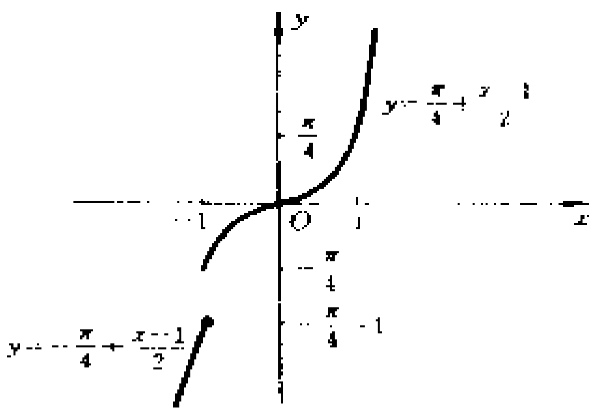


图 2.14

解　$y=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & \text{当} -1<x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2} & \text{当} |x|>1.\end{cases}$　(图 2.15)

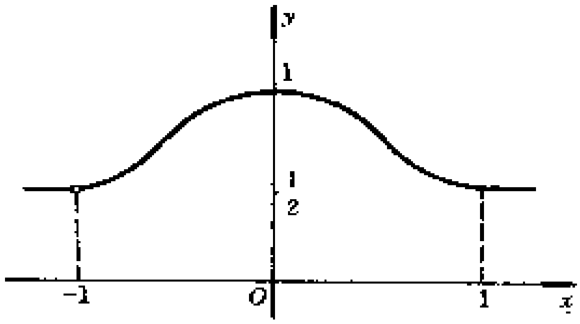


图 2.15

983. $y=\begin{cases}x^2e^{-x^2} & \text{当} |x|\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{e} & \text{当} |x|>1.\end{cases}$　(图 2.16)

解　$y=\begin{cases}2xe^{-x^2}(1-x^2) & \text{当} |x|\leqslant 1;\\ 0 & \text{当} |x|>1.\end{cases}$　(图 2.17)

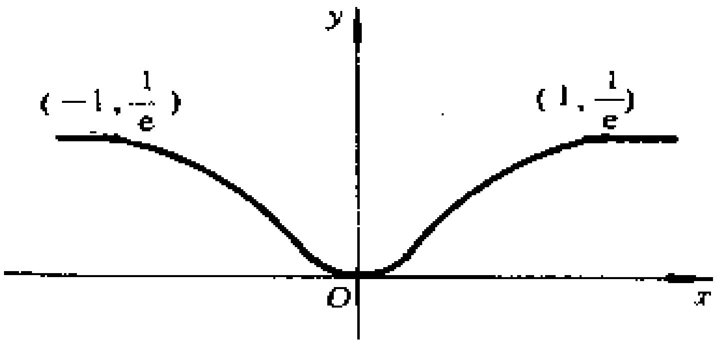


图 2.16

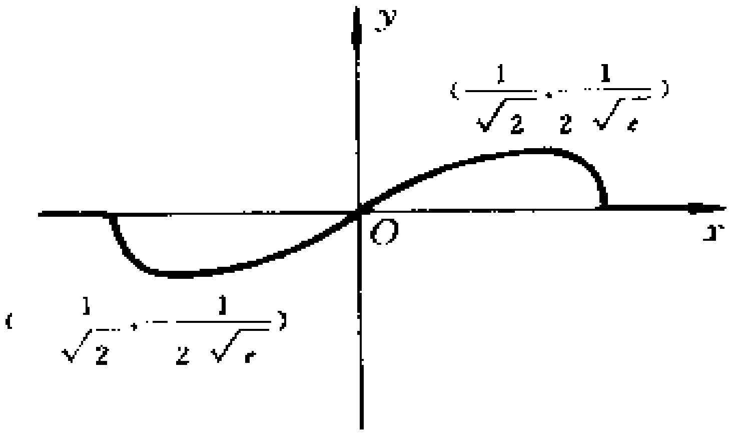


图 2.17

984. 由已知函数的对数得来的导函数称为此函数的对数的导函数：

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

已知函数 y，求其对数的导函数：

(а) $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$；(б) $y = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$；

(в) $y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$；

(г) $y = (x+\sqrt{1+x^2})^n$.

解 (а) 由 $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 得

$$\ln y = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x|,$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}$$

$$= \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}\ (0 < |x| < 1);$$

(б) 由 $y = \frac{x^2}{1-x} - \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$ 得

$$\ln y = 2\ln|x| - \ln|1-x| + \frac{1}{3}\ln|3-x|$$

$$\frac{2}{3}\ln|3+x|,$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3(3-x)}$$

$$- \frac{2}{3(3+x)}$$

$$= \frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$$

$$(x \neq 0, x \neq 1, |x| \neq 3);$$

(в) 由于 $y = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}$ 及 y 在对数符号内，故应设 $\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i} > 0$，从而有

$$\ln y = \ln\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln|x-a_i|,$$

得

$$\frac{d}{dx}\ln y = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}\,(x \in R),$$

其中 $R = \left\{x \,\middle|\, \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i} > 0\right\}$；

(г) 由 $y = (x+\sqrt{1+x^2})^n$ 得

$$\ln y = n\ln(x+\sqrt{1+x^2}),$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

985. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微分函数. 求函数 y 的导函数，

若：

(а) $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$；(б) $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$；

(в) $y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ 　$[\varphi(x) \neq 0, \psi(x) > 0]$；

(г) $y = \lg_{\varphi(x)}\psi(x)$ 　$[\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0]$.

解　(а) $y' = \dfrac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}$

$[\varphi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0]$.

(б) $$y' = \frac{1}{1 + \dfrac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}} \cdot \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)}{\psi^2(x)}$$

$$= \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$$

$(\psi(x) \neq 0)$.

(в) 由 $y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ 得

$$\ln y = \frac{1}{\varphi(x)}\ln\psi(x).$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\varphi(x) - \varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)}$$

于是，

$$y' = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left\{\frac{1}{\varphi(x)}\,\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)\right\}.$$

(г) 由 $y = \lg_{\varphi(x)}\psi(x)$ 得

$$y = \frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)},$$

$$y' = \frac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x) - \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}$$

$$= \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\ln\varphi(x)}$$

$$- \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}.$$

986. 求 y'，设：

(а) $y = f(x^2)$；　　　(б) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$；

(в) $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$；　(г) $y = f\{f[f(x)]\}$，

其中 $f(u)$ 表示可微分的函数.

解　(а) $y' = 2xf'(x^2)$；

(б) $y' = 2\sin x\cos x f'(\sin^2 x)$

$- 2\sin x \cos x f'(\cos^2 x)$

$= \sin 2x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$；

(в) $y' = e^{f(x)}[f'(x)f(e^x) + e^x f'(e^x)]$；

(г) $y' = f'(x) \cdot f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\}$.

987. 证明 n 阶行列式微分法：

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x)\ f_{12}(x)\cdots f_{1n}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{i1}(x) f_{i2}(x)\cdots f_{in}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(x) f_{n2}(x)\cdots f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \frac{d}{dx} f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}. \tag{1}$$

证　证法一：从行列式的定义出发予以证明.

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{d}{dx} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_1 j_1(x) f_2 j_2(x) \cdots f_n j_n(x)^{*)}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \frac{d}{dx} [f_1 j_1(x) f_2 j_2(x) \cdots \cdot f_n j_n(x)]$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \sum_{i=1}^{n} f_1 j_1(x) f_2 j_2(x) \cdots \frac{d}{dx} f_i j_i(x) \cdots f_n j_n(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_1 j_1(x) f_2 j_2(x) \cdots \frac{d}{dx} f i j_i(x) \cdots f_n j_n(x)$$

$$
= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.
$$

*） 其中 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots n$ 的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

证法二：利用数学归纳法予以证明.

由于

$$
\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{d}{dx}[f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}(x)f_{21}(x)]
$$

$$
= \left(\frac{d}{dx}f_{11}(x)\cdot f_{22}(x) - \frac{d}{dx}f_{12}(x)\cdot f_{21}(x)\right)
$$

$$
+ \left(\frac{d}{dx}f_{22}(x)\cdot f_{11}(x) - \frac{d}{dx}f_{21}(x)\cdot f_{12}(x)\right)
$$

$$
= \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}f_{11}(x) & \frac{d}{dx}f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ \frac{d}{dx}f_{21}(x) & \frac{d}{dx}f_{22}(x) \end{vmatrix},
$$

知等式(1) 对于 $n=2$ 时成立.

今假定等式(1) 对于 $n=k$ 时成立，即

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}.$$

要证明等式(1)对于 $n = k + 1$ 时也成立.事实上,有

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+1\,1}(x) & f_{k+1\,2}(x) & \cdots f_{k+1\,k+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{k+j+1}f_{k+1\,j}(x)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x)\cdots & f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x)\cdots f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x)\cdots & f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x)\cdots f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x)\cdots & f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x)\cdots f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix}$$

$$
= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \frac{d}{dx}
$$

$$
\left[f_{k+1\,j}(x) \begin{vmatrix} f_{11}(x) \cdots f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) \cdots f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ f_{i1}(x) \cdots f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x) \cdots f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ f_{k1}(x) \cdots f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) \cdots f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix} \right]
$$

$$
= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \cdot
$$

$$
\left[\frac{d}{dx} f_{k+1\,j}(x) \begin{vmatrix} f_{11}(x) \cdots f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) \cdots f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ f_{i1}(x) \cdots f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x) \cdots f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ f_{k1}(x) \cdots f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) \cdots f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix} \right.
$$

$$
+ f_{k+1\,j}(x) \cdot \frac{d}{dx}
$$

$$
\left. \begin{vmatrix} f_{11}(x) \cdots f_{1\,j-1}(x) & f_{1\,j+1}(x) \cdots f_{1\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ f_{i1}(x) \cdots f_{i\,j-1}(x) & f_{i\,j+1}(x) \cdots f_{i\,k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ f_{k1}(x) \cdots f_{k\,j-1}(x) & f_{k\,j+1}(x) \cdots f_{k\,k+1}(x) \end{vmatrix} \right]
$$

$$
= \begin{vmatrix}
f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{d}{dx} f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k+1k+1}(x)
\end{vmatrix} +
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x) \cdot \sum_{i=1}^{k}
$$

$$
\begin{vmatrix}
f_{11}(x) \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) \cdots & f_{1k+1}(x) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{d}{dx} f_{i1}(x) \cdots & \frac{d}{dx} f_{ij-1}(x) & \frac{d}{dx} f_{ij+1}(x) \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
f_{k1}(x) \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) \cdots & f_{kk+1}(x)
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{d}{dx} f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k+1k+1}(x)
\end{vmatrix} +
$$

$$
+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x)
$$

$$
\cdot \begin{vmatrix}
f_{11}(x) \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) \cdots & f_{1k+1}(x) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\frac{d}{dx} f_{i1}(x) \cdots & \frac{d}{dx} f_{ij-1}(x) & \frac{d}{dx} f_{ij+1}(x) \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
f_{k1}(x) \cdots & f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) \cdots & f_{kk+1}(x)
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{d}{dx}f_{k+11}(x) & \cdots & \dfrac{d}{dx}f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d}{dx}f_{i1}(x) & \cdots & \dfrac{d}{dx}f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{k+1}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d}{dx}f_{i1}(x) & \cdots & \dfrac{d}{dx}f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix}.
$$

故等式(1)对于 $n=k+1$ 时也成立.

于是,由数学归纳法知,等式(1)对于一切自然数 n 均成立.

988. 设:

$$
F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix},
$$

求 $F'(x)$.

解　用上题结果,有

$$F'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x^2 + x + 9) + (x^2 - 1 + 4) + (x^2 - x + 3)$$

$$= 3(x^2 + 5).$$

989. 设：

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

解 $F'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} +$

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + 6(2x^2 - x^2) = 6x^2.$$

990. 已知函数的图形. 近似地作出其导函数的图形.

解 先由给定曲线 $y=f(x)$ 上一点 M,作出曲线 $y'=f'(x)$ 上的对应点 M'. 为清楚起见,作两个坐标系 Oxy 及 $O'x'y'$,取相同的单位,x 轴与 x' 轴平行,y 轴及 y' 轴平行且在一条直线上(如图 2.18).

在 Oxy 系内画出曲线 $y=f(x)$,在曲线上任取一点 $M(x,f(x))$,并作曲线在点 M 处的切线 MN. 过 $O'x'y'$ 系内的点 $P(-1,0)$ 作平行 MN 的直线 PQ 交 y' 轴于点 Q,于是

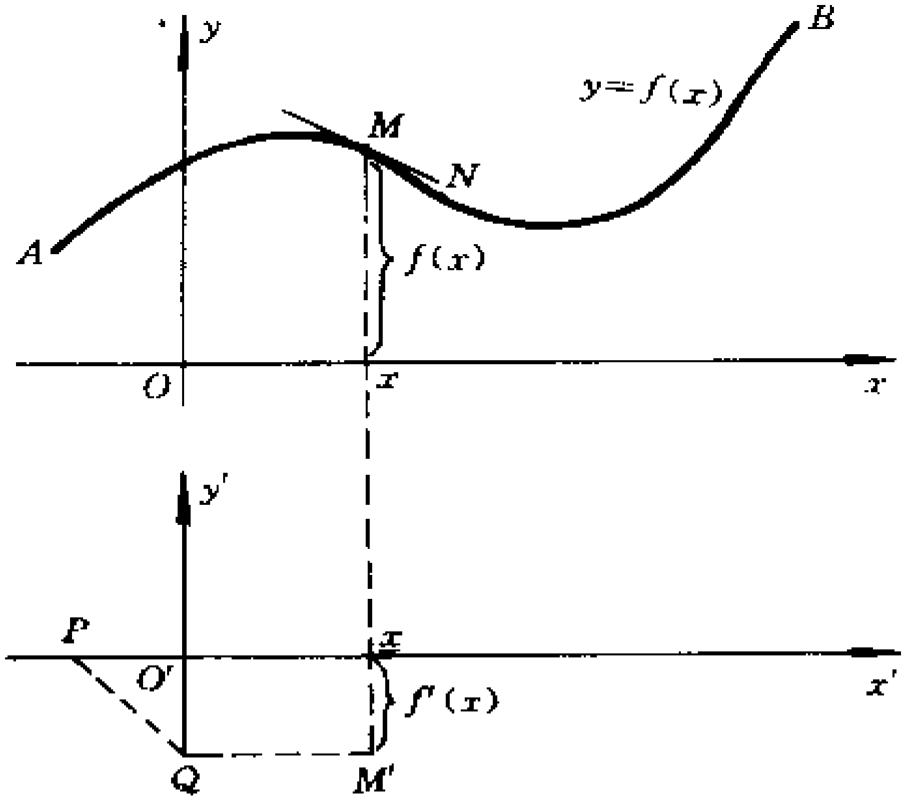


图 2.18

$$O'Q = \text{tg}\alpha = f'(x),$$

即线段$O'Q$是对应于在点x的导函数$f'(x)$. 再过点Q引平行x轴的直线，交过点$(x,0)$且垂直于x轴的直线于点M'，则点M'就是曲线$y' = f'(x)$上对应于曲线$y = f(x)$上点M的点.

由此，我们就可由已给曲线$y = f(x)$作出曲线$y' = f'(x)$，按上述方法，在曲线$y = f(x)$上取若干点：

$$M_i(x_i, f(x_i))(i = 1,2,\cdots,n),$$

且在Oxy'系(相当于$O'x'y'$系，这是为了方便起见，分开画)内作出对应点：

$$M'_i(x_i, f'(x_i))(i = 1,2,\cdots,n).$$

最后用光滑曲线连接$M_1', M_2', \cdots, M_n'$各点，此即已给曲线$y = f(x)$对应的导函数$y' = f'(x)$的图形，如图2.19所示.

991. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{当 } x \neq 0; \\ 0 & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

有不连续的导函数.

证 当$x \neq 0$时，

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

而

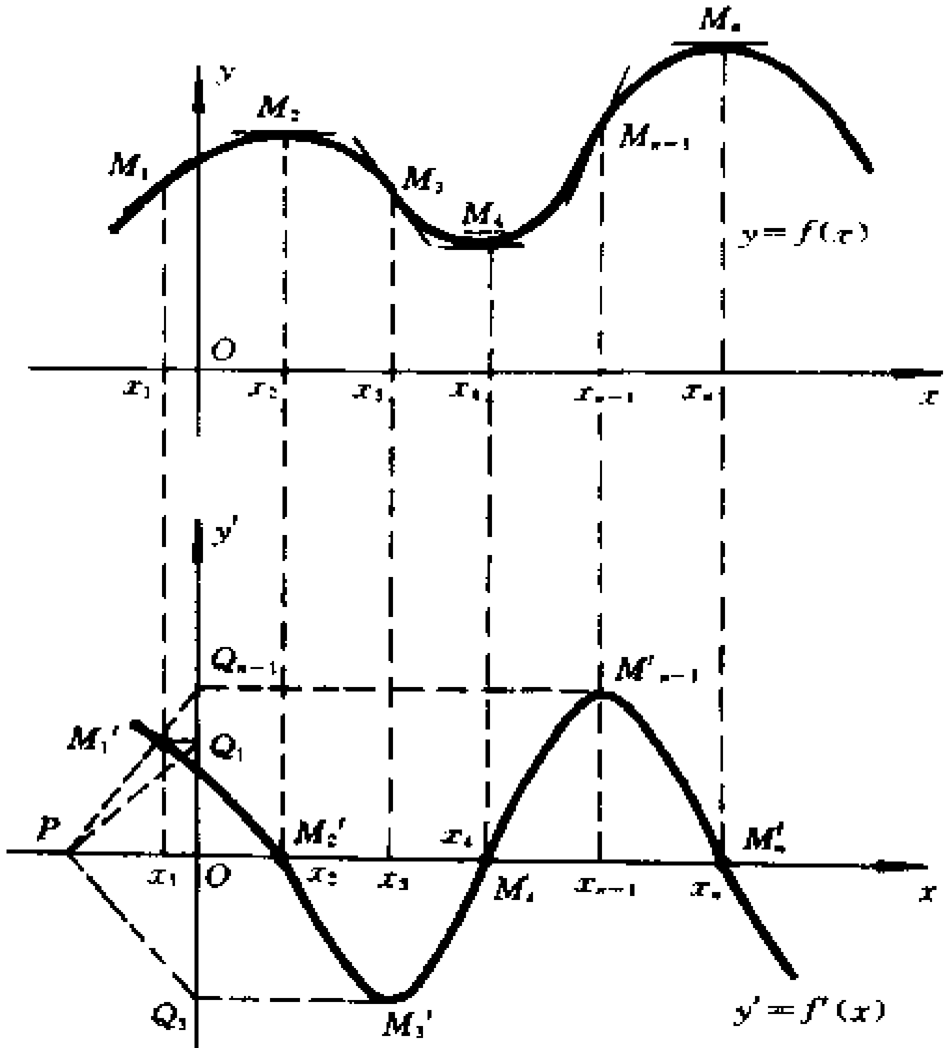


图 2.19

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\right)=0,$$

故 $f'(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 中处处存在. 但当 $x\to 0$ 时, $f'(x)$ 并不趋向于任何极限, 所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处是间断的, 这就说明了 $f(x)$ 有不连续的导函数.

992. 在甚么条件下函数

$$f(x)=x^n\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)\text{ 及 }f(0)=0$$

(a) 在 $x=0$ 处是连续的；(б) 在 $x=0$ 处可微分；

(в) 在 $x=0$ 处其导函数是连续的?

解 (a) 当 $n>0$ 时

$$\lim_{x\to 0}x^n\sin\frac{1}{x}=0,$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，此时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的（当 $n=\frac{p}{q}$（p,q 互质）且 q 为偶数时，只考虑在 $x=0$ 处右连续）.

(б) 当 $n>1$ 时

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}\sin\frac{1}{\Delta x}=0,$$

于是，$f(0)=0$，即 $f(0)$ 在 $x=0$ 处是可微的；

(в) 当 $n>2$ 时，由于

$$f(x)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}(x\neq 0),$$

故

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0,$$

而由(б) 可得 $f(0)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$. 这就说明当 $n>2$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的.

993. 在甚么条件下函数

$$f(x)=|x|^n\sin\frac{1}{|x|^m}(x\neq 0)\text{ 及 }f(0)=0$$

$(m>0)$

有 (a) 于坐标原点的邻域上有有界的导函数；

(б) 在此域上有无界的导函数.

解 (a) 当 $x\neq 0, x\in(-\delta,\delta)(\delta>0)$ 时，

$$f'(x)=n|x|^{n-1}\frac{|x|}{x}\sin\frac{1}{|x|^m}-\frac{m}{|x|^{m+1}}\cdot\frac{|x|}{x}\cdot|x|^n\cdot\cos\frac{1}{|x|^m}$$

$$=\frac{|x|}{x}\Big[n|x|^{n-1}\sin\frac{1}{|x|^m}-m|x|^{n-(m+1)}\cos\frac{1}{|x|^m}\Big].$$

由于 $\frac{|x|}{x}$, $\sin\frac{1}{|x|^m}$, $\cos\frac{1}{|x|^m}$ 均为有界函数，于是当 $n\geqslant m+1$ 时，$f'(x)$ 为有界函数（易知此时 $f'(0)=0$）.

(б) 在此域上，当 $n-(m+1)<0$（即 $n<m+1$）时 $f'(x)$ 无界. 另一方面，同 992 题(б) 一样，当 $n>1$ 时 $f'(0)$ 才存在，因而所求的条件为

$$1<n<m+1\quad(m>0).$$

994. 设：

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的，求 $f'(a)$.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\varphi(a+\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x),$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$. 于

是，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\varphi(a)$，即

$$f'(a)=\varphi(a).$$

995. 设：

$$f(x)=|x-a|\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为连续函数及 $\varphi(a)\neq 0$，证明此函数在 a 点没有导数.

单侧导函数 $f'_-(a)$ 及 $f'_+(a)$ 等于甚么？

解 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}\varphi(a+\Delta x)$

$$=\begin{cases}\varphi(a+\Delta x), & \text{当 } \Delta x>0 \text{ 时}, \\ -\varphi(a+\Delta x), & \text{当 } \Delta x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}[-\varphi(a+\Delta x)]=-\varphi(a),$$

即

$$f'_-(a)=-\varphi(a);$$

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}[\varphi(a+\Delta x)]=\varphi(a),$$

即

$$f'_+(a)=\varphi(a).$$

由于 $\varphi(a)\neq 0$，故 $f'_-(a)\neq f'_+(a)$，因此 $f(x)$ 在 a 点没有导数.

996. 举出在已知点：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 没有导数的连续函数的例子.

解 我们已知 $y=|x-a|$ 在 $x=a$ 处连续而无导数. 利用这一点，我们作一个函数

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|,$$

它在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 点均连续,而在这些点均无导数.

997. 证明:函数

$$f(x) = x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| \ (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域上有不可微分的点,但在 $x = 0$ 这点是可微分的.

作出此函数的略图.

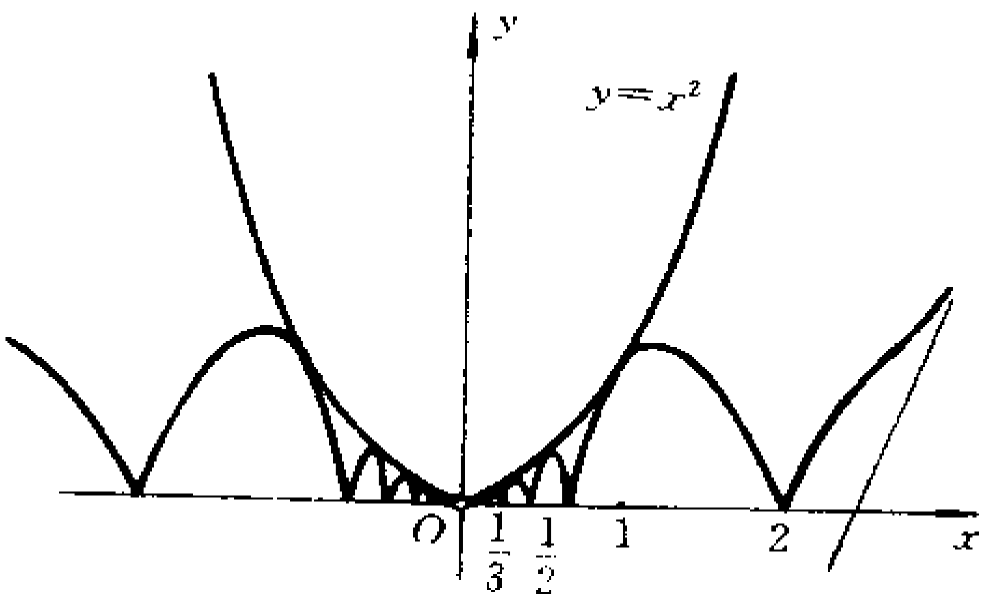


图 2.20

证 对于函数 $f(x)$,我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{x} = 0,$$

故 $f'(0) = 0$,即在 $x = 0$ 处函数 $f(x)$ 是可微的.

下面我们将指出对于 $x = 0$ 的任何邻域 $(-\delta, \delta)$(其

中 $\delta > 0$）中，函数 $f(x)$ 总有不可微分的点. 事实上，令

$$x_n = \frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

则当 n 充分大时，总可使 $0 < x_n < \delta$，从而点 $x_n \in (-\delta, \delta)$. 对于这样的点 x_n，有

$$f'_-(x_{2n}) = \pi \quad 及 \; f'_+(x_{2n}) = -\pi.$$

所以

$$f'_-(x_{2n}) \neq f'_+(x_{2n}).$$

同法可得

$$f'_+(x_{2n+1}) \neq f'_-(x_{2n+1}).$$

于是，函数 $f(x)$ 在点 x_n 处不可微.

函数的图形全在 Ox 轴上方，包括原点；当 $x = \frac{2}{2n+1}$ 时，$f(x) = 0$，且 $f'(x)$ 不存在. 此函数的略图如图 2.20 所示.

998. 证明：函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, 若\ x\ 为有理数, \\ 0, 若\ x\ 为无理数, \end{cases}$$

仅在 $x = 0$ 时有导数.

证 $$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \begin{cases} \Delta x, 当\ \Delta x\ 为有理数, \\ 0, 当\ \Delta x\ 为无理数. \end{cases}$$

于是，有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0.$$

即

$$f'(0)=0.$$

其次，对于任一点 $x\neq 0$，分两种情形讨论函数的可微性：

(1) x 为有理数. 取一无理数叙列 $\{x_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则有

$$\lim_{x_n\to x}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\lim_{x_n\to x}\frac{0-x^2}{x_n-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$ 在任一有理点($\neq 0$)不可微.

(2) x 为无理数. 取一异于零的有理数叙列 $\{x_n'\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x$，则有

$$\lim_{x_n'\to x}\frac{f(x_n')-f(x)}{x_n'-x}=\lim_{x_n'\to x}\frac{x_n'^2}{x_n'-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$ 在任一无理点也不可微.

总上所述，函数 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 时有导数.

999. 研究下列函数的可微性：

(a) $y=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$;

(б) $y=|\cos x|$;

(в) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$;

(г) $y=\arcsin(\cos x)$;

(д) $y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{当 } |x|\leqslant 1;\\ |x|-1 & \text{当 } |x|>1.\end{cases}$

解 (a) 当 $x\neq 1$ 或 $x\neq 2$ 或 $x\neq 3$ 时，函数均可微. 现在我们来考察在 1，2，3 这三点的可微性.

1. 当 $x=1$ 时，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}|(\Delta x-1)^2(\Delta x-2)^3|,$$

故 $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=8$，$\lim\limits_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-8$.

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在，由此可知 y 在 $x=1$ 点不可微；

2. 当 $x=2$ 时，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x|(\Delta x+1)(\Delta x-1)^3|,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

因而 y 在 $x=2$ 点可微；

3. 当 $x=3$ 时，由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x|(\Delta x+2)(\Delta x+1)^2\Delta x|,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

因而 y 在 $x=3$ 点可微.

(б) $y=|\cos x|$ 在 $x=\frac{2k-1}{2}\pi$（k 为整数）点不可微分.

(в) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$ 只可能在 $x=\pm\pi$ 的点不可微分.

现在我们来考察在 $x=-\pi$ 及 $x=\pi$ 时函数 y 的可微性.

1. 当 $x=\pi$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\pi^2-(\pi+\Delta x)^2|\sin^2(\pi+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\sin\Delta x\sin\Delta x|2\pi\Delta x+(\Delta x)^2|}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

所以函数 y 在 $x=\pi$ 点可微.

2. 同理可证函数 y 在 $x=-\pi$ 点也可微.

于是，函数 $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$ 处处可微分.

(г) $y=\arcsin(\cos x)$ 在 $|\cos x|=1$ 的点不可微分，即在 $x=k\pi$(k 为整数) 的点不可微分.

(д) 函数 y 对于 $|x|\neq 1$ 的点均可微. 现在我们来考虑函数 y 在 $|x|=1$ 点的可微性.

1. 当 $x=1$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\frac{1}{4}(\Delta x+2)^2, & \text{当 } \Delta x<0;\\ 1, & \text{当 } \Delta x>0;\end{cases}$$

于是，

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, 即函数 y 在 $x=1$ 点可微.

2. 当 $x=-1$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$$

$$\begin{cases}\frac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x}=-1, & \text{当 } \Delta x<0 \text{ 时},\\ \frac{\frac{(-2+\Delta x)(\Delta x)^2}{4}}{\Delta x}=-\frac{1}{2}\Delta x+\frac{1}{4}(\Delta x)^2, & \text{当 } \Delta x>0 \text{ 时}.\end{cases}$$

于是，

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以函数 y 在 $x=-1$ 点不可微分.

求函数 $f(x)$ 左侧和右侧的导函数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$.

设：

1000. $f(x)=|x|$.

解 当 $x \neq 0$ 时，易见

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

当 $x=0$ 时，

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

所以，

$$f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1.$$

1001. $f(x)=[x]\sin \pi x$.

解 当 $x \neq$ 整数时，

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \pi[x]\cos \pi x;$$

当 x 为整数时，从定义出发得

$$\begin{aligned} f'_+(k) &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{[k+\Delta x]\sin \pi(k+\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{k\cos k\pi \sin(\pi \Delta x)}{\Delta x} \\ &= k\pi(-1)^k, \end{aligned}$$

同法可得 $f'_-(k) = \pi(k-1)(-1)^k$.

1002. $f(x)=x\left|\cos \frac{\pi}{x}\right| (x \neq 0), f(0)=0$.

解 当 $x \neq \frac{2}{2k+1}$(k 为整数)时(即使 $\cos\frac{\pi}{x} \neq 0$ 的 x 值),

$$f'_-(x) = f'_+(x)$$

$$= \left|\cos\frac{\pi}{x}\right| + \frac{\pi}{x}\frac{\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{\cos\frac{\pi}{x}}\sin\frac{\pi}{x}$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right);$$

当 $x = \frac{2}{2k+1}$ 时,从定义出发易得

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) = -\frac{2k+1}{2}\pi,$$

$$f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) = \frac{2k+1}{2}\pi \text{(k 为整数)}.$$

1003. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

解 当 $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$ $(k = 0,1,2,\cdots)$ 时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$$

当 $x = 0$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0}\frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0}\left(-\sqrt{\frac{\sin(\Delta x)^2}{\Delta x^2}}\right) = -1.$$

当 $x=\sqrt{2k\pi}(k=1,2,\cdots)$ 时，我们有

$$f'_+(\sqrt{2k\pi})=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi}+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\sqrt{\frac{\sin[2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2]}{2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}}{\Delta x}+1}$$

$$=+\infty;$$

同理，可得

$$f'_-(\sqrt{2k\pi})=-\infty(k=1,2,\cdots);$$

$$f'_\mp(\sqrt{(2k+1)\pi})=\mp\infty(k=1,2,\cdots).$$

1004. $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}(x\neq 0)$，$f(0)=0$.

解 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2};$$

当 $x=0$ 时，

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0.$$

1005. $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

解 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}};$$

当 $x=0$ 时，

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to -0}\sqrt{\frac{1-e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}}=-1$$

同理可求得 $f'_+(0)=1$.

1006. $f(x)=|\ln|x||\ (x\neq 0)$.

解 当 $|x|\neq 1$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{|\ln|x||}{\ln|x|}\cdot\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\,\frac{|\ln|x||}{\ln|x|},$$

分两种情况：

1° 当 $0<|x|<1$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=-\frac{1}{x};$$

2° 当 $|x|>1$ 时，

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1}{x};$$

当 $|x|=1$ 时，

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\ln|1+\Delta x||}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to -0} |\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}|$$

$$= -\ln e = -1,$$

同理可求得 $f'_-(-1) = -1, f'_+(\pm 1) = 1$.

1007. $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $|x| \neq 1$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$\cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

$$= \frac{2}{1+x^2}\operatorname{sgn}(1-x^2);$$

当 $x=1$ 时,

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\arcsin \dfrac{2(1+\Delta x)}{1+(1+\Delta x)^2} - \arcsin 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\arcsin \dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\arcsin \dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}$$

$$\cdot\frac{\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=1.$$

同理可求得

$$f'_-(-1)=-1, f'_+(1)=-1, f'_+(-1)=1.$$

1008. $f(x)=(x-2)\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-2}(x\neq 2), f(2)=0.$

解 当 $x\neq 2$ 时,

$$f'_-(x)=f'_+(x)$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-2}$$

$$+\frac{x-2}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}\left[-\frac{1}{(x-2)^2}\right]$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{(x-2)^2+1};$$

当 $x=2$ 时,

$$f'_-(2)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\Delta x}=-\frac{\pi}{2},$$

同理可求得 $f'_+(2)=\frac{\pi}{2}$.

1009. 证明:在 $x\neq 0$ 时函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$,在 $x=0$ 时 $f(0)=0$,在此点连续,但在此点既无左侧导数,又无右侧导数.

证 由于

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

其次，由于

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x},$$

不论 Δx 从左、右侧趋向于零，此极限均不存在，因此在点 $x = 0$，函数 $f(x)$ 既无左侧导数，也无右侧导数.

1010. 设：

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 若\ x \leqslant x_0; \\ ax + b, & 若\ x > x_0. \end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 于点 $x = x_0$ 处连续而且可微分，应当如何选取系数 a 和 b?

解 $f(x_0) = x_0^2 = f(x_0 - 0)$，$f(x_0 + 0) = ax_0 + b$. 当

$$x_0^2 = ax_0 + b$$

时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 又因 $f'_-(x_0) = 2x_0$，$f'_+(x_0) = a$，故当

$$a = 2x_0$$

时，函数在点 x_0 处可微. 从而得

$$x_0^2 = 2x_0^2 + b,$$

即 $$b = -x_0^2.$$

于是，所求的系数为

$$a = 2x_0, b = -x_0^2.$$

1011. 设：

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leqslant x_0; \\ ax + b, & \text{若 } x > x_0, \end{cases}$$

其中函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 为左方可微分的. 应当选择如何的系数 a 和 b,使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续而且可微分?

解 $F(x_0) = F(x_0 - 0) = f(x_0)$,

$F(x_0 + 0) = ax_0 + b$. 当

$$f(x_0) = ax_0 + b$$

时, 函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 又因 $F'_{-}(x_0) = f'_{-}(x_0)$, $F'_{+}(x_0) = a$,故当

$$a = f'_{-}(x_0)$$

时,函数 $F(x)$ 在点 x_0 处可微分.

解方程组

$$\begin{cases} a = f'_{-}(x_0), \\ f(x_0) = ax_0 + b, \end{cases}$$

即得所求的系数为

$$a = f'_{-}(x_0), b = f(x_0) - x_0 f'_{-}(x_0).$$

1012. 适当地选定参数 A 与 c 用立方抛物线

$$y = A(x - a)(x - b)x - c)$$

在区域 $a \leqslant x \leqslant b$ 上把两个半直线:

$$y = k_1(x - a) \quad (-\infty < x < a)$$

及

$$y = k_2(x - b) \quad (b < x < +\infty)$$

光滑地连接起来.

解　对于立方抛物线，

$$y' = A[(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)],$$

此即曲线上在任一点切线的斜率.

当接点处两条曲线的切线重合时，它们就平滑地联接起来，此时应有相等的斜率. 于是，有

1°. 在点 $x = a$ 处，

$$A(a-b)(a-c) = k_1; \tag{1}$$

2°. 在点 $x = b$ 处，

$$A(b-a)(b-c) = k_2. \tag{2}$$

联立(1)和(2)式，解之得

$$A = \frac{k_1+k_2}{(b-a)^2}, c = \frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}.$$

1013. 用抛物线 $y = a + bx^2$　$(|x| \leqslant c)$(其中 a 与 b 为未知的参数)去补充曲线 $y = \frac{m^2}{|x|}$ $(|x| > c)$ 的部分，使所得的为一平滑曲线.

解　显见 $c > 0$，否则在点 $x = c$ 处就不可能形成一平滑曲线. 此时，在点 $x = c$ 处两曲线的切线斜率相等，且有相同的纵坐标. 于是，有

$$(a+bx^2)'\Big|_{x=c} = \left(\frac{m^2}{|x|}\right)'\Big|_{x=c}$$

及

$$a + bc^2 = \frac{m^2}{c}.$$

从而得

$$\begin{cases} 2bc = -\dfrac{m^2}{c^2}, \\ a + bc^2 = \dfrac{m^2}{c}. \end{cases}$$

解之，得

$$a = \frac{3m^2}{2c}, b = -\frac{m^2}{2c^3}.$$

由曲线的对称性可知. 在点 $x = -c$ 处，按上述系数 a 与 b 所确定的曲线 $y = a + bx^2$ 与曲线 $y = \dfrac{m^2}{|x|}$ 也联成一平滑曲线.

1014. 若：(a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数，而函数 $g(x)$ 在这点没有导数；(б) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数，可否断定它们的和

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数?

解 (a) 能. 因为

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x},$$

当 $\Delta x \to 0$，上式右端第一项的极限存在，而第二项的极限不存在. 因而当 $\Delta x \to 0$，左端的极限也不存在（否则差 $\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x} - \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ 的极限就存在，与 $g(x)$ 不可导相矛盾），这说明 $F(x)$ 在点 x_0 没有导数.

(б) 不能. 例如，

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, g(x) = \frac{x - |x|}{2},$$

它们在点 $x = 0$ 处都没有导数，但它们的和 $F(x) =$

$f(x)+g(x)=x$ 在点 $x=0$ 处有导数且为 1.

1015. 若：(a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数，而函数 $g(x)$ 在此点没有导数；(б) 在点 x_0 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都没有导数，可否断定他们的积

$$F(x)=f(x)g(x)$$

在点 $x=x_0$ 没有导数？

解　(a) 不能. 例如，

$f(x)=x$，在 $x=0$ 处有导数，

$g(x)=|x|$，在点 $x=0$ 没有导数，

而它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=x|x|$$

在点 $x=0$ 处有导数 · 事实上，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|-0\cdot|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

即有 $F'(0)=0$.

(б) 不能. 例如，

$$f(x)=|x|,g(x)=|x|,$$

在点 $x=0$ 它们都没有导数，但它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=(|x|)^2=x^2,$$

在点 $x=0$ 处有导数，且 $F'(0)=2x|_{x=0}=0$.

1016. 若：(a) 函数 $f(x)$ 于点 $x=g(x_0)$ 有导数，而函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 没有导数；(б) 函数 $f(x)$ 于点 $x=g(x_0)$ 没有导数，而函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 有导数；(в) 函数 $f(x)$

于点 $x=g(x_0)$ 没有导数及函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 没有导数，则函数

$$F(x)=f[g(x)]$$

于已知点 $x=x_0$ 的可微性怎样?

解 (а) $F'(x_0)$ 可能存在，也可能不存在. 例如，考察函数 $f(x)$、$g(x)$ 及点 x_0 如下：

1° $f(x)=x^2$，$g(x)=|x|$，点 $x=0$，$g(0)=0$. $f'(0)=0$，$g'(0)$ 不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=(|x|)^2=x^2$，$F'(0)=0$. 这是 $F'(x_0)$ 存在的一例.

2° $f(x)=x$，$g(x)=|x|$，点 $x=0$，$g(0)=0$. $f'(0)=1$，$g'(0)$ 不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$，$F'(0)$ 不存在. 这是 $F'(x_0)$ 不存在的一例.

(б) $F'(x_0)$ 可能存在，也可能不存在. 例如，

1° $f(x)=|x|$，$g(x)=x^2$，点 $x=0$，$g(0)=0$. $f'(0)$ 不存在，$g'(0)$ 存在，且等于零；而 $F(x)=f[g(x)]=|x^2|=x^2$，$F'(0)$ 存在，且等于零.

2° $f(x)=|x|$，$g(x)=x$，点 $x=0$，$g(0)=0$. 而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$，$F'(0)$ 不存在.

(в) $F'(x_0)$ 可能存在，也可能不存在，例如，

1° $f(x)=2x+|x|$，$g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$，点 $x=0$，$g(0)=0$. 则 $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在；易知 $F(x)=f[g(x)]=2\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right)+\left|\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right|\equiv x$. 因此 $F'(0)$ 存在且等于 1.

$2°f(x)=|x|, g(x)=|x|$，点 $x=0, g(0)=0$. $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在；而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$，$F'(0)$ 也不存在.

1017. 在函数

$$y=x+\sqrt[3]{\sin x}$$

的图形上哪些点处有垂直切线？作出这图形.

解 $y'=1+\dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}(x\neq k\pi, k=0, \pm 1, \cdots)$.

当 $x=k\pi$ 时，容易直接算出

$$y'|_{x=k\pi}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\pi+\Delta x+\sqrt[3]{\sin(k\pi+\Delta x)}-k\pi}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\sqrt[3]{\frac{(-1)^k}{(\Delta x)^2}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}\right)$$

$$=\infty,$$

故当 $x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时有垂直切线.

当 $x=k\pi$ 时，

$y=k\pi$；

当 $x=\dfrac{2k+1}{2}\pi$ 时，

$y=x\pm 1$，

其图形如图 2.21 所示.

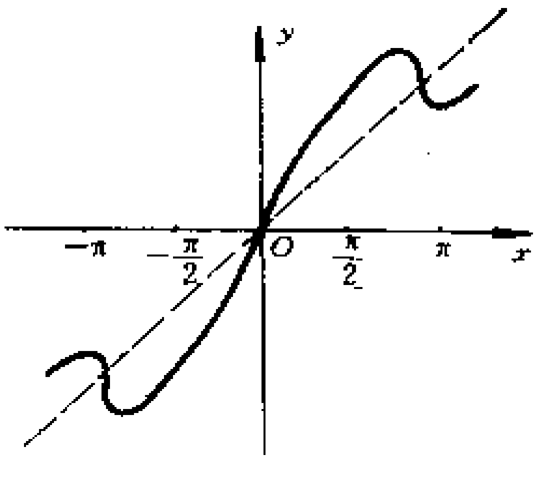


图 2.21

1018. 函数 $f(x)$ 在其不连续点

可否有：(a) 有穷的导数；(б) 无穷的导数？

解 (a) 不能. 否则由此可推出其连续性.

(б) 能. 例如，

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x$$

它在 $x = 0$ 点不连续，但

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{|\Delta x|} \to +\infty (\Delta x \to 0).$$

1019. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a,b) 上可微分，且

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty,$$

则是否必有

(1) $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = \infty$； (2) $\overline{\lim\limits_{x \to a+0}} |f'(x)| = +\infty$？

解 (1) 一般地说，不能保证 $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = \infty$. 例如，对于 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内定义的函数

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x},$$

显然有 $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \infty$. 但是，$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$，对于特殊的一串数 $x_n = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} (k = 1,2,\cdots)$ 有 $f'(x_n) = 0$，所以 $\lim\limits_{n \to \infty} f'(x_n) = 0$，因而 $\lim\limits_{x \to +0} f'(x) = \infty$ 不成立.

(2) 必有 $\overline{\lim\limits_{x \to a+0}} |f'(x)| = \infty$.

由于 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，且 $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$，故 $f(x)$ 在

点 $x=a$ 的右近旁保持定号，从而必有 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$，显然可设前者成立（否则，考察函数 $-f(x)$ 即化为前者）．再通过对自变量作代换 $t=a+b-x$ 可知，我们只须证明下面的命题：

"若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (A,B) 上可微分，且

$$\lim_{x\to B-0} f(x)=+\infty, \tag{1}$$

则必有

$$\lim_{x\to B-0} |f'(x)|=+\infty. \tag{2}$$"

现在给出上述命题的证明如下：

由(1)，对于任给 $M_0>0$，存在 $\delta_0>0$，使当 $x\in[B-\delta_0,B)$ 时，有

$$f(x)\geqslant M_0 (B_0\leqslant x<B, \text{其中 } B_0=B-\delta_0).$$

记 $P=(B_0,f(B_0))$，有 $f(B_0)\geqslant M_0$. 为证(2)，我们采用反证法. 设存在 $K>0$，使

$$|f'(x)|\leqslant K\ (x\in[B_0,B)),$$

则将引出矛盾. 论证如下：

今过 P_0 作斜率为 $2K$ 的直线

$$l:\quad Y=-f(B_0)=2K(x-B_0). \tag{3}$$

它与 $x=B$ 垂线相交于一点 Q，其纵坐标为

$$y_Q=f(B_0)+2K(B-B_0)=f(B_0)+2K\delta_0,$$

记 $M_1=f(B_0)+2K\delta_0$，则 $y_Q=M_1$，它是 l 直线在 $[B_0,B]$ 上的最大值.

对 M_1 而言，由(1)可知，存在 $x_2\in(B_0,B)$ 使

$f(x_2) > M_1$,即点 $P_2 = (x_2, f(x_2))$ 位于 l 线之上方.

另一方面,由在 $x = B_0$ 点 $f(x)$ 的可微性,在 $x = B_0$ 右侧邻域内,对于任给 $\varepsilon_1 > 0\left(取\ \varepsilon_1 < \frac{K}{2}\right)$,存在 δ,使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$\left|f'(B_0) - \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0}\right| < \varepsilon_1 < \frac{K}{2}.$$

于是,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$\left|\frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0}\right|$$

$$\leqslant |f'(B_0)| + \left|\frac{f(x) - f(B_0)}{x - x_0} - f'(B)\right|$$

$$< K + \varepsilon_1 < K + \frac{K}{2} = \frac{3}{2}K.$$

即有在 r 曲线 $y = f(x)$ 上:当 $0 < |x - B_0| < \delta$ 时,有

$$|f(x) - f(B_0)| < \frac{3}{2}K|x - B_0|, \tag{4}$$

今取 $x_1 > B_0$　使 $x_1 < x_2, x_1 < B_0 + \delta$.

于是,由(3)式和(4)式知

$$f(x_1) - f(B_0) < \frac{3}{2}K(x_1 - B_0)$$

$$< 2K(x_1 - B_0) = Y(x_1) - f(B_0),$$

故

$$f(x_1) < Y(x_1),$$

即点$(x_1, f(x_1))$位于直线 l 之下方.

考虑连续函数

$$G(x) = f(x) - Y(x),$$

我们取

$$c = \inf_{x \in [x_1, x_2]} \{x \mid G(x) > 0\},$$

则由 $G(x_1) < 0, G(x_2) > 0$，易见 c 是存在的，而且 $G(c) = 0$. 它也就是连续函数 $G(x)$ 的一个中间值点.

考虑 $x_2 \geqslant x > c$，则有 $G(x) > 0$，即在 c 点附近且 $x > c$ 时，有

$$f(x) > Y(x).$$

从而

$$f(x) - f(c) > Y(x) - f(c) = Y(x) - Y(c).$$

注意 $x - c > 0$，故又有(当 $x > c$，且在 c 附近时)：

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{Y(x) - Y(c)}{x - c}.$$

上式两边取极限(让 $x \to c + 0$)，并注意到函数的可微性，有 $f'(c+0) = f'(c)$，于是有

$$f'(c) \geqslant Y'(c) = 2K.$$

此处 $c \in (x_1, x_2) \subset [B_0, B)$，这个不等式与 $|f'(x)| \leqslant K$ 式相抵触. 因此 $f'(x)$ 当 $x \in [B_0, B)$ 时是无界的. 这就完成了(2)的证明，从而命题得证.

注. 若利用以后的拉格朗日定理，则可很简单地证明此结论.

1020. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a,b) 上可微分且

$$\lim_{x \to a+0} f'(x) = \infty,$$

是否必有

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty?$$

解 不一定.例如:

$$f(x)=\sqrt[3]{x},$$

它在$(0,b)(b>0)$上可微分,且$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

$$\lim_{x\to+0}f'(x)=+\infty,$$

然而

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}=0.$$

1021. 设函数$f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上可微分且有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在.由此能否推出$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在?

解 不能.例如,函数

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x},$$

它在$(0,+\infty)$上可微分,$f'(x)=2\cos(x^2)-\frac{\sin(x^2)}{x^2}$,

且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

然而$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$不存在.

1022. 设有界函数$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上可微分且有$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在.由此可否推出有穷的或无穷的$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在?

解 不能.例如,

$$f(x)=\cos(\ln x),$$

它由$(0,+\infty)$上有界且可微分,其导数为

$$f'(x)=-\frac{\sin(\ln x)}{x},$$

同时有

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.$$

然而 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 不存在.

1023. 对不等式可否逐项微分?

解 一般地说不行. 例如,在 $(-\infty,0)$ 上有

$$2x\leqslant x^2+1,$$

但在此区间上不能对此不等式逐项微分,因为在 $(-\infty,0)$ 上不等式

$$2\leqslant 2x$$

不成立.

1024. 导出表示和式

$$P_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

及

$$Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$$

的公式.

解 设 $\overline{P}_n=x+x^2+x^3+\cdots+x^n,\qquad(1)$

$$\overline{Q}_n=1\cdot x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n.\qquad(2)$$

则 $(\overline{P}_n)'=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=P_n,$

$$(\overline{Q}_n)'=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}=Q_n.$$

另一方面,由(1)式得

$$\overline{P}_n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

由于$(\overline{P}_n)' = P_n$，即

$$\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right]' = P_n,$$

于是，得

$$P_n = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

由(2)式得

$$\overline{Q}_n = x(1+2x+\cdots+nx^{n-1}) = xP_n.$$

由于$\overline{(Q_n)}' = Q_n$，所以

$$(xP_n)' = Q_n,$$

即

$$P_n + xP_n' = Q_n. \tag{3}$$

而

$$P_n' = \left[\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n-1}}{(1-x)^2}\right]' =$$

$$\frac{[-n(n+1)x^{n-1}+n(n+1)x^n](1-x)^2+2(1-x)[1-(n+1)x^n+nx^{n+1}]}{(1-x)^4}$$

将P_n及P'_n代入(3)式，即得

$$Q_n = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

1025. 导出表示和式

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

及

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx$$

的公式.

解
$$S_n=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[2\sin\frac{x}{2}\sin x+2\sin\frac{x}{2}\sin 2x+\cdots+2\sin\frac{x}{2}\sin nx\right]$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\cdots+\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)$$
$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

即
$$S_n=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

又因
$$T_n=(S_n)'=$$
$$\frac{\left[n\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x+(n+1)\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\right]\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$-\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{n\left(\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{nx}{2}+\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$-\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{n+1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},$$

所以，

$$T_n=\frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

1026. 利用恒等式：

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

推出表示和式：

$$S_n=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 对等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \tag{1}$$

两端分别求导数，即得

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$
$$-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$
$$-\cdots-\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\sin\frac{x}{2^n}$$
$$=\frac{\cos x\sin\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^n}\sin x\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin^2\frac{x}{2^n}}. \tag{2}$$

(2) ÷ (1) 得

$$-\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{tg}\frac{x}{4}-\cdots-\frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\frac{x}{2^n}$$
$$=\mathrm{ctg}x-\frac{1}{2^n}\mathrm{ctg}\frac{x}{2^n},$$

所以，

$$\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\frac{x}{2^n}$$
$$=\frac{1}{2^n}\mathrm{ctg}\frac{x}{2^n}-\mathrm{ctg}x$$

1027. 求证可微分的偶函数的导函数为奇函数，而可微分的奇函数的导函数为偶函数.

对这个事实加以几何解释.

证 设 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)$.

两端微分之，得

$$f'(x)=-f'(-x), \text{即 } f'(-x)=-f'(x).$$

这就说明 $f'(x)$ 是奇函数.

同理可证：可微分的奇函数的导函数为偶函数.

这个事实说明：凡对称于 Oy 轴的图形，其对称点

的切线也关于 Oy 轴对称；凡关于原点对称的图形，其对称点的切线互相平行.

1028. 求证可微分的周期函数，其导函数仍为具有相同周期的周期函数.

证 设 $f(x)$ 为周期函数，周期为 T，则

$$f(x+T)=f(x).$$

两端微分之，得

$$f'(x+T)=f'(x),$$

这说明 $f'(x)$ 为具有周期 T 的周期函数.

1029. 若圆半径以 2 厘米 / 每秒的等速度增加，则当圆半径 $R=10$ 厘米时，圆面积增加的速度如何？

解 设圆面积为 S，则 $S=\pi R^2$，

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{R=10}=2\pi R\left.\frac{dR}{dt}\right|_{R=10}=40\pi(\text{平方厘米 / 每秒}),$$

故当 R 为 10 厘米时，圆面积的增加速度为 40π 平方厘米 / 每秒.

1030. 长方形的一边 $x=20$ 米，另一边 $y=15$ 米，若第一边以 1 米 / 秒的速度减少，而第二边以 2 米 / 秒的速度增加，问这长方形的面积和对角线变化的速度如何？

解 面积 $S=xy$，对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}(x>0,y>0)$. 对 t 求导数，即得

$$\frac{dS}{dt}=x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}$$

及

$$\frac{dl}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

按题设，有 $x=20, y=15, \frac{dx}{dt}=-1, \frac{dy}{dt}=2$，代入上面两式，得

$$\frac{dS}{dt}=20\cdot 2+(-1)\cdot 15=25,$$

$$\frac{dl}{dt}=\frac{-20+2\cdot 15}{\sqrt{20^2+15^2}}=0.4.$$

于是，该长方形的面积的变化率为 25 平方米 / 每秒，而对角线的变化率为 0.4 米 / 每秒．

1031. 二轮船 A 和 B 从同一码头同时出发．A 船往北，B 船往东．若 A 船的速度为 30 千米 / 每小时，B 船的速度为 40 千米 / 每小时，问二船间的距离增加的速度如何？

解　记时间为 t（小时），A 与 B 离码头的距离分别为 $30t$ 与 $40t$（千米），注意成直角情形，故两船间的距离为

$$d(t)=\sqrt{(30t)^2+(40t)^2}=50t,$$

故两船间的距离增加的速度为

$$d'(t)=50 \text{ 千米 / 每小时}.$$

1032. 设：

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 2;\\ 2x-2, & \text{若 } 2<x<+\infty,\end{cases}$$

又设 $S(x)$ 表示由曲线 $y=f(x)$，轴 Ox 及过点 $x(x\geqslant 0)$ 而垂直于 Ox 的直线三者围成的面积．作出函数 $S(x)$ 的解析表达式，求出导函数 $S'(x)$，并作出函数 $y=S'(x)$ 的图形．

解　当 $x\in[0,2]$ 时，$S(x)=\frac{1}{2}x^2$；

当 $x \in (2, +\infty)$ 时，

$$S(x)=\frac{1}{2}2^2+\frac{1}{2}(x-2)[2+(2x-2)]$$
$$=x^2-2x+2.$$

从而有

$$S'(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ 时}, \\ 2x-2, & \text{当 } 2 < x < +\infty \text{ 时}. \end{cases} \quad (\text{图 } 2.22)$$

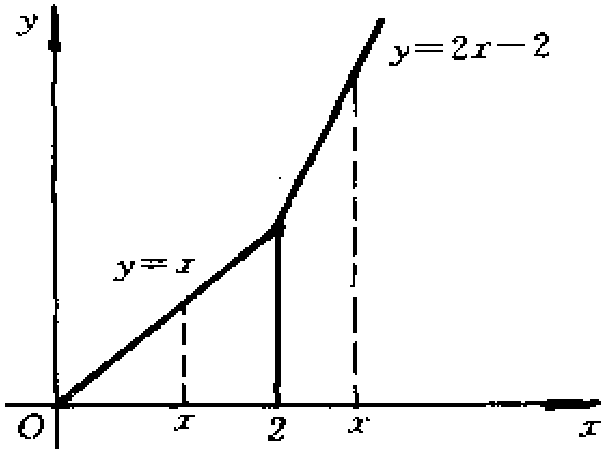


图 2.22

1033. 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y=\sqrt{a^2-x^2}$、轴 Ox 及通过点 O 和 $x(|x| \leqslant a)$ 而垂直于轴 Ox 的两条直线四者围成的面积．作出函数 $S(x)$ 的解析表达式，求出导函数 $S'(x)$，并作其导函数 $y=S'(x)$ 的图形．

解　$S(x)$ 是由一个直角三角形和一个中心角为 α 的扇形组成，其中 $\sin\alpha=\frac{|x|}{a}$，故当 $0<|x| \leqslant a$ 时，

$$S(x)=\frac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{|x|}{a}.$$

于是，

$$S'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{|x|}{x}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{|x|}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{|x|}{x}$$

$$=\frac{|x|\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\sqrt{a^2-x^2}\operatorname{sgn}x\ (0<|x|\leqslant a).$$

函数 $y=S(x)$ 的图形如图 2.23 所示．函数 $y=S'(x)$ 的图形就是以原点为中心，a 为半径的圆周上位于第一及第三象限的弧段，但不包括 $(0,a)$ 点及 $(0,-a)$ 点，图形省略．

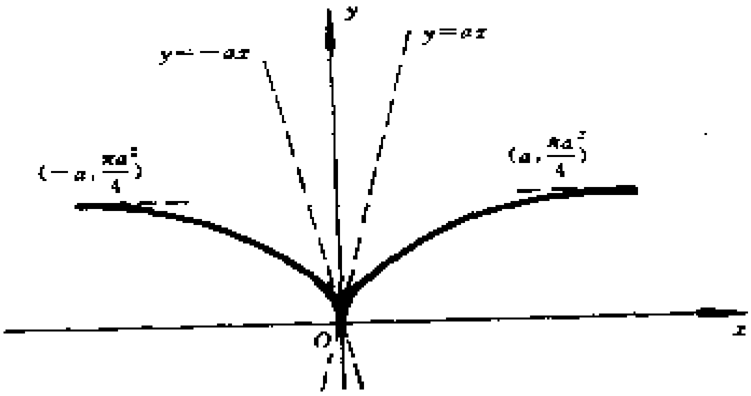


图 2.23

§2. 反函数的导函数．用参变数表示的函数的导函数．隐函数的导函数

1° 反函数的导函数　若具有导函数 $f'(x)\neq 0$ 的可微分的函数 $y=f(x)$ $(a<x<b)$ 有单值连续的反函数 $x=f^{-1}(y)$，则此反函数也可

微分，且有公式

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

成立．

2° 用参变数表示的函数的导函数　若方程组：

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad (\alpha < t < \beta),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微分的函数，且 $\varphi'(t) \neq 0$，确定 y 为 x 的单值连续函数：

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导函数存在，且可用公式

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

求出．

3° 隐函数的导函数　若可微函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$F(x,y) = 0,$$

则此隐函数之导函数 $y' = y'(x)$ 可从以下方程求得：

$$\frac{d}{dx}[F(x,y)] = 0,$$

其中 $F(x,y)$ 是当作变量 x 的复合函数．

1034. 证明由方程 $y^3 + 3y = x$ 定义的单值函数 $y = y(x)$ 存在，并求它的导函数 y'_x.

证　对函数 $x = f(y) = y^3 + 3y$ 有

$$f'(y) = 3y^2 + 3 = 3(y^2 + 1) > 0$$

其中 y 为任意实数，故 $f(y)$ 是严格增大的（在 $-\infty < y < +\infty$），因此存在单值的反函数 $y = y(x)(-\infty < x < +\infty)$，且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2 + 1)}.$$

1035. 证明由方程 $y - \varepsilon\sin y = x(0 \leqslant \varepsilon < 1)$ 确定的单值函数

$y = y(x)$ 存在，并求其导函数 y'_x.

证 对于函数 $x = f(y) = y - \varepsilon\sin y$ 有

$$f'(y) = 1 - \varepsilon\cos y > 0 \ (0 \leqslant \varepsilon < 1).$$

故 $f(y)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格增大的，从而反函数 $y = y(x)$ 存在且是单值的，且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \varepsilon\cos y}.$$

1036. 设：

(a) $y = x + \ln x \ (x > 0)$； (б) $y = x + e^x$；

(в) $y = \operatorname{sh} x$； (г) $y = \operatorname{th} x$.

求它们的反函数 $x = x(y)$ 的存在域，并求它们的导函数.

解 (a) 由 $y'_x = 1 + \frac{1}{x} > 0 \ (x > 0)$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$，其存在域为 $-\infty < y < +\infty$，而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x + 1}.$$

(б) 由 $y'_x = 1 + e^x > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$，其存在域为 $-\infty < y < +\infty$，而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 - x + y}.$$

(в) 由 $y'_x = \operatorname{ch} x > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$，其存在域为 $-\infty < y < +\infty$，而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}},$$

其中因为 $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$，所以，$e^x + e^{-x} =$

$2\sqrt{1+y^2}$.

(г) 由 $y'_x=\frac{1}{(\mathrm{ch}x)^2}>0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$，其存在域为 $-1<y<1$. 由于

$$y^2=\mathrm{th}^2x=\frac{\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}=\frac{\mathrm{ch}^2x-1}{\mathrm{ch}^2x},$$

而 $\mathrm{ch}^2x=\frac{1}{y'_x}=x'_y$，于是，反函数的导函数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1-y^2}.$$

1037. 设：

(а) $y=2x^2-x^4$； (б) $y=\frac{x^2}{1+x^2}$；

(в) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$.

选出反函数 $x=x(y)$ 的单值连续的各枝，求它们的导函数并作其图形.

解 (а) $x^4-2x^2+y=0$.

$$x^2=1\pm\sqrt{1-y}.$$

单值连续的各枝为

$$x_1=-\sqrt{1+\sqrt{1-y}}\quad(-\infty<y\leqslant1),$$

$$x_2=-\sqrt{1-\sqrt{1-y}}\quad(0\leqslant y\leqslant1),$$

$$x_3=\sqrt{1-\sqrt{1-y}}\quad(0\leqslant y\leqslant1),$$

$$x_4=\sqrt{1+\sqrt{1-y}}\quad(-\infty<y\leqslant1).$$

由 $y=2x^2-x^4$，微分得

$$1=4x\frac{dx}{dy}-4x^3\frac{dx}{dy},$$

所以

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{4x-4x^3}.$$

从而有

$$\frac{dx_i}{dy}=\frac{1}{4x(1-x^2)}(i=1,2,3,4)(\text{图 } 2.24).$$

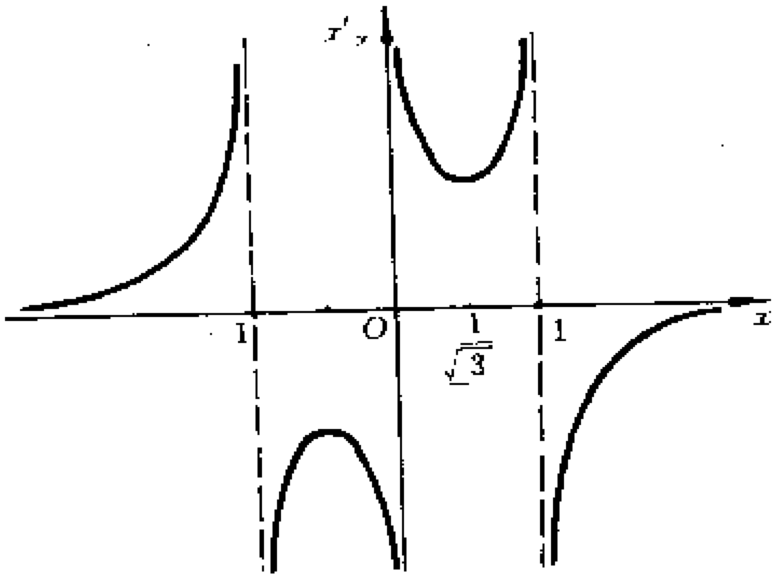


图 2.24

$$(6)\ \frac{x^2}{1+x^2}=y,\text{即 } x^2=\frac{y}{1-y}.$$

单值连续各枝为

$$\left.\begin{aligned}x_1&=-\sqrt{\frac{y}{1-y}},\\x_2&=\sqrt{\frac{y}{1-y}}\end{aligned}\right.\quad(0\leqslant y<1).$$

由 $y'_x=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

及$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'_x}$有

$$\frac{dx_i}{dy}=\frac{(1+x^2)^2}{2x}$$

$$=\frac{x^3}{2y^2}.$$

当 $x_i \to 0$ 时，

$$\frac{dx_i}{dy} \to (\operatorname{sgn} x_i)\cdot(+\infty)$$

$(i=1,2)$（图 2.25）

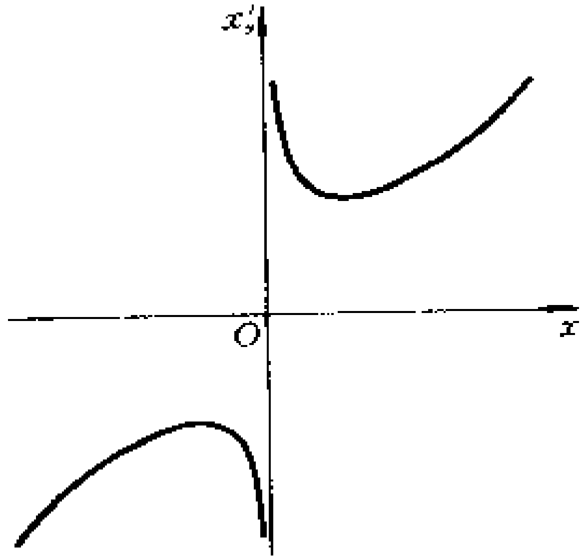


图 2.25

（в）$y=2e^{-x}-e^{-2x}$，解出 e^{-x}，得 $e^{-x}=1\pm\sqrt{1-y}$.

单值连续各枝为

$$x_1=-\ln(1+\sqrt{1-y}) \quad (-\infty<y\leqslant 1),$$

$$x_2=-\ln(1-\sqrt{1-y})=\ln\frac{1+\sqrt{1-y}}{y} \quad (0<y\leqslant 1).$$

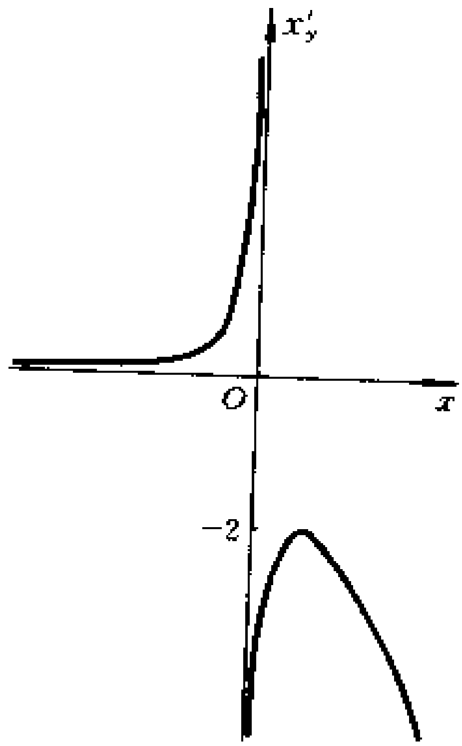


图 2.26

由 $y=2e^{-x}-e^{-2x}$，对 y 求导数，得

$$1=-2e^{-x}\frac{dx}{dy}+2e^{-2x}\frac{dx}{dy}.$$

所以，

$$\frac{dx_i}{dy}=-\frac{1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}$$

$(i=1,2)$(图 2.26).

1038. 作出函数 $y=y(x)$ 的略图,并求其导函数 y'_x,设:$x=-1+2t-t^2$,$y=2-3t+t^3$. 当 $x=0$ 及 $x=-1$ 时 $y'_x(x)$ 等于甚么?在何点 $M(x,y)$ 的导函数 $y'_x(x)=0$?

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3+3t^2}{2-2t}=-\frac{3}{2}(1+t).$$

当 $t=-1$,即 $x=-4$,$y=4$ 时. $y'_x(x)=0$.

当 $x=0$ 时,$t=1$,此时 $y'_x(x)=-3$;

当 $x=-1$ 时,$t=0$ 或 $t=2$,此时 $y'_x(x)=-\frac{3}{2}$ 或 $y'_x(x)=-\frac{9}{2}$.

列表:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	-16	0	4	2	0	4	20	54

当 $t<-1$ 时,$\frac{dy}{dx}>0$,函数值 y 随自变量增加而增加,曲线上升.

当 $t>-1$ 时,$\frac{dy}{dx}<0$,曲线下降.

图形如图 2.27 所示.

求导函数 y'_x(参数是正数). 设:

1039. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$,

$y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

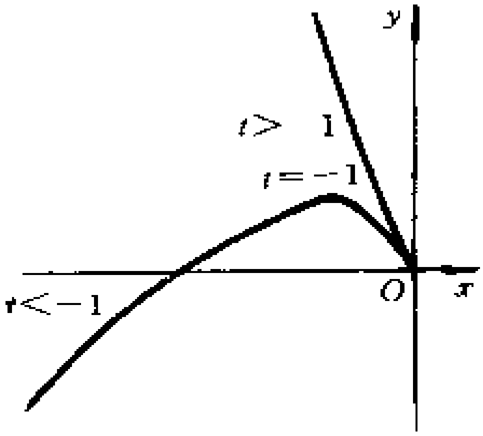


图 2.27

解 $\frac{dy}{dt}$

$$=-\frac{1}{6\sqrt[3]{t^2}\cdot\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}},$$

$\frac{dx}{dt}=$

$$-\frac{1}{6\sqrt{t}\cdot\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}},$$

于是,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}\quad(t>0,t\neq1).$$

1040. $x=\sin^2t, y=\cos^2t$.

解 $\frac{dy}{dt}=-2\cos t\sin t,\frac{dx}{dt}=2\sin t\cos t$,

于是,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\cos t\sin t}{2\cos t\sin t}=-1\quad(0<x<1).$$

1041. $x=a\cos t, y=b\sin t$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\mathrm{ctg}t(0<|t|<\pi)$.

1042. $x=a\mathrm{ch}t, y=b\mathrm{sh}t$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{b\mathrm{ch}t}{a\mathrm{sh}t}=\frac{b}{a}\mathrm{cth}t\quad(t\neq0)$.

1043. $x=a\cos^3t, y=a\sin^3t$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2t\cos t}{-3a\cos^2t\sin t}$

$$= -\operatorname{tg} t\left(t \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \text{ 为整数}\right).$$

1044. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \quad (t \neq 2k\pi, k \text{ 为整数}).$$

1045. $x = e^{2t}\cos^2 t, y = e^{2t}\sin^2 t$.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2t}(\sin^2 t + \sin t\cos t)}{2e^{2t}(\cos^2 t - \sin t\cos t)}$$

$$= \frac{\sin t \cdot \sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t \cdot \sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \operatorname{tg} t \operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ 为整数};\right.$$

$$\left.t \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2, \cdots\right).$$

1046. $x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

解 $$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}\left(-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}.$$

于是，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \operatorname{sgn} t \ (0 < |t| < +\infty).$$

1047. 证明由方程组

$$x = 2t + |t|, y = 5t^2 + 4t|t|,$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分．但它的导函数不能用普通的公式求得．

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时，x 由 0 变化到 $\Delta x = 2\Delta t + |\Delta t|$，$y$ 由 0 变化到 $\Delta y = 5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|$．于是，

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{t=0} = \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|}$$

$$= \begin{cases} 3\Delta t, \Delta t > 0, \\ \Delta t, \Delta t < 0, \end{cases}$$

从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0 \quad (\Delta t \to 0).$$

即 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分．但由于 $|t|$ 当 $t = 0$ 时不可微，因而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dt}$ 当 $t = 0$ 时不存在．所以，导数 $\frac{dy}{dx}$ 当 $t = 0$ 的值不能从普通公式求得．

求下列隐函数的导函数 y'_x：

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$. 当 $x = 2$ 与 $y = 4$ 及当 $x = 2$ 与 $y = 0$ 时，y' 等于甚么？

解 对 x 微分，得

$$2x + 2xy'_x + 2y - 2yy'_x = 2.$$

于是，

$$y'_x = \frac{1-x-y}{x-y}\ (x \neq y).$$

$$y'_x\Big|_{\substack{x=2\\y=4}} = \frac{5}{2},\ y'\Big|_{\substack{x=2\\y=0}} = -\frac{1}{2}.$$

1049. $y^2 = 2px$（抛物线）.

解 对 x 微分，得

$$2yy'_x = 2p.$$

于是，

$$y'_x = \frac{p}{y}\ (y \neq 0).$$

1050. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$（椭圆）.

解 对 x 微分，得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'_x}{b^2} = 0.$$

于是，

$$y'_x = -\frac{b^2x}{a^2y}\ (y \neq 0).$$

1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 抛物线）.

解 对 x 微分，得

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y'_x = 0.$$

于是，

$$y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}}\quad (x > 0, y > 0).$$

1052. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$（内摆线）.

解 对 x 微分，得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'_x = 0.$$

于是，

$$y'_x = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \quad (x \neq 0).$$

1053. $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$（对数螺线）.

解 对 x 微分，得

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'_x - y}{x^2} = \frac{x + yy'_x}{x^2+y^2}.$$

于是，

$$y'_x = \frac{x+y}{x-y} \quad (x \neq y, x \neq 0).$$

1054. 求 y'_x，设：

(a)$r = a\varphi$(阿基米得螺线)；

(б)$r = a(1+\cos\varphi)$（心脏形线）；

(в)$r = ae^{m\varphi}$（对数螺线），

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ 表极坐标.

解 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$，其中 $r = r(\varphi)$. 于是，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi}. \qquad (1)$$

(a) $\frac{dr}{d\varphi} = a$，代入(1) 式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\varphi + a\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi - a\varphi\sin\varphi}$$

$$= \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arc\,tg}\varphi).$$

(б) $\frac{dr}{d\varphi} = -a\sin\varphi$，代入(1) 式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-a\sin^2\varphi+a(1+\cos\varphi)\cos\varphi}{-a\sin\varphi\cos\varphi-a(1+\cos\varphi)\sin\varphi}$$

$$=-\frac{\cos2\varphi+\cos\varphi}{\sin2\varphi+\sin\varphi}$$

$$=-\frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$=-\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2}\left(\varphi\neq0,\varphi\neq\pm\frac{2\pi}{3}\right).$$

(в) $\frac{dr}{d\varphi}=mae^{m\varphi}$，代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{mae^{m\varphi}\sin\varphi+ae^{m\varphi}\cos\varphi}{mae^{m\varphi}\cos\varphi-ae^{m\varphi}\sin\varphi}$$

$$=\frac{m\sin\varphi+\cos\varphi}{m\cos\varphi-\sin\varphi}$$

$$=\operatorname{tg}\left(\varphi+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{m}\right).$$

§3. 导函数的几何意义

1° 切线和法线的方程　可微分的函数 $y=f(x)$ 在其图形上之一点 $M(x,y)$(图 2.28) 处的切线 MT 和法线 MN 的方程的形式分别是：

$$Y-y=y'(X-x)$$

及

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 X,Y 为切线或法线上的流动坐标，而 $y'=f'(x)$ 为切点处导函数的值．

2° 切线长和法线长　PT 为次切线，PN 为次法线，MT 为切线，MN 为法线．设 $\operatorname{tg}\alpha=y'$(图 2.28)．我们得下列的值：

$$PT=\left|\frac{y}{y'}\right|,\ PN=|yy'|,$$

$$MT=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},$$

$$MN=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

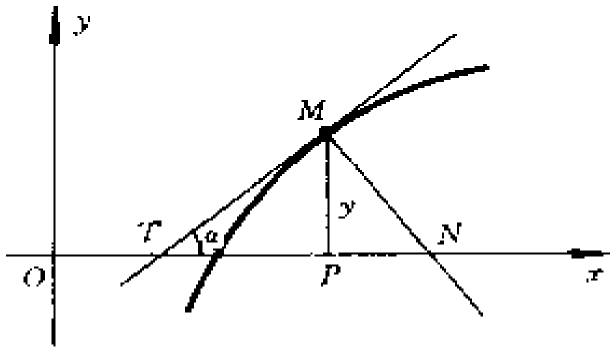


图 2.28

3° <u>切线与切点的向径间的夹角</u>　若 $r=f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程及 β 为切线 MT 与切点 M 的向径 OM 所成的角(图 2.29)，则

$$\mathrm{tg}\beta=\frac{r}{r'}.$$

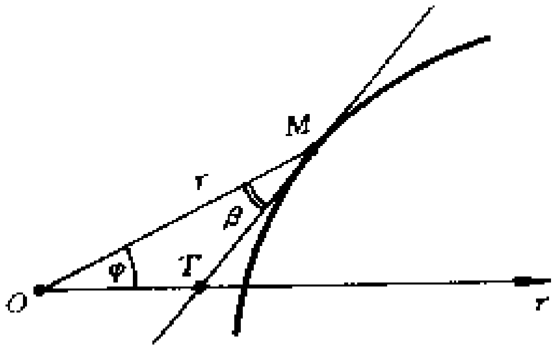


图 2.29

1055. 写出曲线 $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ 上 $A(-1,0)$、$B(2,3)$、$C(3,0)$ 诸点处的切线和法线方程.

解　由于

$$y'=\sqrt[3]{3-x}-\frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}},$$

所以，在 A 点的切线方程为

$$y-0=y'|_{x=-1}(x+1)\text{，即 } y=\sqrt[3]{4}(x+1);$$

法线方程为

$$y-0=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1),$$

即　$$y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1).$$

在 B 点的切线方程为

$$y-3=y'|_{x=2}(x-2)\text{，即 } y=3;$$

法线方程为

$$x = 2.$$

在 C 点，由于 y' 为无穷，故切线方程为

$$x = 3;$$

法线方程为

$$y = 0.$$

1056. 在曲线

$$y = 2 + x - x^2$$

上的哪些点其切线(a) 平行于 Ox 轴；(б) 平行于第一象限角的平分线？

解 由于

$$y' = 1 - 2x,$$

所以，有

(a) 令 $y' = 0$，则 $x = \frac{1}{2}$，$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$，故在点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ 处其切线平行于 Ox 轴；

(б) 令 $y' = 1$，则 $x = 0$，$y = 2$，故在点 $(0,2)$ 处其切线平行于第一象限角的平分线.

1057. 证明抛物线

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 β

$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ 彼此相等.

解 如图 2.30 所示，显然抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1, 0)$，$B(x_2, 0)$. 由于 $y' = 2ax - a(x_1 + x_2)$，故在点 A、B 处切线的斜率分别为

$$k_A = y'|_{x=x_1} = 2ax_1 - a(x_1 + x_2)$$
$$= a(x_1 - x_2) = \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}(\pi - \beta). \qquad (1)$$

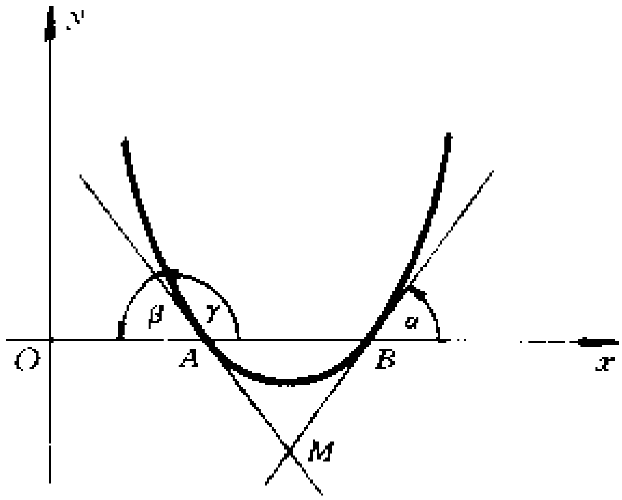


图 2.30

$$k_B = y'|_{x=x_2} = 2ax_2 - a(x_1 + x_2)$$
$$= a(x_2 - x_1) = \mathrm{tg}\alpha. \qquad (2)$$

由(2)式得

$$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = a(x_1 - x_2). \qquad (3)$$

由(1)式及(3)式证得

$$\alpha = \beta.$$

1058. 在曲线

$$y = 2\sin x \ (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

上求出"曲线的坡度"(即是 $|y'|$) 大于 1 的区域.

解 由于 $y' = 2\cos x$,故要 $|y'| > 1$,只要

$$|\cos x| > \frac{1}{2},$$

也即

$$|x| < \frac{\pi}{3} \quad 及 \quad \frac{2\pi}{3} < |x| \leqslant \pi,$$

此即所求的区域.

1059. 函数 $y=x$ 及 $y_1=x+0.01\cdot\sin1000\pi x$ 二者相差不大于 0.01,则这些函数的导函数的差的最大值为何?作出对应的图形.

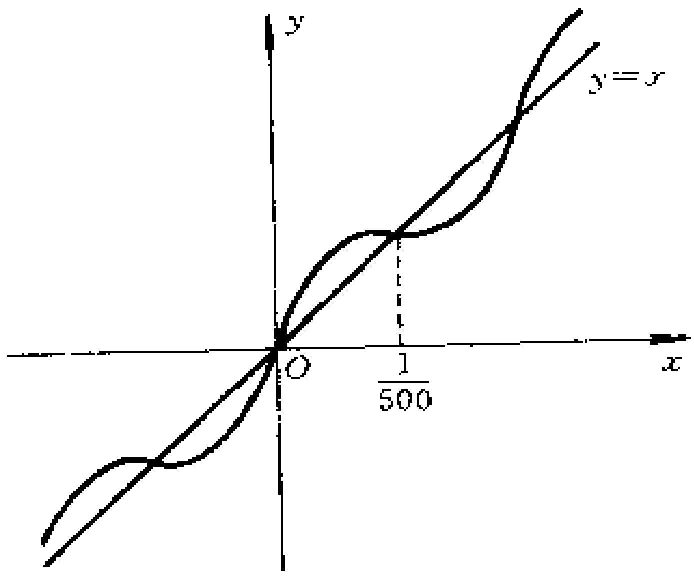


图 2.31

解 导函数差的最大值

$\max|y'-y_1'|=\max|10\pi\cdot\cos1000\pi x|=10\pi\approx 31.4$.

由此可见,两函数相差甚微时(图 2.31),其导函数却可相差很大.

如图 2.32 所示.

1060. 曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴相交的角如何?

解 曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴的交点为(1,0),设曲线与 Ox 轴的相交角为 α,则

$$\mathrm{tg}\alpha=y'\Big|_{x=1}=\frac{1}{x}\Big|_{x=1}=1,$$

故交角 α 为 45°.

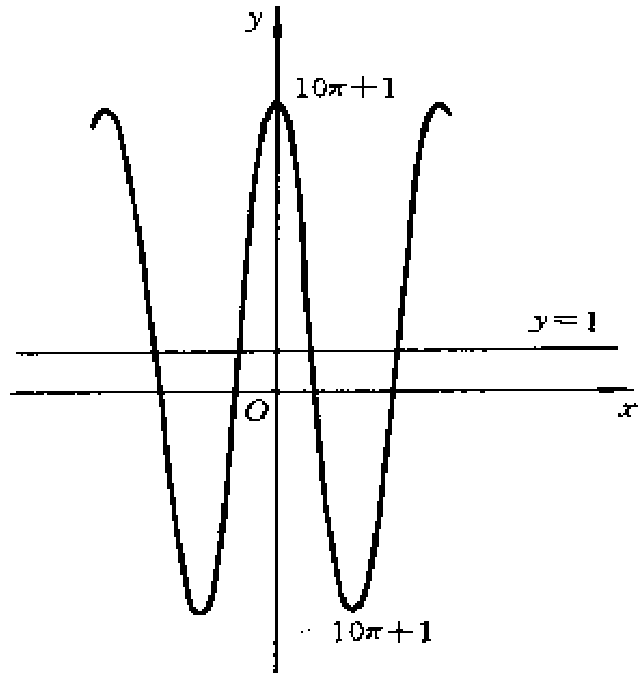


图 2.32

1061. 曲线 $y=x^2$ 及 $x=y^2$ 相交的角如何?

解 两曲线的交点为(0,0) 及(1,1). 由于导数为

$$y'=2x \text{ 及 } y'=\frac{1}{2y},$$

故在(0,0) 点两曲线的交角显然为 90°.

在(1,1) 点两切线的斜率分别为

$$k_1=2 \text{ 及 } k_2=\frac{1}{2},$$

故其交角 θ 的正切为

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{4},$$

于是

$$\theta=\mathrm{arc\ tg}\,\frac{3}{4}\approx 37^\circ.$$

1062. 曲线 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 相交的角如何？

解 先求交点．解

$$\begin{cases} y=\sin x, \\ y=\cos x, \end{cases}$$

得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ (k 为整数).

其次，求两曲线在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处切线的斜率：

$$k_1=(\sin x)'\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}=(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\bigg|,$$

$$k_2=(\cos x)'\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}=(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\bigg|.$$

在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处，交角 $\theta\left(\text{今取锐角，即 } 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 满足

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\left|(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}\right|$$

$$=2\sqrt{2}.$$

于是，

$$\theta=\operatorname{arc}\operatorname{tg}2\sqrt{2}\approx 70°32'.$$

1063. 当如何选择参数 n，以使曲线

$$y=\operatorname{arc}\operatorname{tg}nx\ (n>0)$$

与 Ox 轴相交所成的角大于 89°？

解 曲线 $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg}nx$ 与 Ox 轴的交点为 $(k\pi,0)$(k 为整数)．不妨取 $0\leqslant x<\pi$，则交点为 $O(0,0)$．交角的正切为

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{n}{1+n^2x^2}\bigg|_{x=0}=n.$$

$\theta > 89°$，相当于 $\operatorname{tg}\theta > \operatorname{tg}89° = 57.29$，即

$$n > 57.29.$$

1064. 求出曲线：(a) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$ 于点 $x = 0$ 处，

(б) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x = 1$ 处的左切线与右切线间的夹角．

解　(a) 函数的左、右导数分别为

$$y'_-(0) = \lim_{x\to -0} \frac{\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to -0}\left(-\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}\cdot a^2}\right)$$

$$= -|a|,$$

$$y'_+(0) = \lim_{x\to +0} \frac{\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to +0}\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}\cdot a^2} = |a|.$$

所以，于点 $x = 0$ 处左、右切线之间的夹角 θ 满足

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2|a|}{|a|^2-1}，\text{即 } \theta = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{|a|}.$$

(б) 函数的左、右导数分别为

$$y'_-(1) = \lim_{x\to 1-0} \frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{-\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1-x} = 1,$$

同理，$y'_{+}(1)=-1$. 因此，左、右切线的斜率互为负倒数，所以，夹角为 90°.

1065. 证明对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$（a 及 m 为常数）的切线与切点的向径所成的角度为一常量.

证 设切线与切点的向径所成的角为 β，由于

$$r=ae^{m\varphi},\ r'=ame^{m\varphi},$$

所以 $\mathrm{tg}\beta=\frac{r}{r'}=\frac{1}{m}$，它为一常数，故 β 为一常量.

1066. 求曲线 $y=ax^n$ 的次切线长，由此给出作这曲线的切线的方法.

解 设在任一点 $M(x,y)$ 的次切线长为 l_T，如图 2.33 中的 $|PT|$，则

$$l_T=\left|\frac{y}{\mathrm{tg}\alpha}\right|=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{ax^n}{nax^{n-1}}\right|=\left|\frac{x}{n}\right|.$$

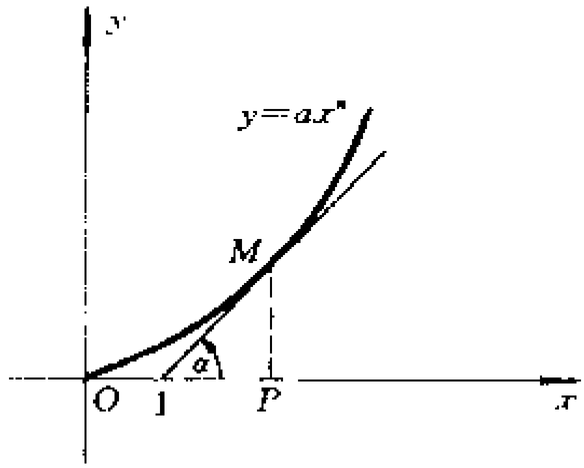


图 2.33

由此，该曲线的切线可以这样作：对于曲线 $y=ax^n$ 上任一点 $M(x,y)$，由此点向 Ox 轴作垂线，得交点 P. 再在 Ox 轴上取点 T，使 $|PT|=\frac{|x|}{n}$（当然，只是在 P 的一侧取点 T，若在此点 $yy'>0$，则在 P 点的左侧取 T；若在此点 $yy'<0$，则在 P 点的右侧取 T. 以后不再说明），然后联接 MT，则 MT 就是所求的切线.

1067. 证明抛物线 $y^2=2px$ 的(a) 次切线长等于切点的横坐标的两倍；(б) 次法线为一常量. 给出作抛物线的切线的方法.

证 (a) 次切线长为

$$l_T=|PT|=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{y}{\frac{p}{y}}\right|$$

$$=\left|\frac{y^2}{p}\right|=\left|\frac{2px}{p}\right|=2|x|,$$

所以,次切线长为切点横坐标的两倍.

(б) 次法线长为 $l_N=|PN|=|yy'|=\left|y\cdot\frac{p}{y}\right|=|p|$,

所以,次法线长为一常量.

由此,抛物线的切线可以这样作:由曲线 $y^2=2px$ 上的任一点 $M(x,y)$ 向 Ox 轴作垂线,得交点 P. 由于 $yy'=p$,故当 $p>0(p<0)$ 时,在 Ox 轴上 P 点的左(右)侧取点 T,如图 2.34,使 $|PT|=2|x|$,联结 MT,此即所求的切线.

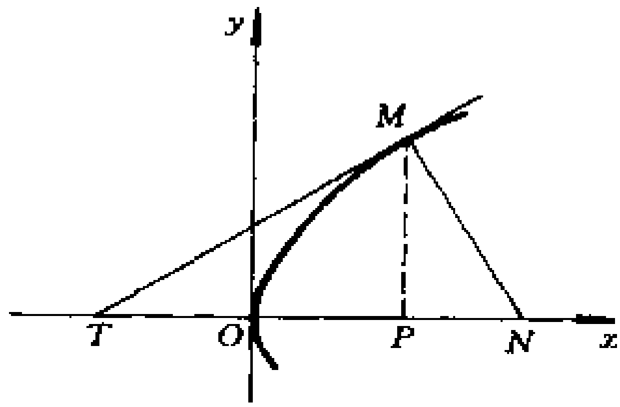


图 2.34

1068. 证明指数曲线 $y=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$ 有定长的次切线. 给出作指数曲线的切线的方法.

证 次切线长为

$$l_T=\left|\frac{y}{y'}\right|=\left|\frac{a^x}{a^x\ln a}\right|=\frac{1}{|\ln a|}.$$

从而 l_T 为常量.

由此,该曲线的切线可以这样作:对于曲线 $y=a^x$ 上任一点 $M(x,y)$ 向 Ox 轴作垂线,得交点 P. 由于当 a

>1 时 $yy'>0$，当 $0<a<1$ 时 $yy'<0$，故在 Ox 轴上点 P 的左侧（当 $a>1$ 时）或右侧（当 $0<a<1$ 时）取点 T，使 $|PT|=\frac{1}{|\ln a|}$，联接 MT，此即所求的切线（图 2.35）.

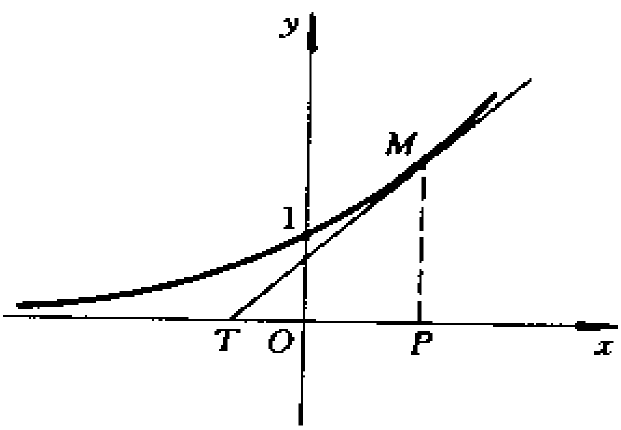


图 2.35

1069. 求悬链线

$$y=a\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$$

上任一点 $M(x_0,y_0)$ 处的法线长.

解 法线长为

$$|MN|$$
$$=|y|\sqrt{1+y'^2}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

由于

$$y'=a\cdot\frac{1}{a}\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}=\mathrm{sh}\,\frac{x}{a},$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}}=\left|\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\right|$$
$$=\left|\frac{y}{a}\right|,$$

故

$$|MN|=|y_0|\cdot\left|\frac{y_0}{a}\right|=\frac{y_0^2}{|a|},$$

即

$$|MN|=\frac{y_0^2}{|a|}\quad(a\neq 0).$$

1070. 证明内摆线

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$$

的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

证 由方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 求得导数 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 对于曲线上任一点 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 处,其切线方程为

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x=x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2}\ \text{及}\ l_y=y_0+\sqrt[3]{x_0^2y_0}.$$

于是,切线在两坐标轴间的部分长为

$$l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}.$$

由于,

$$\begin{aligned}
l_x^2+l_y^2&=x_0^2+y_0^2+3x_0\sqrt[3]{x_0y_0^2}+3y_0\sqrt[3]{x_0^2y_0}\\
&=x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{x_0^2y_0^2}(\sqrt[3]{x_0^2}+\sqrt[3]{y_0^2})\\
&=x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{a^2x_0^2y_0^2}\\
&=(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})^3+y_0^2+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\
&=a^2-3a^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{4}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\
&=a^2-3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\
&=a^2-3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\
&=a^2.
\end{aligned}$$

故 $l=a$,即内摆线

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$$

的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

1071. 若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 Ox 轴相切,则系数 a,b,c 间的关系如何?

解 由方程 $y=ax^2+bx+c$ 求得导数 $y'=2ax+b$. 要抛物线与 Ox 轴相切,需 $y'=0$,所以

$$2ax+b=0,$$

即

$$x=-\frac{b}{2a};\tag{1}$$

另一方面,切点的横坐标满足:

$$ax^2+bx+c=0$$

即

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}.\tag{2}$$

比较(1)式及(2)式,得

$$b^2-4ac=0,$$

此即所求的 a,b,c 间的关系.

1072. 在甚么条件下,三次抛物线

$$y=x^3+px+q$$

与 Ox 轴相切?

解 由方程 $y=x^3+px+q$ 求得 $y'=3x^2+p$. 要此曲线与 Ox 轴相切,必须满足

$$\begin{cases}3x^2+p=0, & (1)\\ x^3+px+q=0. & (2)\end{cases}$$

由(2)式得 $x(x^2+p)=-q$,两端平方,则

$$x^2(x^2+p)^2=q^2.\tag{3}$$

以(1)式代入(3)式,得

$$-\frac{p}{3}\cdot\left(-\frac{p}{3}+p\right)^2=q^2,$$

即

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0,$$

此即所求的条件.

1073. 当参数 a 为何值时,抛物线 $y=ax^2$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切?

解 按题意,我们有

$$(ax^2)'=(\ln x)',$$

即

$$x^2=\frac{1}{2a}\ (a\neq 0),$$

从而 $$y=a\cdot\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}.$$

同时,由于在切点相切,其纵坐标也必需相等,所以

$$\ln x=\frac{1}{2},\text{即 } x=\sqrt{e}.$$

最后得到

$$a=\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2e}.$$

1074. 证明曲线

$$y=f(x)\ [f(x)>0]$$

及 $$y=f(x)\sin ax,$$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数,于公共点彼此相切.

证 解曲线方程

$$\begin{cases}y=f(x),\\ y=f(x)\sin ax,\end{cases}$$

得 $\sin ax = 1, x = \frac{(4k+1)\pi}{2a}$（$k$ 为整数），这就是两曲线交点的横坐标．两曲线在交点处切线的斜率分别为

$$k_1 = f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right),$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right)\sin\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right) \\ &\quad + a\cos\left(\frac{4k+1}{2}\pi\right)f\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right) \\ &= f'\left(\frac{4k+1}{2a}\pi\right). \end{aligned}$$

从而

$$k_1 = k_2,$$

所以两曲线在公共点彼此相切．

1075. 证明双曲线族 $x^2 - y^2 = a$ 及 $xy = b$ 形成一正交网，就是说这两族中的曲线成直角相交．

证　设双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 与双曲线 $xy = b$ 相交于点 $P(x,y)$，则在此点双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 的切线的斜率 k_1 满足：$2x - 2yk_1 = 0$，所以，

$$k_1 = \frac{x}{y};$$

在同一点双曲线 $xy = b$ 的切线的斜率 k_2 满足：$y + xk_2 = 0$，所以，

$$k_2 = -\frac{y}{x};$$

由此得到

$$k_1k_2 = \frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x}\right) = -1.$$

因此，两双曲线交成直角，故此两曲线族形成一正交网．

1076. 证明抛物线族

$$y^2 = 4a(a-x)\ (a>0)$$

及 $$y^2 = 4b(b+x)\ (b>0)$$

形成正交网.

证 设抛物线 $y^2 = 4a(a-x)$ 与抛物线 $y^2 = 4b(b+x)$ 相交于点 $P(x,y)$,则在此点 $y^2 = 4a(a-x)$ 的切线的斜率 k_1 满足:$2yk_1 = -4a$,所以,

$$k_1 = -\frac{2a}{y};$$

在同一点抛物线 $y^2 = 4b(b+x)$ 的切线的斜率 k_2 满足:$2yk_2 = 4b$,所以,

$$k_2 = \frac{2b}{y};$$

由此得到

$$k_1k_2 = -\frac{4ab}{y^2}. \tag{1}$$

但点 $P(x,y)$ 同时在这两条抛物线上,故

$$4a(a-x) = 4b(b+x).$$

于是,$x = a-b$,所以

$$y^2 = 4a(a-a+b) = 4ab. \tag{2}$$

以(2)式代入(1)式,得知在交点处,两切线的斜率满足

$$k_1k_2 = -1,$$

故此两切线直交.由此可知,该两抛物线族形成正交网.

1077. 写出曲线 $x = 2t - t^2$ 及 $y = 3t - t^3$ 上于(a)$t=0$,(6)$t=1$ 各点处的切线和法线的方程.

解 由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3}{2}(1+t),$$

所以,有

(a) 当 $t=0$ 时,

$$x=0,y=0,\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}.$$

切线方程为

$$y=\frac{3}{2}x,\text{即 } 3x-2y=0,$$

法线方程为

$$y=-\frac{2}{3}x,\text{即 } 2x+3y=0.$$

(б) 当 $t=1$ 时,

$$x=1,y=2,\frac{dy}{dx}=3.$$

切线方程为

$$y-2=3(x-1),\text{即 } 3x-y-1=0,$$

法线方程为

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-1),\text{即 } x+3y-7=0.$$

1078. 写出曲线

$$x=\frac{2t+t^2}{1+t^3},\quad y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}$$

在(a)$t=0$,(б)$t=1$,(в)$t=\infty$ 各点的切线与法线的方程.

解 由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4},$$

所以,有

(a) 当 $t=0$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 1.$$

切线方程为

$$y = x;$$

法线方程为

$$y = -x.$$

(б) 当 $t = 1$ 时,

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dx} = 3.$$

切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } 3x - y - 4 = 0;$$

法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } x + 3y - 3 = 0;$$

(в) 当 $t = \infty$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = -1.$$

$\left(\text{意即:当 } t \to \infty \text{ 时}, x \to 0, y \to 0, \frac{dy}{dx} \to -1\right)$.

切线方程为

$$y = -x.$$

法线方程为

$$y = x.$$

1079. 写出摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

上任意一点 $t = t_0$ 处的切线方程. 给出摆线的切线的作法.

解 因为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right|_{t=t_0}$$

$$=\operatorname{ctg}\left.\frac{t}{2}\right|_{t=t_0}=\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}.$$

于是,切线方程为

$$y-a(1-\cos t_0)=\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}\cdot[x-a(t_0-\sin t_0)],$$

化简得

$$y-2a=(x-at_0)\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}.$$

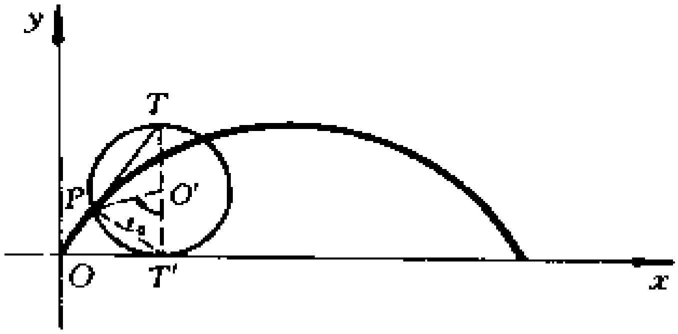


图 2.36

由此可知,切线通过点$(at_0,2a)$,其斜率为 $\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}$. 如图 2.36 中所示,$\angle T'O'P=t_0$,而

$$OT'=\overset{\frown}{T'P}=at_0,T'T=2a,$$

故 T 点的坐标为$(at_0,2a)$,它在切线上. 其次,联接 PT 及 PT',则 $PT'\perp PT$,

$$k_{PT}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\angle PT'T'\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t_0}{2}\right)$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}.$$

这样,PT 就通过点$(at_0,2a)$,且其斜率为 $\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}$,所以,

直线 PT 即为所求的切线．于是摆线的切线可以这样作：先联接切点与滚动的圆的接触点（即点 P），然后，过 P 作其垂直线，此即所求的切线．

1080. 证明曳物线

$$x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right),$$

$$y = a\sin t \ (a > 0, 0 < t < \pi)$$

有一定长的切线段．

证　切线段的长 $= \left|\frac{y}{y'_x}\right|\sqrt{1 + y'^2_x}$，而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{a\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)} = \frac{\sin t}{\cos t},$$

所以

$$\left|\frac{y}{y'_x}\right|\sqrt{1 + y'^2_x} = \left|\frac{a\sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}}\right|\sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}$$

$$= |a||\cos t| \cdot \frac{1}{|\cos t|}$$

$$= |a|,$$

这是一个常量，故曳物线有定长的切线段．

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程：

1081. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, M(6, 6.4)$.

解　由于

$$y' = -\frac{64x}{100y} = -\frac{16x}{25y},$$

从而点 M 处的导数

$$y'|_M = -\frac{16 \times 6}{25 \times 6.4} = -\frac{3}{5},$$

此即曲线在 M 点的切线的斜率．

所以，切线方程为

$$y - 6.4 = -\frac{3}{5}(x - 6)，即 3x + 5y - 50 = 0;$$

法线方程为

$$y - 6.4 = \frac{5}{3}(x - 6)，即 5x - 3y - 10.8 = 0.$$

1082. $xy + \ln y = 1, M(1,1)$.

解　先求 y'. 由于

$$xy' + y + \frac{y'}{y} = 0,$$

从而

$$y' = -\frac{y^2}{x+y},\quad y'\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{1}{2}.$$

故切线方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)，即 x + 2y - 3 = 0;$$

法线方程为

$$y - 1 = 2(x - 1)，即 2x - y - 1 = 0.$$

§4. 函数的微分

1° 函数的微分　若自变数为 x 的函数 $y = f(x)$ 之增量可表为下形

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx),$$

其中 $dx = \Delta x$，则此增量的线性主部称为函数 y 的微分：

$$dy = A(x)dx$$

函数 $y = f(x)$ 的微分存在的必要且充分条件为存在有限的导函数 $y' = f'(x)$，且有

$$dy = y'dx. \tag{1}$$

若自变数 x 为另一自变数的函数，公式(1)于这种情形下仍然有效(一阶微分的不变性).

2° 函数的微小增量的估计　为了计算可微分的函数 $f(x)$ 的微小增量可利用公式

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

若 $f'(x) \neq 0$，当 $|\Delta x|$ 充分小时，它的相对误差可以任意地小.

特别情形，若计算自变数 x 的绝对误差等于 $|\Delta x|$，则函数 $y = f(x)$ 的绝对误差 $|\Delta y|$ 和相对误差 δy 用下列公式近似地表示出来：

$$|\Delta y| = |f'(x)\Delta x|$$

及

$$\delta y = |[\ln f(x)]'\Delta x| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x\right|.$$

1083. 设：

(а)$\Delta x = 1$，(б)$\Delta x = 0.1$，(в)$\Delta x = 0.01$，

对于函数

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

求出：(1)$\Delta f(1)$，(2)$df(1)$，并比较它们.

解　$\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1)$

$= (\Delta x + 1)^3 - 2(1 + \Delta x) + 1 - (1 - 2 + 1)$

$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$df(1) = f'(1)\Delta x = (3x^2 - 2)|_{x=1} \cdot \Delta x = \Delta x,$$

将所求值列表如下：

		$\Delta f(1)$	$df(1)$
Δx		$\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$	Δx
(a)	$\Delta x = 1$	5	1
(б)	$\Delta x = 0.1$	0.131	0.1
(в)	$\Delta x = 0.01$	0.010301	0.01

从上表可以看出，当 Δx 值愈小时，$\Delta f(1)$ 与 $df(1)$ 之差就愈小．

1084. 运动方程是

$$x = 5t^2,$$

其中 t 以秒来度量，x 以公尺来度量．设(a)$\Delta t = 1$ 秒，(б)$\Delta t = 0.1$ 秒，(в)$\Delta t = 0.001$ 秒，对 $t = 2$ 秒的时刻，求出路线的增量 Δx 及路线的微分 dx，并作比较．

解 $\Delta x = 5(2 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 2^2 = 20\Delta t + 5(\Delta t)^2,$

$$dx = x_t'|_{t=2} \cdot \Delta t = 10t|_{t=2} \cdot \Delta t = 20\Delta t,$$

(a) 当 $\Delta t = 1$ 秒时，

$$\Delta x = 25 \text{ 公尺}, dx = 20 \text{ 公尺};$$

(б) 当 $\Delta t = 0.1$ 秒时，

$\Delta x = 2.05$ 公尺，$dx = 2$ 公尺；

(в) 当 $\Delta t = 0.001$ 秒时，

$\Delta x = 0.020005$ 公尺，$dx = 0.02$ 公尺.

由上可以看出，当 Δt 愈小时，$\Delta x - dx$ 就愈小.

求下列函数 y 的微分：

1085. $y = \frac{1}{x}$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}, dy = -\frac{1}{x^2}dx (x \neq 0)$.

1086. $y = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} (a \neq 0)$.

解 $y' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2 + x^2}$,

$$dy = \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

1087. $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right|$.

解 $y' = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right) = \frac{1}{x^2 - a^2}$,

$$dy = \frac{dx}{x^2 - a^2} (|x| \neq |a|).$$

1088. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$.

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}, dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$.

1089. $y = \arcsin\frac{x}{a} (a \neq 0)$.

解 $y' = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

$$dy = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \ (|x| < |a|).$$

1090. (а) $d(xe^x)$; (б) $d(\sin x - x\cos x)$;

(в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$; (г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

(д) $d(\sqrt{a^2 + x^2})$; (е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$;

(ж) $d\ln(1 - x^2)$; (з) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$;

(и) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$

解 (а) $d(xe^x) = (xe^x)'dx = e^x(x + 1)dx$;

(б) $$d(\sin x - x\cos x) = (\sin x - x\cos x)'dx = x\sin x dx;$$

(в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4}dx \ (x \neq 0)$;

(г) $$d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}dx = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}dx \ (x > 0);$$

(д) $d(\sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$;

(е) $$d\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2}dx = \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \ (|x| < 1);$$

(ж) $d\ln(1-x^2)=-\frac{2x\,dx}{1-x^2}$ $(|x|<1)$;

(з) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{|x|}{x}dx$

$$=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\quad(|x|>1);$$

(и) $d\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$

$$=\left(\frac{\cos^3 x+2\sin^2 x\cos x}{2\cos^4 x}+\frac{1}{2\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{dx}{\cos^3 x}\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\text{ 为整数}\right).$$

设 u,v,w 为 x 的可微分的函数．求函数 y 的微分，设：

1091. $y=uvw$.

解 $dy=vw\,du+uw\,dv+uv\,dw$.

1092. $y=\frac{u}{v^2}$.

解 $dy=\frac{v^2du-2uv\,dv}{v^4}$

$$=\frac{v\,du-2u\,dv}{v^3}\quad(v\neq0).$$

1093. $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

解 $dy=-\frac{1}{2(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(2u\,du+2v\,dv)$

$$= -\frac{udu+vdv}{(u^2+v^3)^{\frac{3}{2}}}\quad (u^2+v^2>0).$$

1094. $y = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{u}{v}$.

解 $$dy = \frac{1}{1+\dfrac{u^2}{v^2}}\cdot\frac{vdu-udv}{v^2}$$

$$= \frac{vdu-udv}{u^2+v^2}(u^2+v^2>0, v\neq 0).$$

1095. $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$.

解 $$dy = \frac{2udu+2vdv}{2(u^2+v^2)}$$

$$= \frac{udu+vdv}{u^2+v^2}\quad (u^2+v^2>0).$$

1096. 求

(а) $\dfrac{d}{dx^3}(x^3-2x^6-x^9)$; (б) $\dfrac{d}{dx^2}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$;

(в) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; (г) $\dfrac{d(\operatorname{tg}x)}{d(\operatorname{ctg}x)}$;

(д) $\dfrac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

解 (а) $$\frac{d}{dx^3}(x^3-2x^6-x^9)$$

$$= \frac{d}{dx^3}[x^3-2(x^3)^2-(x^3)^3]$$

$$= 1-4x^3-3x^6;$$

(б) 由于$\dfrac{\sin x}{x}$为偶函数,故不妨设 $x>0$,则

$$\frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2x}\sin x}{x^2}$$

$$= \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3},$$

显然，上述结果对于 $x < 0$ 也是正确的($x \neq 0$).

(в) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{\cos x dx}{-\sin x dx}$

$$= -\operatorname{ctg} x (x \neq k\pi, k \text{ 为整数});$$

(г) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)} = \frac{d}{d(\operatorname{ctg} x)}\left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\right)$

$$= -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x$$

$$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数}\right);$$

(д) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx} = -1$

$$(|x| < 1).$$

1097. 有半径为 $R = 100$ 厘米及圆心角 $\alpha = 60°$ 的扇形. 若(a) 其半径 R 增加 1 厘米;(б) 角 α 减小 $30'$,则扇形面积的变化若干?求出精确的和近似的解.

解 扇形面积 $A = \frac{1}{2}R^2\alpha$,其增量

$$\Delta A = \frac{\alpha}{2}[(R+\Delta R)^2 - R^2]$$

$$= \alpha R\Delta R + \frac{1}{2}\alpha(\Delta R)^2,$$

或

$$\Delta A=\frac{1}{2}R^2\Delta\alpha.$$

扇形面积的微分

$$dA=R\alpha\,dR,$$

或

$$dA=\frac{1}{2}R^2d\alpha.$$

增量是精确的解，微分是近似的解．

(a) 当 $R=100$，$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\Delta R=1$ 时，

$$\Delta A=\frac{\pi}{6}(200+1)=105.2 \text{ 平方厘米},$$

$$dA=100\cdot\frac{\pi}{3}=104.7 \text{ 平方厘米(增加)}.$$

(6) 当 $\Delta\alpha=-\frac{\pi}{360}$ 时，

$$\Delta A=\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)=-43.6 \text{ 平方厘米},$$

$$dA=\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)$$

$$=-43.6 \text{ 平方厘米(减少)}.$$

1098. 单摆振动的周期(以秒计算)按下式确定：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中l为摆长以厘米计，$g=981$厘米/每秒²为重力加速度.

为了使周期T增大0.05秒，对摆长$l=20$厘米的长度需要作多少修改?

解 周期T对摆长l的微分

$$dT=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{l}}dl=\frac{\pi dl}{\sqrt{lg}}.$$

将$dT=0.05$，$g=981$，$l=20$代入上式，即得

$$dl=\frac{0.05\times\sqrt{981\times 20}}{3.1416}\approx 2.23,$$

即摆长增加约2.23厘米.

利用函数之微分代替函数的增量，求下列各式之近似值:

1099. $\sqrt[3]{1.02}$.

解 设$f(x)=\sqrt[3]{x}$，$x_0=1$，$\Delta x=0.02$，则

$$f'(x_0)=\left.\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right|_{x=1}=\frac{1}{3},$$

$$df(x_0)=f'(x_0)\Delta x=0.0066.$$

于是

$$\sqrt[3]{1.02}=f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+df(x_0)$$
$$=1+0.0066,$$

即

$$\sqrt[3]{1.02} \approx 1.007.$$

1100. $\sin 29°$.

解 设 $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$, 则

$$\sin 29° \approx \sin\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6} = 0.4849.$$

1101. $\cos 151°$.

解 设 $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$, 则

$$\cos 151° \approx \cos\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} = -0.8748.$$

1102. $\operatorname{arc\,tg} 1.05$.

解 设 $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.05$, 则

$$\operatorname{arctg} 1.05 \approx \operatorname{arc\,tg} 1 + 0.05 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 0.8104(\text{弧}) = 46°26'.$$

1103. $\lg 11$.

解 $\lg 11 = \lg 10 + \lg 1.1 = 1 + \lg 1.1$.

设 $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.1$, 则

$$\lg 1.1 \approx \lg 1 + \frac{0.1}{\ln 10} = \frac{0.1}{2.3026} = 0.0434.$$

于是

$$\lg 11 \approx 1.0434.$$

1104. 证明近似公式：

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}(a>0),$$

其中$|x|\ll a$(正数A和B间的关系式$A\ll B$表示A与B相比较时,A为高阶无穷小).

利用这个公式近似地计算：

(a) $\sqrt{5}$； (б) $\sqrt{34}$； (в) $\sqrt{120}$

并与表中的数值比较.

证 设$f(y)=\sqrt{y}$，$y_0=a^2$，$\Delta y=x$，则

$$\sqrt{y_0+\Delta y}\approx\sqrt{y_0}+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\Delta y$$

(当$|\Delta y|\ll\sqrt{y_0}$时).

于是，

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a},(\text{当 } |x|\ll a \text{ 时})$$

(a) $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1}\approx 2+\frac{1}{4}=2.25$，

查表：$\sqrt{5}=2.24$；

(б) $\sqrt{34}=\sqrt{6^2-2}\approx 6-\frac{2}{2.6}=5.833$，

查表：$\sqrt{34}=5.831$；

(в) $\sqrt{120}=\sqrt{11^2-1}\approx 11-\frac{1}{2.11}=10.9546$，

查表：$\sqrt{120}=10.9545.$

1105. 证明近似公式：

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}(a>0).$$

其中 $|x|\ll a$. 利用此公式近似地计算：

(а) $\sqrt[3]{9}$；　(б) $\sqrt[4]{80}$；　(в) $\sqrt[7]{100}$；

(г) $\sqrt[10]{1000}$.

证　设 $f(y)=\sqrt[n]{y}$，$y_0=a^n$，$\Delta y=x$，则

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx\sqrt[n]{a^n}+\frac{x}{n\sqrt[n]{(a^n)^{n-1}}}$$

$$=a+\frac{x}{na^{n-1}}(\text{当 } |x|\ll a \text{ 时}).$$

(а) $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{2^3+1}\approx 2+\frac{1}{3.2^2}=2.083,$

查表：$\sqrt[3]{9}=2.080$；

(б) $\sqrt[4]{80}=\sqrt[4]{3^4-1}\approx 3-\frac{1}{4.3^3}=2.9907,$

查表：$\sqrt[4]{80}=2.9905$；

(в) $\sqrt[7]{100}=\sqrt[7]{2^7-28}\approx 2-\frac{28}{7.2^6}=1.938,$

查表：$\sqrt[7]{100}=1.931$；

(г) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}\approx 2-\frac{24}{10\cdot 2^9}=1.9953,$

查表：$\sqrt[10]{1000}=1.9953.$

1106. 正方形的边 $x=2.4$ 米 ± 0.05 米．由此计算所得正方

形的面积的相对误差和绝对误差如何?

解 正方形的面积 $A=x^2$. 于是,面积的相对误差为

$$\delta_A=\left|\frac{\Delta A}{A}\right|=\left|\frac{2x\Delta x}{x^2}\right|=2\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$$

$$=2\cdot\frac{0.05}{2.4}=4.2\%;$$

而绝对误差为

$$|\Delta A|=|2.45^2-2.4^2|=0.24\text{ 平方米}.$$

1107. 为了计算出球的体积准确到 1%,问度量球半径 R 时所允许发生的相对误差如何?

解 球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$,从而

$$dV=\frac{4}{3}\pi\cdot 3R^2dR=V\frac{3dR}{R},$$

即体积的相对误差是半径的相对误差的 3 倍:

$$\left|\frac{dV}{V}\right|=3\left|\frac{dR}{R}\right|.$$

因而,半径 R 允许发生的相对误差为

$$\delta_R=\frac{1}{3}\delta_V\leqslant\frac{1}{3}\cdot 0.01=0.33\%.$$

1108. 借助于单摆的振动利用公式 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$(其中 l 为摆长,T 为摆振动的全周期)以求重力加速度. 当测量(a) 摆长 l,(6) 周期 T 时的相对误差 δ 影响于值 g 几何?

解 (a)$\delta_g=\left|\frac{dg}{g}\right|=\left|\frac{dl}{l}\right|$,于是

$$\delta_g = \delta_l,$$

即 g 的相对误差等于摆长的相对误差．

(6) $\delta_g = \left| \dfrac{-8\pi^2 l \cdot T^2 dT}{T^3 \cdot 4\pi^2 l} \right| = 2\left|\dfrac{dT}{T}\right|$，于是

$$\delta_g = 2\delta_T,$$

即 g 的相对误差是周期的相对误差的 2 倍．

1109．求数 $x(x>0)$ 的常用对数的绝对误差，设此数的相对误差等于 δ.

解　设 $f(x)=\ln x$，若数 δ 很小，则有

$$\ln(1+\delta)\approx\delta.$$

因而，所要求的绝对误差

$$|\lg(x+\Delta x)-\lg x| = \left|\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right|$$

$$= |\lg(1+\delta)| = \frac{1}{\ln 10}\ln(1+\delta)\approx 0.43\delta.$$

1110．证明：根据正切对数表所求得的角度比用具有同样多位小数的正弦对数表求得的角度更为精确．

证　正切对数函数的微分

$$d(\lg \operatorname{tg}\varphi) = \frac{d\varphi}{\ln 10\cdot\operatorname{tg}\varphi\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{d\varphi}{\ln 10\cdot\sin\varphi\cos\varphi},$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10\cdot|\sin\varphi|\cdot|\cos\varphi|\cdot|d(\lg\operatorname{tg}\varphi)|; \qquad (1)$$

而正弦对数函数的微分

$$d(\lg \sin\varphi) = \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sin\varphi \ln 10},$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin\varphi| \cdot \left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| \cdot |d(\lg \sin\varphi)|. \tag{2}$$

比较(1)式及(2)式的右端，由于假设确定 $\lg \sin\varphi$ 与 $\lg \operatorname{tg}\varphi$ 时，具有同样的误差，而 $\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| \geqslant 1 \geqslant |\cos\varphi|$，故由(2)式所确定的 $|d\varphi|$ 不比(1)式的 $|d\varphi|$ 小．这就证明了求角度时用正切对数表更为精确．

§5. 高阶的导函数和微分

1° 基本定义　函数 $y = f(x)$ 的高阶导函数由下列关系式顺次地定义出来(假设对应的运算都有意义!)：

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n = 2,3,\cdots).$$

函数 $y = f(x)$ 的高阶微分是根据下列公式顺次定义的：

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \quad (n = 2,3,\cdots),$$

其中采取 $d^1 y = dy = y' dx$.

若 x 为自变数，则应有：

$$d^2 x = d^3 x = \cdots = 0.$$

在这种情形下，下列公式正确

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \text{ 及 } y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2° 基本公式：

Ⅰ. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad (a > 0)$；$(e^x)^{(n)} = e^x$；

Ⅱ. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$；

Ⅲ. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$；

Ⅳ. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$；

Ⅴ. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3° 莱布尼兹公式　若函数 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 有 n 阶导函数（可微分 n 次），则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)} = u$，$v^{(0)} = v$，C_n^i 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

同样地对于微分 $d^n(uv)$ 得：

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i} u d^i v,$$

其中设 $d^0 u = u$ 及 $d^0 v = v$.

求 y''，设：

1111. $y = x\sqrt{1+x^2}$.

解　$y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$，

$$y'' = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - \frac{x(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1112. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$(|x| < 1)$.

1113. $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$.

1114. $y = \operatorname{tg} x$.

解 $$y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\left(x \neq \frac{2k+1}{2}\pi,\ k \text{ 为整数}\right).$$

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$.

解 $y' = 1 + 2x\operatorname{arctg} x$,

$$y'' = 2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

1116. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y''=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$+\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+3x^2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3x}{(1-x^2)}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$(|x|<1)$.

1117. $y=x\ln x$.

解 $y'=1+\ln x$, $y''=\frac{1}{x}(x>0)$.

1118. $y=\ln f(x)$.

解 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$,

$$y''=\frac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}(f(x)>0).$$

1119. $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$.

解 $y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$

$$+x\cdot\frac{1}{x}[\cos(\ln x)-\sin(\ln x)]$$

$$=2\cos(\ln x),$$

$$y''=-\frac{2\sin(\ln x)}{x}(x>0).$$

1120. 设 $y=e^{\sin x}\cos(\sin x)$,求 $y(0)$,$y'(0)$ 及 $y''(0)$.

解 $y(0)=1$. 又

$$y'=e^{\sin x}[\cos x\cos(\sin x)$$

$$-\cos x\sin(\sin x)].$$

于是，

$$y'(0)=e^0[1-0]=1.$$

而

$$\begin{aligned}y''=&e^{\sin x}[\cos^2x\cos(\sin x)-\cos^2x\sin(\sin x)\\&-\sin x\cos(\sin x)-\cos^2x\sin(\sin x)\\&+\sin x\sin(\sin x)-\cos^2x\cos(\sin x)]\\=&e^{\sin x}\{-2\cos^2x\sin(\sin x)\\&+\sin x[\sin(\sin x)-\cos(\sin x)]\},\end{aligned}$$

于是，

$$y''(0)=e^0\{0+0\}=0.$$

设 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 为可微分二次的函数．求 y''，设：

1121. $y=u^2$.

解 $y'=2uu'$,

$$y''=2u'^2+2uu''=2(u'^2+uu'').$$

1122. $y=\ln\frac{u}{v}$.

解 $y'=\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}$,

$$y''=\frac{uu''-u'^2}{u^2}-\frac{vv''-v'^2}{v^2}(uv>0).$$

1123. $y=\sqrt{u^2+v^2}$.

解 $y'=\dfrac{uu'+vv'}{\sqrt{u^2+v^2}}$,

$$y''=\frac{(uu''+u'^2+vv''+v'^2)\sqrt{u^2+v^2}-\dfrac{(uu'+vv')^2}{\sqrt{u^2+v^2}}}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-v'u)^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$(u^2+v^2>0)$.

1124. $y=u^v(u>0)$.

解 $y'=u^v\left[v'\ln u+\dfrac{vu'}{u}\right]$,

$$y''=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)^2$$

$$+u^v\left[v''\ln u+\frac{u'v'}{u}\right.$$

$$\left.+\frac{(u'v'+vu'')u-vu'^2}{u^2}\right]$$

$$=u^v\left[\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)^2+v''\ln u\right.$$

$$\left.+\frac{2u'v'}{u}+\frac{v}{u^2}(uu''-u'^2)\right].$$

设 $f(x)$ 为可微分三次的函数．求 y'' 及 y'''，设：

1125. $y=f(x^2)$.

解 $y'=2xf'(x^2)$,

$y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$,

$$y''' = 4xf''(x^2) + 8xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2)$$
$$= 12xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2).$$

1126. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$y'' = \frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$-\frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0).$$

1127. $y = f(e^x)$.

解 $y' = e^xf'(e^x)$,

$$y'' = e^{2x}f''(e^x) + e^xf'(e^x),$$

$$y''' = e^{3x}f'''(e^x) + 3e^{2x}f''(e^x) + e^xf'(e^x).$$

1128. $y = f(\ln x)$.

解 $y' = \frac{1}{x}f'(\ln x)$,

$$y'' = -\frac{1}{x^2}f'(\ln x) + \frac{1}{x^2}f''(\ln x)$$
$$= \frac{1}{x^2}[f''(\ln x) - f'(\ln x)],$$

$$y''' = -\frac{2}{x^3}[f''(\ln x) - f'(\ln x)]$$

$$+ \frac{1}{x^3}[f'''(\ln x) - f''(\ln x)]$$

$$= \frac{1}{x^3}[f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)]$$

$(x > 0)$.

1129. $y = f[\varphi(x)]$，其中 $\varphi(x)$ 是可多次微分的函数．

解 $y' = \varphi'(x)f'[\varphi(x)]$，

$$y'' = \varphi'^{2}(x)f''[\varphi(x)] + \varphi''(x)f'[\varphi(x)],$$

$$y''' = \varphi'^{3}(x)f'''[\varphi(x)]$$

$$+ 2\varphi'(x)\varphi''(x)f''[\varphi(x)]$$

于是，

$$d^2y = \frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1132. $y = \frac{\ln x}{x}$.

解 $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}, y'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$,

于是，

$$d^2y = \frac{2\ln x - 3}{x^3}dx^2 \quad (x > 0).$$

1133. $y = x^x$.

解 $y' = x^x(1+\ln x)$,

$$y'' = x^x\left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right],$$

于是，

$$d^2y = x^x\left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right]dx^2 (x > 0).$$

令 u 及 v 为变数 x 的可微分两次的函数，求 d^2y，设：

1134. $y = uv$.

解 $dy = udv + vdu$,

$$d^2y = dudv + ud^2v + dvdu + vd^2u$$
$$= ud^2v + 2dudv + vd^2u.$$

1135. $y = \frac{u}{v}$.

解 $dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$,

$$d^2y=\frac{v^2(dvdu+vd^2u-dudv-ud^2v)-2vdv(vdu-udv)}{v^4}$$

$$=\frac{v(vd^2u-ud^2v)-2dv(vdu-udv)}{v^3}\ (v\neq 0)$$

1136. $y=u^mv^n$（m 及 n 为常数）.

解 $dy=mu^{m-1}v^ndu+nu^mv^{n-1}dv$,

$$\begin{aligned}d^2y&=m(m-1)u^{m-2}v^ndu^2\\&\quad+mu^{m-1}(v^nd^2u+nv^{n-1}dudv)\\&\quad+mnu^{m-1}v^{n-1}dudv\\&\quad+nu^m(n-1)v^{n-2}dv^2+nu^mv^{n-1}d^2v\\&=u^{m-2}v^{n-2}\{[m(m-1)v^2du^2\\&\quad+2mnuvdudv+n(n-1)u^2dv^2]\\&\quad+uv(mvd^2u+nud^2v)\}.\end{aligned}$$

1137. $y=a^u(a>0)$.

解 $dy=a^u\ln adu$,

$$\begin{aligned}d^2y&=a^u\ln^2a\cdot du^2+a^u\ln a\cdot d^2u\\&=a^u\ln a(\ln a\cdot du^2+d^2u)\ (a>0).\end{aligned}$$

1138. $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

解 $dy=\dfrac{udu+vdv}{u^2+v^2}$,

$$d^2y=\frac{(u^2+v^2)(du^2+ud^2u+dv^2+vd^2v)-2(udu+vdv)^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$=\frac{(v^2-u^2)du^2-4uvdudv+(u^2-v^2)dv^2+(u^2+v^2)(ud^2u+vd^2v)}{(u^2+v^2)^2}$$

$$(u^2+v^2>0).$$

1139. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$.

解 $dy=\dfrac{vdu-udv}{u^2+v^2}$,

$$d^2y=\frac{(u^2+v^2)(vd^2u-ud^2v)-2(udu+vdv)(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2}$$

$$=\frac{(u^2+v^2)(vd^2u-ud^2v)+2uv(dv^2-du^2)+2(u^2-v^2)dudv}{(u^2+v^2)^2}$$

$(v\neq 0)$.

求以参数给出的函数 $y=y(x)$ 的导函数 y'_x，y''_{x^2}，y'''_{x^2}，设：

1140. $x=2t-t^2$，$y=3t-t^3$.

解 $y'_x=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{3-3t^2}{2-2t}=\dfrac{3}{2}(t+1)$,

$$y''_{x^2}=\frac{\dfrac{dy'_x}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{3}{2}}{2-2t}=\frac{3}{4(1-t)},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{\dfrac{dy''_{x^2}}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{3}{4(1-t)^2}}{2-2t}$$

$$=\frac{3}{8(1-t)^3}\ (t\neq 1).$$

1141. $x = a\cos t, y = a\sin t$.

解 $y'_x = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t$,

$$y''_{x^2} = \frac{\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{1}{a\sin^3 t},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\dfrac{3\cos t}{a\sin^4 t}}{-a\sin t} = -\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$$

($t \neq k\pi$, k 为整数).

1142. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

解 $y'_x = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$.

$$y''_{x^2} = \frac{-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\dfrac{\cos\dfrac{t}{2}}{2a\sin^5\dfrac{t}{2}}}{a(1-\cos t)} = \frac{\cos\dfrac{t}{2}}{4a^2\sin^7\dfrac{t}{2}}$$

($t \neq 2k\pi$, k 为整数).

1143. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t$.

解 $y'_x = \dfrac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + t\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + t\right)}$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+t\right),$$

$$y''_{x^2} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)}}{e^t(\cos t - \sin t)}$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\left[-\cos^{-3}\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)+3\cos^{-4}\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)\right]}{e^t(\cos t - \sin t)}$$

$$= \frac{e^{-2t}(2\sin t + \cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(\dfrac{\pi}{4}+t\right)}\left(t \neq \frac{\pi}{4}+k\pi, k \text{ 为整数}\right).$$

1144. $x = f'(t), y = tf'(t) - f(t)$.

解 $y'_x = \dfrac{tf''(t)}{f''(t)} = t,$

$$y''_{x^2} = \frac{1}{f''(t)},$$

$$y'''_{x^3} = -\frac{\dfrac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)} = -\frac{f(t)}{[f''(t)]^3}$$

$$(f''(t) \neq 0).$$

1145. 设函数 $y = f(x)$ 是可微分若干次的．求反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导函数 $x', x'', x''', x^{(4)}$（设这些导函数都存在）．

解 $x' = \dfrac{1}{y'},$

$$x''=-\frac{1}{y'^{2}}\frac{dy'}{dy}$$

$$=-\frac{1}{y'^{2}}\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{y'^{3}},$$

$$x'''=-\frac{y'''\cdot\frac{1}{y'}y'^{3}-3y'^{2}\cdot y''\cdot\frac{1}{y'}\cdot y''}{y'^{6}}$$

$$=-\frac{y'y'''-3y''^{2}}{y'^{5}},$$

$$x^{(4)}=-\frac{y'^{5}\left(\frac{y''}{y'}y'''+y^{(4)}-6y''y'''\cdot\frac{1}{y'}\right)}{y'^{10}}$$

$$\frac{-5y'^{4}\cdot y''\cdot\frac{1}{y'}(y'y'''-3y''^{2})}{y'^{10}}$$

$$=-\frac{y'^{2}y^{(4)}-10y'y''y'''+15y''^{3}}{y'^{7}}(y'\neq 0).$$

求由下列隐函数给出的 $y=y(x)$ 的 y'_x，y''_{x^2} 及 y'''_{x^3}：

1146. $x^2+y^2=25$. 在点 $M(3,4)$ 的 y'，y'' 及 y''' 等于甚么?

解 $y'=-\frac{x}{y}$,

$$y''=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{v+\frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{25}{y^3},$$

$$y'''=\frac{75y'}{y^4}=-\frac{75x}{y^5},$$

在 $M(3,4)$ 点，得

$$y' = -\frac{3}{4}, y'' = -\frac{25}{64}, y''' = -\frac{225}{1024}.$$

1147. $y^2 = 2px$.

解 $y' = \frac{p}{y}$, $y'' = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p^2}{y^3}$,

$$y''' = \frac{3p^2}{y^4}y' = \frac{3p^3}{y^5}(y \neq 0).$$

1148. $x^2 - xy + y^2 = 1$.

解 对 x 微分，得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0, \tag{1}$$

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}. \tag{2}$$

将(1)式两端再对 x 微分，得

$$2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0, \tag{3}$$

将(2)式所得 y' 代入(3)式，得

$$y'' = \frac{6}{(x - 2y)^3}. \tag{4}$$

将(3)式两端对 x 微分，得

$$-3y'' - xy''' + 6y'y'' + 2yy''' = 0, \tag{5}$$

将(2)式及(4)式代入(5)式，得

$$y''' = \frac{54x}{(x - 2y)^5}(x \neq 2y).$$

求 y'_x 及 y''_{x^2}，设：

1149. $y^2 + 2\ln y = x^4$.

解 对 x 微分，得

$$2yy'+\frac{2y'}{y}=4x^3, \tag{1}$$

再对 x 微分，得

$$2y'^2+2yy''+\frac{2y''}{y}-\frac{2y'^2}{y^2}=12x^2. \tag{2}$$

由(1)式及(2)式得

$$y'=\frac{2x^3y}{1+y^2},$$

$$y''=\frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)].$$

1150. $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}(a>0)$.

解 取对数得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

对 x 微分，得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2},$$

于是

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

将上式对 x 微分，得

$$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}=\frac{2x\cdot\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}\quad(x\neq y,\ x\neq 0).$$

1151. 设函数 $f(x)$ 当 $x \leqslant x_0$ 时有定义且可微分两次. 应当如何选择系数 a, b 及 c, 使函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), 若\ x \leqslant x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, 若\ x > x_0 \end{cases}$$

是可微分两次的函数?

解 按题设 $F'(x)$ 存在, 所以 $F(x)$ 在点 x_0 连续, 即

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} = F(x_0),$$

也即

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} [a(x - x^0)^2 + b(x - x_0) + c] = f(x_0).$$

于是, $c = f(x_0)$. 其次, 由 $F'(x_0 - 0) = F'(x_0 + 0)$ 得

$$f'(x_0) = [2a(x - x_0) + b]\big|_{x=x_0} = b,$$

再由 $F''(x_0 - 0) = F''(x_0 + 0)$ 得

$$f''(x_0) = 2a,$$

于是

$$a = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

1152. 点作直线运动的规律为

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

求其运动的速度和加速度．在 $t=2$ 的时刻，速度与加速度等于甚么？

解 速度

$$v=\frac{ds}{dt}=20-10t,\ v\Big|_{t=2}=0;$$

而加速度

$$j=\frac{d^2s}{dt^2}=-10,\ j\Big|_{t=2}=-10.$$

1153. 点 $M(x,y)$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 均匀地运动，每 T 秒走完一圈．求点 M 在 Ox 轴上的射影之速度 v 及加速度 j，设 $t=0$ 时点的位置为 $M_0(a,0)$.

解 设 M 点的坐标为 (x,y)，由于 $\angle M_0OM=\frac{2\pi}{T}t$，从而

$$x=a\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

于是速度和加速度分别为

$$v=\frac{dx}{dt}=-\frac{2\pi a}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t,$$

$$j=\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{4\pi^2a}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

1154. 质点 $M(x,y)$ 在铅直平面 Oxy 内以速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛去．建立(空气的阻力略去不计)运动的方程并计算速度 v 加速度 j 的大小及运动的轨道．最大的高度和射程等于多少？

解 若不考虑空气的阻力，则有

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

此即运动方程．化为直角坐标方程，得

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

即轨道为一抛物线．速度

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2}$$

$$= \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0gt\sin\alpha},$$

而加速度

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{0 + (-g)^2} = g.$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha}.$$

在最大高度处，$\dfrac{dy}{dx} = 0$. 此时

$$x = \frac{v_0^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

于是，最大高度为

$$H_{\max} = \frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\operatorname{tg}\alpha$$

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot\frac{v_0^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2}$$

$$=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

上式也可从$\frac{dy}{dt}=0$,解出$t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$,再以$t$值代入$y$的表达式而得到．在最大射程处有:$y=0$. 于是

$$x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=0,$$

解得

$$x=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}.$$

从而,最大射程为$\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$.

1155. 点运动的方程为

$x=4\sin\omega t-3\cos\omega t$, $y=3\sin\omega t+4\cos\omega t$,($\omega$为常数). 求运动的轨道,速度与加速度的大小．

解　由于

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=16\sin^2\omega t+9\cos^2\omega t\\&\quad-24\sin\omega t\cos\omega t+9\sin^2\omega t\\&\quad+16\cos^2\omega t+24\sin\omega t\cos\omega t\\&=25(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)=25.\end{aligned}$$

所以,运动的轨道为一以原点为中心,5为半径的圆．

其次，速度与加速度的大小分别为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(4\omega\cos\omega t+3\omega\sin\omega t)^2+(3\omega\cos\omega t-4\omega\sin\omega t)^2}$$

$$=5|\omega|,$$

$$j=\sqrt{j_x^2+j_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(-4\omega^2\sin\omega t+3\omega^2\cos\omega t)^2+(-4\omega^2\cos\omega t-3\omega^2\sin\omega t)^2}$$

$$=5\omega^2.$$

求下列指定的阶的导函数：

1156. $y=x(2x-1)^2(x+3)^3$；求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$.

解 y 是 x 的多项式，最高次数为 6 次，因而

$$y^{(6)}=1\cdot 2^2\cdot 1^3\cdot 6!=4\cdot 6!=2880,$$

$$y^{(7)}=0.$$

1157. $y=\frac{a}{x^m}$；求 y'''.

解 $y'=-amx^{-m-1}$,

$$y''=am(m+1)x^{-m-2},$$

$$y'''=-am(m+1)(m+2)x^{-m-3}$$

$$=-\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}(x\neq 0).$$

1158. $y=\sqrt{x}$；求 $y^{(10)}$.

解 $$y^{(10)}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{11}{2}\right)\left(-\frac{13}{2}\right)\left(-\frac{15}{2}\right)\left(-\frac{17}{2}\right)x^{-\frac{19}{2}}$$

$$=-\frac{17!!}{2^{10}\cdot x^{9}\sqrt{x}}(x>0),$$

其中 $17!!=1\cdot 3\cdots 17$.

1159. $y=\dfrac{x^2}{1-x}$；求 $y^{(8)}$.

解 $$y=\frac{x^2-1+1}{1-x}=-(x+1)+\frac{1}{1-x},$$

$$y'=-1+\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$y''=\frac{2}{(1-x)^3},$$

$$y'''=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4},$$

……

$$y^{(8)}=\frac{8!}{(1-x)^9}(x\neq 1).$$

1160. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$；求 $y^{(100)}$.

解 $y=(1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$，利用莱布尼兹公式，得

$$y^{(100)}=\sum_{i=0}^{100}C_{100}^{i}(1+x)^{(i)}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(100-i)}$$

$$=(1+x)\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(100)}$$

$$+ C_{100}^{1} \cdot \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(99)}$$

$$= (1+x) \cdot \frac{199!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{201}{2}}$$

$$+ 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{199}{2}}$$

$$= \frac{197!! \cdot (399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}(x<1).$$

1161. $y = x^2 e^{2x}$；求 $y^{(20)}$.

解 $$y^{(20)} = x^2(e^{2x})^{(20)} + 2xC_{20}^{1} \cdot (e^{2x})^{(19)}$$

$$+ 2C_{20}^{2}(e^{2x})^{(18)}$$

$$= 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95).$$

1162. $y = \frac{e^x}{x}$；求 $y^{(10)}$.

解 $$y^{(10)} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i} e^x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{(10-i)}$$

$$= e^x \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^{i}}{x^{i+1}},$$

其中 $A_{10}^{i} = 10 \cdot 9 \cdots (11-i)$ 及 $A_{10}^{0} = 1$.

1163. $y = x\ln x$；求 $y^{(5)}$.

解 $y' = 1 + \ln x$, $y'' = \frac{1}{x}$,

$$y^{(5)} = -\frac{3!}{x^4}(x>0).$$

1164. $y = \frac{\ln x}{x}$；求 $y^{(5)}$.

解 $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$,

$$y'' = \frac{-\dfrac{1}{x}\cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4}$$

$$= -\frac{3 - 2\ln x}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{-\dfrac{2}{x}\cdot x^3 - 3x^2(3 - 2\ln x)}{x^6}$$

$$= \frac{11 - 6\ln x}{x^4}.$$

$$y^{(4)} = \frac{-\dfrac{6}{x}\cdot x^4 - 4x^3(11 - 6\ln x)}{x^8}$$

$$= -\frac{50 - 24\ln x}{x^5}.$$

$$y^{(5)} = -\frac{-\dfrac{24}{x}\cdot x^5 - 5x^4(50 - 24\ln x)}{x^{10}}$$

$$= \frac{274 - 120\ln x}{x^6}(x > 0).$$

1165. $y = x^2\sin 2x$;求 $y^{(50)}$

解 $y^{(50)} = x^2(\sin 2x)^{(50)} + C_{50}^1\cdot 2x\cdot(\sin 2x)^{(49)}$

$$+ 2C_{50}^2(\sin 2x)^{(48)}$$

$$= 2^{50}x^2\sin\left(2x + \frac{50}{2}\pi\right)$$

$$+ 100x\cdot 2^{49}\sin\left(2x + \frac{49}{2}\pi\right)$$

$$+\frac{50\cdot 49}{1\cdot 2}\cdot 2^{49}\cdot\sin\left(2x+\frac{48}{2}\pi\right)$$

$$=2^{50}(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x$$

$$+\frac{1225}{2}\sin 2x\Big).$$

1166. $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$;求 y'''.

解 $$y'''=\cos 3x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'''$$

$$+C_3^1(\cos 3x)'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)''$$

$$+C_3^2(\cos 3x)''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'$$

$$+(\cos 3x)'''\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$$

$$=-\frac{28}{3^3}(-3)^3\cdot\frac{\cos 3x}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}$$

$$+3(-3\sin 3x)\cdot\left(\frac{4}{3^2}\right)(-3)^2$$

$$\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}+3\cdot(-3^2\cos 3x)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\cdot(-3)\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}+3^3\sin 3x$$

$$\cdot\frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{28-27(1-3x)^2}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}\cos 3x$$

$$+\frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}\sin 3x\left(x\neq\frac{1}{3}\right).$$

1167. $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$；求 $y^{(10)}$.

解 利用三角函数和，差与其积的互化公式，将 y 化简得

$$y=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x.$$

于是，

$$\begin{aligned}y^{(10)}&=\frac{1}{4}\cdot 4^{10}\sin\left(4x+\frac{10}{2}\pi\right)\\&\quad-\frac{1}{4}\cdot 6^{10}\sin\left(6x+\frac{10}{2}\pi\right)\\&\quad+\frac{1}{4}\cdot 2^{10}\sin\left(2x+\frac{10}{2}\pi\right)\\&=-2^{18}\sin 4x+2^{8}\cdot 3^{10}\sin 6x-2^{8}\sin 2x.\end{aligned}$$

1168. $y=x\operatorname{sh}x$；求 $y^{(100)}$.

解 $$\begin{aligned}y^{(100)}&=x(\operatorname{sh}x)^{(100)}+C_{100}^{1}(\operatorname{sh}x)^{(99)}\\&=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x.\end{aligned}$$

1169. $y=e^{x}\cos x$；求 $y^{(4)}$.

解 $$y'=e^{x}(\cos x-\sin x),$$

$$\begin{aligned}y''&=e^{x}[(\cos x-\sin x)+(-\sin x-\cos x)]\\&=-2e^{x}\sin x,\end{aligned}$$

$$y'''=-2e^{x}(\sin x+\cos x),$$

$$y^{(4)}=-2e^{x}[(\sin x+\cos x)+(\cos x-\sin x)]$$

$$= -4e^x\cos x.$$

1170. $y=\sin^2 x\ln x$；求 $y^{(6)}$.

解 $y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}\ln x$

$$=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\ln x.$$

$$y^{(6)}=\frac{(-1)^5}{2}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6}$$

$$-\frac{1}{2}(\cos 2x\cdot\ln x)^{(6)}$$

$$=-\frac{60}{x^6}+\left(\frac{144}{x^5}-\frac{160}{x^3}+\frac{96}{x}\right)\sin 2x$$

$$+\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cos 2x.$$

于下列各例中，视 x 为自变数，求指定的阶的微分．

1171. $y=x^5$；求 d^5y.

解 $d^5y=5!dx^5=120dx^5$.

1172. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；求 d^3y.

解 $d^3y=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}}dx^3$

$$=-\frac{15}{8x^3\cdot\sqrt{x}}dx^3\ (x>0).$$

1173. $y=x\cos 2x$；求 $d^{10}y$.

解 $d^{10}y=(x\cos 2x)^{(10)}dx^{10}$

$$=\left[2^{10}x\cos\left(2x+\frac{10\pi}{2}\right)\right.$$

$$+10\cdot 2^9\cos\left(2x+\frac{9}{2}\pi\right)\Big]dx^{10}$$

$$=-1024(x\cos 2x+5\sin 2x)dx^{10}.$$

1174. $y=e^x\ln x$;求 d^4y.

解 $d^4y=(e^x\ln x)^{(4)}dx^4$

$$=e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4.$$

1175. $y=\cos x\cdot\operatorname{ch}x$;求 d^6y.

解 $d^6y=(\cos x\cdot\operatorname{ch}x)^{(6)}dx^6=8\sin x\operatorname{sh}x dx^6.$

设 u 为 x 的可微分足够多次的函数,于下列各例中求指定的阶的微分.

1176. $y=u^2$;求 $d^{10}y$.

解 $d^{10}y=d^{10}(u\cdot u)=\sum_{i=0}^{10}C_{10}^id^{10-i}u\cdot d^iu$

$$=ud^{10}u+10d^9u\cdot du+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}d^8u\cdot d^2u$$

$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}d^7ud^3u$$

$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d^6ud^4u$$

$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(d^5u)^2$$

$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d^4ud^6u$$

$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}d^3ud^7u+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}d^2ud^8u$$

$$+ 10dud^9u + ud^{10}u$$

$$= 2ud^{10}u + 20dud^9u + 90d^2ud^8u$$

$$+ 240d^3ud^7u + 420d^4ud^6u + 252(d^5u)^2.$$

1177. $y = e^u$；求 d^4y.

解 $dy = e^u du$,

$d^2y = e^u du^2 + e^u d^2u$,

$d^3y = e^u[(du^3 + dud^2u) + d(du^2) + d^3u]$

$= e^u(du^3 + 3dud^2u + d^3u)$,

$d^4y = e^u[(du^4 + 3du^2d^2u + dud^3u)$

$+ d(du^2 \cdot du) + 3d(dud^2u) + d^4u]$

$= e^u(du^4 + 6du^2d^2u + 3d^2u^2 + 4dud^3u$

$+ d^4u)$.

1178. $y = \ln u$；求 d^3y.

解 $dy = \frac{1}{u}du$,

$d^2y = -\frac{1}{u^2}du^2 + \frac{1}{u}d^2u$,

$d^3y = \frac{2}{u^3}du^3 - \frac{2}{u^2}dud^2u - \frac{1}{u^2}d^2udu$

$+ \frac{1}{u}d^3u$

$= \frac{2}{u^3}du^3 - \frac{3}{u^2}dud^2u + \frac{1}{u}d^3u$.

1179. 视 x 为某个自变数的函数，由函数 $y=f(x)$ 求 d^2y，d^3y 及 d^4y.

解 $dy = f'(x)dx$

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dxd^2x + f'(x)d^3x,$$

$$\begin{aligned} d^4y &= f^{(4)}(x)dx^4 + 3f'''(x)dx^2d^2x \\ &\quad + 3f'''(x)dx^2d^2x + 3f''(x)(d^2x)^2 \\ &\quad + dxd^3x) + f''(x)dxd^3x + f'(x)d^4x \\ &= f^{(4)}(x)dx^4 + 6f'''(x)dx^2d^2x \\ &\quad + 4f''(x)dxd^3x + 3f''(x)(d^2x)^2 \\ &\quad + f'(x)d^4x. \end{aligned}$$

1180. 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y=f(x)$ 的导函数 y'' 及 y，但不假定 x 为自变量.

解 $y' = \dfrac{dy}{dx}$,

$$y'' = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3},$$

$$y''' = \frac{d\left(\dfrac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}\right)}{dx}$$

$$=\frac{dx\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3d^2x\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^5}.$$

1181. 证明:函数

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数,满足方程

$$y'' + y = 0.$$

证 $y' = -C_1\sin x + C_2\cos x,$

$$y'' = -C_1\cos x - C_2\sin x = -y,$$

所以

$$y'' + y = 0.$$

1182. 证明:函数

$$y = C_1\operatorname{ch}x + C_2\operatorname{sh}x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数,满足方程

$$y'' - y = 0.$$

证 $y' = C_1\operatorname{sh}x + C_2\operatorname{ch}x,$

$$y'' = C_1\operatorname{ch}x + C_2\operatorname{sh}x = y,$$

所以

$$y'' - y = 0.$$

1183. 证明:函数

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x},$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数，λ_1 及 λ_2 为常数，满足方程

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0.$$

证 $y' = C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x},$

$$y'' = C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x},$$

于是，

$$\begin{aligned}
&y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y \\
&= C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x} - C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x} \\
&\quad - C_1\lambda_1\lambda_2e^{\lambda_1 x} - C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x} - C_2\lambda_1\lambda_2e^{\lambda_2 x} \\
&\quad + C_1\lambda_1\lambda_2e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_1\lambda_2e^{\lambda_2 x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

1184. 证明：函数

$$y = x^n[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)],$$

其中 C_1 及 C_2 为任意常数，n 为常数，满足方程：

$$x^2y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0.$$

证 $y' = nx^{n-1}[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)]$

$$\qquad + x^{n-1}[C_2\cos(\ln x) - C_1\sin(\ln x)],$$

$$y'' = x^{n-2}\{(n^2 - n - 1)[C_1\cos(\ln x)$$

$$+C_2\sin(\ln x)]+(2n-1)[C_2\cos(\ln x)$$

$$-C_1\sin(\ln x)]\},$$

于是，

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y$$
$$=x^n\{(n^2-n-1)[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]$$
$$+(2n-1)[C_2\cos(\ln x)-C_1\sin(\ln x)]\}$$
$$+(1-2n)x^n\{n[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]$$
$$+[C_2\cos(\ln x)-C_1\sin(\ln x)]\}$$
$$+(1+n^2)x^n[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]$$
$$=0.$$

1185. 证明：函数

$$y=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$
$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

其中 C_1,C_2,C_3 及 C_4 为任意常数，满足方程

$$y^{(4)}+y=0.$$

证 $y'=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right.$

$$\left.-\frac{C_1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$
$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{C_3}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right.$$

$$
-\frac{C_4}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_3}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}
$$

$$
+\frac{C_4}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg),
$$

$$
y''=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\Bigg(\frac{C_1}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}
$$

$$
-\frac{C_1}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}
$$

$$
-\frac{C_1}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}
$$

$$
-\frac{C_1}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_2}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg)
$$

$$
+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\Bigg(\frac{C_3}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_4}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}
$$

$$
+\frac{C_3}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}
$$

$$
+\frac{C_3}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}
$$

$$
-\frac{C_3}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg)
$$

$$
=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_2\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-C_1\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)
$$

$$
+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-C_4\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right),
$$

$$
y^{(4)}=(y'')''=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\Bigg(-C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}
$$

$$- C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big(-C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} - C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$= -y,$$

于是，

$$y^{(4)} + y = 0.$$

1186. 证明：若函数 $f(x)$ 有 n 阶导函数，则

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

证　每求一次导函数，均要乘以因子 $(ax+b)' = a$，所以

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

1187. 若 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$，求 $P^{(n)}(x)$.

解　$P'(x) = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$

$$P''(x) = a_0n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}$$

……

$$P^{(n)}(x) = n!a_0.$$

求 $y^{(n)}$，设：

1188. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

解 $y' = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$;

$$y'' = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3};$$

利用数学归纳法,可证得

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}$$

$$\left(x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0\right).$$

事实上,对于 $n=2$ 等式成立,设对于 n 等式成立,则对于 $n+1$ 有

$$y^{(n+1)} = \frac{-(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n \cdot c}{(cx+d)^{2(n+1)}}$$

$$= \frac{(-1)^{(n+1)-1}c^{(n+1)-1}(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{(n+1)+1}}$$

即对于 $n+1$ 等式也成立,于是得证.

1189. $y = \frac{1}{x(1-x)}$.

解 $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$.

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}$$

$$= n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$$

$$(x \neq 0, x \neq 1).$$

1190. $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

解 $y = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$.

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

$$(x \neq 1, x \neq 2).$$

1191. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

解 $$y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots$$

$$\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(-2)^n(1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}\left(x < \frac{1}{2}\right).$$

1192. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

解 $$y = \frac{(x+1)-1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{\frac{2}{3}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}}.$$

$$y^{(n)} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots$$

$$\left(-\frac{3n-5}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n-2}{3}}$$

$$-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdots$$

$$\left(-\frac{3n-2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-5)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}[2(1+x)$$

$$+(3n-2)]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$$

$(n \geqslant 2; x \neq -1)$.

1193. $y = \sin^2 x$.

解 $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$,

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = (\sin 2x)^{(n-1)}$$
$$= 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$
$$= -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1194. $y = \cos^2 x$.

解 $y' = -2\cos x\sin x = -\sin 2x$,

$$y^{(n)} = -(\sin 2x)^{(n-1)}$$
$$= -2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$
$$= 2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1195. $y = \sin^3 x$.

解 $y = \sin x\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin x(1 - \cos 2x)$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x\cos 2x$$
$$= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$
$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1196. $y = \cos^3 x$.

解 $y=\cos x\cos^2 x=\frac{1}{2}\cos x(1+\cos 2x)$

$$=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x\cos 2x$$

$$=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x.$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)+\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

1197. $y=\sin ax\sin bx$.

解 $y=\frac{1}{2}\cos(a-b)x-\frac{1}{2}\cos(a+b)x$.

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a-b)^n\cos\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$

$$-\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

1198. $y=\cos ax\cos bx$.

解 $y=\frac{1}{2}\cos(a-b)x+\frac{1}{2}\cos(a+b)x$.

$$y^{(n)}=\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$

$$+\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

1199. $y=\sin ax\cos bx$.

解 $y=\frac{1}{2}\sin(a+b)x+\frac{1}{2}\sin(a-b)x$,

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a+b)^n\sin\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$

$$+\frac{1}{2}(a-b)^n\sin\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

1200. $y = \sin^2 ax\cos bx$.

解 $y = \frac{1}{2}\cos bx(1 - \cos 2ax)$

$$= \frac{1}{2}\cos bx - \frac{1}{4}\cos(2a+b)x$$

$$- \frac{1}{4}\cos(2a-b)x.$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}b^n\cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$- \frac{1}{4}(2a+b)^n\cos\left[(2a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$- \frac{1}{4}(2a-b)^n\cos\left[(2a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

解 $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

$$y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1202. $y = x\cos ax$.

解 $y^{(n)} = x(\cos ax)^{(n)} + n(\cos ax)^{(n-1)}$

$$= a^n x\cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$+ na^{n-1}\cos\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$= a^n x\cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$+ na^{n-1}\sin\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right).$$

1203. $y = x^2\sin ax$.

解 $$y^{(n)} = a^n x^2\sin\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right)$$

$$+ 2na^{n-1}x\sin\left(ax+\frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$+ n(n-1)a^{n-2}\sin\left(ax+\frac{n-2}{2}\pi\right)$$

$$= a^n\left[x^2-\frac{n(n-1)}{a^2}\right]\sin\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right)$$

$$- 2na^{n-1}x\cos\left(ax+\frac{n}{2}\pi\right).$$

1204. $y = (x^2+2x+2)e^{-x}$.

解 $$y^{(n)} = (-1)^n(x^2+2x+2)e^{-x}$$

$$+ 2(-1)^{n-1}(x+1)e^{-x}\cdot n$$

$$+ (-1)^{n-2}n(n-1)e^{-x}$$

$$= (-1)^n e^{-x}[x^2-2(n-1)x$$

$$+ (n-1)(n-2)].$$

1205. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

解 $$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^x\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}$$

$$= e^x\left\{\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right\}.$$

1206. $y = e^x\cos x$.

解　$y' = e^x(\cos x - \sin x) = 2^{\frac{1}{2}}e^x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

$$y'' = 2^{\frac{1}{2}}e^x\left[\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{\frac{2}{2}}e^x\cos\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

1207$^+$. $y = e^x\sin x$.

解　$y' = e^x(\sin x + \cos x) = 2^{\frac{1}{2}}e^x\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

$$y'' = 2^{\frac{1}{2}}e^x\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{\frac{2}{2}}e^x\sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

1208. $y = \ln\frac{a + bx}{a - bx}$.

解　$y' = \frac{b}{a + bx} + \frac{b}{a - bx}$,

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n b^n (n-1)!}{(a + bx)^n} + \frac{b^n (n-1)!}{(a - bx)^n}$$

$$= \frac{(n-1)!b^n}{(a^2 - b^2x^2)^n}[(a + bx)^n$$

$$+ (-1)^{n-1}(a - bx)^n]\quad\left(|x| < \left|\frac{a}{b}\right|\right).$$

1209. $y=e^{ax}P(x)$，其中 $P(x)$ 为多项式．

解 $$y^{(n)}=e^{ax}[a^nP(x)+C_n^1a^{n-1}P'(x)+\cdots+P^{(n)}(x)].$$

1210. $y=x\operatorname{sh}x$.

解 $$\begin{aligned}y^{(n)}&=x(\operatorname{sh}x)^{(n)}+n(\operatorname{sh}x)^{(n-1)}\\&=\frac{x}{2}[e^x-(-1)^ne^{-x}]+\frac{n}{2}[e^x-(-1)^{n-1}e^{-x}]\\&=\frac{1}{2}[(x+n)e^x-(-1)^n(x-n)e^{-x}]\\&=\frac{1}{2}[(x+n)(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)-(-1)^n(x-n)(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)]\\&=\frac{1}{2}\{[(x+n)-(-1)^n(x-n)]\operatorname{ch}x+[(x+n)+(-1)^n(x-n)]\operatorname{sh}x\}.\end{aligned}$$

1211. 求 d^ny，设 $y=x^ne^x$.

解 $$\begin{aligned}d^ny&=y^{(n)}dx^n\\&=e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+n!\right]dx^n.\end{aligned}$$

1212. 求 d^ny，设 $y=\frac{\ln x}{x}$.

解 $$d^ny=y^{(n)}dx^n$$

$$= \left[\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}\ln x + n\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}\right.$$

$$+ C_n^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)}$$

$$\left. + \cdots + \frac{1}{x}(\ln x)^{(n)}\right]dx^n$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]dx^n (x > 0).$$

1213. 证明等式：

$$(1)\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right]^{(n)}$$

$$= e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$$

及 $(2)\left[e^{ax}\cos(bx+c)\right]^{(n)}$

$$= e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi),$$

其中 $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

证 $(1)\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right]'$

$$= e^{ax}\left[a\sin(bx+c) + b\cos(bx+c)\right]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c)\right.$$

$$\left. + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c)\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx+c+\varphi),$$

其中 $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right]''$$

$$= (a^2+b^2)^{\frac{2}{2}} e^{ax}\sin(bx+c+2\varphi),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

利用数学归纳法可证得

$$[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}$$
$$= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi).$$

(2) 同理可证

$$[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}$$
$$= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\cos(bx+c+n\varphi).$$

1214. 求 $y^{(n)}$，设：

(а) $y = \operatorname{ch}ax\cos bx$；(б) $y = \operatorname{ch}ax\sin bx$；

(в) $y = \operatorname{sh}ax\cos bx$；(г) $y = \operatorname{sh}ax\sin bx$.

解 (а) $y = \frac{1}{2}e^{ax}\cos bx + \frac{1}{2}e^{-ax}\cos bx$,

利用 1213 题(2) 的结果，得

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}[e^{ax}\cos(bx+n\varphi)$$
$$+ e^{-ax}\cos(bx+n\pi-n\varphi)]$$
$$= \frac{1}{2}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\Big\{e^{ax}\Big[\cos\Big(bx$$
$$+\frac{n}{2}\pi\Big)\cos\Big(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\Big)$$
$$-\sin\Big(bx+\frac{n}{2}\pi\Big)\sin\Big(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\Big)\Big]$$

$$+e^{-ax}\left[\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.\left.+\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right]\right\}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left\{\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\cdot\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)-\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$$

$$\left.\cdot\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\cdot\operatorname{ch}ax\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)$$

$$\left.-\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\operatorname{sh}ax\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right]$$

同样方法可求得：

(б) $$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{ch}ax\right.$$

$$\cdot\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)+\sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right)\operatorname{sh}ax$$

$$\left.\cdot\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right];$$

(в) $$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\sin n\varphi\operatorname{ch}ax\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.+\cos n\varphi\operatorname{sh}ax\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right];$$

(г) $$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[-\sin n\varphi\operatorname{ch}ax\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.+\cos n\varphi\operatorname{sh}ax\sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right)\right].$$

其中 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

1215. 将函数
$$f(x)=\sin^{2p}x,$$
其中 p 为自然数，化为三角多项式：
$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}A_k\cos 2kx,$$
以求 $f^{n}(x)$.

解 设 $t=\cos x+i\sin x$，则
$$\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t})$$
其中 $\bar{t}$ 为 t 的共轭复数.

于是
$$\sin^{2p}x=\frac{1}{(2i)^{2p}}(t-\bar{t})^{2p}$$
$$=\frac{1}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}C_{2p}^{k}t^{2p-k}(-1)^k\bar{t}^k$$
$$=(-1)^p\frac{1}{(2i)^{2p}}C_{2p}^{p}+\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^{k}(-1)^k\cdot\cos(2p-2k)x.$$
所以，
$$(\sin^{2p}x)^{(n)}=\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^{k}(-1)^k(2p-2k)^n\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}(p-k)^n C_{2p}^{k}\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

1216. 设：

(a) $f(x)=\sin^{2p+1}x$；　　(б) $f(x)=\cos^{2p}x$；

(в) $f(x)=\cos^{2p+1}x$.

其中 p 为正整数，求 $f^{(n)}(x)$.

解　(a) 设 $t=\cos x+i\sin x$，则

$$\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}),$$

$$\sin^{2p+1}x=\frac{1}{(2i)^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^{k}t^{2p+1-k}(-1)^{k}\bar{t}^{k}$$

$$=\frac{1}{(2i)^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^{k}(-1)^{k}[\cos(2p+1-2k)x+i\sin(2p+1-2k)x]$$

$$=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}2^{-2p}C_{2p+1}^{k}\sin(2p+1-2k)x.$$

所以，

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}C_{2p+1}^{k}\frac{(2p+1-2k)^{n}}{2^{2p}}\cdot\sin\left[(2p+1-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$

类似 1215 题及本题(a) 的方法，可求得：

(б) $f^{n}(x)=(\cos^{2p}x)^{(n)}$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}2^{n-2p+1}(p-k)^{n}C_{2p}^{k}\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right];$$

(в) $f^{(n)}(x)=(\cos^{2p+1}x)^{(n)}$

$$=\sum_{k=0}^{p}\frac{(2p+1-2k)^{n}}{2^{2p}}C_{2p+1}^{k}\cos[(2p+1$$

$$-2k)x+\frac{n}{2}\pi\Big].$$

1217. 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$$

证明

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\mathrm{arcctg}x].$$

证　将复数 $x+i$ 及 $x-i$ 化成下列形式：

$$x+i=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

$$x-i=r(\cos\theta-i\sin\theta).$$

其中 $r=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}, \theta=\mathrm{arcctg}x.$

于是

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1}{x-i}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+i}\right)^{(n)}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}}[(x+i)^{n+1}-(x-i)^{n+1}]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}}\{r^{n+1}[\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta]-r^{n+1}[\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta]\}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}}r^{n+1}\sin(n+1)\theta$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\mathrm{arc\,ctg}x],$$

所以，

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\text{arc ctg}x].$$

1218. 求函数 $f(x)=\text{arc tg}x$ 的 n 阶导函数.

解 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

利用 1217 题的结果,得

$$f^{n}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin[n\text{arc ctg}x]$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\text{arc tg}\frac{1}{x}\right)$$

$(x\neq 0)$.

求 $f^{(n)}(0)$,设:

1219. (a) $f(x)=\frac{1}{(1-2x)(1+x)}$;

(б) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

解 (a) $f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1-2x}\right)$.

于是,

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}+\frac{n!2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}}\right].$$

所以

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{3}[(-1)^n+2^{n+1}].$$

(б) $f(x)=-\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

于是,

$$f^{(n)}(x)=\frac{(2n-3)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}}$$

$$+\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

所以

$$f^{(n)}(0)=\frac{(2n-3)!!}{2^n}+\frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

$$=\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}(n>1).$$

1220. (а)$f(x)=x^2e^{ax}$;　　(б)$f(x)=\operatorname{arc\,tg}x$;

(в)$f(x)=\arcsin x$.

解　(а)$f^{(n)}(x)=x^2a^ne^{ax}+2nxa^{n-1}e^{ax}$

$$+n(n-1)a^{n-2}e^{ax},$$

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)a^{n-2};$$

(б) 利用 1218 题的结果，得

$$f^{(2k)}(0)=0 \text{ 及 } f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$$

$$(k=0,1,2,\cdots);$$

(в)$y'=f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$y''=f''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

若以添加下标“0”表示在 $x=0$ 时的导数值，则得

$$y'_0=f'(0)=1, y''_0=f''(0)=0,$$

并且有

$$(1-x^2)y''-xy'=0.$$

对上式应用莱布尼兹公式，得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}$$

$$-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0.$$

在上式中，令 $x=0$，则有

$$y_0^{(n+2)}-n(n-1)y_0^{(n)}-ny_0^{(n)}=0,$$

即

$$y_0^{(n+2)} = n^2 y_0^{(n)}.$$

由于 $y''_0 = 0$，故

$$y_0^{(2k)} = f^{(2k)}(0) = 0 \qquad (k = 0,1,2,\cdots);$$

又由于 $y'_0 = 1$，故

$$\begin{aligned} y_0^{(2k+1)} &= f^{(2k+1)}(0) \\ &= (2k-1)^2 y_0^{(2k-1)} \\ &= (2k-1)^2 \cdot (2k-3)^2 y_0^{(2k-3)} \\ &= \cdots \\ &= [1 \cdot 3 \cdots (2k-1)]^2 \\ &= [(2k-1)!!]^2 (k = 1,2,\cdots). \end{aligned}$$

1221. (a) $f(x) = \cos(m \arcsin x)$;

(б) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

解 (a) $y' = f'(x)$

$$= -\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \sin(m \arcsin x),$$

$$y'' = -\frac{m^2}{1-x^2} \cos(m \arcsin x) - \frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(m \arcsin x).$$

于是，

$$y'_0 = f'(0) = 0, y''_0 = f''(0) = -m^2,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' + m^2 y = 0.$$

对上式应用莱布尼兹公式，得

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} + m^2 y^{(n)} = 0.$$

令 $x=0$,即得

$$y_0^{(n+2)}+(m^2-n^2)y_0^{(n)}=0.$$

由于 $y'_0=0$,故 $y_0^{(2k-1)}=f^{(2k-1)}(0)=0(k=1,2,\cdots)$;

又由于 $y''_0=-m^2$,故

$$\begin{aligned}y_0^{(2k)}&=f^{2k}(0)=-[m^2-(2k-2)^2]y_0^{(2k-2)}\\&=\{-[m^2-(2k-2)^2]\}\\&\quad\cdot\{-[m^2-(2k-4)^2]\}y_0^{(2k-4)}\\&=\cdots\cdots\\&=(-1)^{k-1}[m^2-(2k-2)^2]\\&\quad[m^2-(2k-4)^2]\cdots(m^2-2^2)y''_0\\&=(-1)^k m^2(m^2-2^2)\cdots[m^2-(2k-2)^2]\\&\quad(k=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

(б) $y'=f'(x)=\dfrac{m}{\sqrt{1-x^2}}\cos(m\arcsin x)$,

$$\begin{aligned}y''=f''(x)&=\frac{m^2}{1-x^2}\sin(m\arcsin x)\\&\quad+\frac{mx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cos(m\arcsin x).\end{aligned}$$

于是,

$$y'_0=f'(0)=m,y''_0=f''(0)=0,$$

并且有

$$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0,$$

这与本题(a)所得的方程是一样的,因而也有与(a)同样的结果:

$$y_0^{(n+2)}+(m^2-n^2)y_0^{(n)}=0.$$

由于,$y''_0=0$,故 $y_0^{(2k)}=f^{(2k)}(0)=0\ (k=1,2,\cdots)$;

又由于 $y'_0 = m$,故

$$
\begin{aligned}
y_0^{(2k+1)} &= f^{(2k+1)}(0) \\
&= -\left[m^2 - (2k-1)^2\right] y_0^{(2k-1)} = \cdots \\
&= (-1)^k m(m^2 - 1^2)\cdots\left[m^2 - (2k-1)^2\right] \\
&\quad (k = 1, 2, \cdots).
\end{aligned}
$$

1222. (a) $f(x) = (\text{arc tg}x)^2$; (б) $f(x) = (\text{arc sin}x)^2$.

解 (a) 仍以下标带"0"者表示在 $x = 0$ 时的导数值,应用莱布尼兹公式及 1220 题(б) 的结果,即得

$$
\begin{aligned}
f^{(2k-1)}(0) &= (\text{arc tg}x \cdot \text{arc tg}x)_0^{(2k-1)} \\
&= 0 \ (k = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
f^{(2k)}(0) &= (\text{arc tg}x \cdot \text{arc tg}x)_0^{(2k)} \\
&= \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^{i} (\text{arc tg}x)_0^{(i)} \cdot (\text{arc tg}x)_0^{(2k-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (\text{arc tg}x)_0^{(2i+1)} \\
&\quad \cdot (\text{arc tg}x)_0^{(2k-2i-1)} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (-1)^i (2i)! \\
&\quad \cdot (-1)^{k-i-1} (2k-2i-2)! \\
&= (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2k)!}{(2i+1)!(2k-2i-1)!} \\
&\quad \cdot (2i)!(2k-2i-2)! \\
&= (-1)^{k-1}(2k)! \\
&\quad \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(2i+1)(2k-2i-1)} \\
&= (-1)^{k-1}(2k)!
\end{aligned}
$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{k-1}\left[\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{2k-2i-1}\right)\right]$$

$$= (-1)^{k-1}2(2k-1)!\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2(k-i)-1}$$

$$= (-1)^{k-1}(2k-1)!\cdot$$

$$2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2k-1}\right)(k=1,2,\cdots).$$

(6) $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$ 或

$$\sqrt{1-x^2}f'(x)=2\arcsin x,$$

对上式两边再求导，得

$$\sqrt{1-x^2}f''(x)-\frac{xf'(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)-2=0.$$

应用莱布尼兹公式，得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)$$
$$-n(n-1)f^{(n)}(x)-xf^{(n+1)}(x)-nf^{(n)}(x)=0.$$

在上式中令 $x=0$，即得

$$f^{(n+2)}(0)-n^2f^{(n)}(0)=0.$$

由于 $f'(0)=0$，故

$$f^{2k-1}(0)=0\ (k=1,2,\cdots);$$

又由于 $f''(0)=2$，故

$$f^{(2k)}(0)=(2k-2)^2(2k-4)^2\cdots 2^2f''(0)$$
$$=2^{(2k-1)}[(k-1)!]^2(k=1,2,\cdots).$$

1223. 设

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 于 a 点的邻区内有 $(n-1)$ 阶的连续导函数，求 $f^{(n)}(a)$.

解 由莱布尼兹公式，得

$$\begin{aligned}f^{(n-1)}(x)=&(x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x)\\&+C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots\\&+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)^2\varphi'(x)\\&+n!(x-a)\varphi(x).\end{aligned}$$

于是，$f^{(n-1)}(a)=0$.

按导数定义，即得

$$\begin{aligned}f^{(n)}(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}[(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)\\&\quad+C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-2}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots\\&\quad+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)\varphi'(x)\\&\quad+n!\varphi(x)]\\&=n!\varphi(a).\end{aligned}$$

1224. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & 若\ x\neq0,\\ 0, & 若\ x=0\end{cases}$$

(n 为自然数) 于点 $x=0$ 有一直到 n 阶的导函数，而无 $(n+1)$ 阶导函数.

证 由莱布尼兹公式，当 $x\neq0$ 时得

$$f^{m}(x)=\left(x^{2n}\sin\frac{1}{x}\right)^{(m)}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} C_m^i (x^{2n})^{m-i} \left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(i)}$$

首先指出，有

$$\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(i)} = \sum_{k=1}^{i-1}\left[a_k x^{-(i+k)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

$$+ (-x^{-2})^i\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{i\pi}{2}\right),$$

$$(x \neq 0),$$

其中 a_k 是某些常数．现用数学归纳法证明之：

当 $i = 1$ 时，命题显然成立；

设当 $i = N$ 时，命题成立，要证命题对 $i = N + 1$ 时也成立．事实上，有

$$\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(N+1)} = \sum_{k=1}^{N-1} a_k\left[x^{-(N+k)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]'$$

$$+ \left[(-x^{-2})^N\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N\pi}{2}\right)\right]'$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} a_k[-(N+k)x^{-(N+1+k)}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right) + x^{-(N+k)}$$

$$\cdot (-x^{-2})\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k+1}{2}\pi\right)]$$

$$+ [N(-x^{-2})^{N-1}\cdot(2x^{-3})$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N\pi}{2}\right) + (-x^{-2})^{N+1}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N+1}{2}\pi\right)]$$

$$= \sum_{k=1}^{(N+1)-1}[b_k x^{-(N+1+k)}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)\Big]+(-x^{-2})^{N+1}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{1}{x}+\frac{N+1}{2}\pi\right),$$

其中b_k是一些适当的常数．于是，命题对于一切自然数均成立．

因而，我们有

$$f^{(m)}(x)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\cdot\frac{(2n)!}{(2n-m+i)!}x^{2n-m+i}$$

$$\cdot\Big[\sum_{k=1}^{i-1}a_kx^{-(i+k)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$+(-x^{-2})^i\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{i\pi}{2}\right)\Big](x\neq 0).$$

于是

$$f^{(m)}(x)=(-1)^mx^{2(n-m)}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$+O(|x|^{2(n-m)+1}(x\to 0)$$

$$(m=1,2,\cdots,n). \tag{*}$$

由于

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x^{2n-1}\sin\frac{1}{x}=0,$$

故由(*)，得知

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\Big[-x^{2n-3}\sin\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}\right)+O(|x|^{2n-2})\Big]$$

$$=0,$$

一直推下去，得

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\Big[(-1)^{n-1}x\sin\Big(\frac{1}{x}+\frac{(n-1)\pi}{2}\Big)$$
$$+O(|x|^2)\Big]$$
$$=0.$$

但

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\Big[\frac{(-1)^n}{x}\sin\Big(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\Big)+O(1)\Big],$$

在 $x=0$ 近旁，$\frac{(-1)^n}{x}\sin\Big(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\Big)$ 无界且振荡，故 $\lim\limits_{x\to 0}\Big[\frac{(-1)^n}{x}\sin\Big(\frac{1}{x}+\frac{n\pi}{2}\Big)+O(1)\Big]$ 不存在，因而 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在．证毕

1225. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处是无穷次可微分的．作出此函数的图形．

证 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$. 下面我们指出，对于任何自然数 n，均有

$$f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_n\Big(\frac{1}{x}\Big)\quad(x\neq 0),$$

其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式．现用数学归纳法证明之：

当 $n=1$ 时，命题显然成立；

设当 $n=k$ 时命题成立，即 $f^{(k)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\Big(\frac{1}{x}\Big)$，

$P_k(t)$ 是关于 t 的某多项式. 要证命题对于 $n=k+1$ 时也成立. 事实上,有

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left[e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right]' \\
&= \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}P_k\left(\frac{1}{x}\right)+e^{-\frac{1}{x^2}}P'_k\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\quad \cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= e^{-\frac{1}{x^2}}\left\{2\left(\frac{1}{x}\right)^3P_k\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^2P'_k\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \\
&= e^{-\frac{1}{x^2}}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right),
\end{aligned}$$

其中 $P_{k+1}(t)$ 是关于 t 的另一多项式. 于是,命题对于一切自然数 n 均成立.

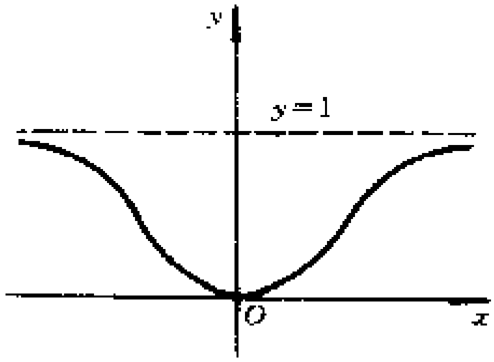


图 2.37

现在,证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是无穷次可微分的. 首先,注意到

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0,$$

其中最末一式的极限求法可参看 654 题(6). 仍用此法,设 $f^{(n)}(0)=0$,则可证明 $f^{(n+1)}(0)=0$. 事实上,有

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x} \\
&= \lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{P_n{}^*\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right\} = 0,$$

$(P_n{}^*(t) = tp_n(t)$ 也是 t 的多项式).

根据数学归纳法,可知 $f^{(n)}(0) = 0$ 对于一切自然数 n 均成立,即函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处无穷次可微分,且其各阶导数为零. 图象如图 2.37 所示.

1226. 证明:契比协夫多项式

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)(m = 0,1,2,\cdots)$$

满足方程式

$$(1 - x^2)T''_m(x) - xT'_m(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

证 $T'_m(x) = \dfrac{m}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)$

$(|x| < 1)$,

$$T''_m(x) = -\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)}\cos(m\arccos x) + \frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(m\arccos x).$$

于是,

$$(1 - x^2)T''_m(x) = -\frac{m^2}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x) + \frac{mx}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)$$
$$= -m^2T_m(x) + xT'_m(x),$$

即

$$(1 - x^2)T''_m(x) - xT'_m(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

1227. 证明:勒襄德多项式

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}[(x^2 - 1)^m]^{(m)}(m = 0,1,2,\cdots)$$

满足方程式

$$(1-x^2)P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)P_m(x)=0$$

证 设 $y=(x^2-1)^m$，就有

$$y'=2mx(x^2-1)^{m-1}\text{或}(x^2-1)y'=2mxy.$$

对上式两端各取 $(m+1)$ 阶导函数，按莱布尼兹公式，即得

$$(x^2-1)y^{(m+2)}+2(m+1)xy^{(m+1)}+m(m+1)y^{(m)}=2mxy^{(m+1)}+2m(m+1)y^{(m)}.$$

于是，

$$(x^2-1)y^{(m+2)}+2xy^{(m+1)}-m(m+1)y^{(m)}=0,$$

两端再以 $\frac{1}{2^m m!}$ 乘之，并以 $P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}y^{(m)}$ 代入，即得所要证明的等式

$$(1-x^2)P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

1228. 契比协夫——拉格耳多项式定义如下：

$$L_m(x)=e^x(x^m e^{-x})^{(m)}\ (m=0,1,2,\cdots).$$

求多项式 $L_m(x)$ 的明显的表达式．

证明：$L_m(x)$ 满足方程

$$xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL_m(x)=0.$$

解 按莱布尼兹公式，有

$$L_m(x)=e^x\{(-1)^m x^m e^{-x}+(-1)^{m-1}C_m^1 m x^{m-1}e^{-x}$$

$$+\cdots+(-1)C_m^{m-1}m!xe^{-x}+m!e^{-x}\}$$

$$=(-1)^m x^m+(-1)^{m-1}C_m^1 mx^{m-1}$$

$$+\cdots+(-1)C_m^{m-1}m!x+m!$$

$$=(-1)^m[x^m-m^2x^{m-1}+\cdots$$

$$+(-1)^{m-1}m^2(m-1)!x+$$

$$(-1)^m m!]$$

其次,设 $y=x^m e^{-x}$,就有

$$y'=mx^{m-1}e^{-x}-x^m e^{-x},$$

于是,

$$xy'+(x-m)y=0.$$

在上述等式两端各取$(m+1)$阶导函数,按莱布尼兹公式,即得

$$xy^{(m+2)}+(m+1)y^{(m+1)}+(x-m)y^{(m+1)}$$

$$+(m+1)y^{(m)}=0$$

或

$$xy^{(m+2)}+(1+x)y^{(m+1)}+(m+1)y^{(m)}=0.$$

再设 $z=y^{(m)}$,则由上式可得

$$xz''+(1+x)z'+(m+1)z=0. \qquad (1)$$

由于 $L_m(x)=e^x\cdot z$,故

$$L'_m(x)=e^x(z+z'),L''_m(x)=e^x(z+2z'+z''),$$

于是

$$xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL_m(x)$$

$$=e^x\{x(z+2z'+z'')+(1+x)(z+z')+mz\}$$

$$=e^x\{xz''+(x+1)z'+(m+1)z\}. \qquad (2)$$

将(1)式代入(2)式,即证得

$$xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL_m(x)=0.$$

1229. 设 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$，其中 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 为可微分 n 次的函数.

证明：$\dfrac{d^n y}{dx^n}=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k(x)f^{(k)}(u)$，

其中系数 $A_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 与函数 $f(u)$ 无关.

证 由于

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x),$$

故命题当 $n=1$ 时成立；

设当 $n=m$ 时命题成立，即有

$$\frac{d^m y}{dx^m}=\sum_{k=1}^{m}A_k(x)f^{(k)}(u),$$

要证命题对于 $n=m+1$ 时也成立. 事实上，有

$$\begin{aligned}\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}&=\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{m}A_k(x)f^{(k)}(u)\\&=\sum_{k=1}^{m}\{A'_k(x)f^{(k)}(u)\\&\quad+A_k(x)f^{(k+1)}(u)\varphi'(x)\}\\&=\sum_{k=1}^{m+1}B_k(x)f^{(k)}(u),\end{aligned}$$

其中，$B_1(x)=A'_1(x)$，$B_k(x)=\varphi'(x)A_{k-1}(x)+A'_k(x)$ $(k=2,3,\cdots,m)$，$B_{m+1}(x)=A_m(x)\varphi'(x)$，它们均与 $f(u)$ 无关.

于是，按数学归纳法得知

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n}A_k(x)f^{(k)}(u)$$

对于一切自然数 n 均成立.

1230. 证明：对于复合函数 $y=f(x^2)$ 的 n 阶导函数，下面的公

式正确

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \cdots.$$

证 当 $n = 1$ 时公式成立，事实上，

$$\frac{dy}{dx} = 2xf(x^2).$$

设当 $n = m$ 时公式成立，要证公式对于 $n = m + 1$ 时也成立．事实上，有

$$\begin{aligned}
\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) \\
&= 2m(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) + (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\
&\quad + \frac{m(m-1)}{1!} 2(m-2)(2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) \\
&\quad + \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\
&\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \\
&\quad \cdot 2(m-4)(2x)^{m-5} f^{(m-2)}(x^2) \\
&\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \\
&\quad \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \cdots \\
&= (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\
&\quad + \left[2m + \frac{m(m-1)}{1!}\right](2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\
&\quad + \left[\frac{2m(m-1)(m-2)}{1!}\right. \\
&\quad \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}\right]
\end{aligned}$$

$$\cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \cdots$$

$$- (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2)$$

$$+ \frac{(m+1)m}{1!}(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2)$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2!}$$

$$\cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \cdots$$

这正是公式对于 $n = m + 1$ 时的情形．于是，按数学归纳法得知，公式对于一切自然数 n 均成立．

1231．契比协夫－厄耳米特多项式定义如下：

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)} \quad (m = 0,1,2,\cdots).$$

求多项式 $H_m(x)$ 的明显的表达式．

证明：$H_m(x)$ 满足方程

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

解　设 $y = e^{-x^2}$，则有

$$y' = (-2x)e^{-x^2} = (-1)^1(2x)^1 e^{-x^2}.$$

$$y'' = e^{-x^2}[(-2x)^2 - 2]$$

$$= [(-1)^2(2x)^2 - 2]e^{-x^2},$$

一般地，可用数学归纳法证明

$$y^{(m)} = [(-1)^m(2x)^m + (-1)^{m-1}\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}$$

$$+ (-1)^{m-2}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}$$

$$\cdot (2x)^{m-4} + \cdots]e^{-x^2}.$$

于是，得

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} y^{(m)}$$

$$= (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}-\cdots.$$

又 $y'+2xy=0$.

对上式两端各取$(m+1)$阶导函数，按莱布尼兹公式，即得

$$y^{(m+2)}+2xy^{(m+1)}+2(m+1)y^{(m)}=0.$$

再设 $z=y^{(m)}$，上式就是

$$z''+2xz'+2(m+1)z=0. \tag{1}$$

由 $H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}z$，得

$$H'_m(x)=(-1)^m e^{x^2}(2xz+z'),$$

$$H''_m(x)=(-1)^m e^{x^2}[(4x^2+2)z+4xz'+z''].$$

从而有

$$\begin{aligned}&H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)\\&=(-1)^m e^{x^2}\{(4x^2+2)z+4xz'+z''-4x^2z\\&\quad-2xz'+2mz\}\\&=(-1)^m e^{x^2}\{z''+2xz'+2(m+1)z\}.\end{aligned} \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式，即证得

$$H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)=0.$$

1232. 证明等式

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

证 当 $n=1$ 时，由于$(e^{\frac{1}{x}})'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$，故等式成立．

设当 $n=k$ 时等式成立，即有

$$(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}=\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}},$$

要证等式对 $n=k+1$ 时也成立．事实上，有

$$(x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)}=[(x\cdot x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}]'$$

$$= [x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]'$$

$$= x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} + (x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}$$

$$+ k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)}$$

$$= x\left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}\right]' + (k+1)\cdot\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}.$$

于是,按数学归纳法得知

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

对于一切自然数 n 均成立.

1233. 设 $\frac{d}{dx} = D$ 表示微分算子及

$$f(D) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)D^k$$

为微分符号的多项式,其中 $p_k(x)$ $(k = 0,1,\cdots,n)$ 为 x 的某连续函数.

证明:

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

证 按莱布尼兹公式,有

$$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} = [e^{\lambda x}u(x)]^{(k)}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i (e^{\lambda x})^{(i)} u^{(k-i)}(x)$$

$$= e^{\lambda x}\sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

另一方面，有

$$(D+\lambda)^k u(x) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^i D^{(k-i)} u(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

因而，得

$$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}(D+\lambda)^k u(x).$$

于是，

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}$$

$$= e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\cdot(D+\lambda)^k u(x)$$

$$= e^{\lambda x}(D+\lambda)u(x),$$

即

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x} f(D+\lambda)u(x).$$

1234. 证明：若于方程

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

中，令

$$x = e^t,$$

其中 t 为自变数，则此方程具有下形

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

其中 $D = \dfrac{d}{dt}$.

证 记 $\delta = \dfrac{d}{dx}$，则有

$$Dy = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \delta y \text{ 或 } \delta y = e^{-t} Dy.$$

从而对于符号 D 及 δ 有关系

$$\delta = e^{-t} D.$$

继续求得

$$\begin{aligned} \delta^2 y &= e^{-t} D[e^{-t} Dy] = e^{-t}[-e^{-t} Dy + e^{-t} D^2 y] \\ &= e^{-2t} D(D-1)y, \end{aligned}$$

一般地，可用数学归纳法证得

$$\delta^{(k)} y = e^{-kt} D(D-1)\cdots(D-k+1)y. \tag{1}$$

事实上，设公式(1) 对 $k = m$ 时成立，则有

$$\begin{aligned} \delta^{(m+1)} y &= \delta(\delta^{(m)} y) \\ &= e^{-t} D[e^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-t}[-me^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y \\ &\quad + e^{-mt} D^2(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-(m+1)t} D(D-1)\cdots[D \\ &\quad -(m+1)+1]y, \end{aligned}$$

即公式(1) 对 $k = m+1$ 时也成立．于是，公式(1) 对于一切自然数均成立．

于是，

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \delta^{(k)} y \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k e^{kt} \cdot e^{-kt} D(D-1)\cdots(D \\ &\quad -k+1)y = 0, \end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0.$$

§6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理

1° 洛尔定理　若函数 $f(x)$：(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的；(2) 在此区间内有有限的导函数 $f'(x)$；(3) $f(a) = f(b)$，则至少存在有一个数 c 于区间 (a,b) 内，使

$$f'(c) = 0, \text{ 其中 } a < c < b.$$

2° 拉格朗日定理　若函数 $f(x)$：(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并且是连续的；(2) 在区间 (a, b) 内有有限的导函数，则

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \text{ 其中 } a < c < b$$

(有限增量公式).

3° 哥西定理　若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$：(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的；(2) 于 (a, b) 内 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有有限的导函数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$；(3) 当 $a < x < b$，$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$；(4) $g(a) \neq g(b)$，则

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

其中 $a < c < b$.

1235. 检验洛尔定理对于函数

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

的正确性.

解　(1) 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 及 $[2, 3]$ 上连续；

(2) $f'(x)$ 在 $(1,2)$ 及 $(2,3)$ 上处处存在；

(3) $f(1) = f(2) = 0$ 及 $f(2) = f(3) = 0$.

由洛尔定理，应该有 $1 < c_1 < 2$，$2 < c_2 < 3$ 存在，使 $f'(c_1) = 0$，$f'(c_2) = 0$. 下面，我们验证确有这种 c_1, c_2 存在. 易知

$$f'(x) = (x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 3) + (x - 1)(x - 2)$$

$$= 3x^2 - 12x + 11.$$

令 $f'(x) = 0$ 解之，得 $x = 2 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故可取

$$c_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, c_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3};$$

显然 $1 < c_1 < 2$，$2 < c_2 < 3$，且

$$f'(c_1) = 0, f'(c_2) = 0.$$

1236. 函数

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

当 $x_1 = -1$ 及 $x_2 = 1$ 时为零，但是当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$f'(x) \neq 0$. 说明与洛尔定理表面上的矛盾.

解 $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$，它在$[-1,1]$上恒不为零，表面上看是与洛尔定理矛盾的. 实际上不然，原因是 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不存在，不满足洛尔定理的第二个条件，故当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时，可以有 $f'(x) \neq 0$.

1237. 设函数 $f(x)$ 于有穷或无穷的区间(a,b)中的任意一点有有限的导函数 $f'(x)$，且

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

证明：

$$f'(c) = 0,$$

其中 c 为区间(a,b)中的某点.

证 当(a,b)为有穷区间时，设

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \text{当 } x \in (a,b) \text{ 时}, \\ A, \text{当 } x = a \text{ 与 } b \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.

显然 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且有 $F(a)$

$= F(b)$. 故由洛尔定理可知，在(a,b)内至少存在一点c，使

$$F'(c) = 0.$$

而在(a,b)内，$F'(x) = f'(x)$，所以

$$f'(c) = 0.$$

下设(a,b)为无穷区间. 若$a = -\infty, b = +\infty$，可设

$$x = \operatorname{tg} t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right),$$

则对由函数$f(x)$与$x = \operatorname{tg} t$组成的复合函数

$$g(t) = f(\operatorname{tg} t)$$

在有穷区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$内仿前讨论可知：至少存在一点$t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$，使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \sec^2 t_0 = 0,$$

其中$c = \operatorname{tg} t_0$. 由于$\sec^2 t_0 \neq 0$，故

$$f'(c) = 0.$$

若a为有限数，$b = +\infty$. 则可取$b_0 > \max\{a, 0\}$，而令

$$x = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}.$$

于是，对复合函数$g(t) = f\left(\frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t} \right)$在有穷区间$(a, b_0)$上仿前讨论，可知：存在$t_0 \in (a, b_0)$使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} = 0,$$

其中 $c = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t_0}$. 显然$a < c < +\infty$由于

$$\frac{b_0(b_0-a)}{(b_0-t_0)^2}>0,$$

故 $f'(c)=0$.

对于 $a=-\infty$, b 为有限数的情形，可类似地进行讨论．证毕．

1238. 设函数 $f(x)$：(1) 于闭区间 $[x_0,x_n]$ 上有定义且有 $(n-1)$ 阶的连续导函数 $f^{(n-1)}(x)$；(2) 于区间 (x_0,x) 内有 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$；(3) 有下面的等式成立

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)\ (x_0<x_1<\cdots<x_n).$$

证明：在区间 (x_0,x_n) 内最少有一点 ξ，使

$$f^{(n)}(\xi)=0.$$

证 在每一个闭区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{k-1},x_k],$$
$$\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

上，函数 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件．因此，存在 n 个点

$$x'_1,x'_2,\cdots,x'_k,\cdots,x'_n,$$

其中 $x'_k\in(x_{k-1},x_k)(k=1,2,\cdots,n)$，使

$$f'(x'_k)=0\ (k=1,2,\cdots,n).$$

于是，在每个区间 $[x'_k,x'_{k+1}](k=1,2,\cdots,n-1)$ 上，函数 $f'(x)$ 满足洛尔定理的条件．因此存在点 x''_k 属于 $[x'_k,x'_{k+1}](k=1,2,\cdots,n-1)$，使

$$f''(x''_k)=0\ (k=1,2,\cdots,n-1).$$

继续上述步骤，经 $(n-1)$ 次后，得出一个区间 $[x_1^{n-1},x_2^{n-1}]\subset(x_0,x_n)$，满足 $f^{(n-1)}(x_k^{n-1})=0\ (k=1,2)$.

于是在此区间上，函数 $f^{(n-1)}(x)$ 满足洛尔定理的条件．

所以，至少存在一点 $\xi(x_1^{n-1}, x_2^{n-1})$，使

$$f^{(n)}(\xi)=0.$$

1239. 设函数 $f(x)$：(1) 于闭区间 $[a, b]$ 上有定义且有 $(p+q)$ 阶的连续导函数 $f^{(p+q)}(x)$；(2) 在区间 (a,b) 内有 $(p+q+1)$ 阶的导函数 $f^{(p+q+1)}(x)$；(3) 有下面的等式成立：

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(p)}(a)=0$$

及 $f(b)=f'(b)=\cdots=f^{(q)}(b)=0$

证明：在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c)=0,$$

其中 c 为区间 (a,b) 内的某点．

证 若 $p=q$.

在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件，因此，至少存在一点 $x_1^{(1)}\in(a,b)$，使 $f'(x_1^{(1)})=0$；

对于区间 $[a,x_1^{(1)}]$ 及 $[x_1^{(1)},b]$，函数 $f'(x)$ 在其上满足洛尔定理的条件，因此，至少分别存在 $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}$，使 $f''(x_2^{(1)})=0, f''(x_2^{(2)})=0$；

…………

继续上述步骤，经过 p 次后，得出 $(p+2)$ 个点：

$a, x_p^{(1)}, x_p^{(2)}, x_p^{(3)}, \cdots, x_p^{(p)}, b$

使 $f^{(p)}(a)=f^{(p)}(x_p^{(k)})=f^{(p)}(b)=0\ (k=1,2,\cdots,p)$；

由此 $(p+2)$ 个点组成 $(p+1)$ 个区间，仿1238题对于它们重复使用洛尔定理 p 次，即可得出点 c 属于 (a,b)，使

$$f^{(p+q+1)}(c)=0.$$

若 $p\neq q$，不失一般性，设 $q=p+k$（k 为某正整

数).

当进行$(p+1)$次后,对于函数$f^{(p)}(x)=0$而言,在(a,b)内有$(p+1)$个点:

$$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{p+1},$$

满足$f^{(p+1)}(\xi_k)=0\ (k=1,2,\cdots,p+1)$;

再加上条件$f^{(p+1)}(b)=f^{(p+2)}(b)=\cdots=f^{(p+k)}(b)=0$,重复对此再应用洛尔定理$k$次,则在$(a,b)$内仍然存在$(p+1)$个点:

$$\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_{p+1}^{(k)},$$

使

$$f^{(p+k+1)}(\xi_j^{(k)})=0\ (j=1,2,\cdots,p+1).$$

以后,每进行一次,减少一个点,进行p次后,即可得出一点$c\in(a,b)$,使

$$f^{(p-k+q+1)}(c)=0,$$

即

$$f^{(p+q+1)}(c)=0.$$

证毕.

1240. 证明:若具实系数$a_k(k=0,1,\cdots,n)$的多项式

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq 0)$$

之一切根为实数,则其逐次的导函数$P'_n(x),P''_n(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$也仅有实根.

证 根据假设,此处n次多项式$P_n(x)$有n个实根.记其诸实根为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$,并且$\alpha_i$是$k_i$重根,$k_i\geqslant 1\ (i=1,2,\cdots,l)$,有$k_1+k_2+\cdots+k_l=n$.

于是可改写$P_n(x)$为

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_1)^{k_l}.$$

显见 α_i 为 $P_n'(x)$ 的 k_i-1 重根($i=1,2,\cdots,l$).

由 $P_n(\alpha_1)=P_n(\alpha_2)=\cdots=P_n(\alpha_l)=0$,$P_n(x)$ 可微,据洛尔定理,存在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{l-1}$,而 $\xi_i\in(\alpha_i,\alpha_{i+1})$,使 $P_n'(\xi_i)=0$ $(i=1,2,\cdots,l-1)$,于是有

$P'_n(x)$ 的根	$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{l-1}$	α_1	α_2	$\cdots$	α_l
重　数	单　　根	k_1-1	k_2-1	$\cdots$	k_l-1

即 $n-1$ 次多项式 $P'_n(x)$ 的根恰有 $(k_1-1)+(k_2-1)+\cdots+(k_l-1)+(l-1)=k_1+k_2+\cdots+k_l-1=n-1$ 个,这就是说,一个 n 次多项式,若 n 个根均为实根的话,则其导函数 $n-1$ 次多项式的 $n-1$ 个根也必全为实根.反复运用这一结果.由 $P'_n(x)$ 的 $n-1$ 个根皆为实根,便可推知 $P_n''(x)$ 的 $n-2$ 个根也均为实根.如此下去,即知关于 $P_n(x)$ 的一切低阶导函数——直至 $P^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

1241. 证明:勒襄德多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$$

的一切根都是实数且包含于区间$(-1,1)$中.

证　显然,$2n$ 次多项式 $Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n=(x+1)^n\cdot(x-1)^n$ 仅有实根(-1 是 n 重根,1 也是 n 重根).因此,根据 1240 题的结果知 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}Q_{2n}(x)$ 仅有实根,且都含于$[-1,1]$中.但显然 -1 和 1 都不是 $P_n(x)$ 的根(因为,例如,-1 是 $Q_{2n}(x)$ 的 n 重根,故

-1 是 $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}Q_{2n}(x)$ 的单根，因而 -1 不是 $\frac{d^n}{dx^n}Q_{2n}(x)$ 的根). 因此，$P_n(x)$ 的根全部位于 $(-1,1)$ 中. 证毕.

1242. 证明：契比协夫——拉格耳多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

所有的根都是正数.

证 令 $Q(x) = x^n e^{-x}$，则易知

$$Q^{(m)}(x) = e^{-x}[(-1)^m x^n + (-1)^{m-1}C_m^1 n x^{n-1} + \cdots + (-1)C_m^{m-1}n(n-1)\cdots(n-m+2)x^{n-m+1} + n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m}]\ (m=1,2,\cdots,n).$$

显然 $Q^{(m)}(0)=0\ (m=0,1,\cdots,n-1$；为方便计，以下记 $Q^{(0)}(x)=Q(x)$，但 $Q^{(n)}(0)=n!\neq 0$. 又

$$\lim_{x\to+\infty} Q^{(m)}(x) = 0\ (m=0,1,\cdots,n).$$

对函数 $Q(x)$ 和区间 $(0,+\infty)$ 应用1237题，知存在 $\xi^{(1)} \in (0,+\infty)$ 使 $Q'(\xi^{(1)})=0$. 再对函数 $Q'(x)$ 和区间 $(0,\xi^{(1)})$ 及 $(\xi^{(1)},+\infty)$ 应用1237题，知存在 $\xi_1^{(2)}\in(0,\xi^{(1)})$，$\xi_2^{(2)}\in(\xi^{(1)},+\infty)$ 使

$$Q''(\xi_i^{(2)})=0\ (i=1,2).$$

这样继续下去，反复应用1237题 n 次，知存在 $0<\xi_1^{(n)}<\xi_2^{(n)}<\cdots<\xi_n^{(n)}<+\infty$ 使

$$Q^{(n)}(\xi_i^{(n)})=0\ (i=1,2,\cdots,n).$$

显然 $L_n(\xi_i^{(n)})=0\ (i=1,2,\cdots,n)$，故 $\xi_i^{(n)}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 都是 $L_n(x)$ 的根. 但由于

$$L_n(x) = e^x Q^{(n)}(x)$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} C_n^1 n x^{n-1} + \cdots$$
$$+ (-1) C_n^{n-1} n! x + n!$$

是 x 的 n 次多项式，故 $L_n(x)$ 恰有 n 个根(实的或复的)，因此 $\xi_i^{(n)}(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $L_n(x)$ 的全部根．证毕．

1243. 证明：契比协夫 —— 厄耳米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

所有的根都是实数．

证　设 $Q(x) = e^{-x^2}$. 显然有

$$Q'(x) = -2xe^{-x^2},$$
$$Q''(x) = 2e^{-x^2}(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1),$$

从而得知 $Q'(x)=0$ 有一个实根，$Q''(x)=0$ 有两个相异的实根．

设 $Q^{(k)}(x)=0$ 有 k 个相异实根，并记成

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k,$$

注意到 $Q^{(k)}(x)$ 是 e^{-x^2} 与一个 k 次多项式的乘积，从而就有

$$Q^{(k)}(x) = Ae^{-x^2}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k),$$

其中 $A \neq 0$ 为某个常数．下面我们将证 $Q^{(k+1)}(x)=0$ 有 $k+1$ 个相异实根．事实上，由

$$Q^{(k)}(\alpha_i) = Q^{(k)}(\alpha_{i+1})(i=1,2,\cdots,k-1)$$

应用洛尔定理得知，存在 $\beta_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$，使

$$Q^{(k+1)}(\beta_i) = 0\ (i=1,2,\cdots,k-1).$$

又由于

$$\lim_{x\to-\infty} Q^{(k)}(x) = 0 \text{ 及 } Q^{(k)}(\alpha_1) = 0,$$

利用 1237 题的结果，故知存在 $\beta_0 \in (-\infty, \alpha_1)$，使

$$Q^{(k+1)}(\beta_0) = 0.$$

同法可知，存在 $\beta_k \in (\alpha_k, +\infty)$，使

$$Q^{(k+1)}(\beta_k) = 0.$$

于是，$Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k+1$ 个实根．故由数学归纳法，知 $Q^{(n)}(x) = 0$ 有 n 个相异实根（$n = 1, 2, \cdots$）．从而 $H_n(x)$ 有 n 个相异实根．但是由于 $H_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式，故 $H_n(x)$ 恰有 n 个根（实的或复的）．因此 $H_n(x)$ 所有的根都是实数．证毕．

1244. 在曲线 $y = x^3$ 上某点的切线，平行于连接点 $A(-1, -1)$ 及点 $B(2, 8)$ 所成的弦，求出此点．

解 由题设知 $y = x^3$ 在所求点 (x_0, y_0) 的切线斜率应为 $y'(x_0) = 3x_0^2 = \dfrac{8-(-1)}{2-(-1)} = 3$．于是，

$$x_0 = -1, \text{或 } x_0 = 1,$$

故所求的点为 $A(-1, -1)$ 及 $C(1, 1)$．

1245. 若 $ab < 0$，有限增量的公式对于函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在闭区间 $[a, b]$ 上是否正确？

解 不正确．事实上，如果有限增量公式在此成立，则有

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \xi \in (a, b),$$

即

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{\xi^2}(b-a) = \frac{a-b}{\xi^2}.$$

但是

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}.$$

所以

$$\frac{a-b}{\xi^2}=\frac{a-b}{ab},$$

即有 $\xi^2=ab<0$，这样产生矛盾．因此，有限增量公式对于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ $(ab<0)$ 上不正确．原因是 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不存在，故有限增量公式的条件不满足．

1246. 设

(а) $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；　(б) $f(x)=x^3$；

(в) $f(x)=\frac{1}{x}$；　(г) $f(x)=e^x$.

求满足

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\theta\Delta x)(0<\theta<1)$$

的函数 $\theta=\theta(x,\Delta x)$.

解　(а) $f'(x)=2ax+b$.

于是，有

$$a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-ax^2-bx-c$$
$$=\Delta x[2a(x+\theta\Delta x)+b].$$

化简之，得 $\theta=\frac{1}{2}$.

(б) $f'(x)=3x^2$.

于是，有

$$(x+\Delta x)^3-x^3=3\Delta x(x+\theta\Delta x)^2.$$

如果 $x=0$，则 $\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

如果 $x\neq 0$，化简整理得

$$3\theta^2\Delta x + 6\theta x - (3x + \Delta x) = 0,$$

从而有

$$\theta = \frac{\pm\sqrt{x^2 + x\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2} - x}{\Delta x}.$$

其中正负号的取法由 x 及 Δx 的符号及条件 $0 < \theta < 1$ 决定．例如，当 $x \geqslant 0, \Delta x > 0$ 时，根式前应取正号．

(в) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

于是，有

$$\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{(x+\theta\Delta x)^2}.$$

化简之，得

$$\theta^2(\Delta x)^2 + 2x\theta\Delta x - x\Delta x = 0,$$

或 $$\theta^2 + 2\frac{x}{\Delta x}\theta - \frac{x}{\Delta x} = 0,$$

故

$$\theta = \frac{x}{\Delta x}\left(\pm\sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1\right).$$

此处取正负号要视确保 $\theta \in (0,1)$ 而定，且应有

$$\frac{\Delta x}{x} > -1 (x \neq 0).$$

(г) $f'(x) = e^x$.

于是，有

$$e^{x+\Delta x} - e^x = \Delta x e^{x+\theta\Delta x}$$

$$\theta = \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

可以验证 $\theta \in (0,1)$.

1247. 证明：若 $x \geqslant 0$，则

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\qquad \frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2},$

并且 $\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

证 当 $x\geqslant 0$ 时,对函数 $\sqrt{x}$ 施用有限增量公式,即得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之,得

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-x].$$

当 $x=0$ 时 $\theta=\frac{1}{4}$. 当 $x>0$ 时,有

$$0\leqslant\sqrt{x(x+1)}-x=\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}<\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

于是

$$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

且有

$$\lim_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{4}+\frac{x}{2[\sqrt{x(x+1)}+x]}\right\}=\frac{1}{2}.$$

1248.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{1}{x} & \text{当 } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

在闭区间[0,2]上对于函数 $f(x)$ 求有限增量公式中的中间值 c.

解 $f(0)=\dfrac{3}{2}$, $f(2)=\dfrac{1}{2}$,

$$f'(x)=\begin{cases}-x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\[2mm] -\dfrac{1}{x^2}, & \text{当 } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

按题设有

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-c(2-0) \text{ 或 } \frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{c^2}(2-0),$$

所以 $c=\dfrac{1}{2}$ 或 $c=\sqrt{2}$ ($-\sqrt{2}$ 不适合),此即所求的中间值 c.

1249. 设:

$$f(x)-f(0)=xf'[\xi(x)],$$

其中 $\quad 0<\xi(x)<x.$

证明:若

$$f(x)=x\sin(\ln x)\ (x>0)$$

及

$$f(0)=0$$

则函数 $\xi=\xi(x)$ 于任意小的区间 $(0,\varepsilon)$ 内(于此 $\varepsilon>0$)是不连续的.

证 用反证法. 假定 $\xi(x)$ 在某区间 $(0,\varepsilon)$ 内连续 $(\varepsilon>0)$.

由于当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln x\right),$$

故由 $f(x)-f(0)=xf'[\xi(x)]$ 得

$$x\sin(\ln x)=x\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x)\right),$$

从而

$$\sin(\ln x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x)\right),0<x<+\infty.$$

现取一个充分大的正整数 N,使

$$-2N\pi+\frac{\pi}{4}<\ln\xi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由 $0<\xi(x)<x$ 知 $\lim\limits_{x\to0+0}\xi(x)=0$,从而

$$\lim_{x\to0+0}\ln\xi(x)=-\infty.$$

因此,可取 $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}$,使

$$\ln\xi(\delta)<-2N\pi+\frac{\pi}{4}.$$

由于 $\ln\xi(x)$ 在 $\left[\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right]$上连续,根据中间值定理,必有 $x_0\in\left(\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right)$存在,使

$$\ln\xi(x_0)=-2N\pi+\frac{\pi}{4}.$$

于是

$$1\geqslant\sin(\ln x_0)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\xi(x_0)\right)$$
$$=\sqrt{2},$$

这是不可能的．证毕．

1250. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 内有连续的导函数 $f'(x)$. 对于区间 (a,b) 内任何一点 ξ 可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2 使满足于

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)\ (x_1<\xi<x_2)?$$

解 一般地说，不可以．例如，研究函数

$$f(x)=x^3(-1<x<1),$$

它对于 $\xi=0$ 就找不到所需的 x_1 和 x_2，使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

事实上，$f'(\xi)=3\xi^2=0$，而当 $x_1<0<x_2$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}&=\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}\\&=x_2^2+x_1x_2+x_1^2\\&=x_2^2+x_1^2-|x_1|\cdot|x_2|\\&>x_2^2+x_1^2-2|x_1||x_2|\\&=(|x_1|-|x_2|)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

1251. 证明下列不等式：

(a) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$；

(б) 若 $0<y<x$ 及 $p>1$，$py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y)$；

(в) $|\operatorname{arc\,tg}a-\operatorname{arc\,tg}b|\leqslant|a-b|$；

(г) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$，设 $0<b<a$.

证 (a) $|\sin x-\sin y|=|(x-y)\cos\xi|\leqslant|x-y|$（$\xi$ 在 x,y 之间）.

(б) $x^p-y^p=p(x-y)\xi^{p-1}$，其中 $0<y<\xi<x$.

由于 $p > 1$，所以

$$y^{p-1} < \xi^{p-1} < x^{p-1}.$$

于是

$$p y^{p-1}(x - y) < x^p - y^p < p x^{p-1}(x - y);$$

*）原题的不等式中的等号可以去掉．

$$(\text{в})\ |\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b| = \left|\frac{a-b}{1+\xi^2}\right| \leqslant |a-b|;$$

$$(\text{г})\ \ln a - \ln b = \frac{a-b}{\xi}\text{，其中 } 0 < b < \xi < a.$$

于是，

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

1252. 说明在闭区间 $[-1,1]$ 上哥西定理对于函数 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x^3$ 何以不真？

解 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上虽有连续的导函数，且 $g(-1) \neq g(-1)$，但是，当 $x = 0$ 时，

$$[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 4x^2 + 9x^4 = 0,$$

因此，对于函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 不满足哥西定理的条件，所以结论可以不真．事实上

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = 0,$$

而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} \neq 0\ \ \xi \in (-1,1),\ \xi \neq 0,$$

它们是不相等的．

1253. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上可微分，并且 $x_1 x_2 > 0$. 证明

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$.

证 设 $g(x) = \dfrac{1}{x}, F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$，由于 $x_1x_2 > 0$，故 $x = 0$ 在 $[x_1, x_2]$ 之外．从而 $g(x)$ 和 $F(x)$ 均在 $[x_1, x_2]$ 上可微，且有

$$[g'(x)]^2 + [F'(x)]^2$$
$$= \frac{1}{x^4}\{1 + [xf'(x) - f(x)]^2\} \neq 0$$

及

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

因此，对于函数 $F(x)$ 和 $g(x)$ 满足哥西定理的条件．故在 (x_1, x_2) 内至少存在一点 ξ，使有

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{g(x_2) - g(x_3)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即

$$\frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2} - \dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}} = \frac{\dfrac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}.$$

化简整理，即得

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

1254. 证明 若函数 $f(x)$ 于有穷的区间 (a,b) 内可微分，但无界，则其导函数 $f'(x)$ 于区间 (a,b) 内也无界．逆定理不真；举出例子．

证 在开区间 (a,b) 内，由于导函数存在，因此，$f(x)$ 在 (a,b) 内连续．

现在假定 $|f'(x)| < N$ $(a < x < b)$，即 $f'(x)$ 是

有界的．取定 $c \in (a,b)$．则按有限增量公式可知，对任何 $a < x < b$，均有

$$|f(x) - f(c)| = |x - c||f'(\xi)| < N(b - a).$$

其中 ξ 在 c 与 x 之间，从而属于 (a,b)．

因为，

$$|f(x) - f(c)| \geqslant |f(x)| - |f(c)|,$$

所以

$$|f(x)| < |f(c)| + N(b - a).$$

此与 $f(x)$ 是无界的条件相矛盾，所以 $f'(x)$ 是无界的．

反之不一定正确．例如，函数

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内有界，但其导函数却是无界的．

注意，在无限区间内无界的函数的导函数可能有界．例如，函数

$$f(x) = \ln x$$

在 $(1, +\infty)$ 内无界，但其导函数 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内却是有界的．

1255．证明：若函数 $f(x)$ 于有穷或无穷的区间 (a,b) 内有有界的导函数 $f'(x)$，则 $f(x)$ 于 (a,b) 中一致连续．

证　设当 $x \in (a,b)$ 时，$|f'(x)| \leqslant M$．对于任给的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$，则当 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，就有

$$\begin{aligned}&|f(x_1) - f(x_2)| \\ &= |x_1 - x_2| \cdot |f'(\xi)| \leqslant M|x_1 - x_2| < \varepsilon,\end{aligned}$$

(ξ 在 x_1 与 x_2 之间)，

于是，$f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

1256. 证明：若函数 $f(x)$ 于无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微分，且

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

即：当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=o(x)$.

证 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $X_1>0$，使当 $x>X_1$ 时，恒有

$$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

今在 $(X_1,+\infty)$ 内任取一点 a，则当 $x>a$ 时，由有限增量公式可得

$$|f(x)-f(a)|=|x-a|\cdot|f'(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}|x-a|.$$

由于

$$|f(x)|-|f(a)|\leqslant|f(x)-f(a)|,$$

所以

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+\frac{\varepsilon}{2}|x-a|.$$

再取 $X_2>a$，使 $\dfrac{|f(a)|}{X_2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 $x>X_2$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{|f(a)|}{x}+\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{|x-a|}{x}$$

$$<\frac{|f(a)|}{X_2}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

即：当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=o(x)$.

1257. 证明：若函数 $f(x)$ 于无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微分且当

$$x\to+\infty \text{ 时}, f(x)=o(x);$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$.

证 由条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ 易得对于任意常数 $a>x_0$，均有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)-\frac{f(a)}{x-a}\right]\\&=0.\end{aligned}$$

于是，对于 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$，$a_n=\max\{n,x_0+1\}(n=1,2,\cdots)$，总存在 $b_n>a_n$，使

$$\left|\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right|<\varepsilon_n.$$

由拉格朗日定理知，存在 x_n：$a_n<x_n<b_n$，使

$$f'(x_n)=\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n},$$

即

$$|f'(x_n)|<\varepsilon_n(n=1,2,\cdots).$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}|f'(x_n)|=0.$$

由于 $x_n > a_n \geqslant n$，故 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = +\infty$. 由此可知

$$\lim_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

1258. (a) 证明函数 $f(x)$：(1) 在闭区间 $[x_0, X]$ 上有定义并且是连续的；(2) 于区间 (x_0, X) 内有有限的导函数 $f'(x)$；(3) 有有限或无限的极限

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0),$$

则有有限或无穷的单侧导函数 $f'_+(x_0)$ 且

$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0).$$

(б) 证明函数

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}(x \neq 1) \text{ 及 } f(1) = 0$$

有有限的极限

$$\lim_{x\to1} f'(x),$$

但是函数 $f(x)$ 没有单侧的导函数 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$.

作这个事实的几何图解.

证 (a) 由有限增量公式，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0+\theta\Delta x)$$

$$(0<\theta<1),$$

当 $\Delta x \to +0$ 时，$x_0+\theta\Delta x \to x_0+0$.

由假设条件知 $\lim\limits_{\Delta x\to+0} f'(x_0+\theta\Delta x) = f'(x_0+0)$，所以有

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0+0),$$

即

$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0).$$

(б) 当 $x \neq 1$ 时，

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}.$$

于是,

$$\lim_{x\to1}f'(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}.$$

但是

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}}{x-1}$$

$$=-\infty$$

及

$$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}}{x-1}$$

$$=-\infty,$$

所以 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 皆不存在.

$y=f(x)$ 的图形如图 2.38 所示.当 $x\to1-0$ 时,$f(x)\to\frac{\pi}{2}$;当 $x\to1+0$ 时,$f(x)\to-\frac{\pi}{2}$.

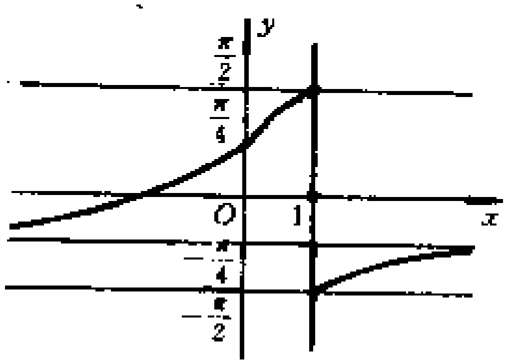


图 2.38

即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类不连续点,即在 $x=1$ 处 $f(x)$ 产生跳跃,所以 $f(x)$ 在

$x = 1$ 处无导数.

1259. 证明:若当 $a < x < b$ 时,$f'(x) = 0$,则当

$a < x < b$ 时,$f(x) =$ 常数.

证 在(a,b)内取一定点 x_0,则当 $a < x < b$ 时,按有限增量公式可得

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$$

其中 c 在 x_0 与 x 之间. 由于 $f'(c) = 0$,故

$$f(x) - f(x_0) = 0,$$

即

$$f(x) = f(x_0) = \text{常数}.$$

1260. 证明:导函数为常数

$$f'(x) = k$$

的唯一函数 $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是线性函数:

$$f(x) = kx + b.$$

证 $[f(x) - kx]' = f'(x) - k = k - k = 0,$

于是,

$$f(x) - kx = b\ (b\text{ 为常数}).$$

故 $f(x)$ 必为线性函数:$f(x) = kx + b$. 证完.

1261. 设 $f^{(n)}(x) = 0$,则函数 $f(x)$ 有什么性质?

解 由 $f^{(n)}(x) = 0$,于是 $f^{(n-1)}(x) = c$ (c 为常数).

再由 1260 题的结果得知

$$f^{(n-2)}(x) = cx + b.$$

假设

$$f^{(k)}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-k-1}x^{n-k-1},$$

并令

$$\Phi(x) = f^{(k-1)}(x) - \left(a_0 x + \frac{1}{2}a_1 x^2 + \cdots + \frac{1}{n-k}a_{n-k-1}x^{n-k}\right),$$

则有 $\Phi'(x) = f^{(k)}(x) - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-k-1}x^{n-k-1}) = 0.$

由 1259 题知 $\Phi(x) = b_0$,并记 $a_0 = b_1, \frac{1}{2}a_1 = b_2, \cdots, \frac{1}{n-k}a_{n-k-1} = b_{n-k}$,则有

$$f^{(k-1)}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-k}x^{n-k}.$$

依归纳法便有

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1},$$

它是 $n-1$ 次多项式,其中 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 是常数,而且是任意的.

1262. 证明:满足方程

$$y' = \lambda y (\lambda = \text{常数})$$

的唯一函数 $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是指数函数:

$$y = Ce^{\lambda x},$$

其中 C 为任意常数.

证 $(ye^{-\lambda x})' = y'e^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x}$

$$= \lambda ye^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x}$$

$$= 0,$$

于是,

$$ye^{-\lambda x} = C \ (c \text{ 为常数})$$

即

$$y = Ce^{\lambda x}.$$

1263. 检验函数

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax}$$

及

$$g(x)=\operatorname{arc\,tg}x$$

于范围:(1)$ax<1$ 及(2)$ax>1$ 内有相同的导函数.

推出这些函数间的关系.

解 当 $ax<1$ 或 $ax>1$ 时,

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2}\cdot\frac{1-ax+a(x+a)}{(1-ax)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2},$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

故有

$$f'(x)=g'(x)\ (ax<1\text{ 或 }ax>1).$$

因此

$$f(x)-g(x)=C_1,\text{当 }ax<1\text{ 时}. \qquad (1)$$

$$f(x)-g(x)=C_2,\text{当 }ax>1\text{ 时}, \qquad (2)$$

下面确定常数 C_1 与 C_2. 设 $a>0$($a<0$ 情形可类似地讨论).

在(1)中令 $x\to-\infty$,得

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}+\frac{\pi}{2}=C_1,$$

故 $C_1=\operatorname{arc\,tg}a$. 因此

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax}-\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}a\ (ax<1).$$

在(2)中令 $x\to+\infty$,得

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a}-\frac{\pi}{2}=C_2,$$

故 $C_2=\operatorname{arc\,tg}a-\pi$. 因此

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax}-\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,tg}a-\pi$$

$$(ax>1).$$

1264. 证明下列恒等式:

(a) $2\operatorname{arc\,tg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x$,

当 $|x|\geqslant 1$;

(б) $3\arccos x-\operatorname{arc}(3x-4x^3)=\pi$, 当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$.

证 (a) 当 $|x|>1$ 时,由于

$$\left(2\operatorname{arc\,tg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

$$\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=0,$$

故

$$2\operatorname{arc\,tg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=C_1, \text{当 } x>1 \text{ 时};$$

$$2\operatorname{arc\,tg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=C_2, \text{当 } x<-1 \text{ 时}.$$

下面确定常数 C_1 与 C_2.

令 $x=\sqrt{3}$,代入前一式,得 $C_1=\pi$;

令 $x=-\sqrt{3}$,代入后一式,得 $C_2=-\pi$.

从而当 $|x|\neq 1$ 时,有

$$2\mathrm{arc\ tg}x+\mathrm{arc\ sin}\frac{2x}{1+x^2}$$

$$=\begin{cases}\pi, 当\ x>1\ 时;\\ -\pi, 当\ x<-1\ 时.\end{cases}$$

而当 $|x|=1$ 时，上式仍然成立．于是，当 $|x|\geqslant 1$ 时，有

$$2\mathrm{arc\ tg}x+\mathrm{arc\ sin}\frac{2x}{1+x^2}=\pi\mathrm{sgn}x.$$

(6) 当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，由于

$$[3\mathrm{arc\ cos}x-\mathrm{arc\ cos}(3x-4x^3)]'$$

$$=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}\cdot(3-12x^2)=0,$$

故有

$$3\mathrm{arc\ cos}x-\mathrm{arc\ cos}(3x-4x^3)=C$$

$$\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right).$$

其中 C 为常数．令 $x=0$，代入上式，即可求出 $C=\pi$. 于是

$$3\mathrm{arc\ cos}x-\mathrm{arc\ cos}(3x-4x^3)=\pi$$

$$\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right).$$

由于上式左端的函数在 $x=\frac{1}{2}$ 左连续，在 $x=-\frac{1}{2}$ 右连续，分别取极限即知上式当 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=-\frac{1}{2}$ 时也成立．于是

$$3\mathrm{arc\ cos}x-\mathrm{arc\ cos}(3x-4x^3)=\pi$$

$$\left(|x| \leqslant \frac{1}{2} \right).$$

1265. 证明：若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间$[a,b]$上是连续的；(2) 于此线段内有有穷的导函数 $f'(x)$；(3) 非线性函数，则于区间(a,b)内至少能找到一点 c，满足

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right|.$$

作出这个事实的几何解释.

证　当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时，设

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

易知 $F(a)=F(b)=0$，且当 $a<x<b$ 时，$F(x)\neq 0$(因为 $f(x)$ 为非线性函数). 设在 $c_1(a<c_1<b)$ 点，$F(c_1)\neq 0$，不妨设 $F(c_1)>0$，在区间$[a,c_1]$与$[c_1,b]$上分别应用拉格朗日定理，可知存在

$$\xi_1 \in (a,c_1) \text{ 使 } F'(\xi_1) = \frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a} = \frac{F(c_1)}{c_1-a} > 0;$$

$$\xi_2 \in (a,c_1) \text{ 使 } F'(\xi_2) = \frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1} = -\frac{F(c_1)}{b-c_1} < 0.$$

因而，

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{1}$$

$$f'(\xi_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{2}$$

由此可知：

当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$ 时，由(1)，

$$|f'(\xi_1)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|;$$

当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$ 时，由(2)，

$$|f'(\xi_2)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

于是命题得证．

这个事实的几何意义是：对于一条非直线的连续曲线段（线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线），在曲线上至少存在一点 c，使曲线在该点的切线斜率的绝对值大于连接该线段两个端点，$(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 的弦的斜率的绝对值，换句话说，此切线比此弦“陡”，如图 2.39 所示．

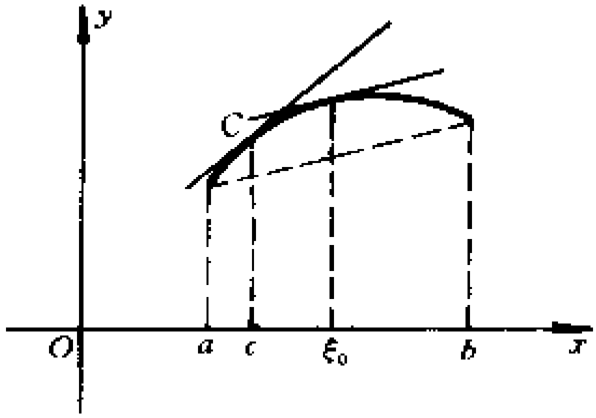


图 2.39

1266．若函数 $f(x)$：(1) 在区间 $[a,b]$ 上有二阶导函数 $f''(x)$ 及 (2) $f'(a)=f'(b)=0$，则在区间 (a,b) 内至少存在一点 c，满足

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 令

$$K = \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

用反证法，即设 $|f''(x)| < K$ $(a<x<b)$.

对于函数(x_0 是$[a,b]$中任意固定的一点)

$$F(x)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]$$

及

$$G(x)=(x-x_0)^2,$$

两次应用哥西定理*),即得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
$$+\frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(\xi), \qquad (1)$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间(即 $x_0\leqslant\xi\leqslant x$),$x$ 为$[a,b]$中任意点. 特别,在(1)式中取

$$x_0=a, x=\frac{a+b}{2},$$

并利用已知条件 $f'(a)=0$,则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_1),$$

其中 c_1 满足 $a<c_1<\frac{a+b}{2}$.

于是,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right|<\frac{(b-a)^2}{8}K.$$

同理在(1)式中取 $x_0=b, x=\frac{a+b}{2}$,并利用已知条件 $f'(b)=0$,则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_2),$$

其中$\frac{a+b}{2}<c_2<b$.

于是

$$\left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|<\frac{(b-a)^2}{8}K.$$

因此，

$$
\begin{aligned}
|f(b)-f(a)| &\leqslant \left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
&\quad+\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right| \\
&< \frac{(b-a)^2}{4}K = |f(b)-f(a)|,
\end{aligned}
$$

这是不可能的．所以，在区间(a,b)内至少存在一点c，使

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

---

*) 仅考虑 $x > x_0$（$x < x_0$ 时可类似地讨论）令

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)]$$

$$G(x) = (x-x_0)^2,$$

那么有 $F(x_0) = G(x_0) = 0$,

$F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$（记为 $F_1(x)$），

$G'(x) = 2(x-x_0)$ （记为 $G_1(x)$），

并且 $F'(x_0) = G'(x_0) = 0$,（即 $F_1(x_0) = G_1(x_0) = 0$），

但当 $x \neq x_0$, $G'(x) \neq$，而

$$F_1'(x) = F''(x) = f''(x), G_1'(x) = G''(x) = 2.$$

应用哥西定理，得

$$
\begin{aligned}
\frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F_1(c)-F_1(x_0)}{G_1(c)-G_1(x_0)} \\
&= \frac{F_1'(\xi)}{G_1'(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{2},
\end{aligned}
$$

此处 $\xi \in (x_0, c)$，而 $c \in (x_0, x)$，从而知 $\xi \in (x_0, x)$.

因此有

$$F(x) = \frac{1}{2}G(x)f''(\xi)$$

也即有公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(\xi).$$

其中$x_0<\xi<x$（以后即将看到，这就是所谓的台劳公式，这里就顺便给了一个关于二阶的台劳公式的另一种推证方法．）

1267．汽车从某点开始行驶，于t秒钟内走完了路程，于此时间内经过了距离s米．证明汽车运动的加速度的绝对值在某瞬间不小于$\frac{4s}{t^2}\frac{米}{秒^2}$．

证 利用1266题的结果即可得证．此时

$$s=f(t),$$

$$f(t)-f(0)=s,t-0=t.$$

故$a=\left.\frac{d^2s}{dt^2}\right|_{t=t_1}$的绝对值

$$|a|\geqslant\frac{4s}{t^2}.$$

§7．函数的增大与减小．不等式

1° 函数的增大和减小　　若当

$$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b\text{ 时},f(x_2)>f(x_1)$$

〔或当$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$时，$f(x_2)<f(x_1)$〕，则称函数$f(x)$于闭区间〔$a$，$b$〕上增大（或对应地减小）．

若可微分的函数$f(x)$在闭区间〔a，b〕上增大（或减小），则当

$$a\leqslant x\leqslant b\text{ 时},f'(x)\geqslant 0$$

〔或对应地当$a\leqslant x\leqslant b$时，$f'(x)\leqslant 0$〕．

2° 函数增大（或减小）的充分条件　若函数$f(x)$在闭区间〔a，b〕上是连续的，并且在其内有正的（或负的）导函数$f'(x)$，则函数$f(x)$于〔a，b〕内增大（或对应地减小）．

求下列函数在严格意义上的单调（增大或减小）的区间：

1268．$y=2+x-x^2$

解 $y' = 1 - 2x$.

当 $-\infty < x < \frac{1}{2}$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $\frac{1}{2} < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小.

1269. $y = 3x - x^3$.

解 $y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x)$.

当 $-\infty < x < -1$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $-1 < x < 1$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $1 < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小.

1270. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$.

当 $-\infty < x < -1$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $-1 < x < 1$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $1 < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小.

1271. $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 100}(x \geqslant 0)$.

解 $y' = \frac{-x + 100}{2\sqrt{x}(x + 100)^2}$.

当 $0 < x < 100$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $100 < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小.

1272. $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x \geqslant 0$.

当 $-\infty < x < +\infty$ 时，函数增大.

1273. $y = x + |\sin 2x|$.

解 $y' = 1 + 2\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}\cos 2x$

$\left(x \neq \frac{k\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$.

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y' < 0$，函数减小，其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

1274. $y = \cos\frac{\pi}{x}$.

解 $y' = \frac{\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x}$.

当 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ 及 $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$.

$0 < \frac{\pi}{x} < \pi$ 时，即 $x > 1$，$x \in \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ 时，$y' > 0$，所以函数增大 $(k = 1, 2, \cdots)$.

同理，当 $x \in \left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ 时，$y' < 0$，函数减小 $(k = 1, 2, \cdots)$.

1275. $y = \frac{x^2}{2^x}$.

解 $y' = \frac{2x - x^2\ln 2}{2^x}$.

当 $-\infty < x < 0$ 及 $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ 时，$y' > 0$，函数增大．

1276. $y = x^n e^{-x}$ $(n > 0, x \geqslant 0)$.

解 $y' = x^{n-1}e^{-x}(n - x)$.

当 $x \in (0, n)$ 时，$y' > 0$，函数增大；

当 $x \in (n, +\infty)$ 时，$y' < 0$，函数减小．

1277. $y = x^2 - \ln x^2$.

解 $y' = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

当 $-\infty < x < -1$ 及 $0 < x < 1$ 时，$y' < 0$，函数减小；

当 $-1 < x < 0$ 及 $1 < x < +\infty$ 时，$y' > 0$，函数增大．

1278. 若 $x > 0$，$f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x\right)$ 及 $f(0) = 0$.

解 $$f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x + \cos \ln x$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) \ (x > 0).$$

令 $f'(x) = 0$，得

$$\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解上述方程得

$$x = e^{-\frac{11}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}$$

或 $$x = e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

当 $x \in (e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi})$ 时，$f'(x) > 0$，

函数增大；

当 $x \in (e^{\frac{13}{12}\pi - 2k\pi}, e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi})$ 时，$f'(x) < 0$，

函数减小．

1279．证明：内接于圆的正 n 边形，当边的数目 n 增加时，其周界 P_n 增加，而外切于此圆的正 n 边形的周界 P_n 则减小．利用这点来证明，当 $n \to \infty$ 时，p_n 及 P_n 有相同的极限．

证　如图 2.40 所示，

我们有

$$p_n = 2nx$$
$$= 2na\sin\alpha$$
$$= 2na\sin\frac{\pi}{n},$$
$$P_n = 2ny$$
$$= 2na\,\mathrm{tg}\alpha$$
$$= 2na\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.$$

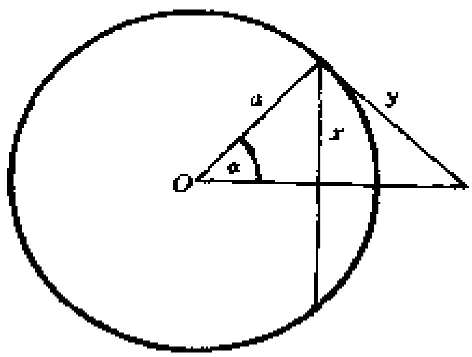


图 2.40

考虑 $f(x) = \frac{2a}{x}\sin\pi x$．易证当 $x(x > 0)$ 很小时有 $f'(x) < 0$，从而当 x 变小时 $f(x)$ 增大．所以，$p_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 增大时，p_n 逐渐增大．同样，令 $g(x) = \frac{2a}{x}\mathrm{tg}\pi x$，利用 $x < \mathrm{tg}x$（当 x 很小时，$x > 0$），可证得 $g'(x) > 0$，情形相反，当 x 变小时，$g(x)$ 逐渐减小，故 $P_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 变大时逐渐变小．总之，有 $p_n < p_{n+1}$ 及 $P_{n+1} < F_n$，并且显然有 $p_{n+1} < P_{n+1}$．于是

$$p_n < p_{n+1} < P_{n+1} < P_n,$$

故$\{P_n\}$是有界减数列，$\{p_n\}$是有界增数列，从而它们的极限都存在，但

$$\lim_{n\to+\infty}(P_n - p_n)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\pi a\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} - \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right) = 0,$$

故有

$$\lim_{x\to+\infty} p_n = \lim_{x\to+\infty} P_n.$$

1280. 证明：函数

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

于区间$(-\infty, -1)$及$(0, +\infty)$内增大．

证　设$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$，则

$$y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right].$$

由于当$x\in(-\infty, -1)$时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > 0$，因此要看$y'$为正或为负，只需看$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$的正负性．

再设$z = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$，则

$$z' = -\frac{1}{x(1+x)^2} > 0,\ x\in(-\infty, -1),$$

故当$-\infty < x < -1$时z增大，又$\lim\limits_{x\to-\infty} z = 0$，因而$z > 0$. 于是，在$(-\infty, -1)$内$y' > 0$. 因此，函数

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

在区间$(-\infty, -1)$内增大.

同理可证,函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$在区间$(0, +\infty)$内增大.

1281. 证明:有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n (n \geqslant 1, a_n \neq 0)$$

于区间$(-\infty, -x_0)$及$(x_0, +\infty)$内是单调的(就严格的意义而言!),其中x_0为充分大的正数.

证 由于

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} \\ &= x^{n-1}\Big(na_n + \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} \\ &\quad + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}}\Big), \end{aligned}$$

而

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}}\right) = 0,$$

故存在$x_0 > 0$,使当$|x| > x_0$时,

$$\left|\frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}}\right| < n|a_n|.$$

由此可知,当$-\infty < x < -x_0$或$x_0 < x < +\infty$时$P'_n(x)$均保持定号(例如,若$a_n > 0$,则当$x_0 < x < +\infty$时,$P'_n(x) > 0$),故$P_n(x)$在$(-\infty, -x_0)$及$(x_0, +\infty)$内都是严格单调的. 证毕.

1282. 证明:有理函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}$$

$$(m + n \geqslant 1, m \neq n^{*)} a_nb_m \neq 0)$$

于区间$(-\infty,-x_0)$及$(x_0,+\infty)$内是单调的(就严格的意义而言!),其中x_0为充分大的正数.

证 我们有

$$
\begin{aligned}
R'(x) &= \frac{1}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\{[a_1+2a_2x \\
&\quad +\cdots+na_nx^{n-1}][b_0+b_1x+\cdots \\
&\quad +b_mx^m]-[b_1+2b_2x+\cdots \\
&\quad +mb_mx^{m-1}][a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n]\} \\
&= \frac{1}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}\{(a_1b_0 \\
&\quad -a_0b_1)+2(a_2b_0-a_0b_2)x+\cdots \\
&\quad +[(n-m+1)a_nb_{m-1} \\
&\quad -(n-m-1)a_{n-1}b_m]x^{m+n-2} \\
&\quad +(n-m)a_nb_mx^{m+n-1}\} \\
&= \frac{x^{m+n-1}}{(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)^2}[(n-m)a_nb_m \\
&\quad +\frac{(n-m+1)a_nb_{m-1}-(n-m-1)a_{n-1}b_m}{x} \\
&\quad +\cdots+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{x^{m+n-1}}].
\end{aligned}
$$

仿1281题之证法,可知存在$x_0>0$,使当$|x|>x_0$时上式右端方括弧内的式子与第一项$(n-m)a_nb_m$同符号,由此可知,当$-\infty<x<-x_0$或$x_0<x<+\infty$时$R'_n(x)$均保持定号,故$R(x)$在$(-\infty,-x_0)$及$(x_0,+\infty)$中都是严格单调的.

*) 本题应加上条件$m\neq n$(原题上没有).否则所述结论不成立.例如,若$m=n,a_i=b_i(i=0,1,\cdots,$

n)，则 $R(x)\equiv 1$，它在 $(x_0,+\infty)$ 上显然不是严格单调的．

1283．单调函数的导函数是否也必为单调的？

解 不．例如函数

$$f(x)=x+\sin x,$$

在区间 $(0,+\infty)$ 内，由于 $f'(x)=1+\cos x>0$（除 $x=(2n+1)\pi, n=0,1,\cdots$），所以它是单调增加的；然而其导函数 $f'(x)$ 却不是单调的．事实上由于 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，$f'(\pi)=0$，$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$，显见并非是单调的．

1284．证明：若 $\varphi(x)$ 为单调增大的可微分的函数，且当

$x\geqslant x_0$ 时，$|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$，

则当 $x\geqslant x_0$ 时，$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)$．

对这个事实作几何的解释．

证 证法一：

作函数 $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)$，由拉格朗日定理知

$$\psi(x)-\psi(x_0)=\psi'(\xi)(x-x_0)(x_0<\xi<x).$$

由 $|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$ 知

$$\psi'(\xi)=\varphi'(\xi)-f'(\xi)\geqslant 0.$$

从而 $\psi(x)-\psi(x_0)\geqslant 0$（当 $x\geqslant x_0$ 时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x)-f(x_0). \tag{1}$$

再令 $\psi_1(x)=\varphi(x)+f(x)$，同理有 $\psi_1(x)-\psi_1(x_0)\geqslant 0$（当 $x\geqslant x_0$ 时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x_0)-f(x). \tag{2}$$

结合(1)和(2)便得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant|f(x)-f(x_0)|.$$

证法二：

用反证法．若有一点 $b > x_0$，而使

$$|f(b) - f(x_0)| > \varphi(b) - \varphi(x_0).$$

设 $F(x) = f(x) - f(x_0) - \dfrac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)}[\varphi(x) - \varphi(x_0)]$，由于 $F(b) = F(x_0) = 0$，所以根据洛尔定理，得知存在点 $c \in (x_0, b)$ 使 $F'(c) = 0$，即

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)}\varphi'(c) = 0.$$

因而，有 $|f'(c)| = \dfrac{|f(b) - f(x_0)|}{\varphi(b) - \varphi(x_0)}\varphi'(c) > \varphi'(c)$.

这与题设条件 $|f'(c)| \leqslant \varphi'(c)$（对于一切 $x \geqslant x_0$ 而言）相矛盾．于是结论得证．

其几何意义就是：若一单调上升曲线上各点的切线都比另一曲线上对应点的切线"陡"，则此曲线上每条弦必比另一曲线上对应的弦"陡"．如图 2.41 所示．

1285. 设函数 $f(x)$ 于区间 $a \leqslant x < +\infty$ 内是连续的，而且当 $x > a$ 时，$f'(x) > k > 0$，其中 k 为常数．证明：若 $f(a) < 0$，则于区间 $\left(a, a - \dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内方程 $f(x) = 0$ 有一而且仅有一实根．

证 由有限增量公式，有

$$f\left[a - \frac{f(a)}{k}\right] - f(a)$$

$$= -\frac{f(a)}{k} \cdot f'(\xi) > -\frac{f(a)}{k} \cdot k = -f(a).$$

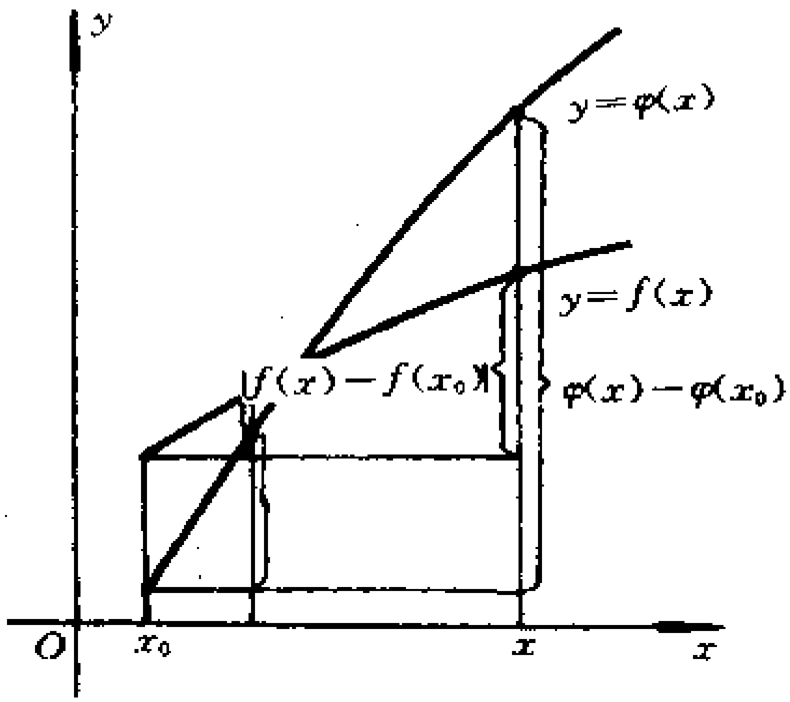


图 2.41

于是，$f\left(a-\dfrac{f(a)}{k}\right)>0$. 又 $f(a)<0$，故根据连续函数的介值定理知，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 上至少有一实根．又因为当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内严格单调上升，由此可知，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内恰有一个实根．

1286. 若于某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内，函数增量 $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ 的符号与自变数增量 $\Delta x_0=x-x_0$ 的符号相同，函数 $f(x)$ 称为在 x_0 点增大．

证明：若函数 $f(x)(a<x<b)$ 于有穷或无穷的区间 (a,b) 内的每一点增大，则它在此区间内为增函数．

证　要证对任意两点 $x_1<x_2(a<x_1<x_1<b)$，都有

$f(x_1)<f(x_2)$. 对$[x_1,x_2]$中每一点c,由假定都存在开区间$\Delta_c=(c-\delta_c,c+\delta_c)$使当$0<|x-c|<\delta_c$时,$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$. 于是,诸区间$\{\Delta_c\}$($c$取遍$[x_1,x_2]$形成$[x_1,x_2]$的一个开复盖. 由波内耳有限复盖定理,从$\{\Delta_c\}$中可选出有限个,设为$\Delta_{c_1},\Delta_{c_2}\cdots,\Delta_{c_m}$,它们已经复盖了$[x_1,x_2]$. 不妨设$x_1<c_1<c_2<\cdots<c_m<x_2$,而且可设诸$\Delta_{c_i}$互不包含(因若$\Delta_{c_i}\subset\Delta_{c_j}$,则可将$\Delta_{c_i}$舍去). 于是,必有$x_1\in\Delta_{c_1}$(因若$x_1$不属于$\Delta_{c_1}$,而属于某$\Delta_{c_j}$,$j>1$,则显然有$\Delta_{c_1}\subset\Delta_{c_j}$,此与诸$\Delta_{c_i}$互不包含矛盾). 另外,易知$\Delta_{c_i}$与$\Delta_{c_{i+1}}$($i=1,2,\cdots,m-1$)必有公共点$\bar{x}_i$(因若$\Delta_{c_i}$与$\Delta_{c_{i+1}}$没有公共点,则点$c_i+\delta_{c_i}$必属于某$\Delta_{c_j}$,$j\neq i$,$j\neq i+1$. 若$j<i$,则$\Delta_{c_i}\subset\Delta_{c_j}$,矛盾;若$j>i+1$,则$\Delta_{c_{i+1}}\subset\Delta_{c_j}$,也矛盾). 显然可取公共点$\bar{x}_i$满足$c_i<\bar{x}_i<c_{i+1}$.

于是

$$f(c_i)<f(\bar{x}_i)<f(c_{i+1})\ (i=1,2,\cdots,m-1).$$

同理,可知$x_2\in\Delta_{c_m}$. 于是,我们有

$$f(x_1)<f(c_1)<f(c_2)<\cdots<f(c_m)<f(x_2).$$

证完.

1287. 证明:函数

$$f(x)=x+x^2\sin\frac{1}{x},\text{若 } x\neq 0 \text{ 及 } f(0)=0,$$

于点$x=0$增大,但在含这点的任何区间$(-\varepsilon,\varepsilon)$中并非增大的,其中$\varepsilon>0$为任意小的数. 作出此函数的略

图.

证 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 1 + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x + \Delta x^2 \sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 1 > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点增大. 又当 $x \neq 0$ 时,

$$f''(x) = 2\sin\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -4n\pi\begin{cases} < 0, n \text{ 为正整数;} \\ > 0, n \text{ 为负整数;} \end{cases}$$

而 $f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = 0$. 故 $f(x)$ 在点 $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}(n = 1,2,\cdots)$ 都达极大值. 由于 $x_n = \dfrac{1}{2n\pi} \to 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内不是增大的(作无穷次振荡, 如图 2.42 所示).

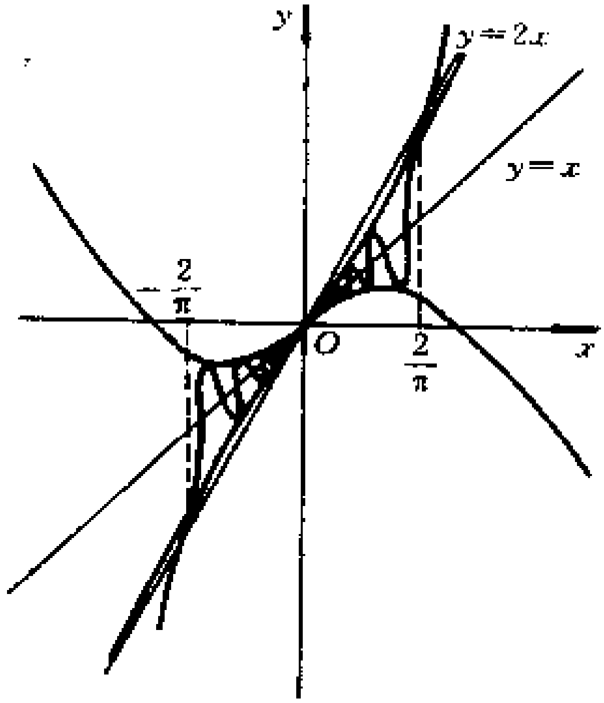


图 2.42

1288. 证明定理:设(1)

函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 可微分 n 次；(2)$\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)(k=0,1,2,\cdots,n-1)$；(3) 当 $x>x_0$ 时，$\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$，则当 $x>x_0$ 时有不等式

$$\varphi(x)>\psi(x).$$

证 设 $F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$，则由于 $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$，所以

$$F^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x)-\psi^{(n)}(x)>0\ (x>x_0).$$

因此 $F^{(n-1)}(x)$ 在 $x>x_0$ 时是严格增大的．另外，由条件(2) 得

$$F^{(n-1)}(x_0)=\varphi^{(n-1)}(x_0)-\psi^{(n-1)}(x_0)=0,$$

因此

$$F^{(n-1)}(x)>F^{(n-1)}(x_0)=0\ (x>x_0).$$

由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 在 $x>x_0$ 时是严格增大的．再由条件(2)，知

$$F^{(n-2)}(x_0)=\varphi^{(n-2)}(x_0)-\psi^{(n-2)}(x_0)=0,$$

故

$$F^{(n-2)}(x)>F^{(n-2)}(x_0)=0\ (x>x_0).$$

依此类推，最后得

$$F(x)>F(x_0)=0(x>x_0)，即$$

$$\varphi(x)>\psi(x)\ (x>x_0).$$

1289. 证明下列不等式：

(а) 当 $x\neq 0$ 时，$e^x>1+x$；

(б) 当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$；

(в) 当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$；

(г) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$；

(д) 当 $x > 0, y > 0$ 及 $0 < \alpha < \beta$ 时，

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

作不等式(a)—(г) 的几何解释．

证　(a) 设 $f(x) = e^x - (1 + x)$，则当 $x > 0$ 时，

$$f'(x) = e^x - 1 > 0,$$

所以，$f(x) > f(0) = 0\ (x > 0)$，即

$$e^x > 1 + x\ (x > 0).$$

同理可证，当 $x < 0$ 时，

$$e^x > 1 + x.$$

总之，当 $x \neq 0$ 时，

$$e^x > 1 + x.$$

此不等式的几何意义是，曲线 $y = e^x$ 位于曲线 $y = 1 + x$ 的上方．如图 2.43 所示．

(б) 设 $\varphi(x) = x, \psi(x) = \ln(1 + x)$，则

$$\varphi'(x) = 1, \psi'(x) = \frac{1}{1 + x}.$$

当 $x > 0$ 时，$\varphi'(x) > \psi'(x)$，即 $\varphi'(x) - \psi'(x) > 0$，且有 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$，从而

$$\varphi(x) - \psi(x) > \varphi(0) - \psi(0) = 0\ (x > 0),$$

即

$$x - \ln(1 + x) > 0\ (x > 0).$$

同理可证，当 $x > 0$ 时，

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x).$$

所以，当 $x > 0$ 时，

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x.$$

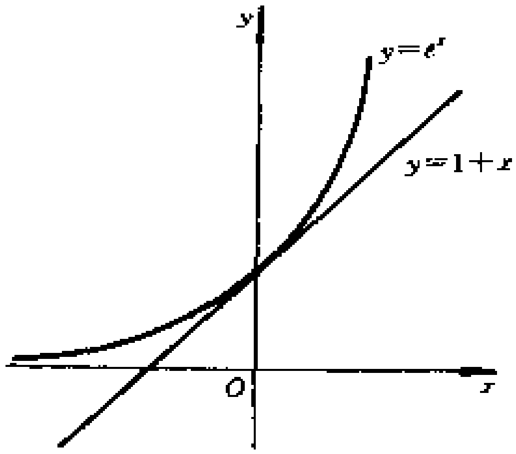


图 2.43

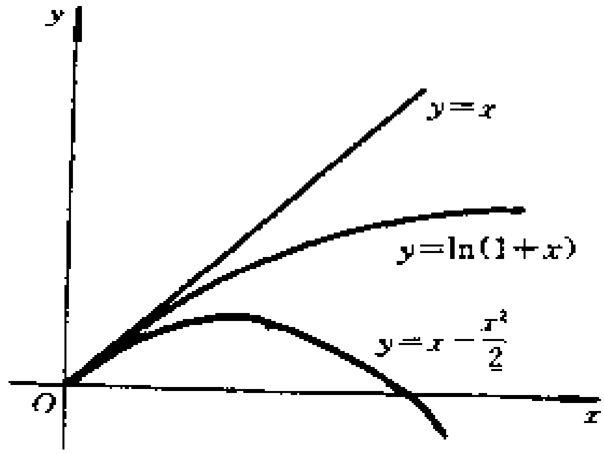


图 2.44

此不等式表示对数函数 $y = \ln(1 + x)$ 的图形介于抛物线 $y = x - \dfrac{x^2}{2}$ 和直线 $y = x$ 之间($x > 0$). 如图 2.44 所示.

(в) 令 $F(x) = x - \sin x$,则

$F'(x) = 1 - \cos x > 0$ (当 $x > 0, x \neq 2n\pi$,

$n = 1, 2, \cdots$ 时),

故 $F(x)$ 在 $x > 0$ 时是严格增大的. 因此,当 $x > 0$ 时,有

$$F(x) > F(0) = 0,$$

从而

$$x > \sin x \ (x > 0).$$

其次再证,$x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x \ (x > 0)$. 设

$$\psi_1(x) = x - \frac{x^3}{6}, \varphi_1(x) = \sin x,$$

则有

$$\psi_1(0)=\varphi_1(0)=0,\ \psi'(0)=\varphi'(0)=1.$$

又因 $\psi''_1(x)=-x,\varphi''_1(x)=-\sin x$，于是，当 $x>0$ 时，有

$$\varphi''_1(x)>\psi''_1(x).$$

利用 1288 题的结果得知，

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6}(x>0).$$

所以，当 $x>0$ 时 $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$. 此不等式表示，在 y 轴的右侧，曲线 $y=\sin x$ 介于直线 $y=x$ 和曲线 $y=x-\frac{x^3}{6}$ 之间，如图 2.45 所示.

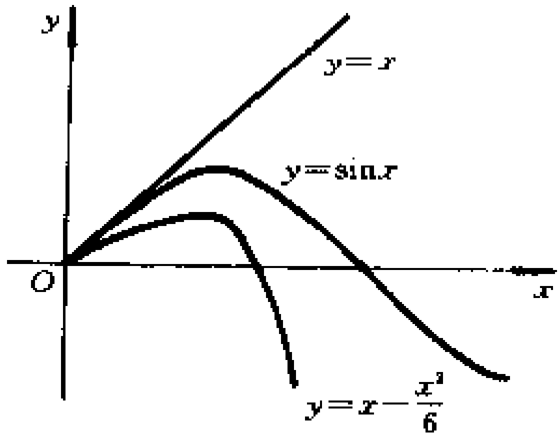


图 2.45

(г) 设 $\varphi(x)=\operatorname{tg}x,\ \psi(x)=x+\frac{x^3}{3}$，则有

$$\varphi(0)=\psi(0)=0;$$

$$\varphi'(x)=\sec^2x,\psi'(x)=1+x^2,$$

$$\varphi'(0)=\psi'(0)=1;$$

$$\varphi''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3x},\psi''(x)=2x,$$

$$\varphi''(0)=\psi''(0)=0;$$

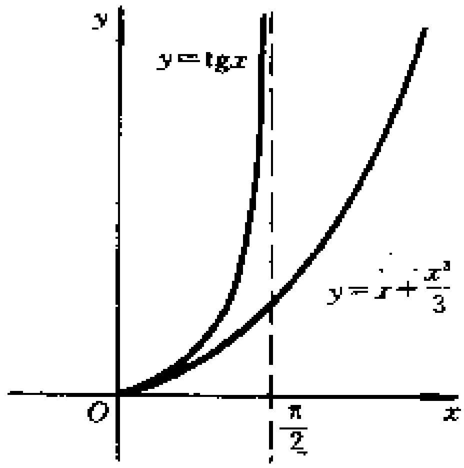
$$\varphi'''(x)=2(1+3\operatorname{tg}^2x)(1+\operatorname{tg}^2x),$$

$$\psi'''(x)=2,$$

从而当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi'''(x)>\psi'''(x)$.

于是利用 1288 题的结果得知

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg}x>x+\frac{x^3}{3}$. 此不等式表示，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，曲线 $y=\operatorname{tg}x$ 在曲线 $y=x+\frac{x^3}{3}$ 的上方. 如图 2.46 所示.



2.46

(a) 当 $x=y$ 时，由 $0<\alpha<\beta$ 知，不等式

$2^{\frac{1}{\alpha}}>2^{\frac{1}{\beta}}(x>0,y>0)$

显然成立.

当 $x\neq y$，且 $x>0,y>0$，不妨设 $0<\frac{y}{x}<1$.

令 $a=\frac{y}{x}$，为证不等式，只需证明 $f(t)=(1+a^t)^{\frac{1}{t}}$ 严格递减，也即只要证明函数 $F(t)=\frac{1}{t}\ln(1+a^t)$ 严格递减. 实际上，因为

$$F'(t)=\frac{a^t\ln a}{t(1+a^t)}-\frac{\ln(1+a^t)}{t^2}.$$

当 $a^t>0$ 时，有 $a^t-\frac{a^{2t}}{2}<\ln(1+a^t)^{*)}$，所以

$$F'(t)=\frac{a^t\ln a}{t(1+a^t)}-\frac{a^t-\frac{a^{2t}}{2}}{t^2}.$$

由于 $0 < a < 1$ 及 $t > 0$，所以 $\ln a < 0$ 及 $a^t > a^{2t} > \frac{a^{2t}}{2}$

从而 $F'(t) < 0$，即 $F(t)$ 是严格递减，从而当 $x \neq y$ 时，不等式

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

也成立.

作 $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}$ 的图形，如图 2.47 所示. 对于 $(0, +\infty)$ 内任意两个值 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$，图形上对应点的纵坐标却相应地减小

$$f(\alpha) > f(\beta).$$

*） 利用本题(6)的结果.

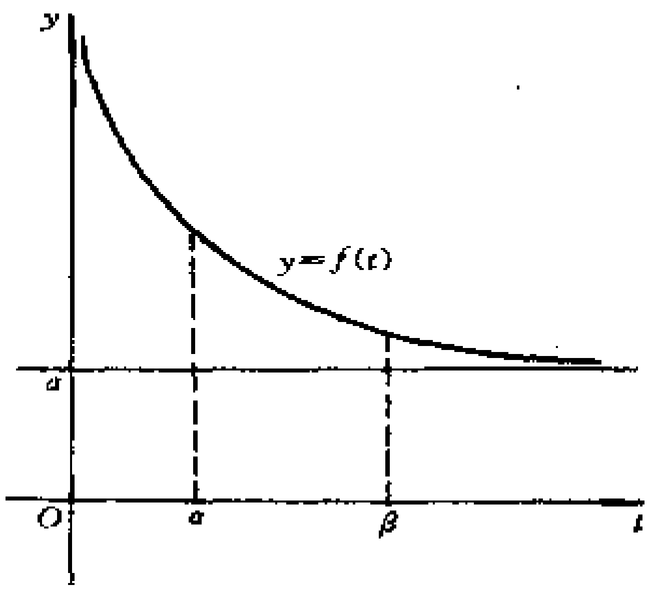


图 2.47

1290. 证明不等式

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x,$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时成立.

证 不等式的后半部分于 1289 题(в) 中已证明,我们仅证其前半部分.

设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$,显然有 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$. 而

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg}x),$$

由于当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$\cos x>0$ 及 $\operatorname{tg}x>x+\frac{x^3}{3}>x$,于是在此区间内 $f'(x)<0$. 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内是递减的. 因而,当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,有

$$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

所以

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

1291. 证明当 $x>0$ 时有不等式

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

证 由于当 $x>0$ 时,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

严格增大(利用 1280 题的结果),并且有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

所以，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e\ (x>0).$$

同理可证，当 $x>0$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 严格递减，并且有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=e,$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>e\ (x>0).$$

1292. 等差级数与等比级数的项的数目相同且有相同的首项与末项，它们的一切项都是正的．证明等差级数各项的和大于或等于*) 等比级数各项的和．

证 证法一：

设等差级数各项为 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 公差为 d；等比级数各项为 $b_1,b_2\cdots,b_n$，公比为 q. 记其和为

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}a_k,Q=\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

当 $q=1$ 时，由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=b_n$ 可知有 $\sigma=Q$.

当 $q<1$ 时，由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=a_1+(n-1)d,b_n=b_1q^{n-1}$ 且 $a_n=b_n$ 得知

$$a_1+(n-1)d=b_1q^{n-1},$$

即

$$d=-\frac{1-q^{n-1}}{n-1}a_1(a_1>0).$$

那么有

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}[a_1 + (k-1)d]$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left[a_1 - \frac{k-1}{n-1}(1-q^{n-1})a_1\right]$$
$$= a_1\left[n - \frac{1}{n-1}(1-q^{n-1})\sum_{l=0}^{n-1}l\right]$$
$$= \frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),$$
$$Q = \sum_{k=1}^{n}a_1q^{k-1} = a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

研究

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma - Q)$$
$$= n(1-q)(1+q^{n-1}) - 2(1-q^n)$$
$$= n(1-q+q^{n-1}-q^n) - 2(1-q^n)$$
$$= (n-2)(1-q^n) - nq(1-q^{n-2}).$$

作函数

$$\varphi(t) = (n-2)(1-t^n),$$
$$\psi(t) = nt(1-t^{n-2}),$$

则有 $\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi'(1) = \psi'(1) = -n(n-2)$. 但是

$$\varphi''(t) = -n(n-1)(n-2)t^{n-2},$$
$$\psi''(t) = -n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $0 < t < 1$ 时,有 $\psi''(t) < \varphi''(t)$,利用 1288 题的结果可得,

$$\psi(t) < \varphi(t) \quad (0 < t < 1),$$

即当 $q < 1$ 时,$\psi(q) < \varphi(q)$. 从而,

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-Q)=\varphi(q)-\psi(q)>0.$$

这就证明了 $\sigma>Q$.

当 $q>1$ 时，由 $a_n=b_n$ 得知

$$d=\frac{q^{n-1}-1}{n-1}a_1>0.$$

又

$$\begin{aligned}\sigma&=\sum_{k=1}^{n}[a_1+(k-1)d]\\&=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\\&=\frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),\end{aligned}$$

$$Q=\sum_{k=1}^{n}a_1q^{k-1}=a_1\frac{q^n-1}{q-1}.$$

与上述讨论相同，有

$$\begin{aligned}&\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q)\\&=(n-2)(q^n-1)-nq(q^{n-2}-1).\end{aligned}$$

作函数

$$\varphi(t)=(n-2)(t^n-1),$$
$$\psi(t)=nt(t^{n-2}-1),$$

则有

$$\varphi(1)=\psi(1)=0,\varphi'(1)=\psi'(1)=n(n-2).$$

而

$$\varphi''(t)=n(n-1)(n-2)t^{n-2},$$
$$\psi''(t)=n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $t>1$ 时，有 $\varphi''(t)>\psi''(t)$，利用 1288 题结果有

$$\varphi(t) > \psi(t).$$

于是当 $q > 1$ 时，便得 $\varphi(q) > \psi(q)$. 因而

$$\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma - Q) = \varphi(q) - \psi(q) > 0.$$

从而完全证明了 $\sigma > Q$.

证法二：

设等差级数的公差为 d，等比级数的公比为 q.

如果 $d = 0$，易见两个级数叙列均为常数叙列，因此其和相等.

如果 $d \neq 0$，不妨设 $d > 0$(否则把末项变为首项，将叙列颠倒即成)，由于各项均为正的，所以 $q > 0$.

设首项为 a，则末项为 $a + nd = aq^n$. 考虑函数

$$f(x) = a + xd - aq^x.$$

由于 $f(0) = f(n) = 0$，所以在 $(0, n)$ 内存在一点 c，使得 $f'(c) = 0$，而 $f''(x) = -aq^x\ln^2 q < 0$. 从而

$$f'(x) = d - aq^x\ln q$$

为一递减函数. 所以

当 $x < c$ 时，$f'(x) > 0$；

当 $x > c$ 时，$f'(x) < 0$.

从而当 $0 \leqslant x \leqslant n$ 时，$f(x) \geqslant 0$，其中等号当且仅当 $x = 0$ 及 $x = n$ 时成立. 特别是，对于 $0 < k < n$，有

$$f(k) = a + kd - aq^k > 0,$$

即

$$a + kd > aq^k.$$

于是，

$$\sum_{k=0}^{n}(a + kd) > \sum_{k=0}^{n} aq^k.$$

*） 原题要求证明“大于”. 实际应为“大于或等于”.

1293. 用不等式

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2\geqslant 0,$$

其中 $x, a_k, b_k (k=1,2,\cdots n)$ 为实数，来证明哥西一布尼雅柯夫斯基不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

证 由于

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)x^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)x+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant 0,$$

对任何 x 都成立，故上述二次式的判别式不能为正，即

$$4\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-4\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\leqslant 0,$$

也即，

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

1294. 证明：正数的算术平均数不大于这些数的平方的平均数，即是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

证 利用 1293 题的结果，设

$$a_k=x_k, b_k=\frac{1}{n},$$

则有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2,$$

所以，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

1295. 证明：正数的几何平均数不大于这些数的算术平均数，即是

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

证 设 $G_n=(x_1,x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$,

$$A_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

则有

$$(G_n)^n=x_1,x_2\cdots x_n, nA_n=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

当 $n=2$ 时，我们已有不等式

$$\sqrt{x_1x_2}\leqslant\frac{x_1+x_2}{2}.$$

今假定 $n=k$ 时，有

$$G_k\leqslant A_k,$$

我们来证 $n=k+1$ 时，有

$$G_{k+1}\leqslant A_{k+1}.$$

事实上，

$$\begin{aligned}G_{k+1}&=(x_1\cdot x_2\cdots x_k\cdot x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\\&=[(G_k)^k\cdot x_{k+1}]^{\frac{1}{k+1}}\\&\leqslant(G_k)^{\frac{k}{k+1}}\cdot(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\\&\leqslant(A_k)^{\frac{k}{k+1}}\cdot(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.\end{aligned}$$

如果我们设

$$f(x)=x^{\alpha}-(1-\alpha+\alpha x),$$

由 $f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)\begin{cases}>0,当\ 0<x<1;\\ \ \ 0,当\ x=1;\\ <0,当\ x>1,\end{cases}$

故知 $f(x)$ 在$(0,1]$ 上是严格递增的，而在$[1,\infty)$ 上是严格递减的．令 $\alpha=\dfrac{1}{p}$，$1-\alpha=\dfrac{1}{q}$，用$\dfrac{a}{b}$ 代替 x，于是就有下列不等式：

当 $a>0,b>0,p>1,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 时

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q}.$$

令 $A_k=a$，$x_{k+1}=b$，$p=\dfrac{k+1}{k}>1$，$q=k+1>1$，且

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=1,$$

所以，

$$(A_k)^{\frac{k}{k+1}}\cdot(x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\leqslant\frac{k}{k+1}A_k+\frac{1}{k+1}x_{k+1}.$$

于是，

$$\begin{aligned}G_{k+1}&\leqslant\frac{k}{k+1}A_k+\frac{1}{k+1}x_{k+1}\\&=\frac{1}{k+1}(kA_k+x_{k+1})\\&=\frac{1}{k+1}(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})=A_{k+1}.\end{aligned}$$

从而有

$$G_{k+1}\leqslant A_{k+1}.$$

按照数学归纳法得知不等式

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

对于任何的自然数 n 均成立.

1296. 设 a 及 b 为二正数,则由下之等式

$$若\ s\neq 0,\Delta_s(a,b)=\left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}},$$

$$\Delta_0(a,b)=\lim_{s\to 0}\Delta_s(a,b)$$

所定义之函数称为正数 a 及 b 之 s 阶平均数.

特别是,当 $s=-1$ 时得调和平均数,当 $s=0$ 时得几何平均数(试证之!);当 $s=1$ 时得算术平均数;当 $s=2$ 时得平方平均数.

证明:(1) $\min(a,b)\leqslant\Delta_s(a,b)\leqslant\max(a,b)$;

(2) 当 $a\neq b$ 时,函数 $\Delta_s(a,b)$ 是变量 s 的增函数;

(3) $\lim\limits_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b)=\min(a,b)$;

$\lim\limits_{s\to+\infty}\Delta_s(a,b)=\max(a,b)$.

证 先证当 $s=0$ 时得几何平均数,由题设知

$$\Delta_0(a,b)=\lim_{s\to 0}\Delta_s(a,b)=\lim_{s\to 0}e^{\frac{1}{s}\ln\frac{a^s+b^s}{2}},$$

研究 $f(x)=\ln\dfrac{a^x+b^x}{2}$ 在 $x=0$ 点的导数,有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right\}.$$

另一方面,

$$f'(0)=f'(x)\big|_{x=0}$$

$$=\left[\frac{2}{a^x+b^x}\cdot\frac{1}{2}(a^x\ln a+b^x\ln b)\right]\Bigg|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$$

因此求得

$$\Delta_0(a,b) = e^{f'(0)} = e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab},$$

此即几何平均数.

(1) 由于 $2[\min(a,b)]^s \leqslant a^s + b^s$

$\leqslant 2[\max(a,b)]^s$,

所以,

$$\min(a,b) \leqslant \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \max(a,b),$$

即

$$\min(a,b) \leqslant \Delta_s(a,b) \leqslant \max(a,b).$$

(2) 考虑 $\ln\Delta_s(a,b) = \frac{1}{s}\ln\frac{a^s + b^s}{2}$,则

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\ln\Delta_s(a,b)\\ &= -\frac{1}{s^2}\ln\frac{a^s + b^s}{2} + \frac{a^s\ln a + b^s\ln b}{s(a^s + b^s)}\\ &= \frac{1}{s^2(a^s + b^s)}\Big\{(a^s\ln a^s + b^s\ln b^s)\\ &\quad - (a^s + b^s)\ln\frac{a^s + b^s}{2}\Big\}.\end{aligned}$$

由于 $a^s > 0, b^s > 0$,参看 1314 题(в) 的结果知

$$a^s\ln a^s + b^s\ln b^s > (a^s + b^s)\ln\frac{a^s + b^s}{2},$$

所以,$\frac{d}{ds}\ln\Delta_s(a,b) > 0$,即 $\ln\Delta_s(a,b)$ 是严格增函数,由于对数函数的严格单调增加性,故知函数 $\Delta_s(a,b)$ 是变量 s 的严格增函数.

(3) 不妨设 $0 < a < b$. 于是

$$\lim_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b)$$

$$=\lim_{s\to-\infty}a\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^s\right]^{\frac{1}{s}}=a=\min(a,b),$$

$$\lim_{s\to+\infty}\Delta_s(a,b)$$

$$=\lim_{s\to+\infty}b\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^s+\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{s}}=b=\max(a,b).$$

1297. 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 为可微分二次的函数及

$$M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty(k=0,1,2).$$

证明不等式：

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2.$$

证 运用 1266 题解附注的公式(对任何 h)

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2$$
$$(x\leqslant\xi_1\leqslant x+h),\tag{1}$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2$$
$$(x-h\leqslant\xi_2\leqslant x),\tag{2}$$

(1) 减(2)，得

$$f(x+h)-f(x-h)$$
$$=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)].$$

即

$$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)$$
$$-\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)].$$

所以

$$2h|f'(x)|\leqslant|2hf'(x)|$$

$$\leqslant |f(x+h)| + |f(x-h)| + \frac{h^2}{2}[|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|]$$
$$\leqslant 2M_0 + h^2 M_2,$$

即

$$M_2 h^2 - 2|f'(x)|h + 2M_0 \geqslant 0.$$

由于此式对任何 h 都成立，故此二次式的判别式必非正：

$$4|f'(x)|^2 - 4M_2(2M_0) \leqslant 0,$$

即

$$|f'(x)|^2 \leqslant 2M_0M_2$$

由此可得

$$M_1^2 \leqslant 2M_0M_2.$$

证完．

§8. 凹凸性．拐点

1° 凹的充分条件　若曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 的一段，位于其任意一点的切线之上(或之下)，则称这个可微分的函数 $y=f(x)$ 的图形于闭区间$[a,b]$上是凹(或对应地，凸)的．在假设二阶导函数 $f''(x)$ 存在的情况下，当 $a<x<b$ 时不等式

$$f''(x)>0\ [\text{或对应地 } f''(x)<0]$$

成立，为图形是凹(或对应地，凸)的充分条件．

2° 拐点的充分条件　若函数的图形在某点的凹凸性改变，则称此点为拐点．

若在点 x_0，或是 $f''(x_0)=0$，或是 $f''(x_0)$ 不存在，且当 x 变动经过 x_0 时，$f''(x)$ 变号，则 x_0 便是拐点．

1298. 研究曲线

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

于 $A(-1,0)$, $B(1,2)$ 及 $C(0,0)$ 诸点的凹凸性.

解 $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, y'' = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$.

于 $A(-1,0)$ 点, $y'' = \dfrac{2}{9} > 0$, 故在该点附近曲线的图象是凹的;

于 $B(1,2)$ 点, $y'' = -\dfrac{2}{9} < 0$, 故在该点附近曲线的图形是凸的;

于 $C(0,0)$ 点附近, y'' 变号, 因此它是拐点. 在 C 点左边 $(x<0)$, $y''>0$, 曲线是凹的; 在 C 点右边 $(x>0)$, $y''<0$, 曲线是凸的. 注意, 当 $x=0$ 时, y'' 不存在.

求下列函数的图象的凹或凸的区域及拐点:

1299. $y = 3x^2 - x^3$.

解 $y' = 6x - 3x^2, y'' = 6 - 6x$.

当 $-\infty < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

$x = 1$ 为拐点.

1300. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2} (a > 0)$.

解 $y' = -\dfrac{2a^3 x}{(a^2 + x^2)^2}, y'' = -\dfrac{2a^3(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3}$.

当 $|x| < \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $|x| > \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = \pm \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 是拐点.

1301. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$

解 $y' = 1 + \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, y'' = \dfrac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$.

当 $-\infty < x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $0 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = 0$ 是拐点(注意, $x = 0$ 时, y'' 不存在).

1302. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

解 $y' = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}, y'' = x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$, 图形始终呈凹状. 无拐点.

1303. $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$.

当 $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $(2k + 1)\pi < x < (2k + 2)\pi$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = k\pi$ 是拐点($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$).

1304. $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$.

当 $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 是拐点.

1305. $y = \ln(1 + x^2)$.

解 $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}, y'' = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

当 $|x| < 1$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

当 $|x| > 1$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

$x = \pm 1$ 是拐点.

1306. $y = x\sin(\ln x)\ (x > 0)$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$,

$y'' = \dfrac{\sqrt{2}}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \ln x\right)$.

令 $y'' = 0$，得 $x = e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

当 $e^{2k\pi-\frac{3}{4}\pi} < x < e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 时，$y'' > 0$，故图形是凹的；

当 $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi+\frac{5}{4}\pi}$ 时，$y'' < 0$，故图形是凸的；

$x = e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 是拐点($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$).

1307. $y = x^x(x > 0)$.

解 $y' = x^x(\ln x + 1)$, $y'' = x^x\left[\dfrac{1}{x} + (1 + \ln x)^2\right]$.

当 $x > 0$ 时，$y'' > 0$，故图形始终是凹的.

1308. 证明曲线

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

有位于同一直线上的三个拐点. 作出这个函数的图形.

证 $y' = \dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$,

$y'' = \dfrac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$.

令 $y'' = 0$ 得 $x_1 = -2-\sqrt{3}, x_2 = -2+\sqrt{3}$,

$x_3 = 1$，对应的函数值为 $y_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$,

$y_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, y_3 = 1$. 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = 0$$

所以拐点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 及 $C(x_3, y_3)$ 在一条直线上(图 2.48).

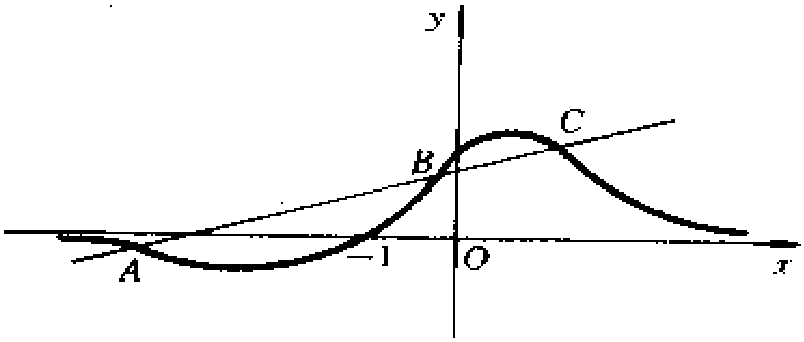


图 2.48

1309. 当如何选择参变数 h 时,"概率曲线"

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \quad (h > 0)$$

有拐点 $x = \pm \sigma$?

解 $y' = \frac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$,

$$y'' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} (4h^4x^2 - 2h^2).$$

令 $y'' = 0$, 得 $x^2 = \frac{1}{2h^2}$.

由于拐点为 $x = \pm \sigma$, 故有

$$h^2=\frac{1}{2\sigma^2},\text{即 } h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\ (\sigma>0).$$

1310. 研究摆线(旋轮线)

$$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(a>0)$$

的凹凸性。

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x_t'y_t''-x_t''y_t'}{(x_t')^3}$$

$$=-\frac{\csc^2\frac{t}{2}}{2a(1-\cos t)}<0$$

$$(2k\pi<t<2(k+1)\pi,k=0,\pm1,\cdots),$$

故摆线始终呈凸状.

1311. 设函数 $f(x)$ 于区间 $a\leqslant x<+\infty$ 中可微分二次,并且:

(1)$f(a)=A>0$; (2)$f'(a)<0$;

(3) 当 $x>a$,$f''(x)\leqslant0$.

证明:在区间$(a,+\infty)$内有而且仅有方程 $f(x)=0$ 之一实根.

证 由于 $f'(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续且当 $a<x<+\infty$ 时 $f''(x)\leqslant0$,故函数 $f'(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上是减小的,于是当 $a\leqslant x<+\infty$ 时,必 $f'(x)\leqslant f'(a)<0$;由此又知函数 $f(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上是严格减小的,因此在$(a,+\infty)$上至多有一点使 $f(x)=0$,即在$(a,+\infty)$上方程 $f(x)=0$ 至多有一(实)根.

下面再证明必有点 $a<x_0<+\infty$ 存在,使 $f(x_0)=$

0. 考虑函数 $F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)(a\leqslant x<+\infty)$,则

$$F'(x)=f'(x)-f'(a), F''(x)=f''(x),$$
$$(a\leqslant x<+\infty).$$

于是当 $a<x<+\infty$ 时 $F''(x)\leqslant 0$,从而 $F'(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上是减小的,但 $F'(a)=0$,故当 $a\leqslant x<+\infty$ 时,$F'(x)\leqslant F'(a)=0$;由此又知 $F(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上是减小的,但 $F(a)=0$,因此当 $a\leqslant x<+\infty$ 时,恒有 $F(x)\leqslant F(a)=0$.

令 $x^*=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$. 由于 $f(a)>0$,$f'(a)<0$,故 $x^*>a$. 很明显

$$F(x^*)=f(x^*)-f(a)-f'(a)\left[-\frac{f(a)}{f'(a)}\right]$$
$$=f(x^*).$$

但上面已证必 $F(x^*)\leqslant 0$,故 $f(x^*)\leqslant 0$. 于是,根据连续函数的中间值定理,知必有 $a<x_0\leqslant x^*$ 存在,使 $f(x_0)=0$. 证毕.

注　上述证明的思路在几何上是明显的. 函数 $F(x)$ 代表曲线 $y=f(x)$(它是凸的)上的纵坐标与在点 $(a,f(a))$ 处的切线 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ 上的纵坐标之差,点 $x^*=a-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$ 即是此切线与 Ox 轴的交点(图 2.49).

1312. 若对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 与 x_2 及任意二数 λ_1 与 λ_2($\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1$)有不等式:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$$

〔或对应地，相反的不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$〕，则称函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 上是凹（凸）的.

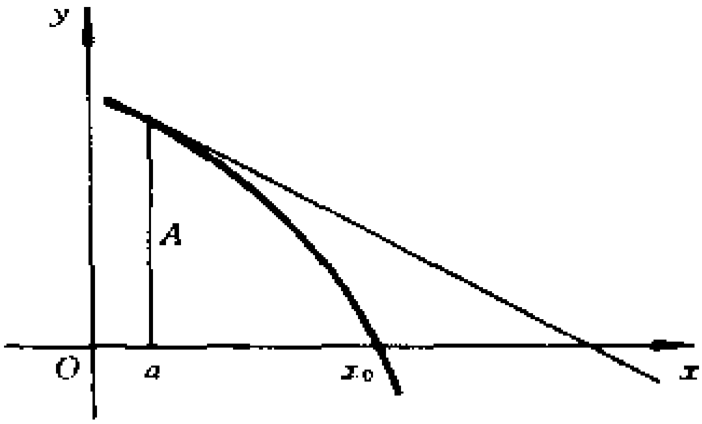


图 2.49

证明：函数 $f(x)$ (1) 若当 $a < x < b$ 时，$f''(x) > 0$，则于 (a,b) 上是凹的；(2) 若当 $a < x < b$ 时，$f''(x) < 0$，则于 (a,b) 上是凸的.

证　证法一：

设 x_1, x_2 为 (a,b) 中任意两点，$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. 不妨设 $x_1 < x_2$. 于是 $a < x_1 < x_2 < b$. 考虑 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的函数 $F(t) = f[(1-t)x_1 + tx_2] - (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$. 显然，

$$F(0) = f(x_1) - f(x_1) = 0,$$

$$F(1) = f(x_2) - f(x_2) = 0.$$

利用中值定理得知：当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned} F'(t) &= (x_2 - x_1)f'[(1-t)x_1 + tx_2] \\ &\quad - [f(x_2) - f(x_1)] \\ &= (x_2 - x_1)\{f'[(1-t)x_1 + tx_2] - f'(c)\}, \end{aligned}$$

其中 $x_1 < c < x_2$. 令 $t_0 = \dfrac{c - x_1}{x_2 - x_1}$，则 $0 < t_0 < 1$ 且 $c = (1-t_0)x_1 + t_0 x_2$. 于是 $F'(t_0) = 0$. 此外，当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，有

$$F''(t)=(x_2-x_1)^2f''[(1-t)x_1+tx_2].$$

(1) 若 $f''(x)>0(a<x<b)$. 由上式知 $F''(t)>0(0\leqslant t\leqslant 1)$，故 $F'(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上是严格增大的. 再注意到 $F'(t_0)=0$，即知：当 $0\leqslant t<t_0$ 时 $F'(t)<0$；当 $t_0<t\leqslant 1$ 时，$F'(t)>0$. 由此又知：在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 上 $F(t)$ 是严格减小的，在 $t_0\leqslant t\leqslant 1$ 上 $F(t)$ 是严格增大的；由此，再用 $F(0)=0$，$F(1)=0$，即知：当 $0<t<1$ 时，恒有 $F(t)<0$. 特别 $F(\lambda_2)<0$. 但 $F(\lambda_2)=f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)-\lambda_1f(x_1)-\lambda_2f(x_2)$，故

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2).$$

由此可知 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹的.

(2) 若 $f''(x)<0(a<x<b)$，则 $F''(t)<0(0\leqslant t\leqslant 1)$. 和(1)情形完全类似地可推知：当 $0<t<1$ 时，恒有 $F(t)>0$. 特别 $F(\lambda_2)>0$，由此即知

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),$$

故 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸的.

证法二：

在 (a,b) 内任取两点 x_1 及 x_2，使 $a<x_1<x_2<b$，并令 $t=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$，则由 $\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，$\lambda_1+\lambda_2=1$ 知：$x_1<t<x_2$.

将函数 $f(x)$ 在 $x=t$ 点按1266题题解附注的公式展开，得

$$f(x)=f(t)+(x-t)f'(t)+\frac{1}{2}(x-t)^2f''(\xi),\quad(1)$$

其中 $a<t<\xi<x$ 或 $a<x<\xi<t$. 将 $x=x_1$ 及 $x=x_2$ 代入(1)式，得

$$f(x_1)=f(t)+(x_1-t)f'(t)+\frac{1}{2}(x_1-t)^2f''(\xi_1), \tag{2}$$

$$f(x_2)=f(t)+(x_2-t)f'(t)+\frac{1}{2}(x_2-t)^2f''(\xi_2), \tag{3}$$

其中ξ_1,ξ_2分别是界于x_1,t及x_2,t之间的数. 以λ_1乘(2)式,λ_2乘(3)式,再相加,得

$$\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)=(\lambda_1+\lambda_2)f(t)+[\lambda_1x_1+\lambda_2x_2-(\lambda_1+\lambda_2)t]f'(t)+\frac{1}{2}[\lambda_1(x_1-t)^2f''(\xi_1)+\lambda_2(x_2-t)^2f''(\xi_2)].$$

但$t=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$,及$\lambda_1+\lambda_2=1$,故$[\lambda_1f(x_1)+$

$$\lambda_2f(x_2)]-f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\frac{1}{2}[\lambda_1(x_1-t)^2f''(\xi_1)+\lambda_2(x_2-t)^2f''(\xi_2)]$$

由于$\lambda_1>0,\lambda_2>0,(x_1-t)^2>0,(x_2-t)^2>0$,所以

$$[\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)]-f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)$$

与$f''(\xi_1)$、$f''(\xi_2)$有同样的正负号.

当$f''(x)>0$时,则

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),$$

所以,函数$f(x)$于区间(a,b)上是凹的.

当$f''(x)<0$时,则

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),$$

所以,函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 上是凸的.

1313. 证明:函数

$$x^n(n>1),e^x,x\ln x$$

于区间 $(0,+\infty)$ 上是凹的;而函数

$$x^n(0<n<1),\ln x.$$

于区间 $(0,+\infty)$ 上是凸的.

证 (1) 设 $y=x^n(n>1)$,则

$$y''=n(n-1)x^{n-2}.$$

它在 $(0,+\infty)$ 上是大于零的,因此图形是凹的.

但当 $0<n<1$ 时,则 $y''<0$,故此时图形是凸的.

(2) 对于函数 e^x,其二阶导函数为 e^x,它始终为正,因此图形是凹的.

(3) 对于函数 $x\ln x$,其二阶导函数为 $\frac{1}{x}$,它在 $(0,+\infty)$ 内大于零,因此图形是凹的.

(4) 对于函数 $\ln x$,其二阶导函数为 $-\frac{1}{x^2}$,它始终为负,因此,在 $(0,+\infty)$ 内图形是凸的.

1314. 证明下列不等式,并解释其几何意义:

(a) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$;

(б) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}(x\neq y)$;

(в) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$

$$(x>0,y>0).$$

证　我们已知，若函数 $f(x)$ 的图形在区间 (a,b) 内是凹的，则对于 (a,b) 中的任意两点 x 和 y 满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

于是，利用 1313 题的结果，我们有.

(a) 设 $f(x)=x^n$，$(x>0,n>1)$，则其图形是凹的. 于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(б) 设 $f(x)=e^x$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 上图形是凹的. 于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$$

(в) 设 $f(x)=x\ln x$，则对于 $x>0$ 图形是凹的. 于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义是：联接点 $(x,f(x))$ 及 $(y,f(y))$ 的弦的中点始终位于曲线上对应点（具相同横坐标）的上方.

1315. 证明有界的凸的函数处处连续，并有左侧及右侧的导函数.

证　设 $f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的，并设 x_0 为 (a,b) 内的任一点，今证 $f(x)$ 在点 x_0 连续，且有左侧及右侧的导数.

在点 x_0 附近取一邻域 $|x-x_0|<\delta$，使得这邻域全部包含在 (a,b) 内，并记

$$M = \min\{f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)\}.$$

设 $0 < |x - x_0| < \delta$. 记

$$t = \frac{|x - x_0|}{\delta},$$

则 $0 < t < 1$.

当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,有

$$x = t(x_0 + \delta) + (1 - t)x_0$$

及

$$x_0 = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}(x_0 - \delta).$$

由于 $f(x)$ 为凸函数,故有

$$\begin{aligned} f(x) &> tf(x_0 + \delta) + (1 - t)f(x_0) \\ &\geqslant tM + (1 - t)f(x_0) \end{aligned} \tag{1}$$

及

$$\begin{aligned} f(x_0) &> \frac{1}{1+t}f(x) + \frac{t}{1+t}f(x_0 - \delta) \\ &\geqslant \frac{f(x) + tM}{1+t}. \end{aligned} \tag{2}$$

由(1),得

$$f(x) - f(x_0) > -t[f(x_0) - M];$$

由(2),得

$$t[f(x_0) - M] > f(x) - f(x_0).$$

从而 $f(x_0) - M > 0$,且

$$|f(x) - f(x_0)| < t[f(x_0) - M]$$

$$= \frac{[f(x_0) - M]}{\delta} \cdot |x - x_0|. \qquad (3)$$

当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，类似地也可导出(3)式，故当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，(3)式恒成立.

由此显然有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

这就证实了凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性.

记 $x = x_0 + h$，则(3)式可改写为

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right|$$

$$< \frac{|f(x_0) - M|}{\delta} (0 < |h| < \delta). \qquad (4)$$

引进函数

$$\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)(-\delta < h < \delta).$$

容易验证 $\varphi(h)$ 仍为凸函数，且有 $\varphi(0) = 0$. 今取任意两数 t_1 及 t_2，设有 $0 < t_1 < t_2 < \delta$，并改写为

$$t_1 = \frac{t_1}{t_2} \cdot t_2 + (1 - \frac{t_1}{t_2}) \cdot 0.$$

对于 t_2 与 0 两点可用凸函数性质，有

$$\varphi(t_1) > \frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)\varphi(0)$$

$$= \frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2),$$

即

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} > \frac{\varphi(t_2)}{t_2},$$

这说明函数 $F(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ 是一个严格单调下降函数. 如

从 $h\to+0$ 方向看，则函数 $F(h)$ 严格单调增大. 但由 (4) 可知 $|F(h)|<\dfrac{|f(x_0)-M|}{\delta}$，即 $F(h)$ 在 $0<|h|<\delta$ 有界. 故极限 $\lim\limits_{h\to+0}F(h)$ 存在，也即 x_0 的右侧导数

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$$

存在. 同理，可证左侧导数 $f'_-(x_0)$ 也存在.

以上讨论中，对于区间是否有穷无关紧要. 证毕.

注　本题不需假定凸函数有界，证明中也未用到有界这个条件，参看 E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, § 5.31. 若以较弱的不等式 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{1}{2}f(x_1)+\dfrac{1}{2}f(x_2)\ (x_1\neq x_2)$ 作为凸函数的定义，则需加上凸函数有界这个条件，才能推出它连续并且左、右导数都存在. 参看 G. Pólya, G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis, Vol. I, 70 题和 124 题.

1316. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a,b) 内可微分二次，且 $f''(\xi)\neq 0$，其中 $a<\xi<b$. 证明：在区间 (a,b) 中可找出两个值 x_1 与 x_2，满足

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

证　不妨设 $f''(\xi)>0$. 考察 $f'(\xi)$，分两种情形：

(1) 若 $f'(\xi)=0$，则由 $f''(\xi)>0$ 知 $f(\xi)$ 为极小值. 从而存在 $\delta>0$，在 $[-\delta+\xi,\xi+\delta]\,(\subset(a,b))$ 上函数 $f(x)$ 在 ξ 的左侧单调下降，在 ξ 的右侧单调上升. 如

果 $f(-\delta+\xi)=f(\xi+\delta)$，则取 $x_1=-\delta+\xi, x_2=\xi+\delta$，就满足了题中的等式. 如果 $f(-\delta+\xi)<f(\xi+\delta)$，则取 $x_1=-\delta+\xi$，而在 $[\xi,\xi+\delta]$ 上函数值 $f(x_1)$ 介于 $f(\xi)$ 与 $f(\xi+\delta)$ 之间. 由于 $f(x)$ 在 $[\xi,\xi+\delta]$ 上单调上升，故存在 $x_2\in(\xi,\xi+\delta)$，使 $f(x_2)=f(x_1)$，从而题中的等式成立. 如果 $f(-\delta+\xi)>f(\xi+\delta)$，仿前也可取得两点 x_1 及 x_2，使 $f(x_1)=f(x_2)$. 这时题中的等式得证.

(2) 若 $f'(\xi)\neq 0$，则设

$$F(x)=f(x)-f'(\xi)x,$$

从而有

$$F'(\xi)=f'(\xi)-f'(\xi)=0,$$

且

$$F''(\xi)=f''(\xi)>0.$$

对于函数 $F(x)$，应用上述(1)的推证方法，总存在两点 x_1 及 x_2，使 $F(x_1)=F(x_2)$，也即有

$$f(x_1)-f'(\xi)x_1=f(x_2)-f'(\xi)x_2,$$

解得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

从而命题得证.

1317. 证明：若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微分两次，且

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

则在区间 $(x_0,+\infty)$ 内至少有一点 ξ，满足

$$f''(\xi)=0.$$

证 用反证法，即若不存在 ξ，使 $f''(\xi)=0$，则当 $x>x_0$ 时，或者 $f''(x)>0$，或者 $f''(x)<0$，如果不是这样，即若存在点 a 与 b，使得 $f''(a)<0$ 及 $f''(b)>0$，则由达布定理*）可知，在 a 与 b 之间必有 c 存在，使得 $f''(c)=0$，这与我们的反证假设矛盾．因此我们不妨设 $f''(x)>0$，从而函数 $f(x)$ 的图象是凹的，位于其任一点曲线的切线的上方．

再由

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

与 $f(x)$ 的可微性，利用1237题的结果，即知：在 $(x_0,+\infty)$ 中至少存在一点 c_1，使

$$f'(c_1)=0.$$

由 $f''(x)>0$ 易知 $f'(x)$ 单调上升，从而当 $x>c_1$ 时，$f'(x)>0$．取 $c_2>c_1$，则 $f'(c_2)>0$．

过点 $(c_2,f(c_2))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，其方程为

$$Y(x)=f(c_2)+f'(c_2)(x-c_2).$$

易知

$$\lim_{x\to+\infty} Y(x)=+\infty,$$

而 $f(x)-Y(x)>0$，从而应有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

这与原设条件 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 矛盾．同样，对于 $f''(x)<0$ 的情况也可推得以上结论．

于是，在区间 $(x_0,+\infty)$ 内至少有一点 ξ，使

$$f''(\xi)=0.$$

*） 达布定理指：若函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 内有有限的导

函数，且 $g'(a)g'(b)<0$，则在 (a,b) 内至少有一点 c，使

$$g'(c)=0.$$

其证法是：不妨设 $g'(a)<0, g'(b)>0$，则在 a 右边且与 a 充分近的点 x，有 $g(a)>g(x)$；在 b 左边且与 b 充分近的点 x，有 $g(x)<g(b)$；由此可知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值必在 (a,b) 内某点 c 达到，从而必有 $g'(c)=0$.

在本题中，可设 $g(x)=f'(x)$，则由 $g'(a)=f''(a)<0$ 及 $g'(b)=f''(b)>0$ 可知在 a 与 b 之间必有 c 存在，使 $g'(c)=0$，即 $f''(c)=0$.

§9. 未定形的求值法

洛比塔第一法则（未定形 $\frac{0}{0}$ 的求值法）若(1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 点的某邻域 U_ϵ * 内有定义并且是连续的（此处 a 为数字或符号 ∞），并且当 $x\to a$ 时，这两个函数都趋近于零：

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0;$$

(2) 在 a 点的邻域 U_ϵ 内，除 a 点而外，在其余各点导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在，并且当 $x\neq a$ 时，二者不同时为零；(3) 有限或无穷的极限值 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

---

* 所谓 a 点的邻域 U_ϵ 系指适合于不等式

(1) $|x-a|<\epsilon$，若 a 为一个数

及

(2) $|x|>\frac{1}{\epsilon}$，若 a 为符号 ∞，x 的集合.

洛比塔第二法则（不定形$\frac{\infty}{\infty}$的求值法）若：(1) 当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 二者都趋于无穷大：

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty,$$

其中 a 为有限数或符号 ∞；

(2) 对于属于 a 点的邻域 U，而异于 a 的一切 x 值，导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在，并且当 $x\in U$，及 $x\neq a$ 时，

$$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0.$$

(3) 有限或无穷的极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法，可使未定形 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，0^0 等的求值法化为前面两个类型的未定形：

$$\frac{0}{0}\text{ 与 }\frac{\infty}{\infty}$$

的求值法.

求出下列各式之值：

1318. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}\ (b\neq 0)$.

1319. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x+\sin x}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x+\cos x}{2}=1.$

1320. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x}$

$=2.$

1321. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12\sec^2 4x-12\sec^2 x}{12\cos 4x-12\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\cos 4x+\cos x}{\cos^2 x\cos^2 4x}\right)=-2.$

1322. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x}=3\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^2$

$=3\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{3\sin 3x}\right)^2=\dfrac{1}{3}.$

1323. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg}x}{x^2\operatorname{tg}x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{2x\operatorname{tg}x+x^2\sec^2 x}$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2\operatorname{tg}^2 x+2x\operatorname{tg}x+x^2}$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+2\frac{x}{\operatorname{tg}x}+\left(\frac{x}{\operatorname{tg}x}\right)^2}=-\frac{1}{3}.$$

1324.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2x-1}.$$

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2x}}\sec^2x}{4\sin x\cos x}=\frac{1}{3}.$$

1325. $$\lim_{x\to0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}.$$

解 $$\lim_{x\to0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-e^x+xe^x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-e^x+e^x+xe^x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6}.$$

1326. $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}.$$

解 $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\sin t+t\cos t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{1+\frac{t}{\sin t}\cos t}=\frac{1}{2}.$$

1327. $$\lim_{x\to0}\frac{\text{are }\sin2x-2\text{are }\sin x}{x^3}$$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{arc}\sin 2x - 2\text{arc}\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[\frac{4x}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]}{6x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{4}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=1.$$

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{a}}{1+\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{b}}{1+\frac{x}{b}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{x+a}-\frac{b}{x+b}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{a}{(x+a)^2}+\frac{b}{(x+b)^2}}{3}$$

$$=\frac{a-b}{3ab}(ab\neq 0).$$

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a^x-\cos x\cdot a^{\sin x})\ln a}{3x^2}$

$$= \frac{\ln a}{3} \lim_{x \to 0} \frac{a^x \ln a + \sin x \cdot a^{\sin x} - \cos^2 x \cdot a^{\sin x} \ln a}{2x}$$

$$= \frac{\ln a}{6} \lim_{x \to 0} (a^x \ln^2 a + \cos x \cdot a^{\sin x} + \sin x \cos x \cdot a^{\sin x} \ln a$$

$$+ \sin 2x \cdot a^{\sin x} \ln a - \cos^3 x \cdot a^{\sin} \ln^2 a)$$

$$= \frac{\ln a}{6} (a > 0).$$

1330. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right)$.

解 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

1331. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

解 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} = \lim_{x \to 0} \frac{a \sin bx \cos ax}{b \sin ax \cos bx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ *) $= 1.$

*) 利用 1318 题的结果.

1332. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

解 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x \to 0} \frac{a \operatorname{tg} ax}{b \operatorname{tg} bx}$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \to 0} \frac{a \sec^2 ax}{b \sec^2 bx} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 (b \neq 0).$$

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x\cdot\sin(\sin x)+\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin(\sin x)-\cos^2 x\cos(\sin x)+\cos x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{24x}\Big[\cos x\sin(\sin x)+\frac{1}{2}\sin 2x\cos(\sin x)$$

$$+\sin 2x\cos(\sin x)+\cos^3 x\sin(\sin x)-\sin x\Big]$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{x\to 0}\Big[-\sin x\sin(\sin x)+\cos^2 x\cos(\sin x)$$

$$+3\cos 2x\cos(\sin x)-\frac{3}{2}\cos x\sin 2x\sin(\sin x)$$

$$-3\cos^2 x\sin x\sin(\sin x)+\cos^4 x\cos(\sin x)-\cos x\Big]$$

$$=\frac{1}{6}.$$

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th}x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th}x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\operatorname{th}^2 x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\operatorname{sh}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}2x-\sin 2x}{\sin 2x\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{sh}2x\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}2x-\cos 2x}{\cos 2x\operatorname{sh}^2 x+\sin 2x\operatorname{sh}2x+\operatorname{ch}2x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\text{sh}2x + 2\sin 2x}{-2\sin 2x\,\text{sh}^2 x + 3\cos 2x\,\text{sh}2x + 3\sin 2x\,\text{ch}2x + 2\text{sh}2x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(4\text{ch}2x + 4\cos 2x)(-4\cos 2x\,\text{sh}^2 x$$

$$-2\sin 2x\,\text{sh}2x - 6\sin 2x\,\text{sh}2x + 6\cos 2x\,\text{ch}2x$$

$$+6\cos 2x\,\text{ch}2x + 6\sin 2x\,\text{sh}2x + 4\text{ch}2x\sin^2 x$$

$$+2\sin 2x\,\text{sh}2x)^{-1}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

1335. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ar sh}(\text{sh}x) - \text{ar sh}(\sin x)}{\text{sh}x - \sin x}$,

其中 $\text{ar sh}x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ar sh}(\text{sh}x) - \text{ar sh}(\sin x)}{\text{sh}x - \sin x}$,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\text{sh}x + \text{ch}x) - \ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})}{\text{sh}x - \sin x},$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\text{ch}x + \text{sh}x}{\text{sh}x + \text{ch}x} - \dfrac{\cos x + \dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}}}{\text{ch}x - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\text{ch}x - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\left(\dfrac{-\sin x\sqrt{1+\sin^2 x} - \dfrac{\cos^2 x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{1+\sin^2 x}\right)}{\text{sh}x + \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2\sin x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}}{\operatorname{sh}x + \sin x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\cos x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{3\sin^2 x\cos x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{5}{2}}}}{\operatorname{ch}x + \cos x}$$

$$= 1.$$

1336. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}} (\varepsilon < 0)$.

解 $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = 0.$$

1337. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}} (a > 0, n > 0)$.

解 $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{ae^{ax}} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0.$$

以上是就 n 为正整数的情形解得的. 若 n 不是正整数，则

$$[n] < n < [n] + 1.$$

于是，

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}} < \frac{x^n}{e^{ax}} < \frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}} (x > 1).$$

而左右两端当 $x \to +\infty$ 时，上面已证明它们的极限为零. 因此，中间的极限也为零. 于是，对于任意大于零的实数 a 和 n，均有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0.$$

1338. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{\frac{1}{x^2}\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{50}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\overset{*)}{=}0.$$

*） 利用 1337 题的结果.

1339. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0.01x}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-0.01x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{0.01x}}\overset{*)}{=}0.$$

*） 利用 1337 题的结果.

1340. $\lim\limits_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

解 $$\lim_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x\ln^2x}}=\lim_{x\to1-0}\frac{x\ln^2x}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln^2x+2\ln x}{-1}=0.$$

1341. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x\quad(\varepsilon>0)$.

解 $$\lim_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon}=0.$$

1342. $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

解 $\lim\limits_{x\to+0} x^x = \lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = e^0 \ {}^{*)} = 1.$

*） 利用 1341 题的结果.

1343. $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1} = \lim\limits_{x\to+0} e^{(x^x-1)\ln x} = \lim\limits_{x\to+0} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}$。

由于

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = 0\ ^{*)}, \lim_{x\to+0} \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = 1$$

及

$$\lim_{x\to+0} (x\ln^2 x) = \lim_{x\to+0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+0} (-2x\ln x) = 0,$$

故

$$\lim_{x\to+0} \{(e^{x\ln x}-1)\ln x\}$$

$$= \lim_{x\to+0} \left\{\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} \cdot x\ln^2 x\right\} = 1 \cdot 0 = 0.$$

于是,

$$\lim_{x\to+0} x^{x^x-1} = \lim_{x\to+0} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x} = e^0 = 1.$$

*） 利用 1341 题的结果.

1344. $\lim\limits_{x\to+0} (x^{x^x} - 1)$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}(x^{x^x}-1)=\lim\limits_{x\to+0}(e^{x^x\ln x}-1)$.

利用 1342 题的结果，有

$$\lim_{x\to+0}x^x=1,$$

故得

$$\lim_{x\to+0}e^{x^x\ln x}=0,$$

从而有

$$\lim_{x\to+0}(x^{x^x}-1)=-1.$$

1345. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{k}{1+\ln x}\ln x=k\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=k,$$

所以

$$\lim_{x\to+0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}=e^k.$$

1346. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1,$$

所以

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}.$$

1347. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\ln(2-x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x-2}}{-\dfrac{\pi}{2}\csc^2\dfrac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

1348. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\dfrac{\sec^2x}{\operatorname{tg}x}}{-2\csc^2 2x}$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x=-1$$

所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=e^{-1}.$$

1349. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln\operatorname{ctg}x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\csc x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\csc^2x}{\operatorname{ctg}x}}{-\csc x\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2x}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=e^0=1.$$

1350. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解 由于$\lim\limits_{x\to +0}x\ln\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{\ln(\ln y)}{y}$

$$=\lim_{y\to +\infty}\frac{1}{y\ln y}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to +0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x=e^0=1.$$

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\pi}{(1+2x)^2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\cdot\cos^2\dfrac{\pi x}{2x+1}}$$

$$=2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(1+2x)^2}}{\sin\dfrac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$=2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{4}{(1+2x)^3}}{\dfrac{2\pi}{(1+2x)^2}\cos\dfrac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$=-4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+2x)\cos\dfrac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$= 0.$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

1352. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$.

解 由于

$$\lim_{x\to a}\operatorname{ctg}(x-a)\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right| = \lim_{x\to a}\frac{\ln\operatorname{tg}x - \ln\operatorname{tg}a}{\operatorname{tg}(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\sec^2 x}{\sec^2(x-a)} = \frac{2}{\sin 2a},$$

所以

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)} = e^{\frac{2}{\sin 2a}}\left(a \neq \frac{k\pi}{2}, k\text{ 为整数}\right).$$

1353. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x - x\ln a) - \ln(b^x - x\ln b)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(a^x-1)\ln a}{a^x - x\ln a} - \dfrac{(b^x-1)\ln b}{b^x - x\ln b}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{a^x\ln^2 a(a^x - x\ln a) - (a^x-1)^2\ln^2 a}{(a^x - x\ln a)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{b^x\ln^2 b(b^x - x\ln b) - (b^x-1)^2\ln^2 b}{(b^x - x\ln b)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2}}.$$

1354. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(x + 2)} = \frac{1}{2}.$$

1355. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x - \ln x - 1}{(x - 1)\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x - 1}{x} + \ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x - 1}{(x - 1) + x\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1 + 1 + \ln x} = \frac{1}{2}$$

1356. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = 0.$$

1357. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\ln(1 + x)}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1-x}{\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+(1+x)\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+1+\ln(1+x)}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

1358. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}(a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(a^x\ln a-ax^{a-1})=a^a(\ln a-1)$.

1359. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

$$=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$= -e\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)^2} = -\frac{e}{2}.$$

1360. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\ (a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x\left[\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right]-a^x\ln a}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left\{(a+x)^x\left[\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right]^2\right.$$

$$\left.+(a+x)^x\left[\frac{1}{a+x}+\frac{a}{(a+x)^2}\right]-a^x\ln^2 a\right\}$$

$$= \frac{1}{a}.$$

1361. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}x\right)^x$.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}x\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2\operatorname{arc\,tg}x}\cdot\frac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)\mathrm{arctg}x}=-\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arc\ tg}x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1362. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{th}x)^x$.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln(\mathrm{th}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{th}x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\mathrm{th}x\mathrm{ch}^2x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{sh}2x}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2\mathrm{ch}2x}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\mathrm{sh}2x}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{th}x)^x=e^0=1.$

1363. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{arc\ sin}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\arcsin x)-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sqrt{1-x^2}\mathrm{arc\ sin}x}{2x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{arc\ sin}x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{arc\ sin}x}{\left(4x\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{arc\ sin}x+2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\text{arc}\ \sin x}{2(2-3x^2)\text{are}\ \sin x+2x\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-12x\text{are}\ \sin x+\frac{2(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}+2\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\frac{1}{6},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{are}\ \sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{6}}.$$

1364. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

1365. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\text{arc}\ \cos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}=-\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1366. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x-\ln\operatorname{ch}x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\operatorname{tg}x-\operatorname{th}x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sec^2x-\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}}{2}=-1,$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1}.$$

1367. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{ch}x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch}x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch}x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{ch}x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch}x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch}x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{th}x}{\operatorname{sh}x\left[\frac{1}{m}(\operatorname{ch}x)^{\frac{1}{m}-1}-\frac{1}{n}(\operatorname{ch}x)^{\frac{1}{n}-1}\right]}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=\frac{mn}{n-m}\ (n\neq m),$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}=\frac{mn}{n-m}.$$

1368. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth} x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x)-\ln 2}{\operatorname{th} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x}{1+e^x}}{\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth} x}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

1369.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right].$$

解 当 $x\to+\infty$ 时,有

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}=x\left[1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=x\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$=x+\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right)+o(1)=x+\frac{1}{3}+o(1),$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=x\left[1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=x+\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{x}\right)+o(1)=x+\frac{1}{2}+o(1)$$

$$\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\frac{1}{x}\ln[e^x(1+xe^{-x})]$$

$$=1+\frac{1}{x}\ln(1+xe^{-x})$$

$$=1+o\left(\frac{1}{x}\right)（这是由于\lim_{x\to+\infty}\ln(1+xe^{-x})=0）.$$

于是，

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}$$

$$=\left[x+\frac{1}{3}+o(1)\right]-\left[x+\frac{1}{2}+o(1)\right]\left[1+o(\frac{1}{x})\right]$$

$$=\left[x+\frac{1}{3}+o(1)\right]-\left[x+\frac{1}{2}+o(1)+o(\frac{1}{x})\right]$$

$$=-\frac{1}{6}+o(1),$$

从而有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{6}+o(1)\right]=-\frac{1}{6}.$$

1370. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}]$.

解 当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+\frac{a}{x})}=e^{o(\frac{1}{x})}=1+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

及

$$x^{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}=x^{-\frac{a}{x(x+a)}}=e^{-\frac{a}{x(x+a)}\ln x}=e^{o\left(\frac{1}{x}\right)}=1+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

并注意到 $x^{\frac{1}{x}} \to 1$，于是得

$$(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}} = (x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}}-x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}$$

$$= (x+a)\cdot x^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - x\cdot x^{\frac{1}{x}}x^{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}$$

$$= x^{\frac{1}{x}}\left\{(x+a)\left[1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]-x\left[1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}$$

$$= x^{\frac{1}{x}}\{[x+a+o(1)]-[x+o(1)]\}$$

$$= x^{\frac{1}{x}}[a+o(1)],$$

从而有

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left\{x^{\frac{1}{x}}[a+o(1)]\right\} = a.$$

1371. 若当 $x\to 0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点(0，0)$[\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0]$，且在此有斜角 α，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}.$$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\operatorname{tg}\alpha^{*)}$.

*) 所谓有斜角 α 是指在 $x=0$ 点有 $f'(0)=\operatorname{tg}\alpha$，注意到当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，以及 $f'(0)$ 存在，如果再假定 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，则也可用洛比塔法则求得

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y'}{1}=f'(0)=\operatorname{tg}\alpha.$$

1372. 若当 $x\to+0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点(0，

$0)$ $[\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0]$，并且当 $0<x<\varepsilon$ 时，此曲线完全是在两直线 $y=-kx$ 及 $y=kx(k\neq\infty)$ 所组成的锐角之内，证明

$$\lim_{x\to+0} x^{f(x)}=1.$$

证 当 $x\to+0$ 时，有 $x\ln x\to 0$. 按题设应有

$$-kx\leqslant f(x)\leqslant kx \quad (k>0,0<x<\epsilon),$$

而当 $x>0$ 且很小时，有 $\ln x<0$，故

$$kx\ln x<f(x)\ln x<-kx\ln x,$$

从而有

$$e^{kx\ln x}<e^{f(x)\ln x}<e^{-kx\ln x}.$$

当 $x\to+0$ 时，不等式两端均趋于 $e^0=1$，注意到 $e^{f(x)\ln x}=x^{f(x)}$，即有

$$\lim_{x\to+0} x^{f(x)}=1.$$

1373. 证明：若函数 $f(x)$ 的二阶导函数 $f''(x)$ 存在，则

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

证 当 $h\to 0$ 时，$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to 0$ 及 $h^2\to 0$，且分子、分母（视为 h 的函数）都有导数，又注意到分母的导数 $2h\neq 0(h\to 0$ 但 $h\neq 0)$，故对 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ 可用洛比塔法则，并

且继续运算，最后得证

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

1374. 研究运用洛比塔法则于下列各例的可能性：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$；　　(б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$；

(г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$.

解　(a) 分子、分母分别求导数，得商为

$$\frac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x},$$

此函数当 $x\to 0$ 时，极限不存在，因此洛比塔法则不能适用. 但是，原极限是存在的. 事实上，函数

$$\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x},$$

当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x}{\sin x}\to 1$ 及 $x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$，于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=0.$$

(б) 分子、分母分别求导数，得商为

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x},$$

当 $x\to\infty$ 时，上述函数的极限不存在，因此洛比塔法则不能适用. 但是，原极限是存在的，事实上，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1.$$

(в) 如果运用洛比塔法则，就有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5e^{-2x}\sin x-2xe^{-x^2}\sin^2 x+e^{-x^2}\sin 2x}{-2e^{-x}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}e^{-x}+xe^{-x^2+x}\sin x-e^{-x^2+x}\cos x\right)=0.$$

这个结果是错误的. 事实上，若取 $x_n=n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=+\infty$. 对于叙列 $\{x_n\}$，原式的分母 $e^{-x_n}\cdot(\cos x_n+\sin x_n)=\sqrt{2}e^{-x_n}\sin\left(x_n+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-(n\pi+\frac{3\pi}{4})}\cdot\sin(n+1)\pi=0$，而分子不为零，此时原式的极限不存在，从而对于 $x\to+\infty$，原式的极限不存在. 原因是在求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时，虽然 $f(x)$ 及 $g(x)$ 均连续且极限为

零，但其导函数在点列 $x^{(n)} = n\pi(n = 1,2,\cdots)$ 上两者同时出现了零点. 因此，一方面本题不符合运用洛比塔法则的条件；另一方面也不允许在求极限过程中，用 $\sin x$ 作除数，上、下同时约分后再求极限.

(г) 如果运用洛比塔法则，就有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos 2x}{e^{\sin x}[1+\cos 2x+\cos x\cdot(x+\sin x\cos x)]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x}[2\cos^2 x+\cos x\cdot(x+\sin x\cos x)]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\sin x}\left[1+\frac{1}{2\cos x}(x+\sin x\cos x)\right]}.$$

由于

$$e^{\sin x}\geqslant e^{-1}, x+\sin x\cos x\geqslant x-1,$$

故当 $x>1$ 时，有

$$\left|e^{\sin x}\left[1+\frac{1}{2\cos x}(x+\sin x\cos x)\right]\right|$$

$$\geqslant e^{-1}\left[\frac{1}{2|\cos x|}(x-1)-1\right]$$

$$\geqslant e^{-1}\left[\frac{1}{2}(x-1)-1\right]\to+\infty(\text{当 } x\to+\infty \text{ 时}),$$

从而得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}=0.$$

这个结果是错误的.事实上,对于不同的叙列:

$$x_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 及 } x_n'' = 2n\pi (n = 1,2,\cdots),$$

让 $n \to +\infty$,则分别取不同的极限 $\frac{1}{e}$ 及 1,从而原极限是不存在的.原因与(в)的情况类似,只是注意到 $\cos x$ 在 $x^{(n)} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 的点列上($n = 1,2,\cdots$)取值为零.因此,本题不符合运用洛比塔法则的条件;当然也不允许在中间过程里,用 $\cos x$ 作除数,上、下约分后再求极限.

1375. 设有一弓形,其弦为 b,矢为 h,又有内接于此弓形之内的等腰三角形,若当 R 不变时弓形的弧趋于零,求弓形面积与内接等腰三角形面积之比.利用所得之结果推出计算弓形面积之近似公式:

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

解 如图 2.50 所示. $AB = b$, $DC = h$, $\angle AOB = \alpha$, $\triangle ABC$ 为内接等腰三角形,其面积为

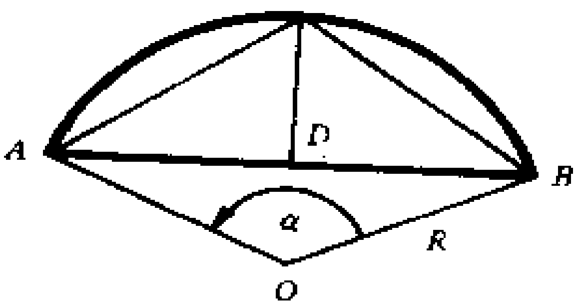


图 2.50

$$\frac{1}{2}bh = R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right).$$

弓形面积为$\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$

当弧长趋于零时，α 趋于零，于是，弓形面积与内接等腰三角形面积之比为

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)}{R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\right)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{3\alpha}{4}\cdot\frac{\alpha}{4}}=\frac{4}{3}.$$

由此得弓形面积的近似公式为

$$S\approx\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}bh=\frac{2}{3}bh.$$

§ 10. 台劳公式

1° 台劳局部公式　若(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $|x-x_0|<\varepsilon$ 内有定义；(2) 于此邻域内有一直到$(n-1)$阶的导函数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$；(3)$n$ 级导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 于 x_0 点存在，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o(|x-x_0|^n),\qquad(1)$$

其中　　$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(k=0,1,\cdots,n).$

特例，当 $x_0 = 0$ 时，有：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(|x|^n). \qquad (2)$$

在所示的条件下，(1) 式是唯一的.

从台劳局部公式(2)，得出下列五个重要的展开式：

Ⅰ. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$；

Ⅱ. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$；

Ⅲ. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$；

Ⅳ. $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 +$

$$\cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

Ⅴ. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.

2° **台劳公式** 若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义；(2) 在此闭区间上有连续的导函数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$；(3) 当 $a < x < b$ 时，有有限值的导函数 $f^{(n)}(x)$，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日余项公式)，或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n$$

$$(0 < \theta_1 < 1)$$

(哥西余项公式).

1376. 将多项式

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

表成二项式 $x+1$ 的正整数乘幂多项式.

解 $P'(x) = 3 + 10x - 6x^2$, $P'(-1) = -13$.

$P''(x) = 10 - 12x$, $P''(-1) = 22$.

$P'''(x) = -12$, $P'''(-1) = -12$.

$P^{(4)}(x) = 0$, $P(-1) = 5$.

按台劳公式有

$$P(x) = P(-1) + \frac{P'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + R_4(x),$$

这里 $R_4(x)=0$,即展开式中的余项为零,将上述结果代入,即得

$$P(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$$

按变数 x 的正整数乘幂,写出下列函数的展开式至含有指出阶数的项:

1377. $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 到含 x^4 的项. $f^{(4)}(0)$ 等于甚么?

解 $$\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = (1+x+x^2)\frac{(1+x)}{1+x^3}$$

$$= (1+x)(1+x+x^2)\cdot[1 - x^3 + o(x^6)]$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4).$$

$$f^{(4)}(0) = 4! \cdot (-2) = -48.$$

1378. $\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ 到含 x^2 的项.

解 设 $f(x) = \dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$,则

$$f'(x) = \frac{60(1+x)^{99}(1+6x)}{(1-2x)^{41}(1+2x)^{61}},$$

$$f''(x) = \frac{60(1+x)^{98}(65+728x+2196x^2+48x^3)}{(1-2x)^{42}(1+2x)^{62}},$$

而

$$f(0) = 1, f'(0) = 60, f''(0) = 3900.$$

所以,按台劳公式就有

$$\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}} = 1+60x+1950x^2+o(x^2).$$

1379. $\sqrt[m]{a^m + x}\,(a > 0)$ 到含 x^2 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$,则

$$f'(x) = \frac{1}{m}(a^m + x)^{\frac{1-m}{m}},$$

$$f''(x) = \frac{(1-m)(a^m + x)^{\frac{1-2m}{m}}}{m^2},$$

而

$$f(0) = a, f'(0) = \frac{1}{m}a^{1-m}, f''(0) = \frac{1-m}{m^2}a^{1-2m}.$$

于是

$$\sqrt[m]{a^m + x} = a + \frac{x}{ma^{m-1}} + \frac{(1-m)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2).$$

1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 到含 x^3 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$,则

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-2)(1-2x+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{3}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = 3x(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{4}(3x^2-2)^2(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{2}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9}(2x-3)^2(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}},$$

$$f'''(x) = 3(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{3}{2}x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{3}{8}(3x^2-2)^3(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}$$

$$-3x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{4}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$+\frac{8}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$-\frac{10}{27}(2x-3)^3(1-3x+x^2)^{-\frac{8}{3}},$$

从而

$$f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=\frac{1}{3}, f'''(0)=6,$$

于是,

$$\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$$
$$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3).$$

1381. e^{2x-x^2} 到含 x^5 的项.

解 $e^{2x-x^2}=1+(2x-x^2)$

$$+\frac{(2x-x^2)^2}{2!}+\frac{(2x-x^2)^3}{3!}+\frac{(2x-x^2)^4}{4!}$$

$$+\frac{(2x-x^2)^5}{5!}+o(x^5)$$

$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).$$

1382. $\frac{x}{e^x-1}$ 到含 x^4 的项.

解 当 x 很小时. 令 $\frac{e^x-1}{x}=1+\Delta$,则有

$$\Delta=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4),$$

其中 Δ 也很小. 于是,

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1+\Delta}$$

$$=1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\Delta^4+o(x^4).$$

注意到

$$\Delta^2=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{72}+o(x^4),$$

$$\Delta^3=\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

$$\Delta^4=\frac{x^4}{16}+o(x^4),$$

则得

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+o(x^4).$$

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 到含 x^{13} 的项.

解 $$\sqrt[3]{\sin x^3}=\left[x^3-\frac{x^9}{3!}+\frac{x^{15}}{5!}+o(x^{15})\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=x\left[1+\left(\frac{x^{12}}{120}-\frac{x^6}{6}+o(x^{12})\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=x\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{x^{12}}{120}-\frac{x^6}{6}+o(x^{12})\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{9}\left(\frac{x^{12}}{120}-\frac{x^6}{6}+o(x^{12})\right)^2+o(x^{12})\right]$$

$$=x-\frac{7}{18}x^7-\frac{1}{3240}x^{13}+o(x^{13}).$$

1384. $\ln\cos x$ 到含 x^6 的项.

解 $$\ln\cos x=\frac{1}{2}\ln(1-\sin^2 x)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\sin^2 x+\frac{\sin^4 x}{2}+\frac{\sin^6 x}{3}+o(\sin^6 x)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)^2\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)^4$$

$$+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)^6+o(x^6)\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$$

其中用到：$\frac{\sin x}{x}\to 1$（当 $x\to 0$），故 $o(\sin^6 x)$ 可换为 $o(x^6)$.

1385. $\sin(\sin x)$ 到含 x^3 的项.

解 $\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3!}+o(x^4)$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^3$$

$$+o(x^4)$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

1386. $\operatorname{tg}x$ 到含 x^5 的项.

解 当 x 很小时，有

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)=1-\Delta,$$

其中 $\Delta=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)$ 很小，易见 $\Delta^2=\frac{x^4}{4}+o(x^5)$.

于是，

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)\frac{1}{1-\Delta}$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right)$$

$$\cdot (1 + \Delta + \Delta^2 + o(x^4))$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right)$$

$$\cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

1387. $\ln \dfrac{\sin x}{x}$ 到含 x^6 的项.

解 $$\ln \frac{\sin x}{x} = \ln \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x}$$

$$= \ln\left[1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6)\right)\right]$$

$$= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6)\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6)\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6)\right)^3 + o(x^6)$$

$$= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6).$$

1388. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按照差 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开式的前三项.

解 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$.

$$f(1)=1, f'(1)=\frac{1}{2}, f''(1)=-\frac{1}{4}.$$

于是，

$$\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2).$$

1389. 将函数 $f(x)=x^x-1$ 按照 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开到含有 $(x-1)^3$ 的项.

解 $f'(x)=x^x(1+\ln x)$，

$$f''(x)=x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1},$$

$$f'''(x)=x^x(1+\ln x)^3+2x^{x-1}(1+\ln x)$$

$$+x^{x-1}\left(\frac{x-1}{x}+\ln x\right).$$

$$f(1)=0, f'(1)=1, f''(1)=2, f'''(1)=3.$$

于是，

$$x^x-1=(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3$$

$$+o((x-1)^3).$$

1390. 于点 $x=0$ 的邻域中，用二阶抛物线近似地代替函数

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\ (a>0).$$

解 $y\Big|_{x=0}=a, y'\Big|_{x=0}=\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}=0,$

$$y''\Big|_{x=0}=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\Big|_{x=0}=\frac{1}{a}.$$

于是，

$$a\operatorname{ch}\frac{x}{a}=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2).$$

1391. 按分式$\frac{1}{x}$的正整数乘幂展开函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x(x>0)$ 到含$\frac{1}{x^3}$的项.

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^4}\right)+o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

于是,

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-x=x\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}-x$$

$$=\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

1392. 求函数 $f(h)=\ln(x+h)(x>0)$ 按增量 h 的正整数乘幂展开到含 h^n 的项(n 为自然数).

解 $\ln(x+h)=\ln\left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]=\ln x+\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

$$=\ln x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{nx^n}+o(h^n).$$

1393. 设:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots$$

$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)(0<\theta<1).$$

且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

证　按题设，我们有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

其中 $0<\theta<1$.

又因 $f^{(n+1)}(x)$ 存在，故

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}).$$

比较上面两式，得

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}),$$

从而有

$$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}$$

$$=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+n!\frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}.$$

由于 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=f^{(n+1)}(x)\neq 0$,

故由上式知 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$ 存在，并且

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)}=\frac{1}{n+1}.$$

1394. 估计下列近似公式的绝对误差：

(a) $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$　当 $0\leqslant x\leqslant 1$;

(б) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$ 当 $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$；

(в) $\operatorname{tg} x \approx x + \dfrac{x^3}{3}$ 当 $|x| \leqslant 0.1$；

(г) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$.

解 用拉格朗日余项公式估计误差：

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0 < \theta < 1).$$

(a) 由 $f(x) = e^x$ 及 $0 \leqslant x \leqslant 1$，得

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x} < e.$$

于是，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，

$$\left|R_{n+1}(x)\right| < \frac{e}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1} \leqslant \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

(б) 由 $f(x) = \sin x$，得

$$\left|f^{(5)}(\theta x)\right| = \left|\sin\left(\theta x + \frac{5}{2}\pi\right)\right| \leqslant 1.$$

于是，当 $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时，

$$\left|R_4(x)\right| \leqslant \frac{1}{5!}|x|^5 \leqslant \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840}.$$

(в) 由 $f(x) = \operatorname{tg} x$，得

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x) = \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x},$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{24\sin x}{\cos^5 x}-\frac{8\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{16}{\cos^2 x}+\frac{120\sin^2 x}{\cos^6 x},$$

$$f^{(6)}(x)=\frac{32\sin x}{\cos^3 x}+\frac{240\sin x}{\cos^5 x}+\frac{720\sin^3 x}{\cos^7 x}.$$

因为 $f^{(5)}(x)$ 是偶函数，又当 $0\leqslant x\leqslant 0.1$ 时，$f^{(6)}(x)\geqslant 0$，所以，$f^{(5)}(x)$ 在 $x=\pm 0.1$ 处达到最大值，注意到

$$f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=2, f^{(4)}(0)=0,$$

及

$$\cos^2 0.1=1-\sin^2 0.1>0.9,$$

$$\left|f^{(5)}(x)\right|\leqslant\frac{16}{0.9}+\frac{120\times 0.1^2}{0.9^3}<20.$$

于是，

$$|R_5(x)|\leqslant\frac{0.1^5}{5!}\times 20<2\times 10^{-6}.$$

(г) 由 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 及 $0\leqslant x\leqslant 1$，得

$$|f'''(x)|=\frac{3}{8}\left|\frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}\right|\leqslant\frac{3}{8}.$$

于是，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$|R_3(x)|\leqslant\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{1}{16}.$$

1395. 近似公式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}$$

对于怎样的 x 准确到 0.0001.

解 误差 $\Delta \leqslant \frac{|x|^4}{4!}$. 按题设需 $\frac{|x|^4}{4!} < 0.0001$，于是

$|x| < 0.22134$(弧) $= 12°41'$.

1396. 利用台劳公式近似地计算：

(а) $\sqrt[3]{30}$；(б) $\sqrt[5]{250}$；(в) $\sqrt[12]{4000}$；

(г) $\sqrt{e}$；(д) $\sin 18°$；(е) $\ln 1.2$；

(ж) $\operatorname{arc\,tg} 0.8$；(з) $\arcsin 0.45$；(и) $(1.1)^{1.2}$，并估计误差.

解 (а) $\sqrt[3]{30} = 3\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\approx 3\left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!}\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]$$

≈ 3.1070；

$$\Delta < 3 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}{3!} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \approx 2.54 \times 10^{-4}.$$

(б) $\sqrt[5]{250} = 3\left(1 + \frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$\approx 3\left[1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{243} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2!}\left(\frac{7}{243}\right)^2\right]$$

≈ 3.0171；

$$\Delta < \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{7}{243}\right)^3 \approx 1.15 \times 10^{-6}.$$

(в) $\sqrt[12]{4000} = 2\left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{12}}$

$$\approx 2\left(1-\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{128}\right)\approx 1.9960;$$

$$\Delta<\left(\frac{3}{128}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{128}}\approx 5.625\times 10^{-4}.$$

(г) $\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\approx 1.64872;$$

$$\Delta=\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1}{8!}\left(\frac{1}{2}\right)^8+\cdots<\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}\approx 1.7\times 10^{-6}.$$

(д) $\sin 18^\circ\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\approx 0.309017,$

$$\Delta<\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7\approx 6\times 10^{-8}.$$

(е) $\ln 1.2=\ln(1+0.2)\approx 0.2$

$$-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4$$

$$+\frac{1}{5}(0.2)^5-\frac{1}{6}(0.2)^6+\frac{1}{7}(0.2)^7\approx 0.182322;$$

$$\Delta<\frac{1}{8}(0.2)^8\approx 3.2\times 10^{-7}.$$

(ж) $\operatorname{arc\,tg} 0.8\approx 0.8-\frac{1}{3}(0.8)^3+\frac{1}{5}(0.8)^5$

$$-\frac{1}{7}(0.8)^7+\cdots-\frac{1}{39}(0.8)^{39}$$

≈ 0.67474(弧) $\approx 38^\circ 39' 35''$;

$$\Delta < \frac{1}{41}(0.8)^{41} \approx 2.6 \times 10^{-6}.$$

(з) $\arcsin 0.45 \approx 0.45 + \frac{1}{2.3}(0.45)^3$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}(0.45)^5 + \cdots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13}(0.45)^{13}$$

≈ 0.46676 弪 $\approx 26°44'37''$

$$\Delta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15}(0.45)^{15}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdots 15}{2 \cdot 4 \cdots 16 \cdot 17}(0.45)^{17} + \cdots$$

$$< \frac{1}{15}(0.45)^{15}[1 + (0.45)^2$$

$$+ \cdots] < \frac{1}{15}(0.45)^{15} \cdot \frac{1}{1-(0.45)^2} \approx 5.26 \times 10^{-7}.$$

(и) 事实上，只需计算 $\ln 1.1$.

$$\ln 1.1 = \ln(1+0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2}$$

$$+ \cdots + \frac{(0.1)^5}{5} \approx 0.0953.$$

取五项，所以 $(1.1)^{1.2} = e^{1.2\ln 1.1} \approx e^{1.2\times 0.0953} \approx 1.12117.$

$$\Delta = \frac{1}{4!}e^{1.2\times 0.0953\theta}(0.0953 \times 1.2)^4 < 7.9 \times 10^{-6}.$$

1397. 计算：

(а) e 准确到 10^{-9}；　(б) $\sin 1°$ 准确到 10^{-8}；

(в) $\cos 9°$ 准确到 10^{-5}；　(г) $\sqrt{5}$ 准确到 10^{-4}；

(д)$\log_{10}11$ 准确到 10^{-5}.

解 (a)$\Delta=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}.$$

要 $\Delta<10^{-9}$,只需 $n!n>10^9$,即只需 $n\geqslant 11$. 于是,

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{11!}\approx 2.718281828.$$

(б)$\Delta<\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+1}$.

要 $\Delta<10^{-8}$,只需$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+1}<10^{-8}$,即只需 $n\geqslant 3$. 于是,

$$\sin 1^\circ\approx\frac{\pi}{180}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\approx 0.01745241.$$

(в)$\Delta<\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2n}$.

要 $\Delta<10^{-5}$,只需$\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2n}<10^{-5}$,即只需 $n\geqslant 3$. 于是,

$$\cos 9^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4\approx 0.98769.$$

(г) $\sqrt{5}=2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\Delta<\frac{2\cdot(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-4}$，只需$\frac{2(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < 10^{-4}$，即只需 $n \geqslant 4$. 于是，

$$\sqrt{5} \approx 2\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1\cdot 1}{2!\cdot 2^2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]$$

$$\approx 2.2361.$$

(д) $\log_{10}11 = 1 + \log_{10}(1+0.1)$，

$$\Delta < \frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-5}$，只需$\frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1} < 10^{-5}$，即只需 $n \geqslant 4$.

于是，

$$\log_{10}11 \approx 1 + \left[0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}(0.1)^3 - \frac{1}{4}(0.1)^4\right]\cdot\frac{1}{\ln 10} \approx 1.04139.$$

利用展开式 1 — V，求下列极限：

1398. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4\cdot 2!}\right)x^4+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

1399. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\right]-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

1400. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left[x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left\{\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{16x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-2\right)\right\}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{1}{4}.$$

1401. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{6x}-\frac{5}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right.$$

$$-\left(1-\frac{1}{6x}-\frac{5}{72x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\Bigg]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{3}.$$

1402. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$,

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right.$$

$$\left.-x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}-\frac{1}{8x^{12}}+o\left(\frac{1}{x^{12}}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{6}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{6}.$$

1403. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}(a>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{x\ln a}+e^{-x\ln a}-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\left[(1+x\ln a+\frac{x^2}{2!}\ln^2a+o(x^2))\right.$$

$$\left.+(1-x\ln a+\frac{x^2}{2!}\ln^2a+o(x^2))-2\right]$$

$$=\lim_{x\to+0}[\ln^2a+o(1)]=\ln^2a(a>0).$$

1404. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

1405. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}x + o(x)}{1 + o(x^2)}$$

$$= 0.$$

1406. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg}x\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg}x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3)\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3} + o(x^2)\right] = \frac{1}{3}.$$

当 $x\to 0$ 时，求出无穷小量 y 的形如 Cx^n(C 为常数) 的主项，假设：

1407. $y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg}x)$.

解 $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\operatorname{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots.$$

从而

$$y = \left(\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{2}{15}\sin^5 x + \frac{1}{35}\sin^7 x + o(\sin^7 x)\right)$$

$$-\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{3!}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{5!}\operatorname{tg}^5x-\frac{1}{7!}\operatorname{tg}^7x+o(\operatorname{tg}^7x)\right)$$

$$=\left[\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)\right.$$

$$+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+0(x^7)\right)^3$$

$$+\frac{2}{15}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+o(x^7)\right)^5$$

$$\left.+\frac{1}{315}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o(x^7)\right)^7\right]$$

$$-\left[\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)\right.$$

$$-\frac{1}{3!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)^3$$

$$+\frac{1}{5!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)^5$$

$$\left.-\frac{1}{7!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^7}{315}+o(x^7)\right)^7+o(x^7)\right]$$

$$=\frac{x^7}{30}+o(x^7).$$

故 y 的主项为$\frac{x^7}{30}$.

1408. $y=(1+x)^x-1$.

解 $y=e^{x\ln(1+x)}-1=e^{x\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}-1$

$$=e^{x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}-1$$

$$=1+\left(x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)+o\left(x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-1$$

$$=x^2+o(x^2).$$

故主项为 x^2.

1409. $y = 1 - \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

解 $y=1-e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}=1-e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1}$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{2}+o(x)}$$

$$= 1 - \left[1+\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)+o\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)\right]$$

$$= \frac{x}{2}+o(x),$$

故主项为$\dfrac{x}{2}$.

1410. 当选择怎样的系数 a 与 b 时,量

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

对于 x 为 5 阶无穷小?

解 $x-(a+b\cos x)\sin x$

$$= x - a\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]$$

$$-\frac{b}{2}\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+\frac{1}{5!}(2x)^5+o(x^5)\right]$$

$$=(1-a-b)x+\left(\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}\right)x^3$$

$$-\left(\frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\right)x^5+o(x^5).$$

要此量对于 x 为 5 阶无穷小,当且仅当

$$\begin{cases} 1-a-b=0, \\ \dfrac{a}{6}+\dfrac{2b}{3}=0. \end{cases}$$

解之，得　$a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{3}$.

1411. 当 $|x|$ 为小量时，推出下列各式的简单的近似公式：

(а) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}(R>0)$；

(б) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$；

(в) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]$；

(г) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}$.

解 (а) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}=\frac{1}{R^2}\left[1-\left(1+\frac{x}{R}\right)^{-2}\right]$

$$\approx\frac{1}{R^2}\left[1-1+\frac{2x}{R}\right]=\frac{2x}{R^3};$$

(б) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}=\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$-\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx\left[1+\frac{2x}{3(1-x)}\right]-\left[1-\frac{2x}{3(1+x)}\right]$$

$$\approx\frac{4x}{3(1-x^2)}\approx\frac{4}{3}x;$$

(в) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]\approx\frac{A}{x}\left[1-\left(1-\frac{nx}{100}\right)\right]=\frac{nA}{100}$;

(г) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}=\frac{\ln 2}{\frac{x}{100}-\frac{x^2}{20000}+\cdots}$

$$\approx \frac{\ln 2}{\frac{x}{100}} = \frac{100\ln 2}{x} \approx \frac{70}{x}.$$

1412. 当 x 的绝对值为小量时，推出形如

$$x = \alpha\sin x + \beta\mathrm{tg}x$$

且准确到 x^5 项的近似公式.

把这个公式用于小角度的弧长的近似求法.

解 $x = \alpha\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right]$

$$+ \beta\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\right]$$

$$= (\alpha+\beta)x - \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3}\right)x^3$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15}\right)x^5 + o(x^5)$$

所以 $(1-\alpha-\beta)x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3}\right)x^3$

$$- \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15}\right)x^5 + o(x^5) = 0.$$

要此近似公式准确到 x^5 项，当且仅当

$$\begin{cases} 1 - \alpha - \beta = 0, \\ \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} = 0. \end{cases}$$

解之，得 $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}$.

于是，近似公式为

$$x \approx \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}x;$$

弧长 = 中心角 × 半径，设中心角为 x，半径为 R，则弧长 $= Rx \approx \frac{2R}{3}\sin x + \frac{R}{3}\mathrm{tg}x$，此即小角度的弧长的近似公式.

1413. 估计下面的契比协夫法则的相对误差：圆弧近似地等于等腰三角形两腰的和，此等腰三角形是立于弧所对的弦上，并且高为此弓形之矢的$\sqrt{\frac{4}{3}}$.

解 如图 2.51 所示

$$BC = R\sin\alpha, BC^2 = R^2\sin^2\alpha = \frac{R^2}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

$$DC = \sqrt{\frac{4}{3}}EC = \sqrt{\frac{4}{3}}R(1 - \cos\alpha),$$

$$DC^2 = \frac{4}{3}R^2(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$= R^2\left(2 - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{2}{3}\cos 2\alpha\right).$$

于是，$BD^2 = BC^2 + DC^2$

$$= R^2\left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{1}{6}\cos 2\alpha\right)$$

$$= R^2\left\{\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 - \frac{1}{720}\alpha^6\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left(1 - 2\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^4 - \frac{4}{45}\alpha^6\right)\right\} + o(\alpha^7)$$

$$= R^2(\alpha^2 - \frac{1}{90}\alpha^6) + o(\alpha^7)$$

$$= R^2\alpha^2\left[1 - \frac{1}{90}\alpha^4 + o(\alpha^5)\right]$$

$$= R^2\alpha^2[1 - \Delta],$$

其中 $\Delta = \frac{1}{90}\alpha^4 + o(\alpha^5)$.

$$BD = R\alpha\sqrt{1-\Delta} =$$

$$R\alpha\left[1 - \frac{1}{2}\Delta + o(\Delta^2)\right] =$$

$$R\alpha\left[1 - \frac{1}{180}\alpha^4 + o(\alpha^5)\right].$$

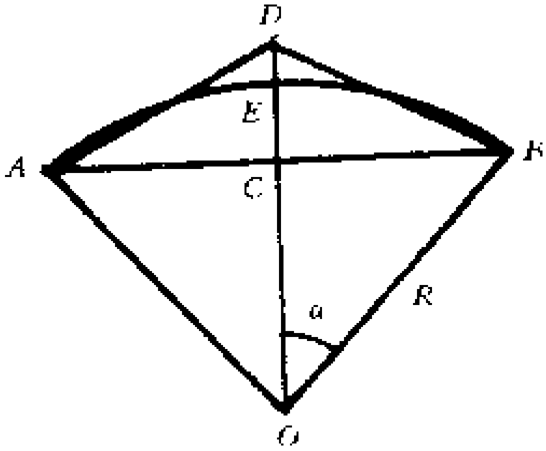


图 2.31

从而得

$$|\overset{\frown}{BE} - BD| = \left|R\alpha - R\alpha\left[1 - \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5)\right]\right|$$

$$= \frac{\alpha^5}{180}R + o(\alpha^5).$$

因此，所求的相对误差为

$$\left|\frac{\overset{\frown}{AB} - (AD + DB)}{\overset{\frown}{AB}}\right| = \left|\frac{2\overset{\frown}{BE} - 2BD}{2\overset{\frown}{BE}}\right|$$

$$= \frac{|\overset{\frown}{BE} - BD|}{|\overset{\frown}{BE}|} = \frac{\frac{\alpha^5}{180}R + o(\alpha^5)}{\alpha R} = \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5).$$

可见 α 愈小，相对误差就愈小，就愈精确.

§ 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1° **有极值的必要条件** 若函数 f 于点 x_0 的双侧邻域中有定义，并且

对于某域：$0<|x-x_0|<\delta$ 内的一切点 x，有下列的不等式成立：

$$f(x)<f(x_0) \text{ 或 } f(x)>f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值（极大值或极小值）.

在有极值的点导函数 $f'(x_0)=0$（假定它存在）.

2° 有极值的充分条件　第一法则：若(1) 函数 $f(x)$ 于点 x_0 的某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内有定义并且是连续的，且在 x_0 点，$f'(x_0)=0$ 或不存在（临界点）；(2) $f(x)$ 在范围：$0<|x-x_0|<\delta$ 内有有限值的导函数 $f'(x)$；(3) 导函数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号，则函数 $f(x)$ 的性质用下表表示出来：

	导函数的符号		结论
	$x<x_0$	$x>x_0$	
Ⅰ	+	+	无极值
Ⅱ	+	−	极大值
Ⅲ	−	+	极小值
Ⅳ	−	−	无极值

第二法则：若函数 $f(x)$ 有二阶导函数 $f''(x)$，并且在点 x_0 有下列条件成立：

$$f'(x_0)=0 \text{ 与 } f''(x_0)\neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值，就是说：当 $f''(x_0)<0$ 时，有极大值；当 $f''(x_0)>0$ 时，有极小值.

第三法则：设函数 $f(x)$ 于某区间 $|x-x_0|<\delta$ 内有导函数 $f'(x)$，$\cdots$，$f^{(n-1)}(x)$，并且在点 x_0 有导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 及

$f^{(k)}(x_0)=0\ (k=1,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$. 这时：(1) 若 n 为偶数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值，就是说，当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，有极大值；当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时有极小值；(2) 若 n 为奇数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值.

3° 绝对极值　在闭区间 $[a,b]$ 内，连续函数 $f(x)$，或于其临界点

（就是导函数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点），或于所给闭区间的端点 a 和 b，达到其最大（最小）值.

研究下列函数的极值：

1414. $y = 2 - x - x^2$.

解 $y' = 1 - 2x$，令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$. 由于 $y'' = -2 < 0$，所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时，函数 y 取极大值

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

1415. $y = (x - 1)^3$.

解 由于 $y' = 3(x - 1)^2 > 0$（除 $x = 1$ 外），即函数始终上升，故函数 y 无极值.

1416 $y = (x - 1)^4$.

解 $y' = 4(x - 1)^3$，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 当 $x < 1$ 时 $y' < 0$，当 $x > 1$ 时 $y' > 0$，所以函数 y 当 $x = 1$ 时取极小值

$$y = 0.$$

1417. $y = x^m(1 - x)^n$（m 及 n 为正整数）.

解 $y' = x^{m-1}(1 - x)^{n-1}[m - (m + n)x]$，由 $y' = 0$ 得

$$x = 0, x = 1, x = \frac{m}{m + n}.$$

(1) 若 m 为偶数，则

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时，$y' > 0$，

当 $x < 0$ 时，$y' < 0$，

所以在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$.

(2) 若 m 为奇数，则 y' 在 $x = 0$ 邻近不变号，故无极值.

(3) 不论 m、n 是奇数还是偶数时，由于

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时，$y' > 0$，

当 $\frac{m}{m+n} < x < 1$ 时，$y' < 0$，

所以，函数 y 在 $x = \frac{m}{m+n}$ 处有极大值

$$y = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

(4) 同理，容易得知：若 n 为偶数时，则当 $x = 1$ 时有极小值

$$y = 0.$$

若 n 为奇数，则当 $x = 1$ 时函数 y 无极值.

1418. $y = \cos x + \mathrm{ch} x$.

解 $y' = -\sin x + \mathrm{sh} x$，令 $y' = 0$ 得 $x = 0$. 由于

$y'' = -\cos x + \mathrm{ch} x$，$y''(0) = 0$，

$$y''' = \sin x + \operatorname{sh} x, y'''(0) = 0,$$

$$y^{(4)} = \cos x + \operatorname{ch} x, y^{(4)}(0) = 2 > 0,$$

所以，当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 2$.

1419. $y = (x+1)^{10} e^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(x+1)^9(9-x)$，令 $y' = 0$ 得 $x = -1$ 或 $x = 9$.

由于

$$当 x < -1 时, y' < 0,$$

$$当 -1 < x < 9 时, y' > 0,$$

$$当 x > 9 时, y' < 0,$$

所以，当 $x = -1$ 时有极小值 $y = 0$；当 $x = 9$ 时有极大值

$$y = 10^{10} e^{-9} \approx 1234100.$$

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ （n 为自然数）.

解 $y' = -\frac{1}{n!} e^{-x} x^n$，令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

(1) 若 n 为偶数，由于 $y' < 0$（除 $x = 0$ 外），故当 $x = 0$ 时函数 y 无极值.

(2) 若 n 为奇数，则

$$当 x < 0 时, y' > 0,$$

当 $x > 0$ 时，$y' < 0$，

所以，当 $x = 0$ 时有极大值 $y = 1$.

1421. $y = |x|$.

解 当 $x = 0$ 时，得 $y = 0$，又在 $x = 0$ 的邻域内对于任意 $x \neq 0$，恒有 $y = |x| > 0$，所以，当 $x = 0$ 时函数有极小值 $y = 0$. 注意，$y'|_{x=0}$ 不存在.

1422. $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

解 $y' = \dfrac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$，令 $y' = 0$ 得 $x = \dfrac{1}{3}$. 因为

当 $x < 0$ 时，$y' > 0$，

当 $0 < x < \dfrac{1}{3}$ 时，$y' > 0$，

当 $\dfrac{1}{3} < x < 1$ 时，$y' < 0$，

当 $x > 1$ 时，$y' > 0$，

所以，当 $x = 0$ 时无极值；当 $x = \dfrac{1}{3}$ 时有极大值

$$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4} \approx 0.529;$$

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 0$.

1423. 函数

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$$

(n 为自然数)，其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续及 $\varphi(x_0)$

$\neq 0$. 研究此函数在点 $x = x_0$ 的极值.

解 由于 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 点连续且 $\varphi(x_0) \neq 0$，所以 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的充分小邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内与 $\varphi(x_0)$ 同号. 于是，$f(x)$ 的符号与 n 的奇偶性有关.

(1) 若 n 为奇数，则经过 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值变号，所以在 $x = x_0$ 时没有极值.

(2) 若 n 为偶数，则 $(x - x_0)^n > 0 \quad (x \neq x_0)$. 因而当 $\varphi(x_0) > 0$ 时，则 $f(x) > f(x_0) = 0$

$$(0 < |x - x_0| < \delta),$$

所以，当 $x = x_0$ 时有极小值 $f(x_0) = 0$.

当 $\varphi(x_0) < 0$ 时，则 $f(x) < f(x_0) = 0$

$$(0 < |x - x_0| < \delta),$$

所以，当 $x = x_0$ 时有极大值 $f(x_0) = 0$.

1424. 设：

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)},$$

及 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点，就是说

$$P_1(x_0) = 0, Q(x_0) \neq 0.$$

证明： $\quad \operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'(x_0)$.

证 因为

$$f''(x)=\frac{P'_1(x)Q^2(x)-2Q(x)Q'(x)P_1(x)}{Q^4(x)},$$

于是

$$f''(x_0)=\frac{P_1'(x_0)}{Q_2(x_0)}.$$

由于 $Q_2(x_0)>0$，所以有

$$\operatorname{sgn}f''(x_0)=\operatorname{sgn}P'(x_0).$$

1425. 可否断定下面的事实：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值，则在此点某充分小邻域内，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧上升，而右侧下降？

解 不能断定. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 2, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\end{cases}$$

则 $$f(x)-f(0)=-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)<0$$

$$(x\in(-\delta,\delta),x\neq 0).$$

所以在 $x=0$ 点有极大值 $f(0)=2$.

易知

$$f'(x)=\cos\frac{1}{x}-2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)(x\neq 0).$$

故在 $x=0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$ 都时正时负，故在 $x=0$ 的左侧或右侧的任意小邻近 $f(x)$ 都是振荡的(时上升时下降).

1426. 已给函数

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \text{当} x \neq 0; f(0)=0.$$

证明：虽然

$$f^{(n)}(0)=0(n=1,2\cdots),$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 有极小值.

作出此函数的图形.

证 在 1225 题中已证 $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=1,2\cdots)$.

由于

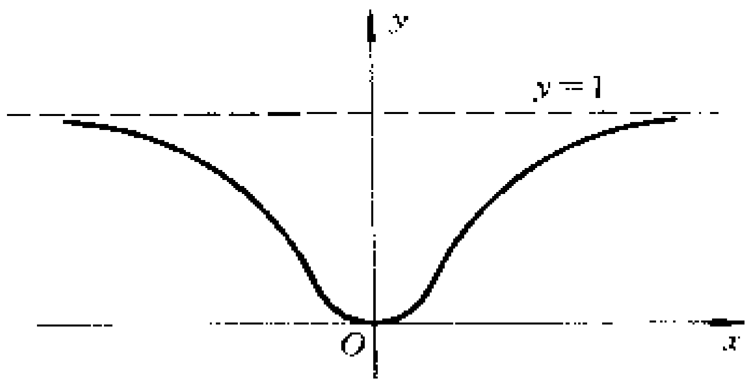


图 2.52

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, f''(x)=\frac{4-6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

又过 $x=0$ 点 $f'(x)$ 从负变到正，故 $f(0)=0$ 为极小值.

令 $f''(x)=0$ 解得拐点 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. 又由

$$f(x)=f(-x),\lim_{x\to\infty}f(x)=1$$

知，$f(x)$ 为偶函数，$y=1$ 为渐近线（图 2.52）.

1427. 研究下列函数的极值：

(a) 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}\right)$ 及

$f(0)=0$；

(6) 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=e^{\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\cos\frac{1}{x}\right)$ 及

$f(0)=0$.

作出这些函数的图形.

解 由于 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|<\sqrt{2}$，$\left|\cos\frac{1}{x}\right|<\sqrt{2}$ 及 $e^{-\frac{1}{|x|}}>0$，所以对于(a)和(6)均有 $f(x)>f(0)(x\neq 0)$，故当 $x=0$ 时均有极小值 $f(0)=0$. 对于 $x\neq 0$，(a) 和(6)均存在 $f'(x)$，但易知 $f'(x)=0$ 无解，因而无其它极值.

它们的图形分别如图 2.53 及图 2.54 所示.

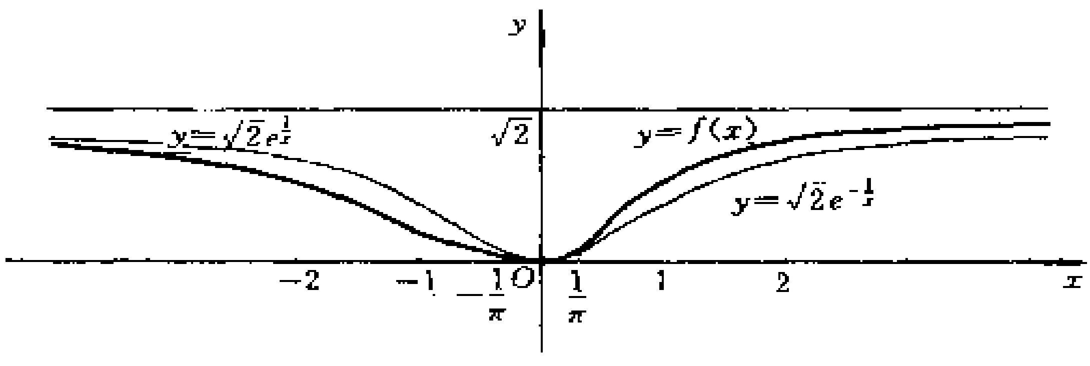


图 2.53

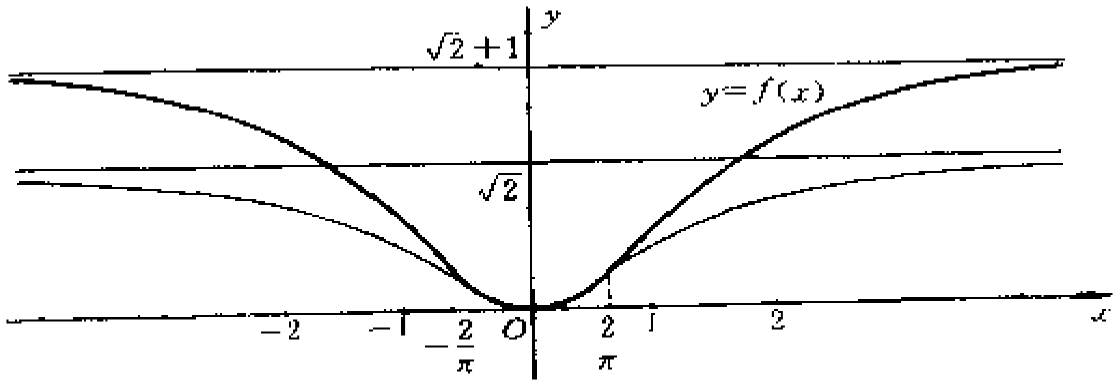


图 2.54

1428. 已给函数

$$f(x) = |x|\left(2+\cos\frac{1}{x}\right) \text{当 } x \neq 0; f(0) = 0.$$

研究此函数于点 $x=0$ 处的极值，并作出此函数的图形.

解 由于当 $x \neq 0$ 时，恒有 $f(x) > f(0)$，故当 $x=0$ 时有极小值 $f(0)=0$，其图形如图 2.55 所示，它对称于 Oy 轴，又当 $x \to 0$ 时，$f(x) \to 0$.

求下列函数的极值：

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

解 $y' = 3x^2 - 12x + 9$，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$ 或 3. 因为

$$y'' = 6x - 12, y''(1) = -6 < 0, y''(3) = 6 > 0,$$

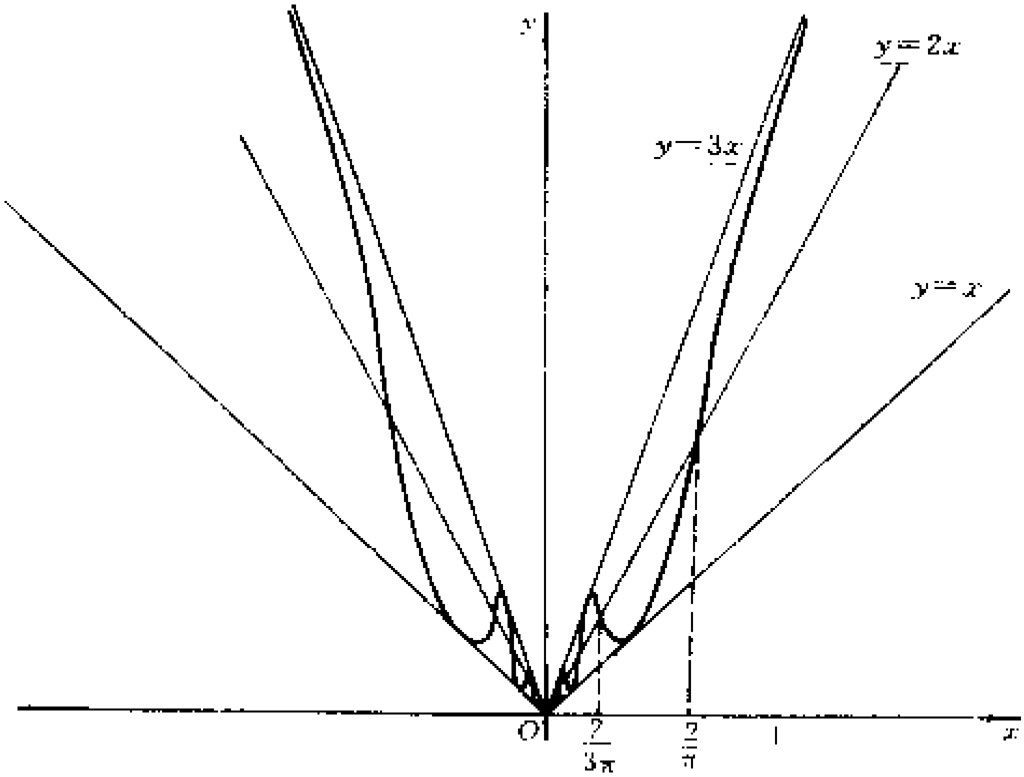


图 2.55

所以，

当 $x=1$ 时有极大值 $y=1-6+9-4=0$；

当 $x=3$ 时有极小值 $y=3^3-6\times3^2+9\times3-4=-4$.

1430. $y=2x^2-x^4$.

解 $y'=4x-4x^3$，令 $y'=0$ 得 $x=\pm1$ 或 0. 因为

$y''=4-12x^2$，$y''(-1)=-8<0$，

$y''(0)=4>0$，$y''(1)=-8<0$，

所以，

当 $x=-1$ 时有极大值 $y=1$；

当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$；

当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

1431. $y=x(x-1)^2(x-2)^3$.

解 $y'=(x-1)(x-2)^2(6x^2-10x+2)$. 令 $y'=0$ 得 $x=1,2$ 或 $\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$.

因为

当 $x<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ 时，$y'<0$，

当 $\frac{5-\sqrt{13}}{6}<x<1$ 时，$y'>0$，

当 $1<x<\frac{5+\sqrt{13}}{6}$ 时，$y'<0$，

当 $\frac{5+\sqrt{13}}{6}<x<2$ 时，$y'>0$，

当 $x>2$ 时，$y'>0$，

所以，

当 $x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}\approx 0.23$ 时有极小值 $y\approx -0.76$；

当 $x=1$ 时有极大值 $y=0$；

当 $x=\frac{5+\sqrt{13}}{6}\approx 1.43$ 时有极小值 $y\approx -0.05$；

当 $x=2$ 时无极值.

1432. $y = x + \frac{1}{x}$.

解 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$，令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$. 因为

当 $x < -1$ 时，$y' > 0$，

当 $-1 < x < 0$ 时，$y' < 0$，

当 $0 < x < 1$ 时，$y' < 0$，

当 $x > 1$ 时，$y' > 0$，

所以，

当 $x = -1$ 时有极大值 $y = -2$；

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 2$.

1433. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$，令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$. 因为

当 $x < -1$ 时，$y' < 0$，

当 $-1 < x < 1$ 时，$y' > 0$，

当 $x > 1$ 时，$y' < 0$，

所以，

当 $x = -1$ 时有极小值 $y = -1$；

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

1434. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

解 $y' = \frac{5x-7}{(x+1)^3}$，令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{7}{5}$. 因为

当 $-1 < x < \frac{7}{5}$ 时，$y' < 0$，

当 $x > \frac{7}{5}$ 时，$y' > 0$，

所以，当 $x = \frac{7}{5}$ 时有极小值 $y = -\frac{1}{24}$.

1435. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

解 $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 因为

当 $0 < x < 1$ 时，$y' > 0$，

当 $1 < x < 2$ 时，$y' < 0$，

所以，当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

其次，由于函数 y 的值不为负数，故当 $x = 0$ 及 $x = 2$ 时，有边界的极小值 $y = 0$.

1436. $y = x\sqrt[3]{x-1}$.

解 $y' = \frac{4x-3}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$，令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{3}{4}$. 因为

当 $x < \frac{3}{4}$ 时，$y' < 0$，

当 $x > \frac{3}{4}$ 时，$y' > 0$，

所以，当 $x = \frac{3}{4}$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2} \approx -0.47$.

此外，对于 $y' \to \infty$ 的点也可能有极值，但在此题

中，当 x 经过 1 时，导数不变号，故当 $x=1$ 时无极值.

1437. $y = xe^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(1-x)$，令 $y'=0$ 得 $x=1$. 因为

当 $x<1$ 时，$y'>0$.

当 $x>1$ 时，$y'<0$，

所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=e^{-1}\approx 0.368$.

1438. $y=\sqrt{x}\ln x$.

解 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)$，令 $y'=0$ 得 $x=e^{-2}$. 因为

当 $0<x<e^{-2}$ 时，$y'<0$，

当 $x>e^{-2}$ 时，$y'>0$，

所以，当 $x=e^{-2}\approx 0.135$ 时有极小值 $y=-\dfrac{2}{e}$

≈ -0.736.

又因当 $0<x<1$ 时，$y<0$，而

$$y=\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\ln x=0,$$

所以，当 $x=+0$ 时有边界的极大值 $y=0$.

1439. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

解 $y'=\dfrac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$ 或 e^2. 因为

当 $0<x<1$ 时，$y'<0$，

当 $1<x<e^2$ 时，$y'>0$，

当 $e^2 < x < +\infty$ 时，$y' < 0$，

所以，

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 0$；

当 $x = e^2 \approx 7.389$ 时有极大值 $y = \frac{4}{e^2} \approx 0.541$.

1440. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

解 $y' = -\sin x(1 + 2\cos x)$，令 $y' = 0$ 得 $x = k\pi$ 或 $\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 因为

$$y'' = -\cos x - 2\cos 2x,$$

$$y''\Big|_{x=k\pi} = (-1)^{k+1} - 2 < 0,$$

$$y''\Big|_{x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi} = \frac{1}{2} + 1 > 0.$$

所以，

当 $x = k\pi$ 时有极大值 $y = (-1)^k + \frac{1}{2}$；

当 $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{4}$.

1441. $y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$.

解 当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \cdots)$ 时，$\sin x = 0$，所以此时有极大值 $y = 10$；

当 $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi (k = 0, \pm 1, \cdots)$ 时，$|\sin x| = 1$，所以此时有极小值 $y = 5$.

1442. $y = \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.

解 $y' = \frac{1 - x}{1 + x^2}$，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 因为

当 $x < 1$ 时，$y' > 0$，

当 $x > 1$ 时，$y' < 0$；

所以，当 $x = 1$ 时有极大值 $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.439$.

1443. $y = e^x \sin x$.

解 $y' = e^x(\sin x + \cos x)$，令 $y' = 0$ 得

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ 或 } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \cdots).$$

因为

$$y'' = 2e^x \cos x,$$

$$y''\Big|_{x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi} > 0,$$

$$y''\Big|_{x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi} < 0,$$

所以，当 $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 时有极小值 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$；

当 $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ 时有极大值 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}$.

1444. $y = |x|e^{-|x-1|}$.

解 当 $x < 0$ 时，$y = -xe^{x-1}$，$y' = -(x + 1)e^{x-1}$.

令 $y' = 0$ 得 $x = -1$. 因为

当 $x<-1$ 时，$y'>0$，

当 $-1<x<0$ 时，$y'<0$，

所以，当 $x=-1$ 时有极大值 $y=e^{-2}\approx 0.135$.

又当 $0<x<1$ 时，有

$y=xe^{x-1}$，$y'=(x+1)e^{x-1}>0$，

所以，当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$.

而当 $x>1$ 时，有

$y=xe^{1-x}$，$y'=(1-x)e^{1-x}<0$.

所以，当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

求下列函数的最大值和最小值：

1445. $f(x)=2^x$，在闭区间$[-1,5]$上.

解 由于 $f(x)=2^x$ 单调上升，故最小值和最大值分别为

$$m=2^{-1}=\frac{1}{2}\text{ 及 }M=2^5=32.$$

1446. $f(x)=x^2-4x+6$，在闭区间$[-3,10]$上.

解 $f'(x)=2x-4$，$f''(x)=2$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x=2$.

由于 $f''(2)=2>0$，所以

当 $x=2$ 时有极小值 $f(2)=2$. 因为这是唯一的极

小值，因此也就是最小值，即 $m=2$.

又由于 $f''(x)>0$，曲线呈凹状，所以在端点取得最大值，从而，

$$M=\max\{f(-3),f(10)\}=66.$$

1447. $f(x)=|x^2-3x+2|$，在闭区间 $[-10,10]$ 上.

解 由于 $f(x)\geqslant 0$，故对于在区间 $[-10,10]$ 上能使 $f(x)=0$ 的点取得最小值. 由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1,2$. 即当 $x=1,2$ 时，函数取得最小值

$$m=0.$$

其次，$f'(x)=(2x-3)\operatorname{sgn}(x^2-2x+3)$，

$$当\ 1<x<\frac{3}{2}\ 时，f'(x)>0，$$

$$当\ \frac{3}{2}<x<2\ 时，f'(x)<0，$$

所以，当 $x=\frac{3}{2}$ 时有极大值 $y=\frac{1}{4}$，于是

$$M=\max\left\{f\left(\frac{3}{2}\right),f(-10),f(10)\right\}=132.$$

1448. $f(x)=x+\frac{1}{x}$，在闭区间 $[0.01,100]$ 上.

解 利用 1432 题结果知 $f(x)$ 当 $x=1$ 时有极小值 $f(1)=2$.

由于在此闭区间 $[0.01,100]$ 上 $f(1)$ 为唯一的极小

值，因此也是最小值，即

$$m = 2.$$

其次，最大值

$$M = \max\{f(0.01), f(100)\} = 100.01.$$

1449. $f(x) = \sqrt{5-4x}$，在闭区间$[-1,1]$上.

解 $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{5-4x}} < 0.$

因此函数$f(x)$在$[-1,1]$上单调下降，所以，最小值和最大值分别为

$$m = f(1) = 1, M = f(-1) = 3.$$

求下列函数的下界(inf)与上界(sup)：

1450. $f(x) = xe^{-0.01x}$，在区间$(0,+\infty)$内.

解 当$x \in (0,+\infty)$时，$f(x) > 0$，而$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，于是，

$$\inf\{f(x)\} = 0.$$

其次，求极值判断得知，当$x = 100$时，函数$f(x)$取极大值，并且是唯一的极值，即为最大值. 于是，

$$\sup\{f(x)\} = f(100) = \frac{100}{e} \approx 36.8.$$

1451. $f(x) = (1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!})e^{-x}$，在区间$(0,+\infty)$内.

解 由 1420 题知，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在区间$(0,+\infty)$内单调递减，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$f(0)=1$. 于是，

$$\inf\{f(x)\}=0,\sup\{f(x)\}=1.$$

1452. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$，在区间$(0,+\infty)$内.

解 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 于是，

$$\inf\{f(x)\}=0.$$

容易验证，当 $x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ 时函数 $f(x)$ 有极大值，并且只有一个极值，因而就是最大值. 于是，

$$\sup\{f(x)\}=f(\sqrt{\sqrt{2}-1})$$
$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\approx 1.2.$$

1453. $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$，在区间$(-\infty,+\infty)$内.

解 可以求得，函数的最小值和最大值分别为

$$m=f\left(\pm\sqrt{\frac{3\pi}{4}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx-0.067,$$
$$M=f(0)=1.$$

于是，

$$\inf\{f(x)\}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx-0.067,$$
$$\sup\{f(x)\}=1.$$

1454. 求函数 $f(\xi)=\dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x<\xi<+\infty$ 内的下界与

上界，作出下列函数的图形：

$$m(x)=\inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi) \text{ 及 } M(x)=\sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi).$$

解 由于 $f(-3)$，$f(1)$ 分别是函数 $f(\xi)$ 的极小值和极大值，又 $\lim\limits_{\xi\to+\infty} f(\xi)=0$，于是，

当 $-\infty<x\leqslant-3$ 时，$m(x)=f(-3)=\dfrac{1}{6}$，

当 $-3<x\leqslant-1$ 时，$m(x)=\dfrac{1+x}{3+x^2}$，

当 $-1<x<+\infty$ 时，$m(x)=0$；

当 $-\infty<x\leqslant 1$ 时，$M(x)=f(1)=\dfrac{1}{2}$，

当 $1<x<+\infty$ 时，$M(x)=\dfrac{1+x}{3+x^2}$.

$m(x)$ 及 $M(x)$ 的图形分别如图 2.56 及图 2.57 所示.

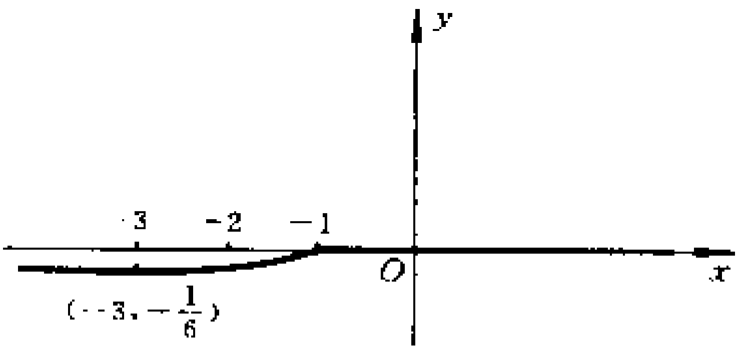


图 2.56

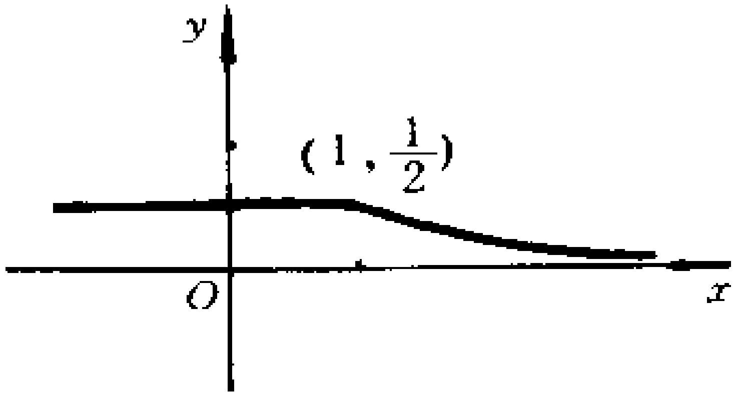


图 2.57

1455. 求以下各叙列的最大项：

(a) $\frac{n^{10}}{2^n}(n = 1,2,\cdots)$；

(б) $\frac{\sqrt{n}}{n + 10000}(n = 1,2,\cdots)$；

(в) $\sqrt[n]{n}\ (n = 1,2,\cdots)$.

解 (a) 经判断知当 $x = \frac{10}{\ln 2}$ 时，$f(x) = \frac{x^{10}}{2^x}$ 有极大值，并且是唯一的极值. 从而，最大项

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) = \max\left(\frac{(N-1)^{10}}{2^{N-1}}, \frac{N^{10}}{2^N}, \frac{(N+1)^{10}}{2^{N+1}}\right),$$

其中 $N = \left[\frac{10}{\ln 2}\right] = 14$. 于是

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) = \max\left(\frac{13^{10}}{2^{13}}, \frac{14^{10}}{2^{14}}, \frac{15^{10}}{2^{15}}\right) = \frac{14^{10}}{2^{14}}$$

$$\approx 1.77 \times 10^7.$$

(б) 经判断知当 $x = 10000$ 时 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 10000}$ 有

极大值，并且是唯一的极值. 于是，最大项

$$\max\left(\frac{\sqrt{n}}{n+10000}\right)=f(10000)=\frac{1}{200}.$$

(в) 经判断知当 $x=e$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$ 有极大值，并且是唯一的极值. 于是，最大项

$$\max(\sqrt[n]{n})=\max(\sqrt[3]{3},\sqrt{2})=\sqrt[3]{3}\approx 1.44.$$

1456. 证明下列不等式：

(а) 当 $|x|\leqslant 2$ 时，$|3x-x^3|\leqslant 2$；

(б) 若 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $p>1$，则 $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$；

(в) 当 $m>0$，$n>0$ 及 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，

$$x^m(a-x)^n\leqslant\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n};$$

(г) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqslant\sqrt[n]{x^n+a^n}\leqslant x+a\ (x>0,a>0,n>1)$；

(д) $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

证 (а) 设 $f(x)=3x-x^3$，经判断知，在 $|x|\leqslant 2$ 上，其最小值和最大值分别为

$$m=f(-1)=-2,M=f(1)=2,$$

而边界函数值为 $f(-2)=2$，$f(2)=-2$. 于是，

$$|3x-x^3|\leqslant 2.$$

(б) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$，经判断知 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$ 为 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的唯一的极小值，而边界值 $f(0) = f(1) = 1$，所以

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant x + (1-x) = 1.$$

(в) 设 $f(x) = x^m(a-x)^n$，经判断知 $f\left(\frac{ma}{m+n}\right)$ 为 $0 \leqslant x \leqslant a$ 上的唯一的极大值，所以 $x^m(a-x)^n \leqslant \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \cdot \left(a - \frac{ma}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$.

(г) 设 $f(x) = \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a}$，经判断知 $f(a) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$ 为满足 $x > 0$ 的唯一的极小值，而边界值 $f(+0) = f(+\infty) = 1$，所以

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \frac{(x^n + a^n)}{x+a} \leqslant 1.$$

由于 $x + a > 0$，于是

$$\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \sqrt[n]{x^n + a^n} \leqslant x + a.$$

(д) $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi)$，

其中 $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，所以恒有

$$|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1457. 求多项式

$$P(x)=x(x-1)^2(x+2)$$

在闭区间$[-2,1]$上"与零的差"，就是求

$$E_p=\sup_{-2\leq x\leq 1}|P(x)|.$$

解 $P'(x)=2(x-1)(2x^2+2x-1)$.

令 $P'(x)=0$ 得 $x=1$ 或$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，所以

$$E_p=\max\left\{|P(-2)|,|P(1)|,\left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|,\left|P\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right|\right\}$$

$$=\left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\approx 4.85.$$

1458. 应当选择怎样的系数 q，使多项式

$$P(x)=x^2+q$$

在闭区间$[-1,1]$上与零的差最小，即

$$E_p=\sup_{-1\leq x\leq 1}|P(x)|=\min.$$

解 $P'(x)=2x$，令 $P'(x)=0$ 得 $x=0$，所以

$$E_p=\max\{|P(0)|,|P(1)|,|P(-1)|\}$$

$$=\max\{|q|,|1+q|\}.$$

当 $|q|=|1+q|$ 时，E_p 最小. 解之，得

$$q=-\frac{1}{2}.$$

1459. 数

$$\Delta = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|$$

称为函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 于闭区间 $[a,b]$ 上的**绝对差**.

求函数 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = x^3$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的绝对差.

解 由于

$$f(x) - g(x) = x^2 - x^3,$$

$$f'(x) - g'(x) = 2x - 3x^2,$$

从而令 $f'(x) - g'(x) = 0$,得 $x = 0$ 或 $\frac{2}{3}$. 又因

$$f''(x) - g''(x) = 2 - 6x,$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) - g''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 4 = -2 < 0,$$

所以,当 $x = \frac{2}{3}$ 时 $f(x) - g(x)$ 取极大值;又由于当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$f(x) - g(x) \geqslant 0$,所以绝对差

$$\Delta = f\left(\frac{2}{3}\right) - g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}.$$

1460. 于闭区间 $[x_1, x_2]$ 上用线性函数

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

近似地代替函数

$$f(x) = x^2,$$

使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的绝对差(参阅上题)为最小,并求

此最小的绝对差.

解 由于

$$f(x)-g(x)=x^2-[(x_1+x_2)x+b],$$

$$f'(x)-g'(x)=2x-(x_1+x_2),$$

从而令 $f'(x)-g'(x)=0$,得 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$. 又因

$$f''(x)-g''(x)=2>0,$$

故当 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 时,$f(x)-g(x)$ 取极小值. 于是,

$$\Delta=\max\left\{\left|f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|,\right.$$

$$\left.\left|f(x_1)-g(x_1)\right|,\left|f(x_2)-g(x_2)\right|\right\}$$

$$=\max\left\{\left|b+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right|,\left|b+x_1x_2\right|\right\}.$$

要 Δ 为最小,需

$$\left|b+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right|=\left|b+x_1x_2\right|.$$

解之得

$$b=-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2).$$

此时

$$g(x)=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2),$$

而最小的绝对差

$$\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2.$$

1461. 求函数

$$f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$$

的极小值.

解 $y = 2|x|$ 及 $y = |1+x|$ 的图形如图 2.58 所示，它们的交点是 $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 及 $B(1,2)$. 从而

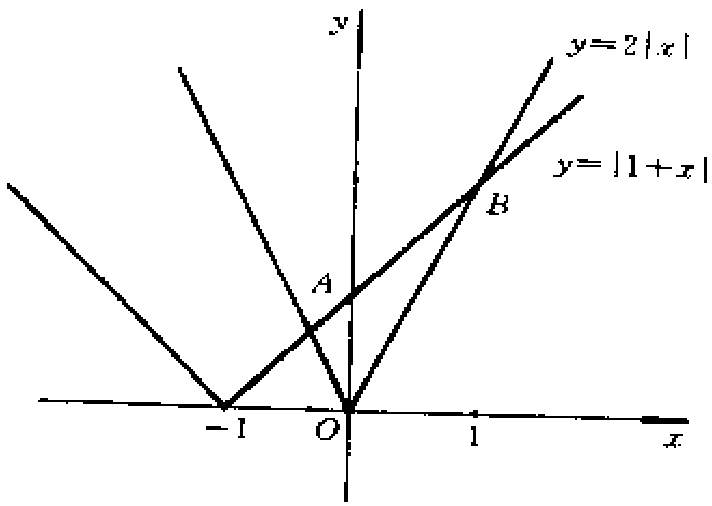


图 2.58

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 1 \leqslant x < +\infty, \\ 1+x, & -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1, \\ -2x, & -\infty < x \leqslant -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

于是，函数 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

确定下列各方程实根的数目，并定这些根所在的范围：

1462. $x^3-6x^2+9x-10=0$.

解 设 $f(x)=x^3-6x^2+9x-10$,则 $f(x)$ 为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数,且有

$$f'(x)=3x^2-12x+9.$$

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=1$ 或 3.

当 $x\in(-\infty,1)$ 时,由于

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty, f'(x)>0, f(1)=-6<0,$$

故在区间 $(-\infty,1)$ 内方程无实根.

当 $x\in(1,3)$ 时,由于

$$f'(x)<0, f(3)=-10<0,$$

故在 $(1,3)$ 内也无实根.

当 $x\in(3,+\infty)$,由于

$$f'(x)>0, f(3)=-10<0, \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

故在 $(3,+\infty)$ 内方程有且仅有一实根.

1463. $x^3-3x^2-9x+h=0$.

解 设 $f(x)=x^3-3x^2-9x+h$,则

$$f'(x)=3x^2-6x-9.$$

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=-1$ 或 3. 由于

$$f(-1)=5+h, f(3)=-27+h,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

故当 $h < -5$ 时，$f(-1) < 0, f(3) < 0$，且

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 3),$$

$$f'(x) > 0, x \in (3, +\infty),$$

因此，有且仅有一实根位于 $(3, +\infty)$ 内.

当 $-5 < h < 27$ 时，$f(-1) > 0, f(3) < 0$，导数 $f'(x)$ 的符号变化同上，于是，有三个实根，分别位于 $(-\infty, -1)$，$(-1, 3)$ 及 $(3, +\infty)$ 内.

当 $h > 27$ 时，$f(3) > 0, f(-1) > 0$，因此，有且仅有一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

1464. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$.

解 设 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$，则

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12.$$

令 $f'(x) = 0$，得驻点 $x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f(-1) = -31 < 0, f(1) = -15 < 0,$$

并且

$$f'(x) < 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) > 0, x \in (-1, +\infty),$$

故有两实根，分别位于$(-\infty, -1)$和$(1, +\infty)$内.

1465. $x^5 - 5x = a$.

解 设$f(x) = x^5 - 5x - a$，则

$$f'(x) = 5x^4 - 5.$$

令$f'(x) = 0$，得驻点$x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1), x \in (1, +\infty),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 1),$$

$$f(-1) = 4 - a, f(1) = -4 - a,$$

故当$a < -4$时，$f(-1) > 0$，$f(1) > 0$. 因此，有且仅有一实根，位于$(-\infty, -1)$内；当$-4 < a < 4$时，$f(-1) > 0$，$f(1) < 0$，此时有三个实根，分别位于$(-\infty, -1)$，$(-1, 1)$和$(1, +\infty)$内；当$a > 4$时，$f(-1) < 0$，$f(1) < 0$. 因此，有且仅有一实根位于$(1, +\infty)$内.

1466. $\ln x = kx$.

解 当$k = 0$时，方程显然仅有一个根$x = 1$. 因此，不妨设$k \neq 0$. 令$f(x) = \ln x - kx (x > 0)$，则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - k.$$

令　$f'(x)=0$,得驻点 $x=\frac{1}{k}$.由于

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,$$

故曲线的图形始终呈凸状.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 时,$f'(x)>0$;

当 $x\in\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 时,$f'(x)<0$.

又因

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{1}{k}-1,$$

故当 $k>\frac{1}{e}$ 时,$f\left(\frac{1}{k}\right)<0$,此时方程无根.

当 $0<k<\frac{1}{e}$ 时,$f\left(\frac{1}{k}\right)>0$,

因此,方程有两个实根,分别位于 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 内.

当 $-\infty<k<0$ 时,由于

$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$,$f(1)=-k>0$,$f'(x)=\frac{1}{x}-k>0$,故此时方程有且仅有一实根位于(0,1)内.

1467⁺ $e^x=ax^2(a>0)$.

解　对于函数 $f(x)=e^x-ax^2$,有 $f(0)=1>0$;又因 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,故总存在充分大的正数 x_0,使 $f(-x_0)<0$. 由函数 $f(x)$ 的连续性得知在 $(-x_0,0)$ 中,从而在 $(-\infty,0)$ 中至少有 $f(x)=0$ 的一个实根. 而当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f'(x)=e^x-2ax>0$,即函数

严格单调上升．因此，$f(x)=0$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时只有唯一的根．

对于 $x>0$ 的情况，为求方程 $e^x=ax^2$ 的根，只需求方程 $x=\ln a+2\ln x(a>0,x>0)$ 的根．设

$$g(x)=x-\ln a-2\ln x,$$

则有

$$g'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}.$$

令 $g'(x)=0$ 得 $x=2$.

当 $0<x<2$ 时，$g'(x)<0$；

当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，

所以，$g(2)=\ln\frac{e^2}{4a}$ 为极小值．又因 $\lim\limits_{x\to+0}g(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$．因此，

当 $g(2)>0$，即 $0<a<\frac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 无根．

当 $g(2)=0$，即 $a=\frac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 有唯一的根．

当 $g(2)<0$，即 $a>\frac{e^2}{4}$ 时，$g(x)=0$ 有二个根，它们分别位于 $(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 内．

综上所述，方程 $e^x=ax^2$ 根的情况如下：

当 $0<a<\frac{e^2}{4}$ 时有唯一的根，位于 $(-\infty,0)$ 内；当 $a=\frac{e^2}{4}$ 时，有两个根，一根为 2，一根位于 $(-\infty,0)$ 内；当 $\frac{e^2}{4}<a<+\infty$ 时有三个根，分别位于 $(-\infty,0)$，$(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 内．

1468. 当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时，$\sin^3 x \cdot \cos x = a$.

解 当 $a = 0$ 时，方程显然有实根 $x = 0, \frac{\pi}{2}$ 或 π. 因此，不妨设 $a \neq 0$. 令 $f(x) = \sin^3 x\cos x - a$，则

$$f'(x) = 3\sin^2 x\cos^2 x - \sin^4 x.$$

令 $f'(x) = 0$，得驻点 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. 由于

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} - a, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16} - a,$$

$$f(0) = f(\pi) = -a,$$

并且

$$当 x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) 时, f'(x) > 0,$$

$$当 x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) 时, f'(x) < 0.$$

于是，当 $|a| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程有两个实根位于 $(0, \pi)$ 内；当 $|a| > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程无实根.

1469. $\mathrm{ch}x = kx$.

解 设 $f(x) = \mathrm{ch}x - kx$，则

$$f'(x) = \mathrm{sh}x - k.$$

令 $f'(x) = 0$，得唯一驻点 x_0，它适合 $k = \mathrm{sh}x_0$.

由于 $f''(x) = \mathrm{ch}x > 0$，故曲线图形呈凹状，且在 $x = x_0$ 达最小值. 显然 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$，因此，我们只需考虑 $f(x_0)$ 的符号. 而

$$f(x_0) = \mathrm{ch}x_0 - kx_0 = \mathrm{ch}x_0 - x_0\mathrm{sh}x_0.$$

先设 $k > 0$，于是 $x_0 > 0$. 引进辅助函数

$$g(x) = \mathrm{ch}x - x\mathrm{sh}x,$$

方程 $g(x) = 0$，即 $\mathrm{cth}x = x$ 的(唯一)正根 $\xi \approx 1.2$*).

由于

$$g'(x) = \mathrm{sh}x - \mathrm{sh}x - x\mathrm{ch}x = -x\mathrm{ch}x,$$

因此假如 $x > 0$，则 $g'(x) < 0$，故 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调下降.

若 $k > \mathrm{sh}\xi$，即 $\mathrm{sh}x_0 > \mathrm{sh}\xi$，由于 $\mathrm{sh}x$ 是严格增大的，故必 $x_0 > \xi$. 从而有

$$f(x_0) = \mathrm{ch}x_0 - x_0\mathrm{sh}x_0 < \mathrm{ch}\xi - \xi\mathrm{sh}\xi = 0.$$

因此，方程 $f(x) = 0$ 恰有两个实根. 由于

$$f(\xi) = \mathrm{ch}\xi - k\xi < \mathrm{ch}\xi - \xi\mathrm{sh}\xi = 0,$$

$$f(0) = 1,$$

故两根分别位于 $(0,\xi)$ 及 $(\xi, +\infty)$ 内.

若 $k = \mathrm{sh}\xi$，则 $\mathrm{sh}x_0 = \mathrm{sh}\xi$，从而 $x_0 = \xi$. 因此，$f(x_0) = 0$，此时方程 $f(x) = 0$ 恰有一实根 x_0.

若 $0 < k < \mathrm{sh}\xi$，则 $\mathrm{sh}x_0 < \mathrm{sh}\xi$，从而 $x_0 < \xi$. 因此

$$f(x_0) = \mathrm{ch}x_0 - x_0\mathrm{sh}x_0 > \mathrm{ch}\xi - \xi\mathrm{sh}\xi = 0,$$

故方程 $f(x) = 0$ 无实根.

若 $k = 0$，显然方程 $f(x) = 0$ 无根.

若 $k < 0$，则可令 $x = -t$，于是得

$$\mathrm{ch}t = -kt \quad (-k > 0).$$

通过按上述的方法讨论该方程的根，易知当 $\mathrm{sh}\xi < -k$ 时，原方程有两实根，分别位于 $(-\xi,0)$ 及 $(-\infty, -\xi)$ 内，其中 ξ 满足 $\mathrm{cth}\xi = \xi(\approx 1.2)$. 而当 $-\mathrm{sh}\xi < k < 0$ 时，方程无实根.

综上所述，若 $|k| > \mathrm{sh}\xi \approx 1.50$，方程有两实根 x_1

及 x_2，满足 $0<|x_1|<\xi, \xi<|x_2|<+\infty$；若 $|k|=\mathrm{sh}\xi$，方程只有一个实根（$k=\mathrm{sh}\xi$ 时，根为 ξ，$k=-\mathrm{sh}\xi$ 时，根为 $-\xi$）. 若 $|k|<\mathrm{sh}\xi$，则方程无实根.

*）　方程根的近似解法见本章 §15.

1470. 在什么条件下方程

$$x^3+px+q=0$$

有：(a) 一个实根；(6) 三个实根.

在平面 (p,q) 上描绘对应的范围.

解　设 $f(x)=x^3+px+q$，则 $f'(x)=3x^2+p$. 若 $p\geqslant 0$，则 $f'(x)>0(x\neq 0)$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格增大的，并且显然 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，故 $f(x)=0$ 有唯一实根.

若 $p<0$. 令 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=\sqrt{-\frac{p}{3}}$，$x_2=-\sqrt{-\frac{p}{3}}$. 在 $(-\infty,x_2]$ 和 $[x_1,+\infty)$ 上 $f(x)$ 严格增大，在 $[x_2,x_1]$ 上 $f(x)$ 严格减小.

因此，若 $f(x_1)f(x_2)>0$，则方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根. 若 $f(x_2)>0$，$f(x_1)<0$，则方程 $f(x)=0$ 恰有三个实根.

由于

$$f(x_1)=-\frac{p}{3}\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}+q,$$

$$f(x_2)=\frac{p}{3}\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}-p\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}+q,$$

故 $f(x_1)f(x_2)>0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0,$$

此即方程仅有一实根的条件(前面 $p\geqslant 0$ 的情形可合并到此条件中去).

而 $f(x_1)<0$ 及 $f(x_2)>0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0,$$

此即方程有三实根的条件.

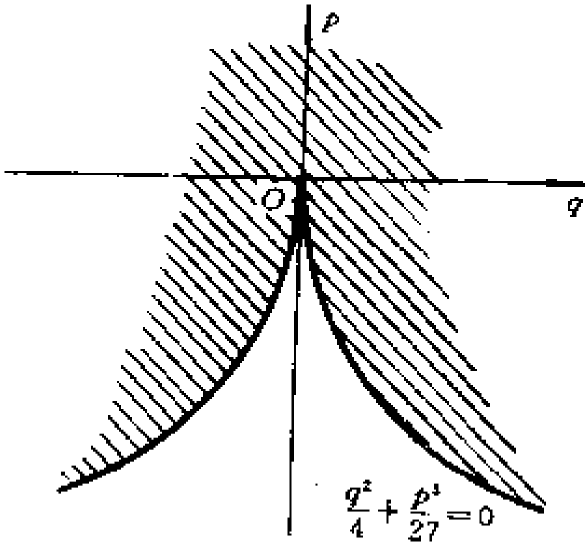


图 2.59

如图 2.59 所示，曲线

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$$

的左右上方是方程仅有一实根的 (p,q) 域，以阴影表之；而曲线的下方则是方程有三实根的 (p,q) 域，以不具阴影表之.

§12. 依据函数的特征点作函数图形

为了作出函数 $y=f(x)$ 的图形，必须：(1) 确定此函数的存在域；并研究函数在其存在域之边界上各点之性质；(2) 查明图形的对称性和周期性；(3) 求出函数的不连续点及连续的区间；(4) 确定函数的零值点及同号区间；(5) 求出极值点及查明函数上升和下降的区间；(6) 确定拐点及函数图形凸凹的区间；(7) 若有渐近线存在则求出渐近线；(8)

指出函数图形的各种特性。

作出下列函数的图形：

1471. $y = 3x - x^3$

解 $y' = 3 - 3x^2$，令 $y' = 0$ 得 $x = -1$ 或 1.

$y'' = -6x$ 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$.

列表

x		-1		0		1	
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	极小点	↗	拐点	↗	极大点	↘

当 $x = -1$ 时，$y = -2$；$x = 0, \pm\sqrt{3}$ 时，$y = 0$；$x = 1$ 时，$y = 2$.

图形对称于原点

如图 2.60 所示 .

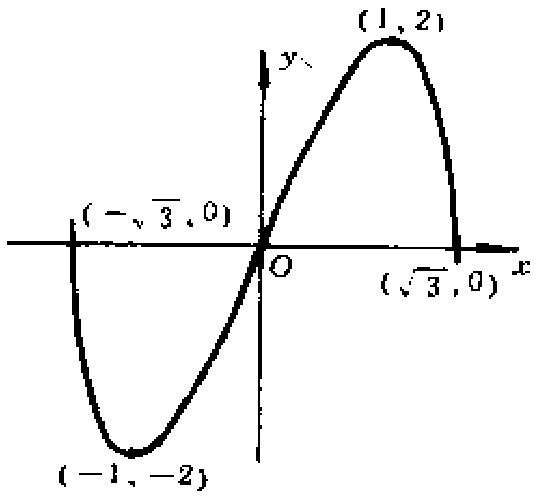


图 2.60

1472. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

解 以 $-x$ 替代 x，y 值不变，故图形对称于 Oy 轴 .

零点处：$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{3}} \approx \pm 1.65$.

$y' = 2x - 2x^3$，令 $y' = 0$ 得 $x = 0$，或 ± 1.

$$y''=2-6x^2,令\ y''=0\ 得\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

列表

x		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	极小点	↗	拐点	↗	极大点	↘

当 $x=0$ 时,$y=1$;$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时,$y=\frac{23}{18}$;$x=1$ 时,$y=\frac{3}{2}$(图 2.61)

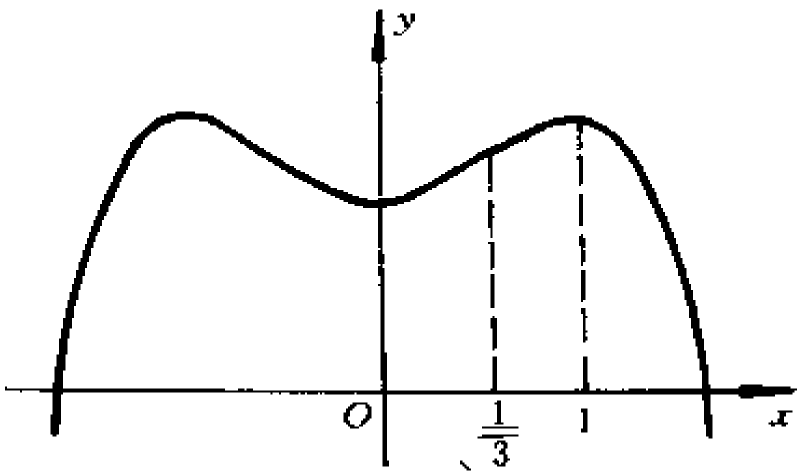


图 2.61

1473. $y=(x+1)(x-2)^2$

解 $y'=3x(x-2)$,令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 2;

$y''=6x-6$,令 $y''=0$ 得 $x=1$.

列表

x		0		1		2	
y'	+	0	−	−		0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x = 0$ 时，$y = 4$；

$x = 1$ 时，$y = 2$；

$x = 2, -1$ 时，$y = 0$

(图 2.62)

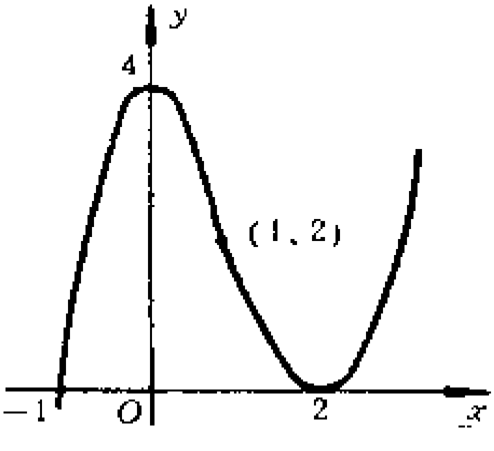


图 2.62

1474. $y = \dfrac{2 - x^2}{1 + x^4}$.

解 显见图形对称于 Oy 轴.

零点处：$x = \pm\sqrt{2}$.

$$y' = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1 + x^4)^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $\pm\sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx \pm 2.06$.

$$y'' = -\frac{2(3x^8 - 20x^6 - 12x^4 + 12x^2 + 1)}{(1 + x^4)^3},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 2.67$ 或 ± 0.77. 经判别知它们为拐点，又因

$y''|_{x=0} = -2 < 0$，故有极大值 $y = 2$；

$y''|_{x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}} > 0$，故有极小值 $y = 1 - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ≈ -0.12.

渐近线为 $y = 0$. 事实上，它的斜率和截距分别为 k

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2 - x^2}{x(1 + x^4)} = 0$，它在 y 轴上的截距为

$b = \lim\limits_{x\to\infty}[y - kx] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2 - x^2}{1 + x^4} = 0$. 如图 2.63 所示.

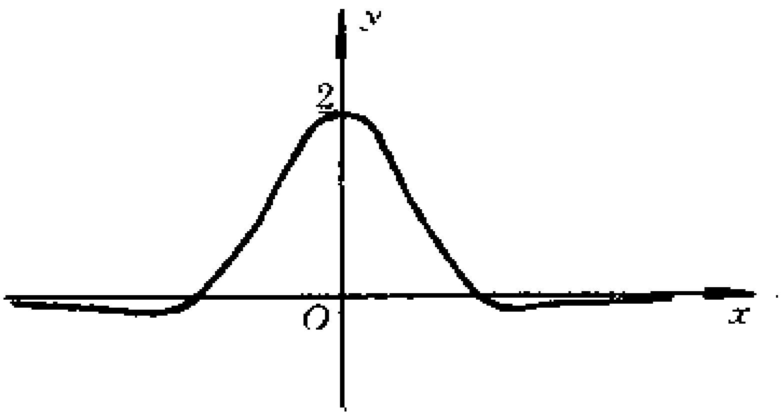


图 2.63

1475. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

解　零点处：$x = -1$ 及 $x = 1$.

渐近线：$x = 2$，$x = 3$ 和 $y = 1$.

$$y' = \frac{-5x^2 + 14x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2},$$

$$y'' = \frac{2(5x^3 - 21x^2 + 15x + 17)}{(x^2 - 5x + 6)^3}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x \approx 0.42$，$x \approx 2.38$. 令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.586$. 经判别知：$y|_{x\approx 0.42} \approx -0.20$ 为极小值，$y|_{x\approx 2.38} \approx -19.80$ 为极大值；$x \approx -0.586$，$y \approx -0.07$ 为拐点. 由于

$$y = 1 - \frac{3}{x - 2} + \frac{8}{x - 3},$$

故可用图形相加法作出函数的图形(图 2.64).

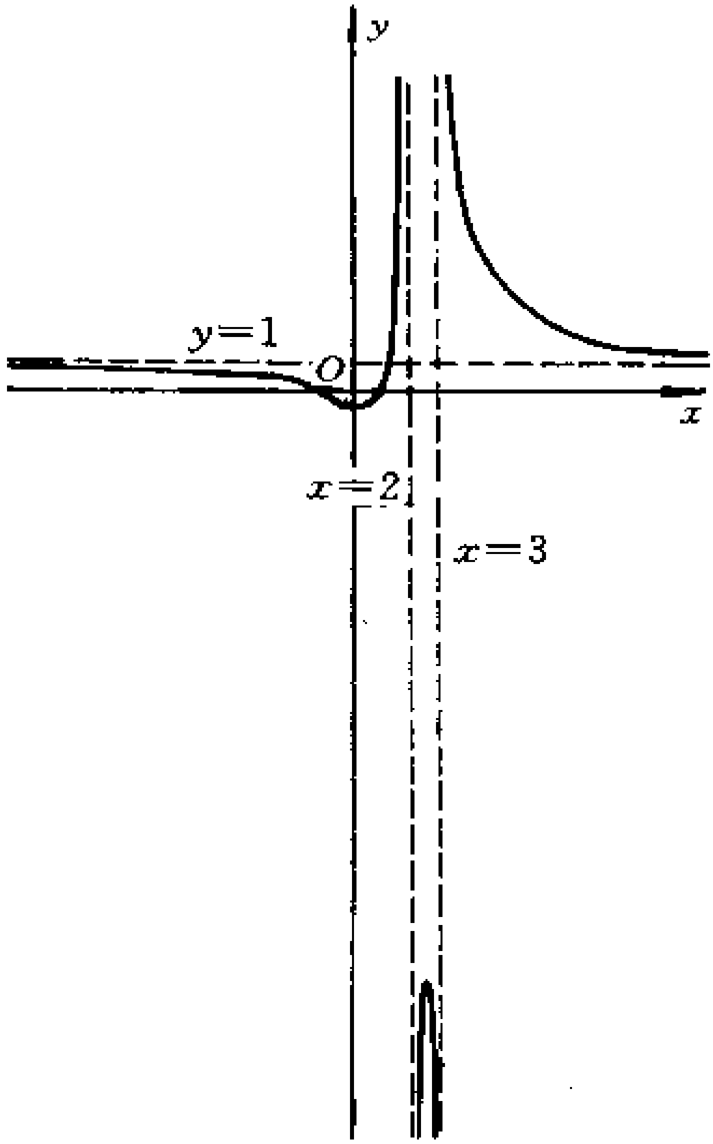


图 2.64

1476. $y=\dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

解 零点处:$x=0$. 不连续点:$x=-1$ 及 $x=1$. 渐近线:$y=0$. $x=-1$ 和 $x=1$.

$$y'=\frac{2x^2+x+1}{(1+x)^2(1-x)^3},$$

$$y'' = \frac{2(3x^3 + 3x^2 + 5x + 1)}{(1 + x)^3(1 - x)^4},$$

$y' = 0$ 无实根，无极值点．令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.22$，经判别知它为拐点，此时 $y = -0.20$.

当 $x < -1$ 时，$y' > 0$，曲线上升；

当 $-1 < x < 1$ 时，$y' > 0$，曲线上升；

当 $x > 1$ 时，$y' < 0$，曲线下降(图 2.65)

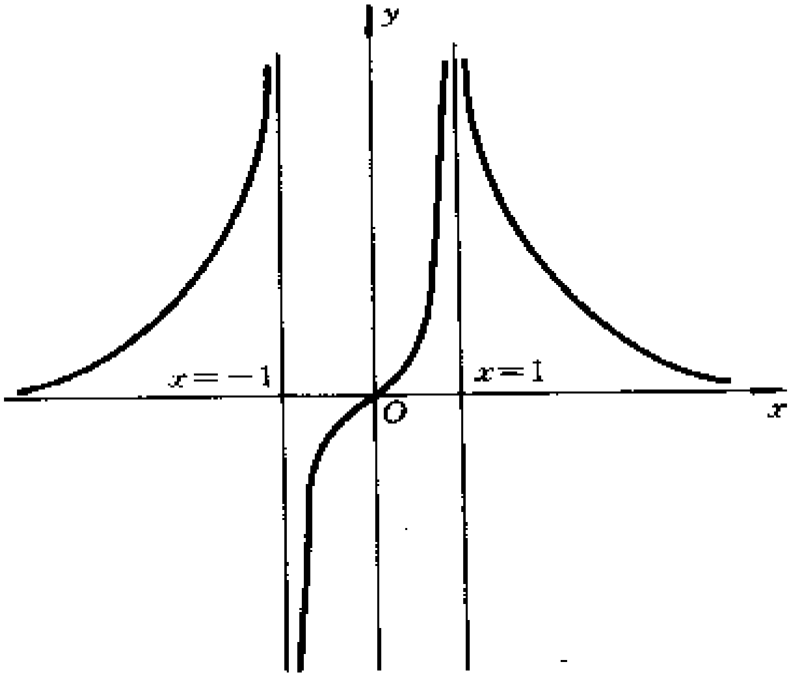


图 2.65

1477. $y = \frac{x^4}{(1 + x)^3}$.

解　零点处：$x = 0$. 不连续点：$x = -1$.

斜渐近线：$y = x - 3$，事实上，

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \to \infty}(y - kx) = -3.$$

垂直渐近线：$x = -1$.

$$y' = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}.$$

令 $y' = 0$,得 $x = 0$,或 $x = -4$.

$$y'' = \frac{12x^2}{(1+x)^5}.$$

当 $x < -1$ 时,$y'' < 0$,图形呈凸状;

当 $x > -1$ 时,$y'' > 0$,图形呈凹状;

又 $y''|_{x=-4} < 0$,

故当 $x = -4$ 时有极大值

$$y = -9\frac{13}{27};$$

由于 y' 经过 $x = 0$ 从负变到正,故当 $x = 0$ 时取得极小值 $y = 0$(图 2.66)

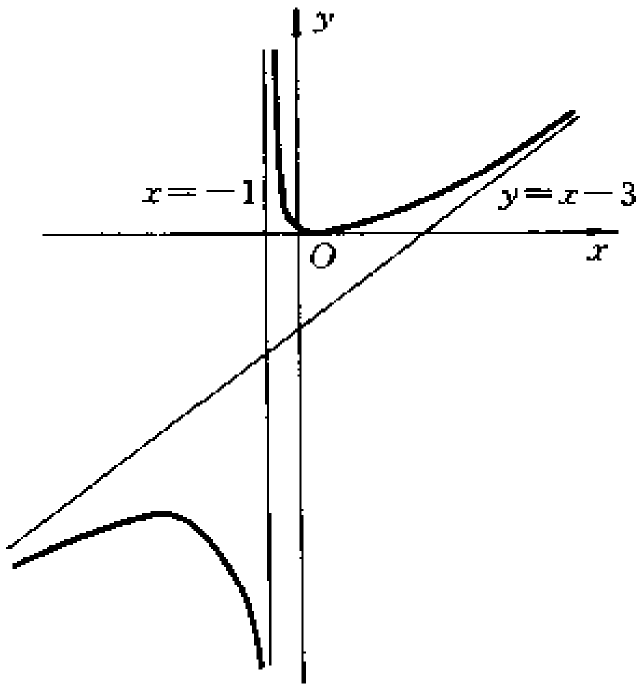


图 2.66

1478. $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

解 零点处：$x=-1$.

垂直渐近线：$x=1$；又

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=0, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=1.$$

故还有水平渐近线为 $y=1$.

$y'=\frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}$，令 $y'=0$ 得 $x=-1$；

$y''=\frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6}$，令 $y''=0$ 得 $x=-1$ 或 -4.

列表

x		-4		-1		1	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	∞	$-$
y''	$-$	0	$+$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	拐点	↘	极小点	↗	不连续点	↘

当 $x=-4$ 时，$y=\frac{81}{625}$；$x=-1$ 时，$y=0$；$x=0$ 时，$y=1$(图 2.67).

1479. $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

解 零点处：$x=0$ 及 $x=1$.

垂直渐近线：$x=-1$；

斜渐近线：$y=x-3$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=-3.$$

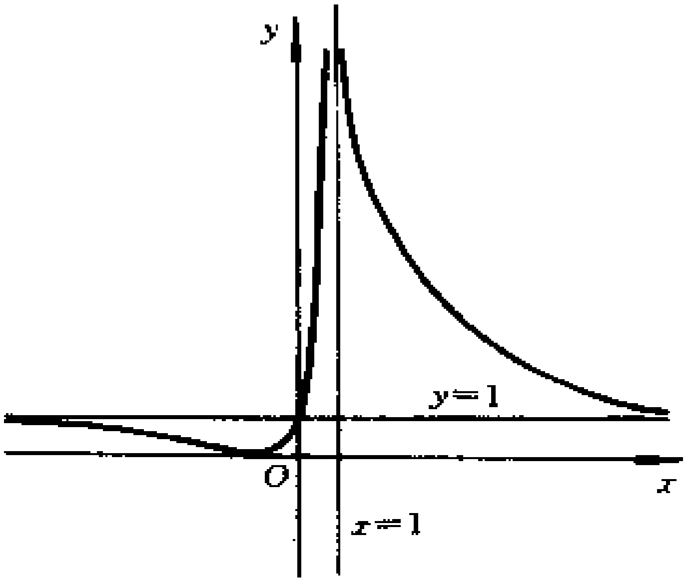


图 2.67

$y' = \dfrac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}$，令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

$y'' = \dfrac{10x-2}{(x+1)^4}$，令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{1}{5}$.

列表

x		$-\dfrac{\sqrt{17}+3}{2}$		-1		0		$\dfrac{1}{5}$		$\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$	
y'	$+$	0	$-$	∞	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	∞	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	极大点	↘	不连续点	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x=-\dfrac{\sqrt{17}+3}{2}\approx-3.56$ 时，有极大值

$$y=-\frac{34\sqrt{17}+142}{32}\approx-8.82;$$

当 $x=0$ 时，有极大值 $y=0$；

当 $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}\approx 0.56$ 时，有极小值

$$y=\frac{34\sqrt{17}-142}{32}\approx -0.06;$$

当 $x=\frac{1}{5}$ 时，$y=-\frac{1}{45}$（图 2.68）.

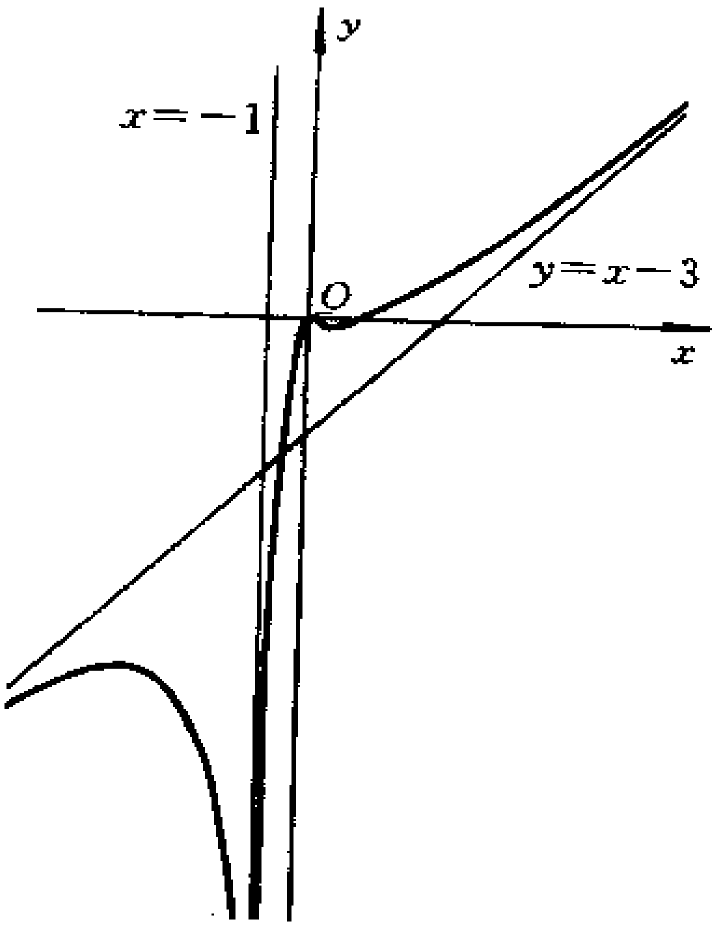


图 2.68

1480. $y=\frac{x}{(1-x^2)^2}$.

解　零点处：$x=0$. 间断点：$x=-1$ 及 $x=1$.

渐近线：$x=-1$，$x=1$ 及 $y=0$.

以 $-x$ 替代 x，y 的绝对值不变，符号改变，故图形关于原点对称．

$$y' = \frac{3x^2 + 1}{(1 - x^2)^3}$$，令 $y' = 0$，无实根．

$$y'' = \frac{12x(x^2 + 1)}{(1 - x^2)^4}$$，令 $y'' = 0$，得 $x = 0$.

经判别知：无极值，$x = 0$ 为拐点（图 2. 69）.

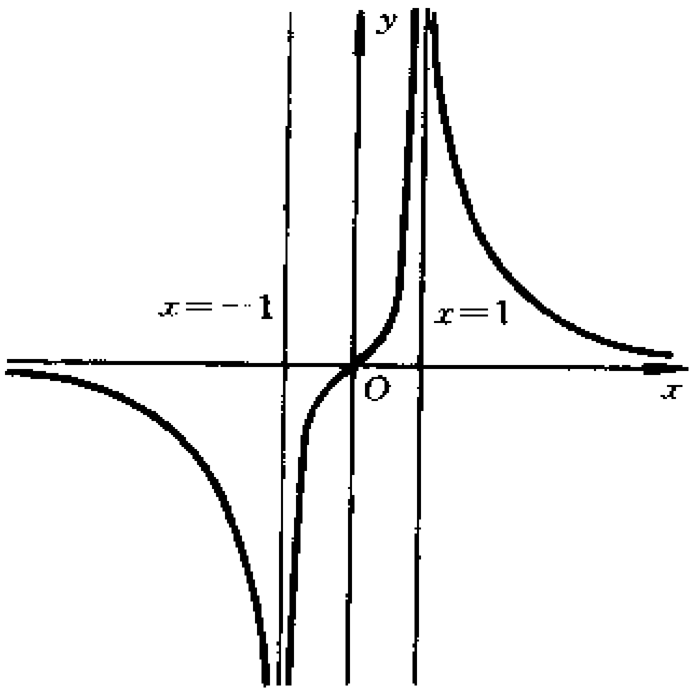


图 2. 69

列表

x		-1		0		1	
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	间断点	↗	拐点	↗	间断点	↘

1481. $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

解 零点处:$x=-1$. 间断点:$x=1$.

垂直渐近线:$x=1$;

斜渐近线:$y=x+5$. 事实上,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=5.$$

$$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, \text{令 } y'=0 \text{ 得 } x=-1 \text{ 或 } 5.$$

$$y''=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}, \text{令 } y''=0 \text{ 得 } x=-1.$$

列表

x		-1		1		5	
y'	$+$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	∞	$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	拐点	$\nearrow$	间断点	$\searrow$	极小点	$\nearrow$

当 $x=-1$ 时,$y=0$;

当 $x=5$ 时,$y=13\frac{1}{2}$(图 2.70).

1482. $y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$.

解 垂直渐近线:$x=-1$;

斜渐近线:$y=x$. 事实上,

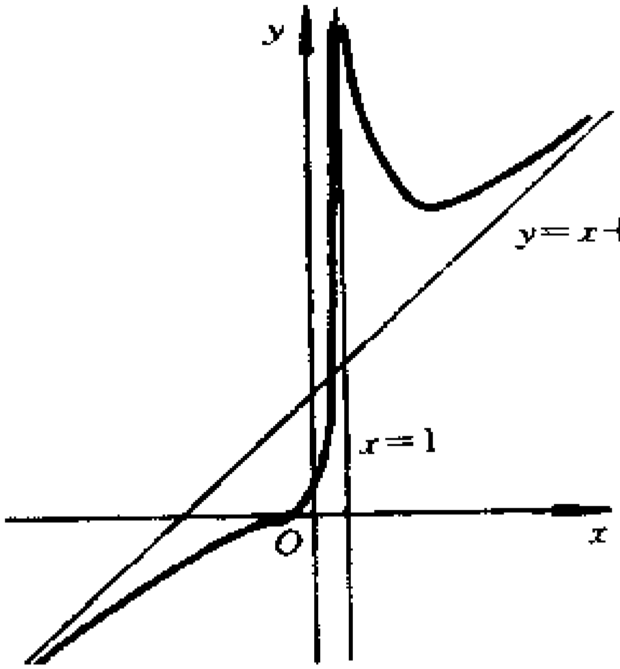


图 2.70

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=0.$$

$$y'=\frac{x^6+4x^3-24x^2}{(x^3+1)^2},$$

$$y''=\frac{-6x^5+96x^4+12x^2-48x}{(x^3+1)^3},$$

令 $y'=0$,得 $x=0,2$ 及 $x\approx-2.4$. $y'|_{x=2}>0$,故当 $x=2$ 时有极小值 $y=2\frac{2}{3}$;

$y''|_{x=-2.4}<0$;故当 $x\approx-2.4$ 时有极大值 $y\approx-3.2$.

经判别知:当 $x=0,0.752,16.006$ 时有拐点. 渐近线 $y=x$ 与曲线交于点(8,8). 如图

2.71 所示.

1483. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$.

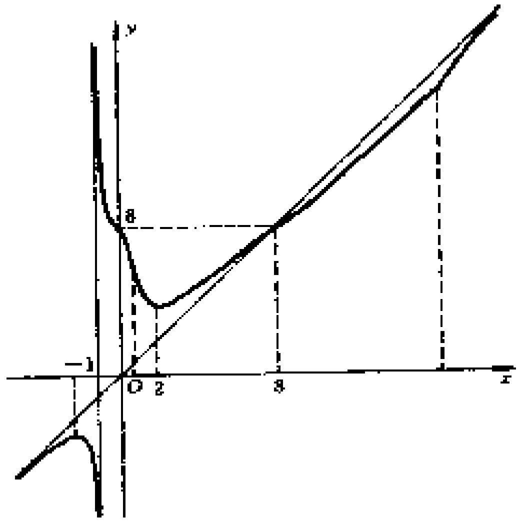


图 2.71

解 图形对于 Oy 轴对称.

零点处:$x = \pm\frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0.79$.

$y' = \frac{4(8x^4 - 10x^2 + 5)}{3x^3(1-x^2)^2}$,

$y' = 0$ 无实根,无极值点.

$$y'' = \frac{4(8x^6 - 14x^4 + 15x^2 - 5)}{x^4(1-x^2)^3},$$

令 $y'' = 0$,得 $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.71$. 经判别,此为拐点,相应纵坐标 $y = -2\frac{2}{3}$.

渐近线:$x = 0, x = -1, x = 1$ 和 $y = 0$.

当 $x > 0$ 时,$y' > 0$,曲线上升.

当 $0 < x < 0.71$ 时,$y'' < 0$,图形呈凸状.

当 $0.71 < x < 1$ 时,$y'' > 0$,图形呈凹状.

当 $1 < x < +\infty$ 时,$y'' < 0$,图形呈凸状.

图形如图 2.72 所示.

1484. $y = (x-3)\sqrt{x}$.

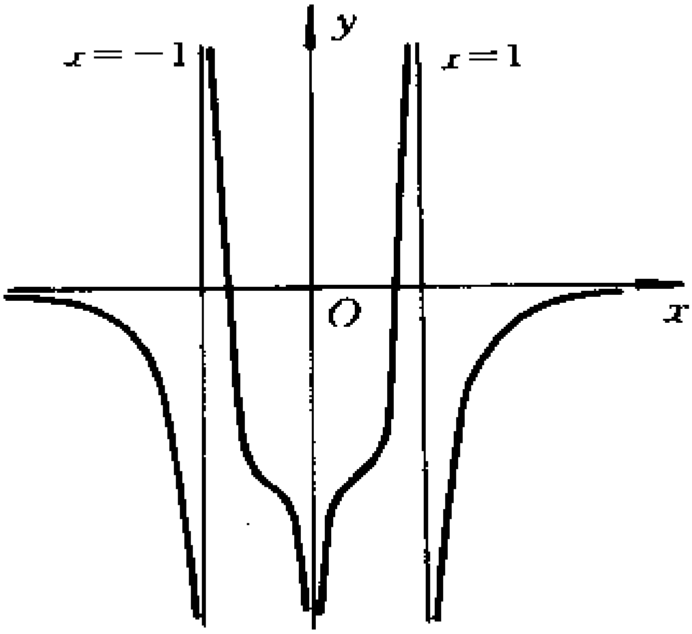


图 2.72

解 存在域：$0 \leqslant x < +\infty$.

零点处：$x = 0$ 和 $x = 3$.

$y' = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$；

$y'' = \dfrac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}} > 0 \qquad (0 < x < +\infty)$，

所以图形始终是凹的．

由于 $y''|_{x=1} > 0$，故当 $x = 1$ 时有极小值 $y = -2$；当 $x = 0$ 时，由 $\lim\limits_{x \to 0+} y' = -\infty$ 知，曲线在 $x = 0$ 点与 y 轴相切，易见它有边界极大值 $y = 0$.

图形如图 2.73 所示．

1485. $y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4}$.

解 存在域：需 $8 - x^2 \geqslant 0$，即 $|x| \leqslant 2\sqrt{2} \approx 2.83$.

零点处：$x = 0$ 和 $x = \pm 2\sqrt{2}$.

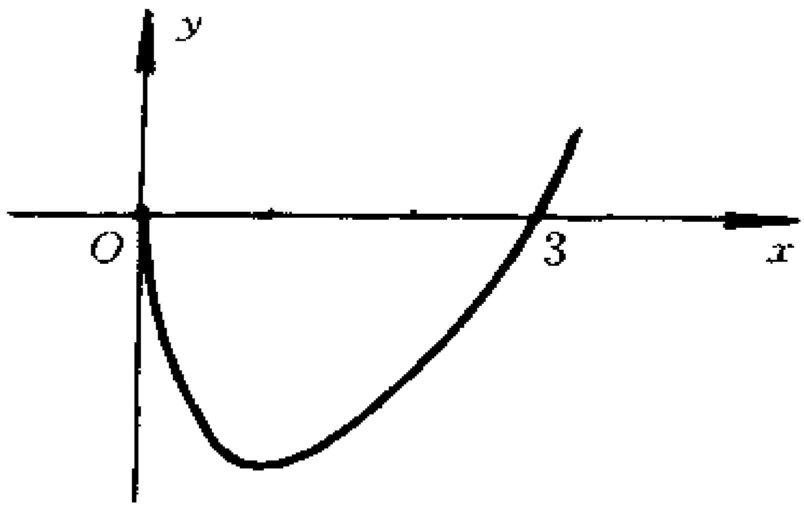


图 2.73

图形关于坐标原点及坐标轴对称.

下面就第一象限讨论之:

$$y' = \frac{2(4 - x^2)}{\sqrt{8 - x^2}},令\ y' = 0\ 得\ x = 2.$$

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 12)}{(8 - x^2)^{\frac{3}{2}}},令\ y'' = 0\ 得\ x = 2\sqrt{3}\ 或$$

$x = 0$.

然而点 $x = 2\sqrt{3}$ 不在存在域内,对于 $x = 0$ 来说,如果将曲线由第三象限穿向第一象限看成一分支曲线的话.则也可理解为拐点,同样由第四象限到第二象限的那个分支也有同样情况,故曲线呈双纽状.

当 $0 < x < 2$ 时,$y' > 0$,当 $2 < x < 2\sqrt{2}$ 时,$y < 0$,故当 $x = 2$ 时,有极大值 $y = 4$.当 $x = 2\sqrt{2}$ 及 $x = 0$ 时,显然有极小值 $y = 0$.

前者是边界的极小值,而且曲线在 $x = 2\sqrt{2}$ 处以 $x = 2\sqrt{2}$ 为垂直切线.图形如图 2.74 所示.

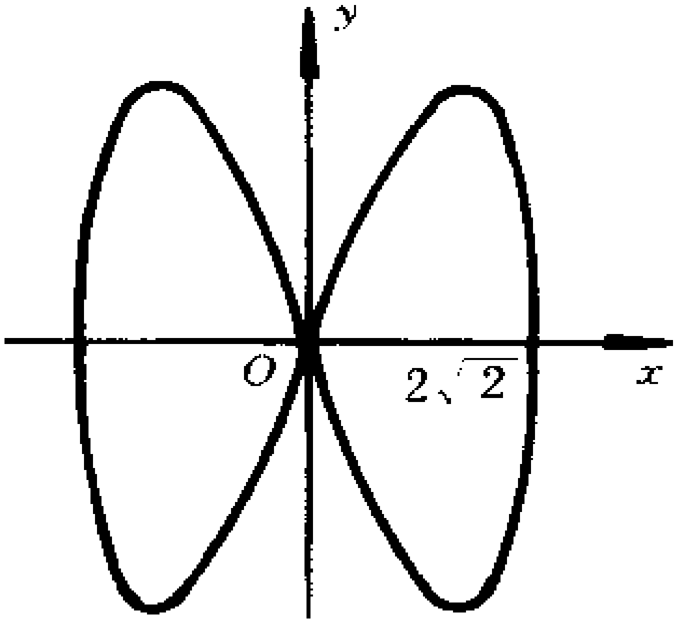


图 2.74

1486. $y = \pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

解　存在域:$1 \leqslant x \leqslant 2$ 及 $3 \leqslant x < +\infty$.

零点处:$x = 1, x = 2$ 和 $x = 3$.

图形关于 Ox 轴对称．下面就第一象限讨论之:

$$y' = \frac{3x^2 - 12x + 11}{2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}},$$令 $y' = 0$,得 $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3} \approx 1.42$ 经判别此时有极大值 $|y| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{12} \approx 0.62$.

令 $y = 0$ 解得 $x \doteq 3.468$,经判别是拐点．

当 $x > 3$ 时,
$y' > 0$,曲线上升.

当 $x = 1, 2$

和 3 时有边界的极小值 $y=0$ 且 $y'=\infty$(图 2.75).

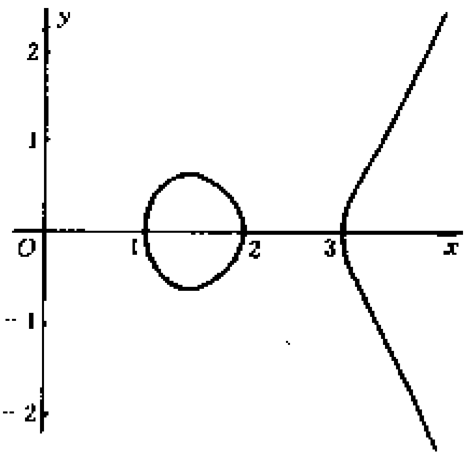


图 2.75

1487. $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$.

解 零点处:$x=-1$ 和 $x=1$. 又当 $x=0$ 时,$y=1$.

渐近线:$y=x-\frac{1}{3}$.

事实上,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1, b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=-\frac{1}{3}.$$

$$y'=\frac{3x^2-2x-1}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}},$$令 $y'=0$ 得 $x=-\frac{1}{3}$;当 $x=\pm 1$ 时,$y'=\infty$.

$y''=\frac{-8}{9}\cdot\frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}$,当 $x=\pm 1$ 时,$y''=\infty$.

列表

x		-1		$-\frac{1}{3}$		1	
y'	+	∞	+	0	−	∞	+
y''	+	∞	−	−	−	∞	−
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	极小点	↗

当 $x=-\frac{1}{3}$ 时,

有极大值 $y \approx 1.06$；

当 $x = 1$ 时，有极小值 $y = 0$.

图形如图 2.76 所示

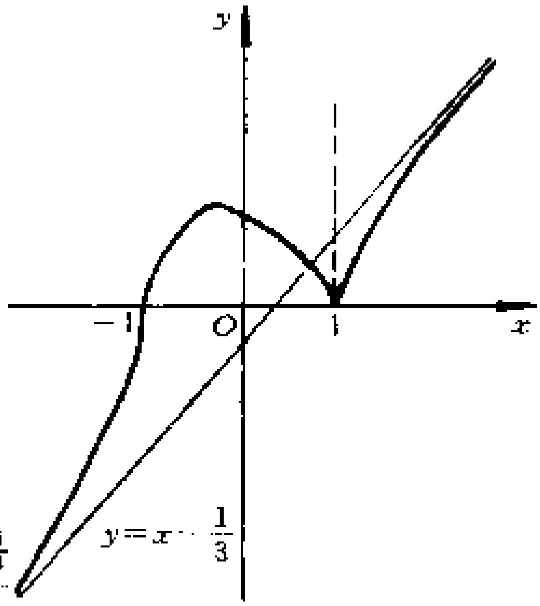


图 2.76

1488. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$$

当 x 经过 $x = 0$ 时，y' 由负变正，故当 $x = 0$ 时有极小值 $y = -1$，且 $y'_{x=0^-} = -\infty$，$y'_{x=0^+} = +\infty$，又当 $x < 0$ 时，$y' < 0$，当 $x > 0$ 时，$y' > 0$. 同时，$y' = 0$ 和 $y = 0$ 均无实根，故知图形是向下凹的，且以 $y = 0$ 为渐近线(图 2.77).

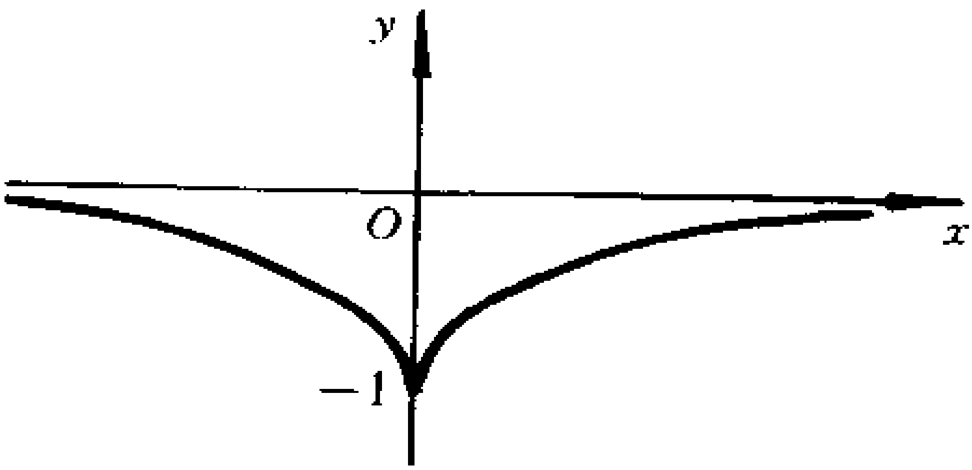


图 2.77

1489. $y=(x+2)^{\frac{2}{3}}-(x-2)^{\frac{2}{3}}$.

解 以 $-x$ 替代 x，y 变成 $-y$，故图形关于坐标原点对称．

渐近线：$y=0$.

零点处：$x=0$.

$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}-(x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}$，当 $x=\pm 2$ 时，$y'=\infty$.

$y''=\frac{2}{9}\cdot\frac{(x+2)^{\frac{1}{3}}-(x-2)^{\frac{4}{3}}}{(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}}$，令 $y''=0$ 得 $x=0$.

列表

x		-2		0		2	
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	↘	最小点	↗	拐点	↗	最大点	↘

当 $x=-2$ 时，有最小值 $y=-\sqrt[3]{16}$；

当 $x=2$ 时，有最大值 $y=\sqrt[3]{16}$.

图形如图 2.78 所示．

1490. $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称．

$y'=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\right]$，令 $y'=0$ 得 $x=0$；当 $x=\pm 1$ 时，$y'=\infty$.

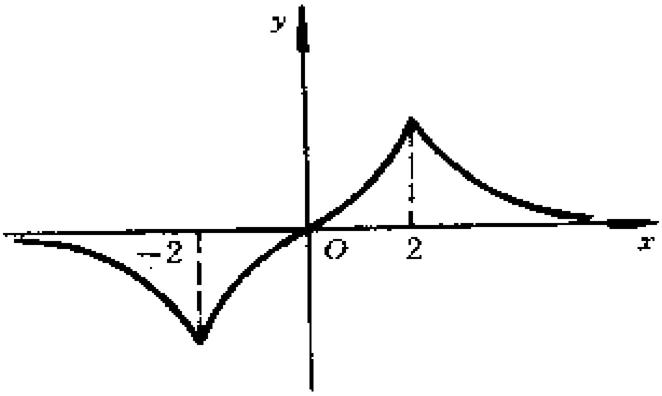


图 2.78

$$y'' = -\frac{2}{9}\left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}}\right] < 0,$$

图形始终呈凸状.

当 $x = \pm 1$ 时,取得最小值 $y = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$.

当 $x = 0$ 时,有极大值 $y = 2$.

图形如图 2.79 所示.

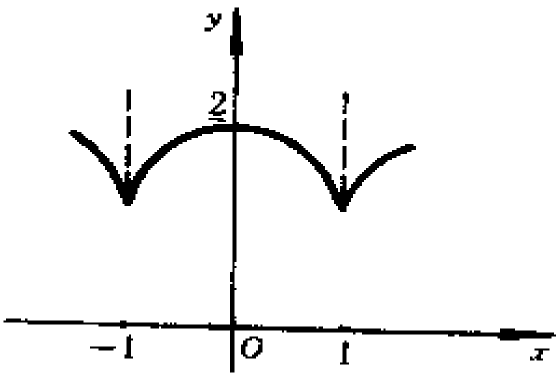


图 2.79

1491. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处:$x = 0$.

间断点:$x = \pm 1$.

$y' = \dfrac{x^2 - 3}{3(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}}$,令 $y' = 0$ 得 $x = \pm\sqrt{3}$. 当 $x = \pm 1$ 时,$y' = \infty$.

$y'' = -\dfrac{2x(x^2 - 9)}{9(x^2 - 1)^{\frac{7}{3}}}$,令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 或 ± 3.

列表

x		-3		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		3	
y'	+	+	+	0	−	∞	−	−	−	∞	−	0	+	+	+
y''	+	0	−	−	−	∞	+	0	−	∞	+	+	+	0	−
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	间断点	↘	拐点	↘	间断点	↘	极小点	↗	拐点	↗

渐近线：$x=-1, x=1$.

当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx\pm 1.38$;

当 $x=\pm 3$ 时，$y=\pm 1\dfrac{1}{2}$.

图形如图 2.80 所示.

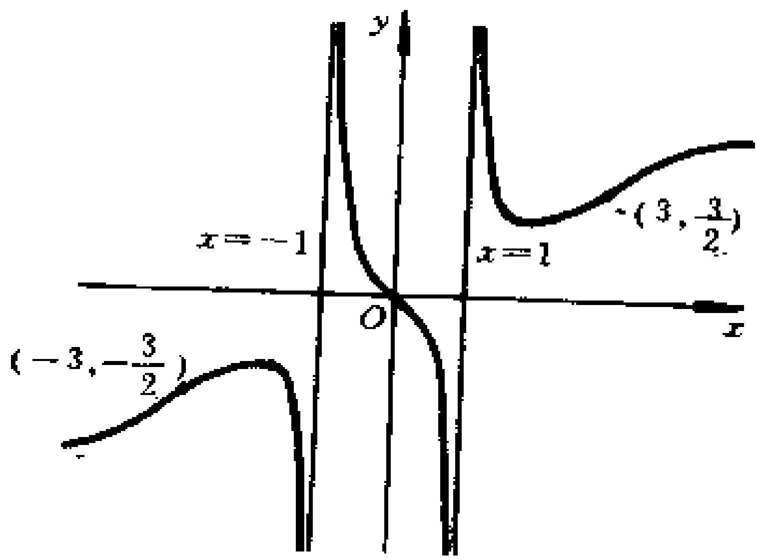


图 2.80

1492. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

解　存在域：$|x|\geqslant 1$. 图形关于 Oy 轴对称，且位于 Ox 轴的上方．渐近线：$y=\pm\dfrac{x}{2}$.

$$y'=\frac{2x^5-3x^3+2x}{(2x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}},$$

$$y''=\frac{1}{(2x^2-1)^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\cdot(-6x^4+3x^2+2).$$

当 $x>1$ 时，$y'>0$，$y''<0$，故曲线上升，图形呈凸状．

又当 $x=\pm 1$ 时，有边界的极小点 $y=0$（图 2.81）．

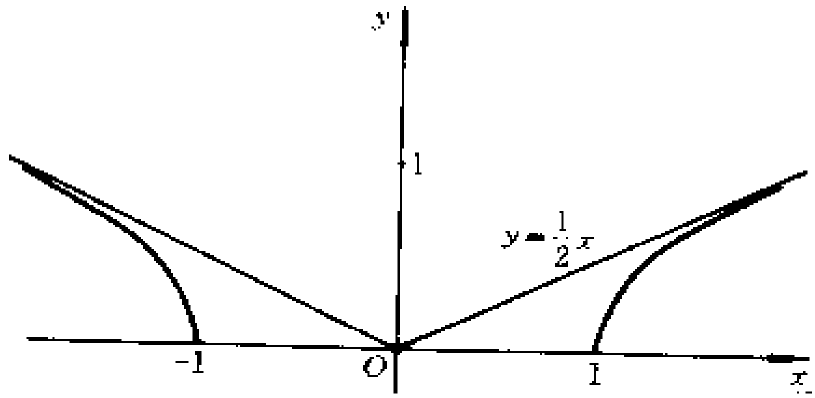


图 2.81

1493. $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

解　存在域：$x>0$.

渐近线：$x=0$ 及 $y=x+\dfrac{3}{2}$.

$$y'=\frac{(2x-1)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}，令 y'=0 得 x=\frac{1}{2}.$$

$$y'' = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

故图形是凹的.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时. 有极小值

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2.60.$$

图形如图 2.82 所示.

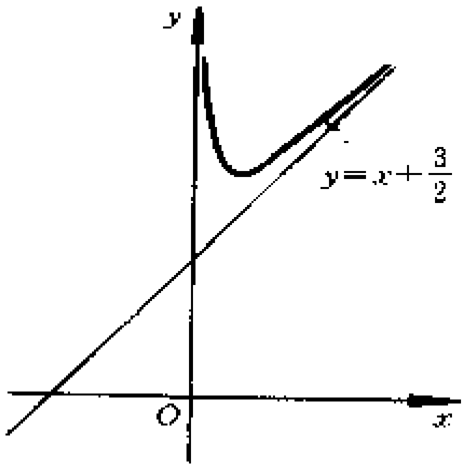


图 2.82

1494. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

解 存在域: $x \geqslant 0$ 及 $x < -3$.

零点处: $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4.30$.

斜渐近线: $y = \frac{5}{2} - 2x$. 事实上,

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -2.$$

$$b = \lim_{x \to -\infty}(y - kx) = \lim_{x \to -\infty}\left(1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x+1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x - 1} = \frac{5}{2}.$$

水平渐近线: $y = -\frac{1}{2}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty}(y - kx) = \lim_{x \to +\infty}\left(1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3}-(x-1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x-1} = -\frac{1}{2}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to-3} y = \infty$，故垂直渐近线为 $x=-3$.

$$y' = -1 + \frac{\sqrt{x}(2x+9)}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}},$$

令 $y'=0$ 得 $x=-4$；

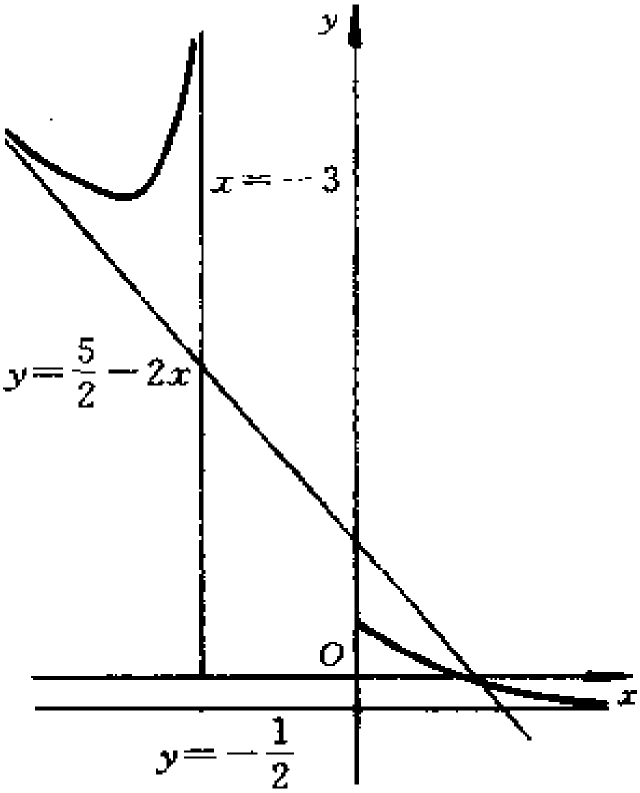


图 2.83

$$y'' = \frac{27}{4(x+3)^2\sqrt{x(x+3)}} > 0,$$故图形呈凹状.

当 $x=-4$ 时有极小值 $y=13$.

当 $x=0$ 时有边界极大值 $y=1$.

图形如图 2.83 所示.

1495. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$.

解 零点处：$x=0$.

垂直渐近线：$x=-1$.

$$y' = \frac{x+2}{3(x+1)\sqrt[3]{x(x+1)}},$$

令 $y'=0$ 得 $x=-2$. 当 $x=0$ 时 $y'=\infty$.

$$y''=-\frac{2(x^2+4x+1)}{9x(x+1)^2\sqrt[3]{x(x+1)}},$$

令 $y''=0$ 得 $x=-2\pm\sqrt{3}$.

经判别:

当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$;

当 $x=-2$ 时有极大值 $y=-\sqrt[3]{4}\approx-1.59$.

拐点:

$x=-(2-\sqrt{3})\approx-0.27$,此时 $y\approx0.46$;

$x=-(2+\sqrt{3})\approx-3.73$,此时 $y\approx-1.72$.

图形如图 2.84 所示.

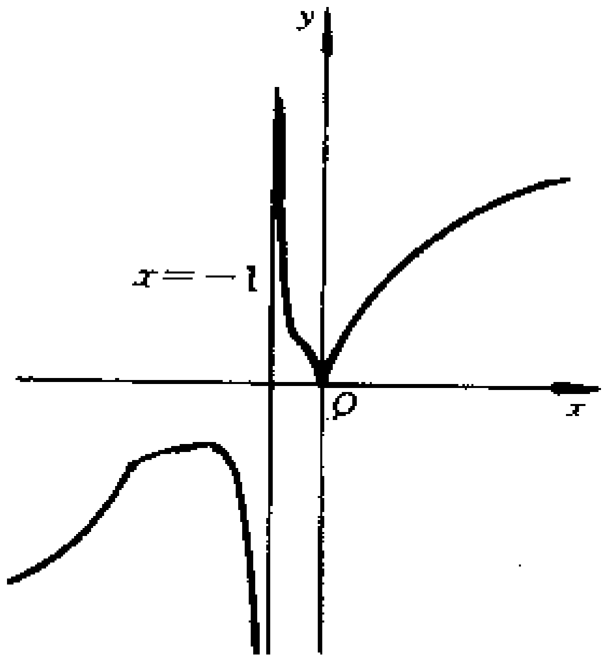


图 2.84

1496. $y=\sqrt{\dfrac{x^4+3}{x^2+1}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数值始终是正的.

渐近线:$y=\pm x$.

$$y'=\frac{x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 ± 1.

$$y''=\frac{-x^8+20x^6+18x^4+36x^2-9}{(x^4+3)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $y''=0$ 得 $x\approx\pm 0.47$ 或 ± 4.58,经判别均为拐点：

当 $x\approx\pm 0.47$ 时,$y\approx 1.58$;

当 $x\approx\pm 4.58$ 时,$y\approx 4.49$.

当 $x=0$ 时有极大值 $y=\sqrt{3}\approx 1.73$;

当 $x=\pm 1$ 时有极小值 $y=\sqrt{2}\approx 1.41$.

图形如图 2.85 所示.

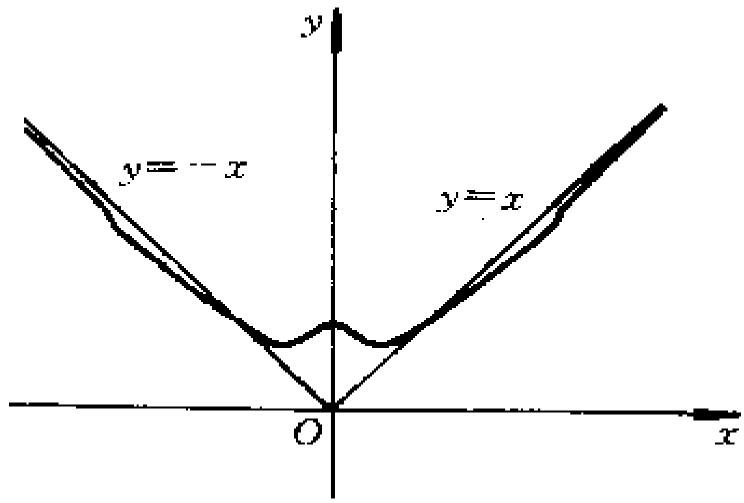


图 2.85

1497. $y=\sin x+\cos^2 x$.

解 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 内的图形讨论如下：

零点处：$x=\pi+\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 1.21\pi$ 及

$x=2\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 1.79\pi$.

$y' = \cos x(1 - 2\sin x)$，令 $y' = 0$ 得

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \text{ 及 } \frac{3\pi}{2};$$

$y'' = -\sin x - 2\cos 2x$，令 $y'' = 0$ 得

$4\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$，

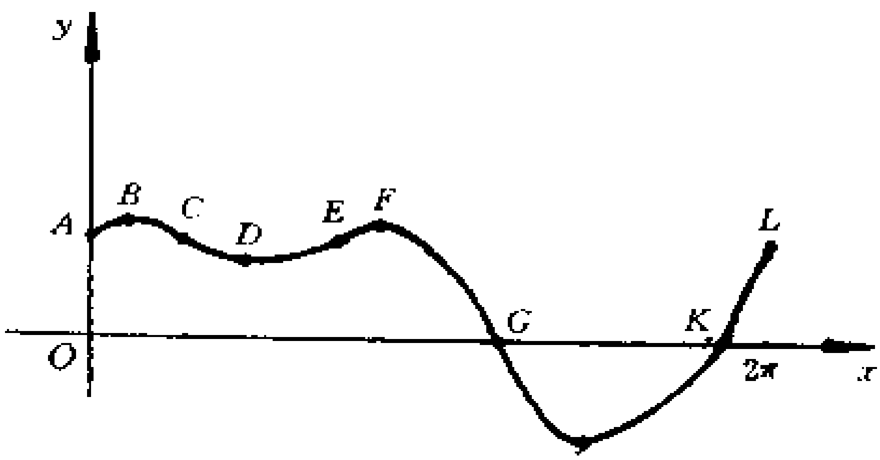


图 2.86

解之得

$$x_1 = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}，\text{此时 } y_1 \approx 1.13;$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}，\text{此时 } y_2 \approx 1.13;$$

$$x_3 = \pi + \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}，\text{此时 } y_3 \approx 0.055;$$

$$x_4 = 2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}，\text{此时 } y_4 \approx 0.055，$$

经判断：$x_1 \approx 0.32\pi, x_2 \approx 0.68\pi, x_3 \approx 1.20\pi, x_4 \approx 1.80\pi$ 均为拐点；

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时有极小值 $y = 1$；

当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时有极小值 $y = -1$；

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 和 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时,有极大值 $y=1\frac{1}{4}$.

如图 2.86 所示. 图中主要点的坐标:

$A(0,1)$,$B\left(\frac{\pi}{6},1\frac{1}{4}\right)$,$C(0.32\pi,1.13)$,

$D\left(\frac{\pi}{2},1\right)$,$E(0.68\pi,1,13)$,

$F\left(\frac{5}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$,$G(1.20\pi,0.055)$,$H\left(\frac{3}{2}\pi,-1\right)$,

$K(1.80\pi,0.055)$ 和 $L(2\pi,1)$.

1498. $y=(7+2\cos x)\sin x$.

解 图形关于原点对称. 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内的图形讨论如下:

零点处:$x=0$ 或 $\pm\pi$.

$y'=7\cos x+2\cos 2x$,令 $y'=0$ 得

$2\cos 2x+7\cos x=0$,

解之得

$$x=\arccos\frac{1}{4}\approx 0.42\pi,$$

$$x=-\arccos\frac{1}{4}$$

$$\approx-0.42\pi.$$

$y''=-7\sin x-4\sin 2x$,

令 $y''=0$ 得 $\sin x(7+8\cos x)=0$,

解之得

$x_1=0$,此时 $y_1=0$;

$x_{2,3}=\pm\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$

$\approx\pm 0.84\pi$,此时

$y_{2,3} \approx \pm 2.54$;

$x_{4,5} = \pm \pi$，此时 $y_{4,5} = 0$.

经判别：点 x_1, x_2, x_3, x_4 和 x_5 均为拐点；

当 $x = -\arccos\frac{1}{4}$ 时有极小值 $y = -\frac{15}{8}\sqrt{15} \approx -7.3$;

当 $x = \arccos\frac{1}{4}$ 时有极大值 $y = \frac{15}{8}\sqrt{15} \approx 7.3$.

图形如图 2.87 所示，图中主要点的坐标：

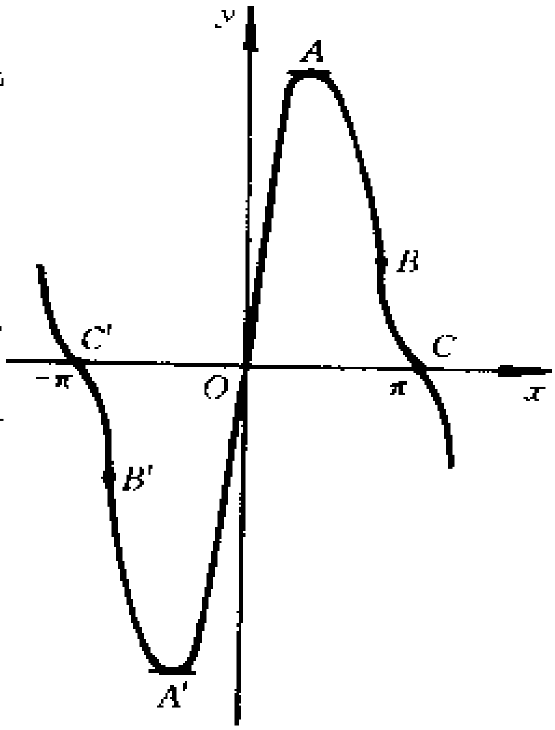


图 2.87

$A(0.42\pi, 7.3), B(0.84\pi, 2.54), C(\pi, 0)$;

$A'(-0.42\pi, -7.3), B'(-0.84\pi, -2.54)$,

$C'(-\pi, 0)$.

1499. $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

解 图形关于坐标原点对称．函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 内讨论图形．

零点处：$x = 0$ 或 $\pm\pi$.

$y' = \cos x + \cos 3x$，令 $y' = 0$ 得

$$x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4};$$

$y'' = -\sin x - 3\sin 3x$,

令 $y'' = 0$ 得

$x_1 = 0, y_1 = 0$;

$x_{2,3} = \pm \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0.37\pi$,

$y_{2,3} = \pm \frac{4}{27}\sqrt{30} = \pm 0.81$;

$x_{4,5} = \pm\left(\pi - \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \approx \pm 0.63\pi$,

$y_{4,5} = \pm \frac{4}{27}\sqrt{30} = \pm 0.81$;

$x_{6,7} = \pm \pi, y_{6,7} = 0$.

经判别：点 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 和 x_7 均为拐点；

极小值：当 $x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$ 时，$y = -\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx -0.94$；

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，$y = \frac{2}{3}$；

极大值：当 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时，$y = -\frac{2}{3}$；

当 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 时，$y = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0.94$.

图形如图 2.88 所示，图中主要点的坐标：

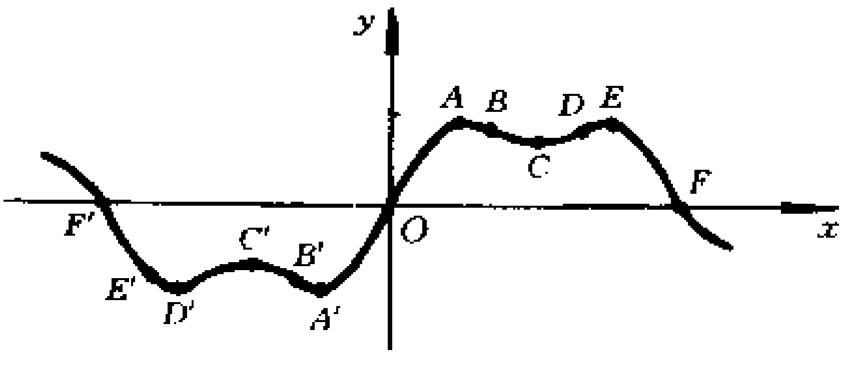


图 2.88

$A\left(\frac{\pi}{4},0.94\right)$，$B(0.37\pi,0.81)$，$C\left(\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\right)$，

$D(0.63\pi,0.81)$，$E\left(\frac{3\pi}{4},0.94\right)$ 和 $F(\pi,0)$；

点 A',B',C',D',E',F'，和点 A,B,C,D,E,F 关于原点对称．

1500. $y=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

解 图形关于 Oy 轴对称．函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图形．

零点处：$x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}\approx\pm 0.62\pi$.

$y'=-\sin x+\sin 2x$，令 $y'=0$ 得

$$x=0,\ \pm\frac{\pi}{3},\ \pm\pi.$$

$y''=-\cos x+2\cos 2x$，令 $y''=0$ 得

$x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx\pm 0.18\pi$，$y_{1,2}\approx 0.63$；

$x_{3,4}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}\approx\pm 0.70\pi$，$y_{3,4}\approx-0.44$.

经判别：点 x_1,x_2,x_3 和 x_4 均为拐点；

当 $x=0$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}$；

当 $x=\pm\pi$ 时有极小值 $y=-\frac{3}{2}$；

当 $x=\pm\frac{\pi}{3}$ 时有极大值 $y=\frac{3}{4}$.

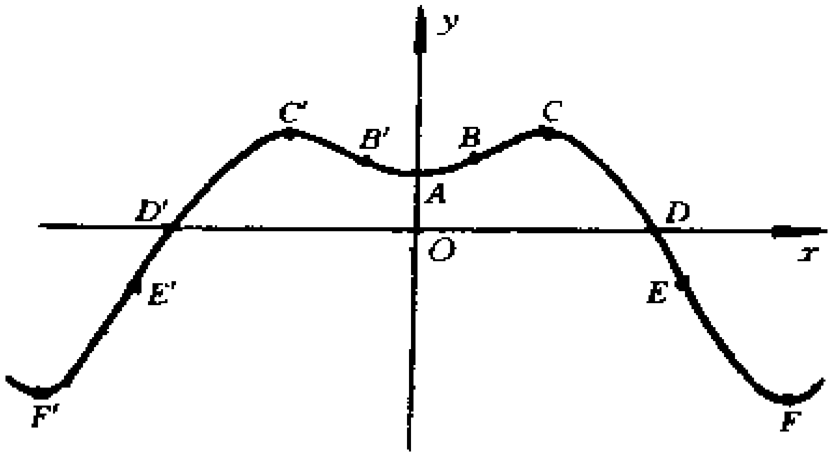


图 2.89

图形如图 2.89 所示，图中主要点的坐标：

$$A\left(0,\frac{1}{2}\right),B(0.18\pi,0.63),C\left(\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}\right),$$

$D(0.62\pi,0),E(0,70\pi,-0.44),F\left(\pi,-\frac{3}{2}\right)$；

点 B',C',D',E',F'，与点 B,C,D,E,F 关于 Oy 轴对称.

1501. $y=\sin^4x+\cos^4x$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

由于

$$\begin{aligned}y&=\sin^4x+\cos^4x\\&=\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{4}(3+\cos4x),\end{aligned}$$

故函数的周期 $T=\frac{\pi}{2}$. 在一周期 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 内讨论图形.

$$y'=-\sin4x.\ 令\ y'=0,得\ x=0\ 或\ \pm\frac{\pi}{4}.$$

$$y'' = -4\cos 4x. \text{令 } y'' = 0\text{,得 } x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{8},$$

$y_{1,2} = \frac{3}{4}$.

经判别:点 x_1 和 x_2 均为拐点;当 $x = 0$ 时有极大值 $y = 1$;当 $x = \pm \frac{\pi}{4}$ 时有极小值 $y = \frac{1}{2}$.

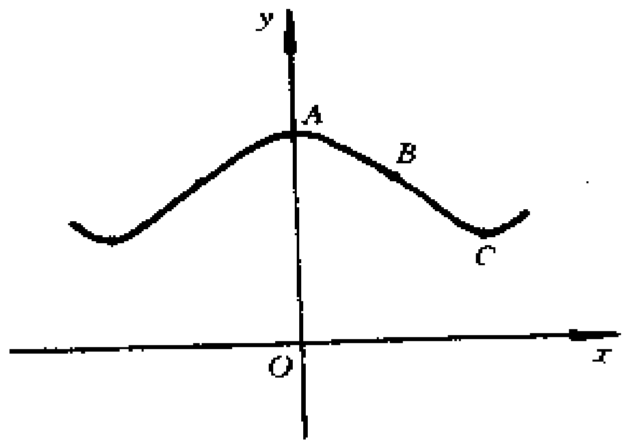


图 2.90

图形如图 2.90 所示,图中主要点的坐标:

$$A(0,1),B\left(\frac{\pi}{8},\frac{3}{4}\right)\text{和 } C\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right).$$

1502. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

由于

$y = \sin x \sin 3x = -(\cos 2x - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{16}$,故函数的周期 $T = \pi$. 在一周期 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 内讨论图形.

零点处:$x = 0$ 或 $\pm \frac{\pi}{3}$.

$y' = 2\sin 4x - \sin 2x$,令 $y' = 0$ 得

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{1}{2}\arccos \frac{1}{4}.$$

$y'' = 8\cos 4x - 2\cos 2x$,令 $y'' = 0$ 得

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}\arccos \frac{1 + \sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.11\pi,$$

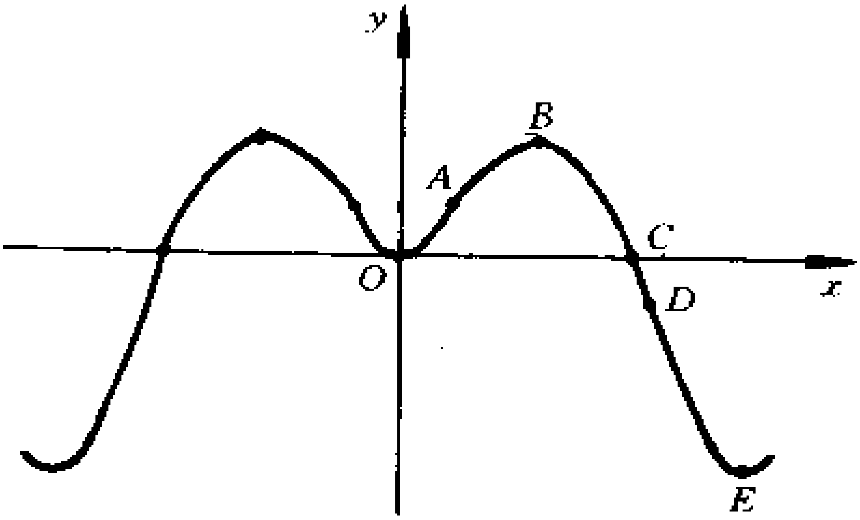


图 2.91

$y_{1,2} \approx 0.29$;

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.36\pi,$$

$y_{3,4} \approx -0.24$.

经判别：点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点；

极小值：当 $x = 0$ 时 $y = 0$,

当 $x = \pm\frac{\pi}{2}$ 时，$y = -1$；

极大值：当 $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} \approx \pm 0.21\pi$ 时，$y = \frac{9}{16}$

图形如图 2.91 所示，图中主要点的坐标：

$A(0.11\pi, 0.29)$, $B\left(0.21\pi, \frac{9}{16}\right)$, $C\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$,

$D(0.36\pi, -0.24)$, $E\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$.

1503. $y = \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

解　利用 $\sin(\pi+x)=-\sin x$，易知函数的周期 $T=\pi$.

在一周期 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图形.

不连续点：$x=\dfrac{3\pi}{4}$.

零点处：$x=0$ 或 π.

渐近线：$x=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$y'=\frac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}>0,$$

无极值，函数图形上升.

$$y''=-\frac{2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)},$$

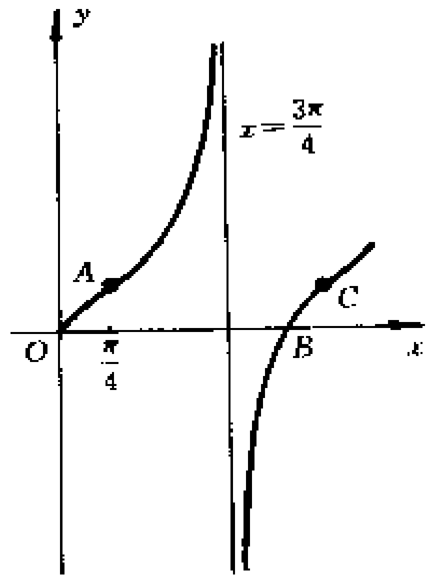


图 2.92

令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{4}$，对应的 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 经判别为拐点.

图形如图 2.92 所示，图中主要点的坐标：

$$A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),B(\pi,0)\text{ 和 }C\left(\frac{5\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

1504. $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

解　图形关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图形.

零点处：$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

渐近线：$x=\pm\dfrac{\pi}{4}$

及 $x=\pm\dfrac{3\pi}{4}$.

$y'=\dfrac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{\cos^2 2x}$,

令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 $\pm\pi$;

$y''=\dfrac{1}{\cos^3 2x}[3\cos x\cos^2 2x+4\sin 2x\sin x(1+2\cos^2 x)]$,

令 $y''=0$ 得 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

经判别:当 $x=0$ 时有极小值 $y=1$;

当 $x=\pm\pi$ 时有极大值 $y=-1$;

点 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 均为拐点,此时 $y=0$.

当 $0<x<\pi$ 时,$y'>0$,曲线上升;

当 $-\pi<x<0$ 时,$y'<0$,曲线下降.

图形如图 2.93 所示.

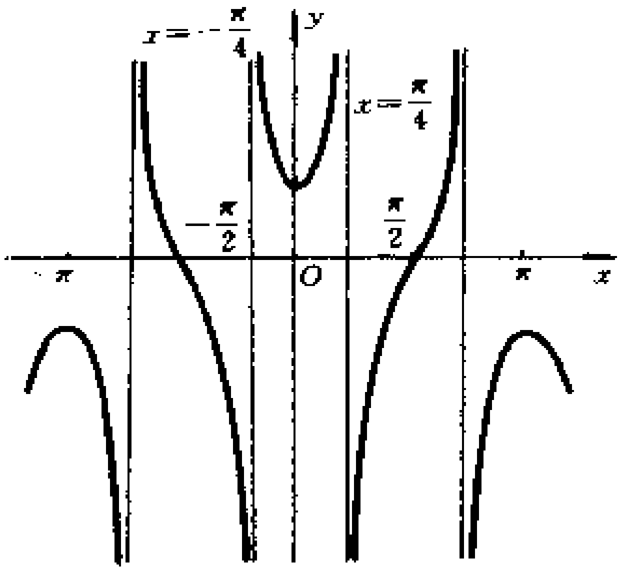


图 2.93

1505. $y=2x-\mathrm{tg}x$.

解 零点处：$x=0$ 及 $x\approx\pm 0.37\pi$.……

对称中心：$(k\pi,2k\pi)(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

渐近线：$x=\dfrac{2k+1}{2}\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

$y'=2-\sec^2 x$，令 $y'=0$ 得

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ 或 } x=-\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right).$$

经判别：当 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ 时，有极大值 $y=\dfrac{\pi}{2}-1+2k\pi$；

当 $x=-\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$ 时，有极小值 $y=-\left(\dfrac{\pi}{2}-1+2k\pi\right)(k=0,1,2,\cdots)$.

$y''=-2\sec^2 x\operatorname{tg}x$，令 $y''=0$ 得 $x=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

经判别此为拐点．图形如图 2.94 所示

（仅描绘从 $-\dfrac{3\pi}{2}$ 到 $\dfrac{3\pi}{2}$ 区间内的图形）.

1506. $y=e^{2x-x^2}$.

解 函数值始终为正的，故图形在 Ox 轴的上方．

$y=e^{-(x-1)^2+1}$，于是图形关于直线 $x=1$ 对称．

渐近线：$y=0$.

$y'=(2-2x)\cdot e^{2x-x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=1$，经判别知此时有极大值 $y=e$；

$y''=2(2x^2-4x+1)e^{2x-x^2}$，令 $y''=0$ 得 $x=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，经判别为拐点，$y=\sqrt{e}\approx 1.65$.

图形如图 2.95 所示，图中各点的位置：

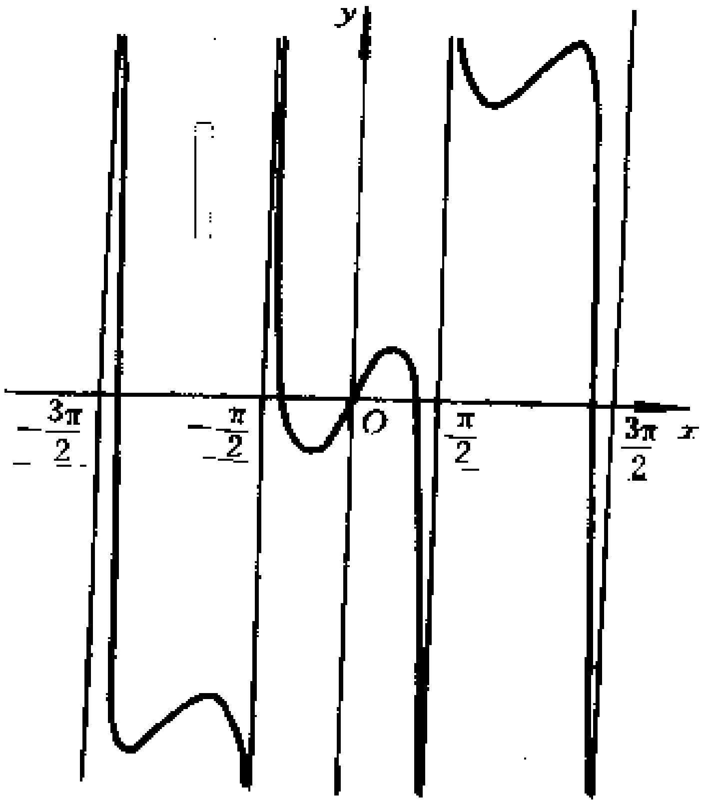


图 2.94

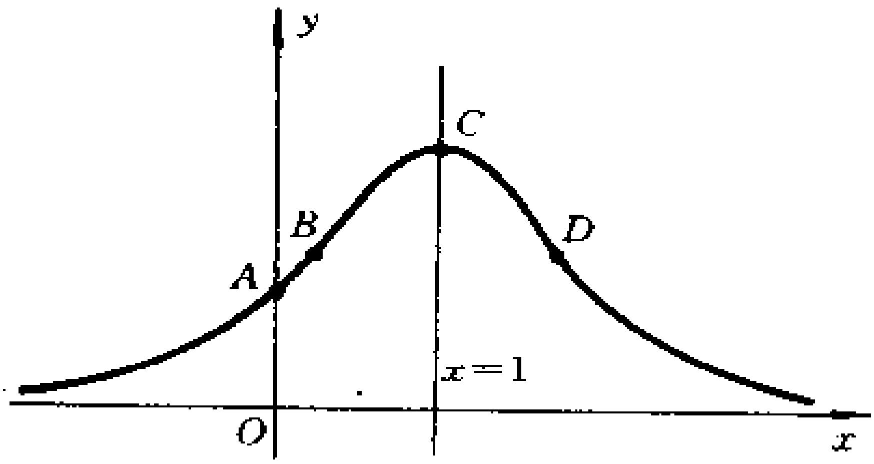


图 2.95

$$A(0,1),B\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right),C(1,e),$$

$D\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$.

1507. $y=(1+x^2)e^{-x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称，在 Ox 轴的上方．

渐近线：$y=0$.

$y'=-2x^3e^{-x^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=0$，经过 $x=0$ 点，导数 y' 从正变负，所以当 $x=0$ 时取极大值 $y=1$.

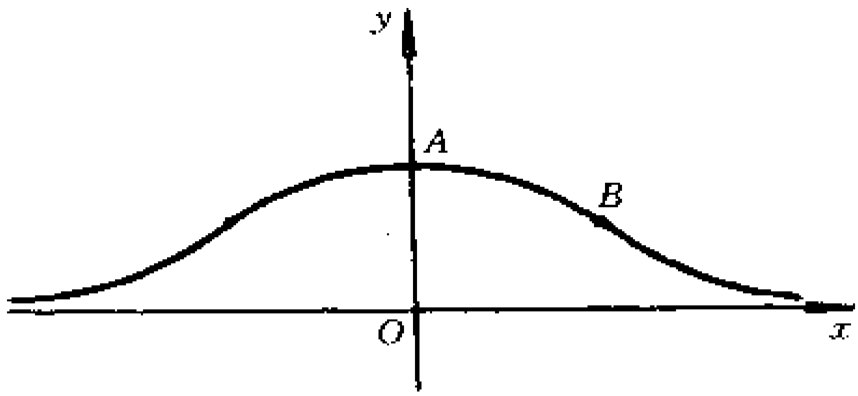


图 2.96

$y''=2x^2e^{-x^2}(2x^2-3)$，令 $y''=0$ 得 $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm 1.22$，

经判别为拐点，而 $y=\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}\approx 0.56$.

图形如图 2.96 所示，图中主要点的坐标：

$A(0,1)$，$B(1.22,0.56)$.

1508. $y=x+e^{-x}$.

解 $y'=1-e^{-x}$，令 $y'=0$ 得 $x=0$，$y=1$.

$y''=e^{-x}>0$，图形向上凹，故当 $x=0$ 时有极小值 $y=1$.

斜渐近线：$y=x$. 事实上，

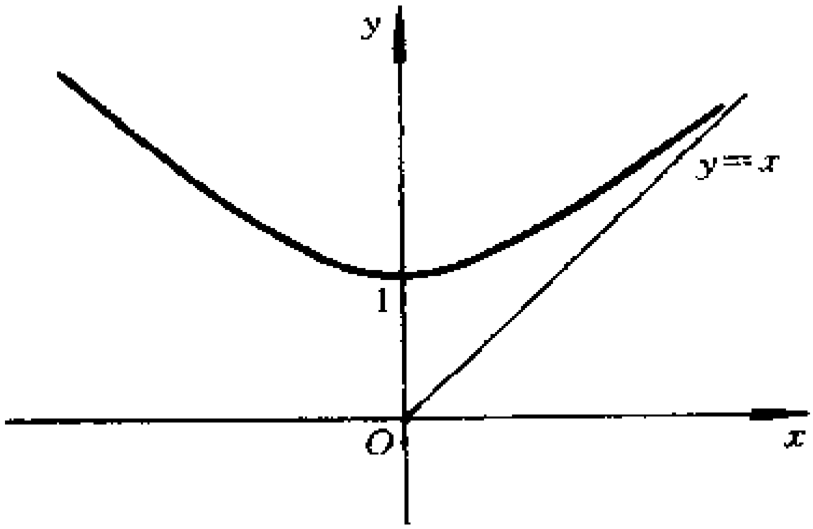


图 2.97

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1,b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=0.$$

图形如图 2.97 所示.

1509. $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

解 零点处：$x=0$.

渐近线：

$y=0$(当 $\to+\infty$ 时).

$y'=-x^{-\frac{1}{3}}e^{-x}\left(x-\frac{2}{3}\right)$,

令 $y'=0$ 得 $x=\frac{2}{3}$,当 $x=0$ 时,$y'=\infty$.

经判别：当 $x=0$ 有极小值 $y=0$,且(0,0)点为尖点.

当 $x=\frac{2}{3}$ 时有极大值 $y=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}}\approx0.39$.

由此可知函数值始终为正的,故图形在 Ox 轴上方.

$y''=\frac{1}{9}e^{-x}x^{-\frac{4}{3}}(9x^2-12x-2)$,令 $y''=0$,得

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{3} \approx -0.15, y_1 \approx 0.33,$$

$$x_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{3} \approx 1.48, y_2 \approx 0.30,$$

经判别均为拐点.

图形如图 2.98 所示,图中主要点的坐标:

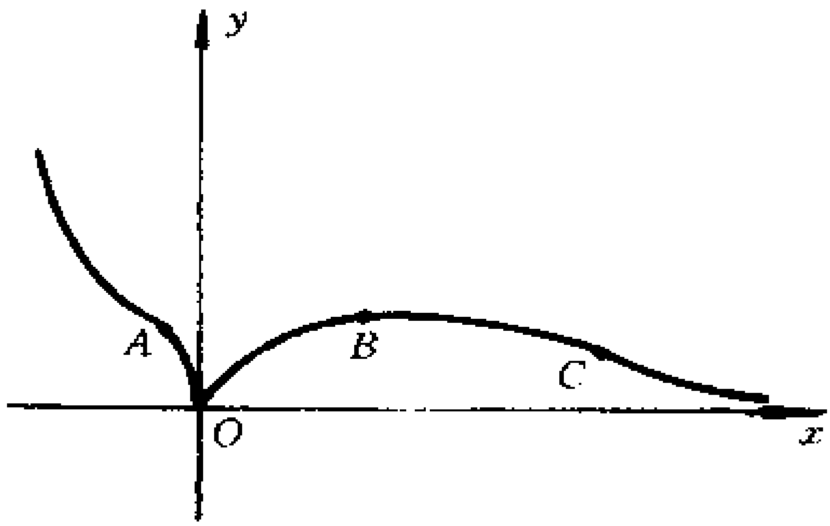


图 2.98

$A(-0.15, 0.34)$, $B(\frac{2}{3}, 0.39)$, $C(1.48, 0.30)$.

1510. $y = \frac{e^x}{1+x}$.

解 当 $x < -1$ 时,函数值为负的,

当 $x > -1$ 时,函数值为正的.

不连续点:$x = -1$. 垂直渐近线:$x = -1$.

又水平渐近线:$y = 0$(当 $x \to -\infty$ 时). 事实上,

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = 0, b = \lim_{x \to -\infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

经判别知此时有极小值 $y=1$.

$$y''=\frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3},$$

当 $x<-1$ 时，$y''<0$，故图形是凸的；

当 $x>-1$ 时，$y''>0$，故图形是凹的.

图形如图 2.99 所示.

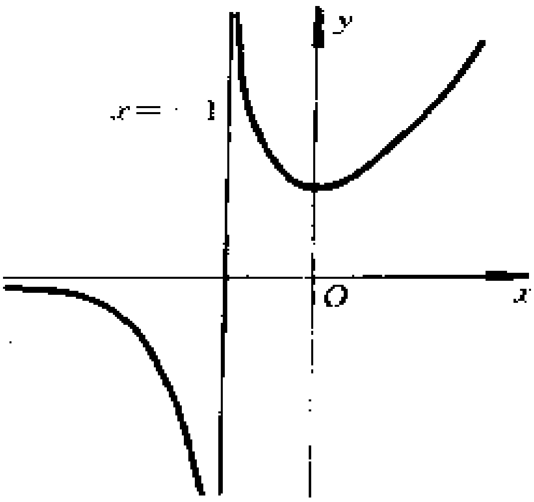


图 2.99

1511. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

零点处：$x=0$.

函数值不为负.

当 $x=0$ 时有最小值 $y=0$.

渐近线：$y=1$.

$$y'=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

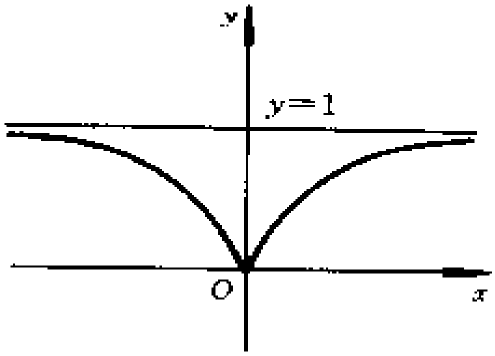


图 2.100

当 $x<0$，$y'<0$；当 $x>0$，$y'>0$.

$$y''=e^{-x^2}\frac{1-3x^2-e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

令 $g(t)=1-3t-e^{-t}+2te^{-t}(0\leqslant t<+\infty)$，易证 $g(t)\leqslant 0$. 于是，对于 $x\neq 0$，恒有 $y''<0$，即图形呈凸状. 而 $(0,0)$ 点为尖点（图 2.100）.

1512. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解 存在域：$x > 0$.

零点处：$x = 1$.

渐近线：$x = 0\ (x \to +0)$，$y = 0\ (x \to +\infty)$.

$y' = \dfrac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$，令 $y' = 0$ 得

$x = e^2 \approx 7.39$.

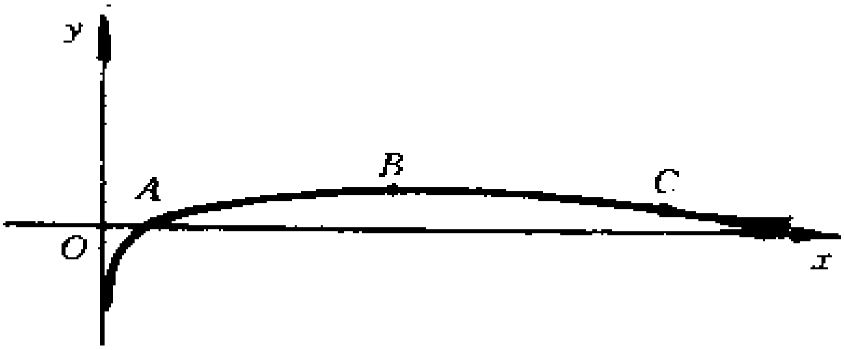


图 2.101

经判别知此时有极大值 $y = \dfrac{2}{e} \approx 0.74$.

$y'' = \dfrac{3\ln x - 8}{4x^{\frac{5}{2}}}$，令 $y'' = 0$ 得

$x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14.39$，

经判别此为拐点，此时 $y = \dfrac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.70$.

图形如图 2.101 所示．图中主要点的坐标：

$A(1,0)$，$B(7.39,0.74)$，$C(14.39,0.70)$.

1513. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解 由于 $\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$，

故图形关于坐标原点对称．

零点处：$x = 0$.

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$，故图形始终上升，无极值点．

$$y'' = \frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y''=0$，得 $x=0$，在此点切线斜率为 $k=1$.

经判别此为拐点，此时 $y=0$.

图形如图 2.102 所示.

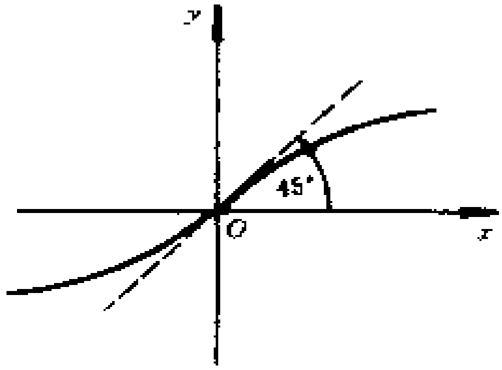


图 2.102

1514. $y=\sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

$$y' = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$y'' = \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

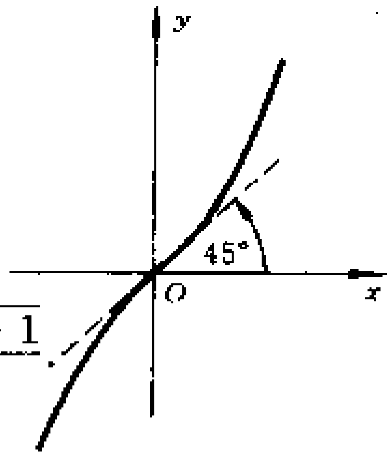


图 2.103

当 $x>0$ 时，$y''>0$，故图形是凹的.

当 $x<0$ 时，由对称性知图形是凸的.

于是得知 $O(0,0)$ 为拐点，在此点切线斜率为 $k=1$.

从而，函数图形始终上升，如图 2.103 所示.

1515. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

存在域：$|x|<1$.

渐近线：$x=\pm 1$.

$$y'=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}>0\ (|x|<1),$$

故图形始终上升.

$$y''=\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

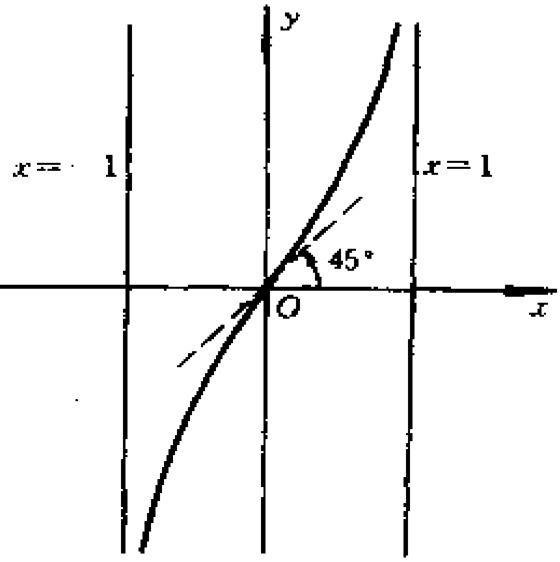


图 2.104

令 $y''=0$ 得 $x=0$.

当 $-1<x<0$ 时，$y''<0$，故图形是凸的，

当 $0<x<1$ 时，$y''>0$，故图形是凹的，$O(0,0)$ 为拐点处，在此点切线斜率为 $k=1$.

图形如图 2.104 所示.

1516. $y=x+\operatorname{arc\,tg}x$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处：$x=0$.

渐近线：$y=x-\frac{\pi}{2}$，$y=x+\frac{\pi}{2}$. 事实上，

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$，$b_1=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-kx)=-\frac{\pi}{2}$，$b_2=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-kx)=\frac{\pi}{2}$.

$$y'=1+\frac{1}{1+x^2}>0,$$

故图形始终上升，无极值点.

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

令 $y''=0$ 得 $x=0$，判别知为拐点，在此点切线斜率为 $k=2$.

图形如图 2.105 所示.

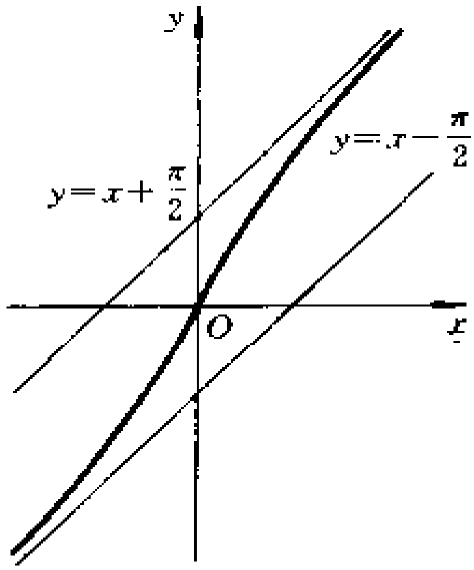


图 2.105

1517. $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,ctg}x$.

解 零点处：$x\approx -5.95$.

渐近线：$y=\frac{x}{2}+\pi$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,ctg}x}{x}=\frac{1}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{x}{2}+\operatorname{arc\,ctg}x\right)-\frac{1}{2}x\right]=\pi;$$

同法还可得渐近线 $y=\frac{x}{2}$（当 $x\to+\infty$ 时）.

$$y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x^2}，令 y'=0 得 x=\pm 1.$$

当 $x<-1$ 及当 $x>1$ 时，$y'>0$，曲线上升；

当 $-1<x<1$ 时，$y'<0$，曲线下降；

故当 $x=1$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\approx 1.285$，当 $x=-1$ 时有极大值 $y=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\approx 1.856$.

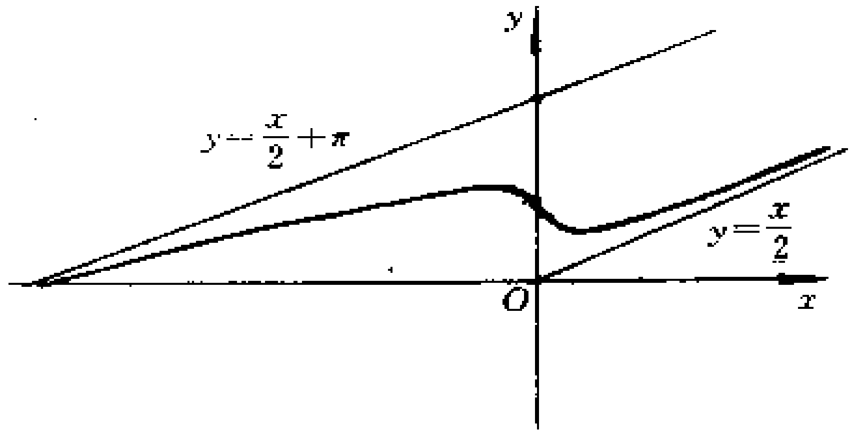


图 2.106

$$y''=\frac{2x}{(1+x^2)^2},\text{令 } y''-0 \text{ 得 } x=0.$$

当 $x<0$ 时,$y''<0$,故图形是凸的.

当 $x>0$ 时,$y''>0$,故图形是凹的.

从而有拐点 $x=0$,此时 $y=\frac{\pi}{2}$,$y'=-\frac{1}{2}$.

图形如图 2.106 所示.

1518. $y=x\operatorname{arctg}x$.

解 零点处:$x=0$.

图形关于 Oy 轴对称.

函数值不为负,故图形始终在 Ox 轴上方.

渐近线:

$$y=-\frac{\pi}{2}x-1\ (\text{当 } x\to-\infty \text{ 时});$$

$$y=\frac{\pi}{2}x-1\ (\text{当 } x\to-\infty \text{ 时}).$$

$$y'=\frac{x}{1+x^2}+\operatorname{arc\,tg}x,$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$.

当 $x<0$ 时,$y'<0$,图形下降;当 $x>0$ 时,$y'>0$,图

形上升，故当 $x=0$ 时，有极小值 $y=0$.

$y''=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}>0$，图形是凹的.

图形如图 2.107 所示.

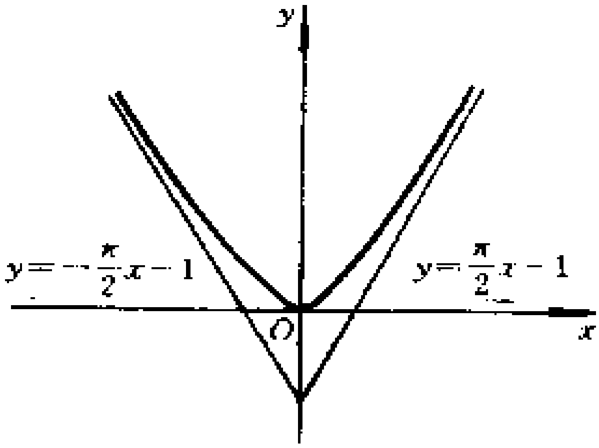


图 2.107

1519. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 零点处：$x=0$.

图形关于坐标原点对称.

渐近线：$y=0$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=0.$$

$$y'=\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}(|x|\neq 1).$$

当 $|x|<1$ 时，$y'>0$，图形上升，

当 $|x|>1$ 时，$y'<0$，图形下降，

当 $x=1$ 时，直接从定义出发，可得

$$y'_-(1)=1, y'_+(1)=-1,$$

故点 $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 为角点，且当 $x=1$ 时有最大值 $y=\dfrac{\pi}{2}$.

利用对称性可知点 $\left(-1,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也为角点，且当 $x=-1$ 时有最小值 $y=-\dfrac{\pi}{2}$；

$$y'_-(-1)=-1, y'_+(-1)=1.$$

当 $x=0$ 时，$y'=1$.

又点 $x=0$ 为拐点.

图形如图 2.108 所示.

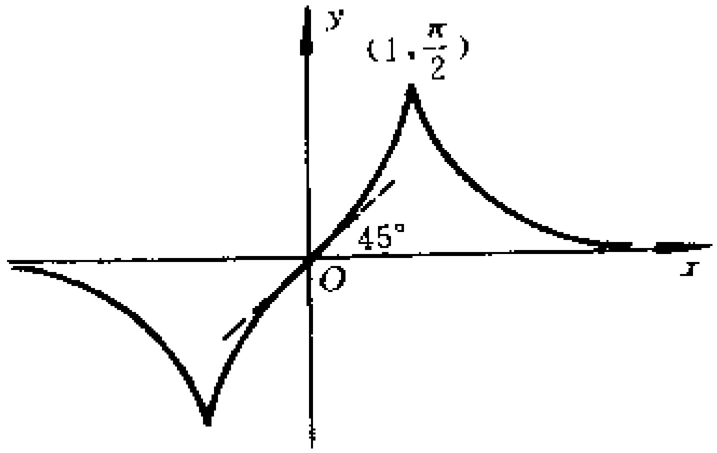


图 2.108

1520. $y=\arc\cos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 零点处：$x=0$.

图形关于 Oy 轴对称.

函数值不为负，故图形始终在 Ox 轴上方.

渐近线：$y=\pi$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\pi.$$

$y'=\dfrac{2}{1+x^2}>0\ (x>0)$，图形上升.

当 $x=0$ 时，直接从定义出发，得

$$y'_+(0)=2.$$

由对称性知，$y'_-(0)=-2$，且当 $x<0$ 时，图形下降，故当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$. 此点为角点．

$y''=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}<0\ (x>0)$，图形是凸的．

由对称性知，当 $x<0$ 时，图形也是凸的．

图形如图 2.109 所示．

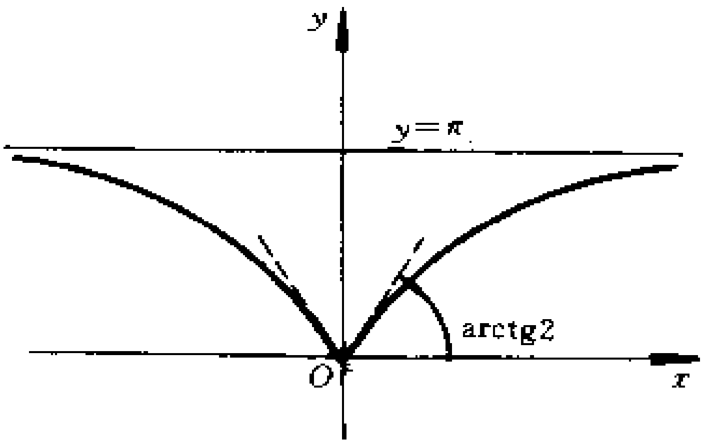


图 2.109

1521. $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

解 零点处：$x=-2$.

不连续点：$x=0$.

渐近线：$y=x+3$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[3+x+o\left(\frac{1}{x}\right)-x\right]=3.$$

$$y'=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 2$ 或 -1.

当 $0 < x < 2$ 时，$y' < 0$，图形下降，

当 $-1 < x < 0$ 时，$y' < 0$，图形下降，

当 $x < -1$ 及 $x > 2$ 时，$y' > 0$，图形上升；

故当 $x = -1$ 时有极大值 $y = \frac{1}{e} \approx 0.37$.

当 $x = 2$ 时有极小值 $y = 4\sqrt{e} \approx 6.59$.

$$y'' = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right).$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = -\frac{2}{5}$，

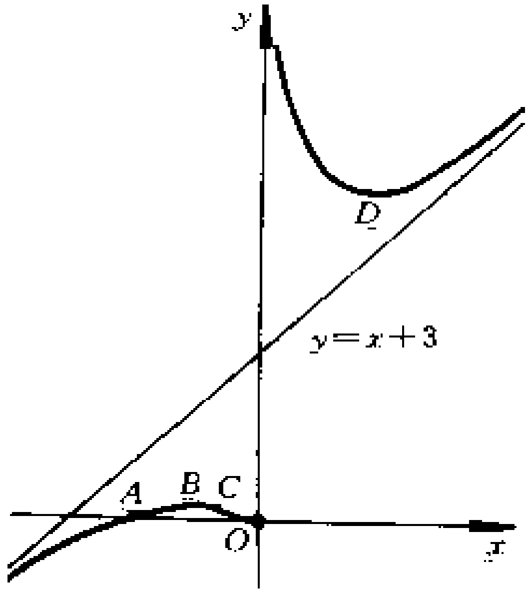


图 2.110

当 $x < -\frac{2}{5}$ 时，$y'' < 0$，图形是凸的，

当 $x > -\frac{2}{5}$ $(x \neq 0)$ 时，$y'' > 0$，图形是凹的，

故该点是拐点，此时 $y = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13$.

又 $\lim\limits_{x \to 0-} y = 0$，$\lim\limits_{x \to 0+} y = +\infty$.

图形如图 2.110 所示．图中各点的位置：

$A(-2,0)$，$B(-1,0.37)$，

$C(-0.40,0.13)$，$D(2,6.59)$.

1522. $y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

解　存在域：$|x| \geqslant 1$. 图形关于 Oy 轴对称．

渐近线：$y = 1$. 事实上，

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}] = 1.$$

当 $x = \pm 1$ 时有边界的极大值 $y = 2^{\sqrt{2}} \approx 2.67$.

$$y'_+(1) = -\infty,$$

$$y'_-(-1) = +\infty;$$

$$y'(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} \cdot \ln 2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right),$$

故当 $x < -1$ 时，$y' > 0$，曲线上升；

$x > 1$ 时，$y' < 0$，曲线下降．

$$y''(x) = (\ln 2)^2 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2$$

$$+ \ln 2 \cdot 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\right) > 0,$$ 故图形呈凹状．

图形如图 2.111 所示．

1523. $y = \ln \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$.

解　存在域：$x < 1$ 及 $x > 2$.

与坐标轴的交点：$(0, \ln 2)$ 及 $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

渐近线：$y = 0$；事实上，

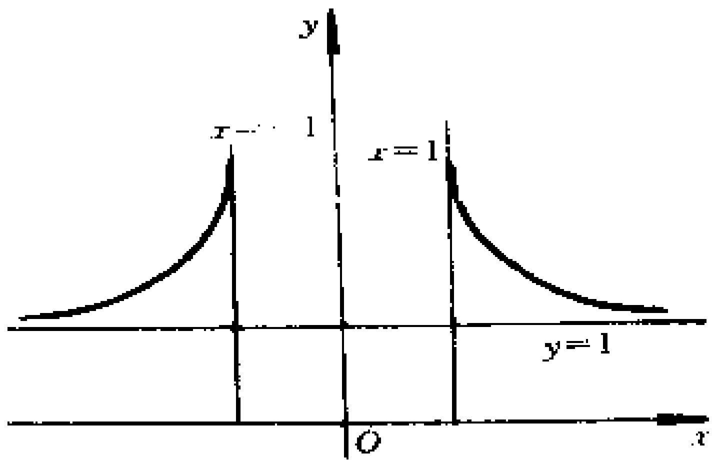


图 2.111

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}=0.$$

$y'=\dfrac{3x^2-2x-3}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$，令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}\approx-0.72$(另一根不在存在域内)，经判别知当 $x\approx-0.72$ 时有极大值 $y\approx1.12$.

$y''=\dfrac{-6x^5+15x^4-30x^2+30x-13}{(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1)^2}$，令 $y''=0$ 得 $x\approx-1.52$. 判别知为拐点，此时 $y\approx0.99$.

当 $x<-1.49$ 时，$y''>0$，图形是凹的.

当 $x>2$ 时，$y''<0$，图形是凸的.

当 $x\to1-0$ 及 $x\to2+0$ 时，$y\to-\infty$.

图形如图 2.112 所示.

图中主要点的坐标：$A(-1.52,0.99)$，$B(-0.72,1.12)$，$C(0,\ln2)$，$D\left(\dfrac{1}{3},0\right)$.

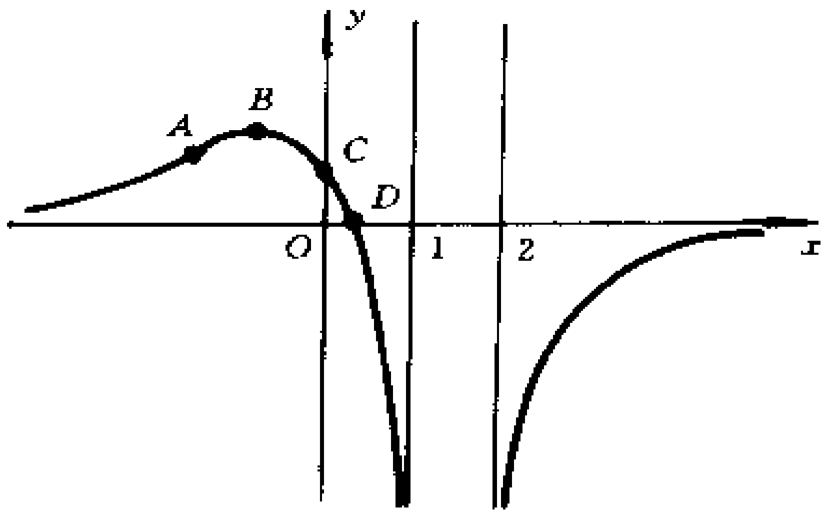


图 2.112

1524. $y = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0)$

解 存在域：$|x| \leqslant a$.

与坐标轴交点：$(0, -a)$ 及 $(0.67a, 0)$.

当 $x = -a$ 时有边界的极小值 $y = -\frac{\pi}{2}a$.

当 $x = a$ 时有边界的极大值 $y = \frac{\pi}{2}a$.

$y' = \frac{a + x}{\sqrt{a^2 - x^2}} > 0$(当 $|x| < a$ 时)，故图形单调上升．又

$y'_-(a) = +\infty, y'_+(-a) = 0.$

$y'' = \frac{a(a + x)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0(|x| < a),$

故图形是凹的．

图形如图 2.113 所示．

图中主要点的坐标：

$A\left(-a, -\frac{\pi}{2}a\right)$,

$B(0, -a)$,

$C(0.67a, 0)$,

$D\left(a, \frac{\pi}{2}a\right)$.

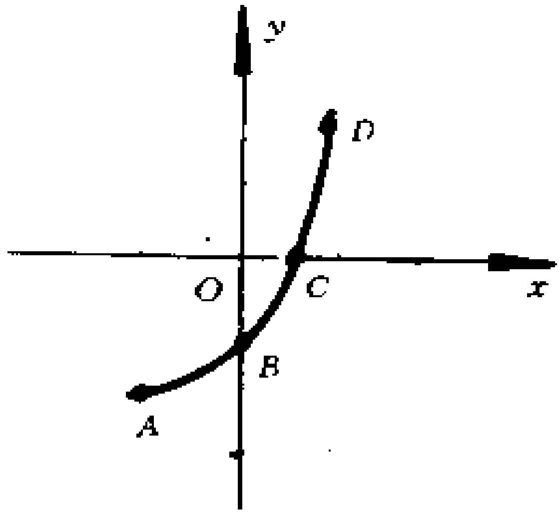


图 2.113

1525. $y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}$.

解 存在域：$\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| \leqslant 1$，两端平方之，解得

$x \leqslant 0$ 或 $x \geqslant \frac{2}{3}$.

渐近线：$y = \frac{\pi}{3}$. 事实上，

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\arccos \frac{1-x}{1-2x}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \arccos \frac{1-x}{1-2x} = \frac{\pi}{3}.$$

当 $x = 0$ 时有边界的极小值 $y = 0$，

当 $x = \frac{2}{3}$ 时有边界的极大值 $y = \pi$.

$$y' = -\frac{\operatorname{sgn}(1-2x)}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}},$$

$$y''=\begin{cases}\dfrac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}\cdot(1-2x)^2}\cdot(9x-12x^2-1), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时}; \\ \dfrac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}\cdot(1-2x)^2}(12x^2-9x+1), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } x\geqslant \dfrac{2}{3} \text{ 时}.\end{cases}$$

当 $x\leqslant 0$ 时，$y''<0$，图形是凸的；

当 $x\geqslant\dfrac{2}{3}$ 时，$y''>0$，图形是凹的．

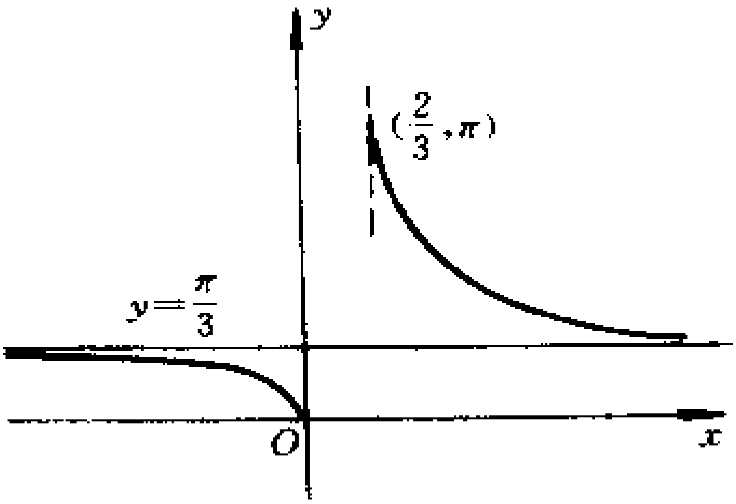


图 2.114

又当 $x<0$ 时，$y'<0$，图形下降；

当 $x>\dfrac{2}{3}$ 时，$y'<0$，图形也下降；

$y'_-(0)=-\infty$，$y'_+\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\infty$.

图形如图 2.114 所示．

1526. $y=x^x$.

解 一般只讨论 $x>0$. 函数值始终为正的，故图形在

Ox 轴的上方.

$y' = x^x(1+\ln x)$.

令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1}{e}\approx 0.368$. 经判别知此时有极小值

$$y=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\approx 0.692.$$

$y''=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]>0$,图形是凹的.

当 $x=+0$ 时有边界值 $y=1$(利用洛比塔法则求得).

图形如图 2.115 所示.

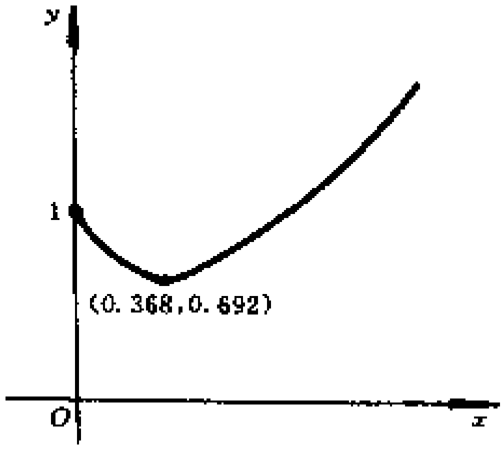


图 2.115

1527. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

解 一般只讨论 $x>0$.

渐近线:$y=1$. 事实上,

$$k=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}-1}=0,\ b=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1.$$

当 $x=+0$ 时有边界的最小值 $y=0$.

$y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. 令 $y'=0$ 得 $x=e$.

当 $x<e$ 时,$y'>0$,图形上升,

当 $x>e$ 时,$y'<0$,图形下降.

当 $x=e$ 时有极大值 $y=e^{\frac{1}{e}}\approx 1.445$.

$y''=x^{\frac{1}{x}-4}(1-2\ln x+\ln^2 x-3x+2x\ln x)$，令 $y''=0$ 得 $x\approx e^{1.47}(\approx 4.35)$.

当 $0<x<e^{1.47}$ 时，$y''<0$，图形是凸的.

当 $x>e^{1.47}$ 时，$y''>0$，图形是凹的，故 $x=e^{1.47}$ 是拐点，$y\approx 1.402$.

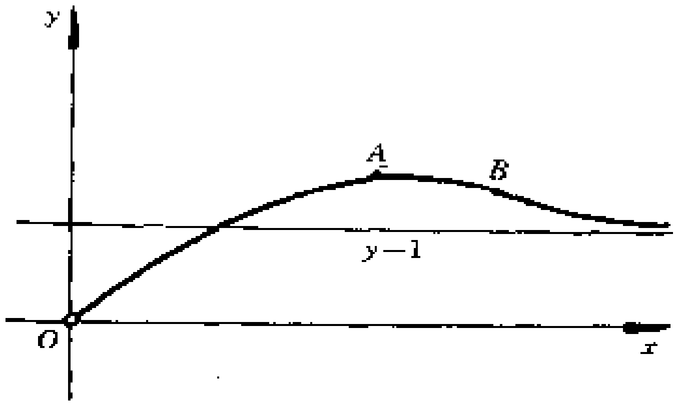


图 2.116

图形如图 2.116 所示. 图中各点位置：

$A(e,1.445)$，$B(4.35,1.402)$.

1528. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 存在域：$x>-1$，$x\neq 0$，函数值为正的，故图形在 Ox 轴上方.

$$y'=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[\frac{x}{1+x}\quad \ln(1+x)\right],$$

易证 $\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)<0$，故 $y'<0$，从而图形下降.

渐近线：$x=-1$ 和 $y=1$.

图形是凹的. $x=0$ 为可移去不连续点.

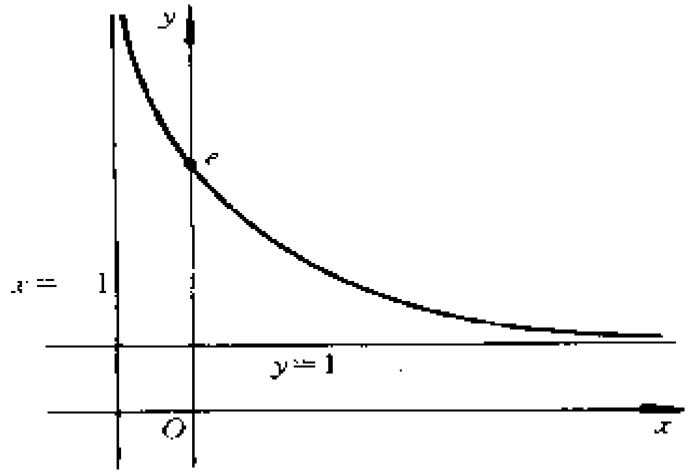


图 2.117

图形如图 2.117 所示.

1529. $y = x\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $(x>0)$.

解 $y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x + x\left(1+\frac{1}{x}\right)\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right.$

$\left. - \frac{1}{x+1}\right] > 0,$

易证 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0 (x>0)$,故 $y'>0$,从而图形上升.

当 $x \to +0$ 时,有边界的最小值 $y=0$.

渐近线:$y = e\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 事实上,

$k = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-e}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]}{-\frac{1}{x^{2}}}$$

$$=-e\lim_{x\to+\infty}x^{2}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^{2}}+O\left(\frac{1}{x^{2}}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=-\frac{e}{2}.$$

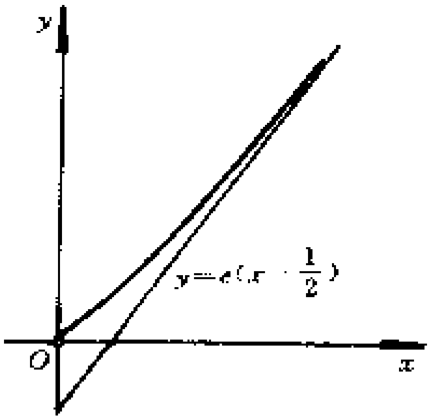


图 2.118

图形如图 2.118 所示.

1530. $y=\frac{e^{\frac{1}{1-x^{2}}}}{1+x^{2}}$(不研究凸凹性).

解 函数值始终为正的,故图形在Ox轴的上方.图形关于Oy轴对称.

不连续点:$x=1$及$x=-1$.

$$y'=\frac{2x^{3}e^{\frac{1}{1-x^{2}}}(3-x^{2})}{(1-x^{2})^{2}(1+x^{2})^{2}},$$

令$y'=0$得$x=0$或$x=\pm\sqrt{3}$.

经判别:

当$x=0$时有极小值$y=e$;

当$x=-\sqrt{3}$时有极大值$y=\frac{1}{4\sqrt{e}}\approx0.15$;

当 $x=\sqrt{3}$ 时有极大值 $y=\frac{1}{4\sqrt{e}}\approx 0.15$.

渐近线：$y=0$；$x=-1$ 及 $x=1$；

图形如图 2.119 所示．图中主要点的坐标：

$A(0,e)$，$B(\sqrt{3},0.15)$，$C(-\sqrt{3},0.15)$.

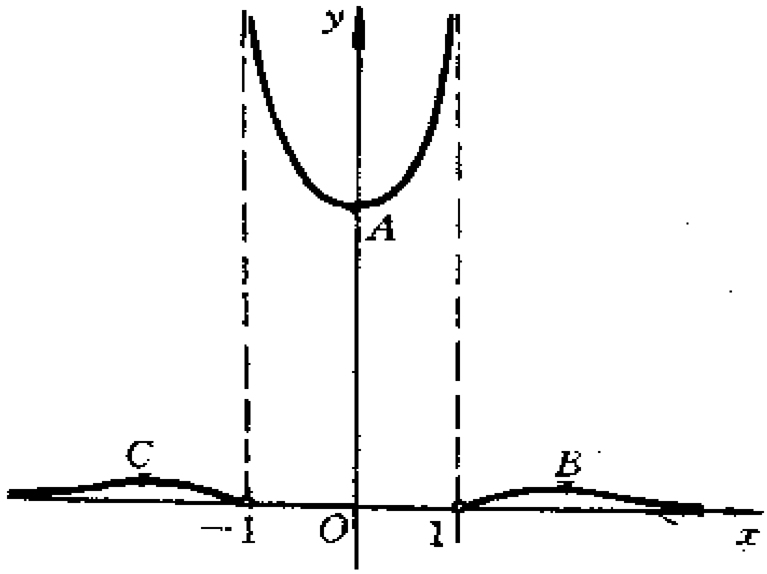


图 2.119

作出下列参数方程所表示的曲线：

1531. $x=\frac{(t+1)^2}{4}$，$y=\frac{(t-1)^2}{4}$.

解 先把此参数方程化成直角坐标系下的方程．

$$\sqrt{x}=\frac{|t+1|}{2},\sqrt{y}=\frac{|t-1|}{2}.$$

当 $t\geqslant 1$ 时，$\sqrt{x}=\frac{t+1}{2}$，$\sqrt{y}=\frac{t-1}{2}$. 相减得

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=1(x\geqslant 1,x>y);\qquad (1)$$

当 $t \leqslant -1$ 时，$\sqrt{x} = \frac{-t-1}{2}$，$\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$. 因而

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 (y \geqslant 1, y > x); \tag{2}$$

当 $-1 \leqslant t \leqslant 1$ 时，$\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}$，$\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$，相加得

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 (0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1). \tag{3}$$

由方程(1)，(2)及(3)即得所给曲线的图形. 图形关于 $y = x$ 对称，如图 2.120 所示.

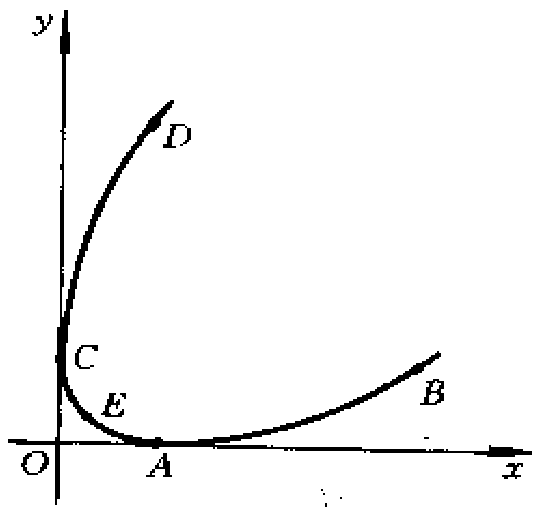


图 2.120

图中主要点的坐标：$A(1,0)$，$B(4,1)$，$C(0,1)$，$D(1,4)$，$E\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

1532. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$.

解 $x'_t = 2(1-t)$，$y'_t = 3(1-t^2)$. 令 $x'_t = 0$，$y'_t = 0$，得 $t = \pm 1$.

作下表：

t 的区间	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 -3	由 $+\infty$ 下降到 -2
$(-1,1)$	+	+	由 -3 上升到 1	由 -2 上升到 2
$(1,+\infty)$	−	−	由 1 下降到 $-\infty$	由 2 下降到 $-\infty$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\frac{3}{2}(1+t)\quad(t\neq 1).\text{ 令}\frac{dy}{dx}=0\text{ 得}$$

$t=-1$，此时 $x=-3$，$y=-2$.

由于 $t=1\pm\sqrt{1-x}$，故存在域为 $x\leqslant 1$，且图形有两支，又因 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1-t)}$，故当 $t>1$ 时图形呈凸状，而当 $t<1$ 时图形呈凹状.

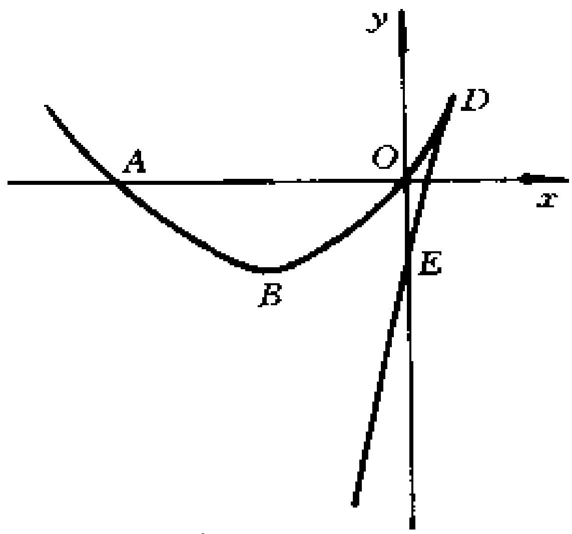


图 2.121

当 $x=0$ 时，$t=0$ 或 $t=2$，此时 $y=0$ 或 $y=-2$.

当 $y=0$ 时，$t=0$，$+\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$，此时 $x=0$，0.464 或 -6.464.

图形如图 2.121 所示. 图中主要点的坐标:

$A(-6.464,0),B(-3,-2),D(1,2),E(0,-2).$

1533. $x=\frac{t^2}{t-1},y=\frac{t}{t^2-1}.$

解 $x_t'=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2},y_t'=-\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}$. 考虑 $x_t'=0$, $y_t'=0$ 及 x_t', y_t' 趋于 ∞ 的 t 值: $t=0,\pm 1$ 及 2.

作下表:

t 的范围	x_t'	y_t'	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{1}{2}$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1,0)$	+	−	由 $-\frac{1}{2}$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0,1)$	−	−	由 0 下降到 $-\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(1,2)$	−	−	由 $+\infty$ 下降到 4	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{2}{3}$
$(2,+\infty)$	+	−	由 4 上升到 $+\infty$	由 $\frac{2}{3}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+t^2}{t(t-2)(t+1)^2},$$

当 $x\in(-\infty,0)$ 及 $(4,+\infty)$ 时, $\frac{dy}{dx}<0$, 因而曲线下降.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(t-1)^3(t^4+3t^2+4t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^4}$，令$\frac{d^2y}{dx^2}=0$得$t\approx-0.33$，经判别此时对应于拐点$(-0.08, 0.30)$.

令$\frac{dx}{dy}=0$得$t=0,2$及-1，其中当$t=0$及2时有垂直切线，切点为$(0,0)$及$\left(4,\frac{2}{3}\right)$. 当$t=-1$时，$x=-\frac{1}{2}$，此为垂直渐近线. 事实上，

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} y = \lim_{t\to-1}\frac{t}{t^2-1} = \infty.$$

斜渐近线为$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to1}\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-\frac{x}{2}\right)=-\lim_{t\to1}\frac{t(t+2)}{2(t+1)}=-\frac{3}{4}.$$

又当$x\to+\infty$，即当$t\to1+0$时，$y\to+\infty$或当$t\to+\infty$时，$y\to0$；

又当$x\to-\infty$时，即当$t\to-\infty$时，$y\to0$或当$t\to1-0$时，$y\to-\infty$.

总之，$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$或0，$\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$或$-\infty$. 图形如图2.122所示. 图中主要点的坐标：

$A\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$，$B\left(4,\frac{2}{3}\right)$.

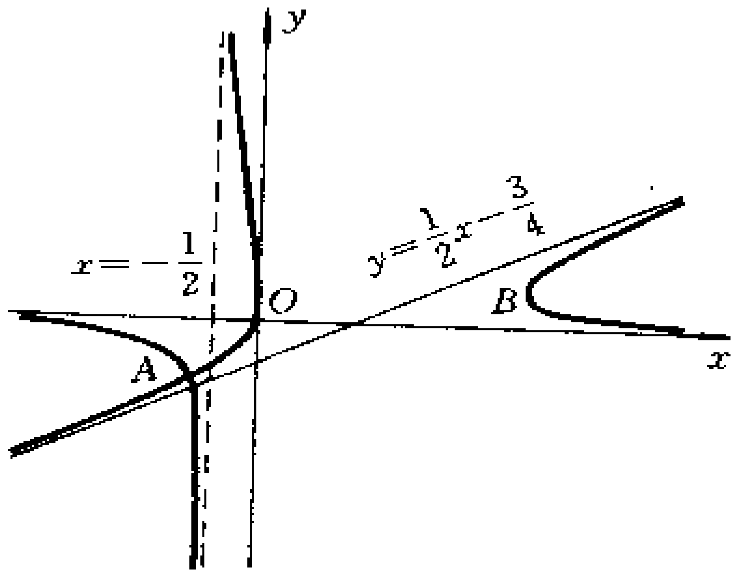


图 2.122

1534. $x=\frac{t^2}{1-t^2}, y=\frac{1}{1+t^2}$.

解 由于以 $-t$ 换 t,x 及 y 值不变,故只须考虑 t 的正值. 又因 $t^2=\frac{x}{1+x}$,故 $x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -1$.

$$x'_t=\frac{2t}{(1-t^2)^2}, y'_t=\frac{-2t}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2<0,\text{曲线下降}.$$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}$,当 $|t|<1$ 时图形呈凹状,当 $|t|>1$ 时图形呈凸状.

考虑 $x'_t=0, y'_t=0$ 及 x'_t,y'_t 趋于 ∞ 的 t 值:

$t=0, t=1$.

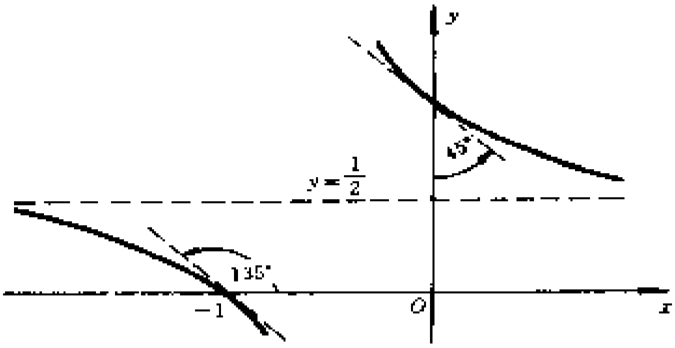


图 2.123

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(0,1)$	+	−	由 0 上升到 $+\infty$	由 1 下降到 $\frac{1}{2}$
$(1,+\infty)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 -1	由 $\frac{1}{2}$ 下降到 0

渐近线为 $y=\frac{1}{2}$. 事实上

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to+1}\frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to\pm1}\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{2}.$$

在点$(-1,0)$处$(t=+\infty)$，$\frac{dy}{dx}=-1$；而在点$(0,1)$处$(t=0)$仍有$\frac{dy}{dx}=-1$. 这说明在这两点处的切线均与 Ox 轴成 135° 的角. 这两点且为边界极值点.

图形如图 2.123 所示.

1535. $x=t+e^{-t}, y=2t+e^{-2t}$.

解 $x'_t=\dfrac{e^t-1}{e^t}$,

$$y'_t=\frac{2(e^{2t}-1)}{e^{2t}},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(e^t+1)}{e^t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2}{e^t-1}.$$

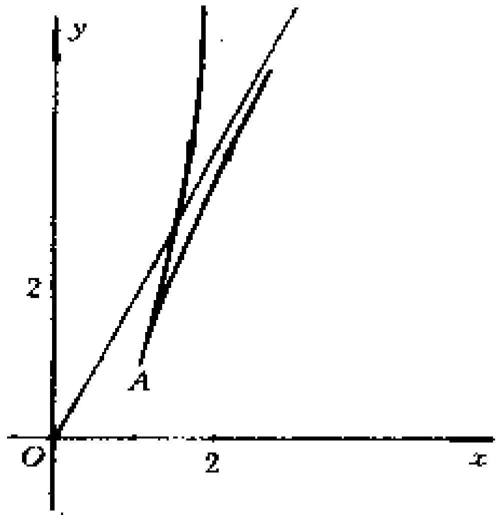


图 2.124

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图　　形
$(-\infty,0)$	$-$	$-$	由 $+\infty$ 下降到 1	由 $+\infty$ 下降到 1	$+$	$+$	上升，凹状
$(0,+\infty)$	$+$	$+$	由 1 上升到 $+\infty$	由 1 上升到 $+\infty$	$+$	$-$	上升，凸状

渐近线：$y=2x$，事实上，有

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2t+e^{-2t}}{t+e^{-t}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{t\to+\infty}[(2t+e^{-2t})-2t-2e^{-t}]=0.$$

当 $t=0$ 时，对应于曲线上的点 $A(1,1)$，此点的导数 $\frac{dy}{dx}=4$. 当 $t=-\ln2$ 时，曲线与渐近线相交．图形如图 2.124 所示．

1536. $x=a\cos2t, y=a\cos3t\ (a>0)$.

解　由于 $a\cos 2(t+2\pi)=a\cos 2t$ 及 $a\cos 3(t+2\pi)=a\cos 3t$. 因此，我们只须考虑 t 在 $(0,2\pi)$ 内变化时，x 及 y 的变化情况.

$$x'_t=-2a\sin 2t,$$

$$y'_t=-3a\sin 3t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\sin 3t}{2\sin 2t}.$$

考虑 $x'_t=0, y'_t=0$ 的值：

$$t=0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},$$

$\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}$ 及 2π.

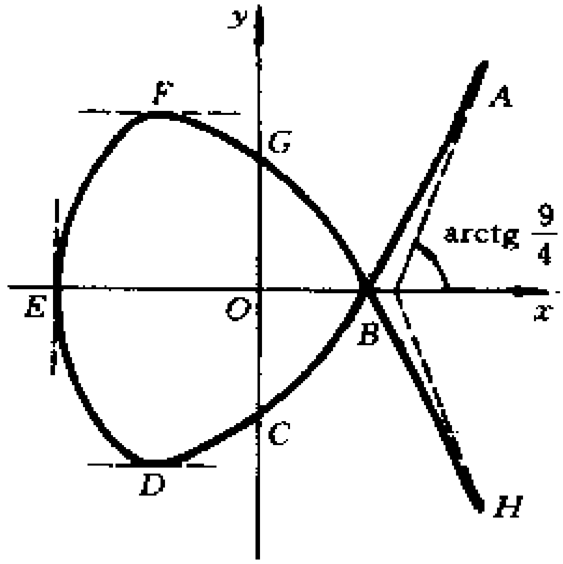


图 2.125

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$	$-$	$-$	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 a 下降到 $-a$	$+$	上升
$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$	$-$	$+$	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 $-a$ 上升到 0	$-$	下降
$\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$	$+$	$+$	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 上升到 a	$+$	上升
$\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$	$+$	$-$	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 0 下降到 $-a$	$-$	下降
$\left(\pi,\frac{4\pi}{3}\right)$	$-$	$+$	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 $-a$ 上升到 a	$-$	下降

（续表）

t 的范围	x_t'	y_t'	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$	$-$	$-$	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 a 下降到 0	$+$	上升
$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right)$	$+$	$-$	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 下降到 $-a$	$-$	下降
$\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$	$+$	$+$	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 $-a$ 上升到 a	$+$	上升

当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx}=0$，此时 $x=-\frac{a}{2}$，$y=-a$；

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=\infty$（t 从小于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=-\infty$；从大于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx}=+\infty$），此时 $x=-a$，$y=0$；

当 $t=\frac{2\pi}{3}$ 时，$\frac{dy}{dx}=0$，此时 $x=-\frac{a}{2}$，$y=a$；

当 $t=\pi$ 时，利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{9}{4}$，此时 $x=a$，$y=-a$；

当 $t=0$ 时，利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx}=\frac{9}{4}$，此时 $x=y=a$.

图形如图 2.125 所示．图中主要点的坐标：

$$A(a,a),B\left(\frac{a}{2},0\right),C\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

$$D\left(-\frac{a}{2},-a\right),E(-a,0),F\left(-\frac{a}{2},a\right),$$

$G\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $H(a, \quad a)$.

1537. $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$.

解 $\sqrt{x} = \cos^2 t$, $\sqrt{y} = \sin^2 t$，相加即得 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. 图形如图 2.126 所示*).

*）参看 1531 题.

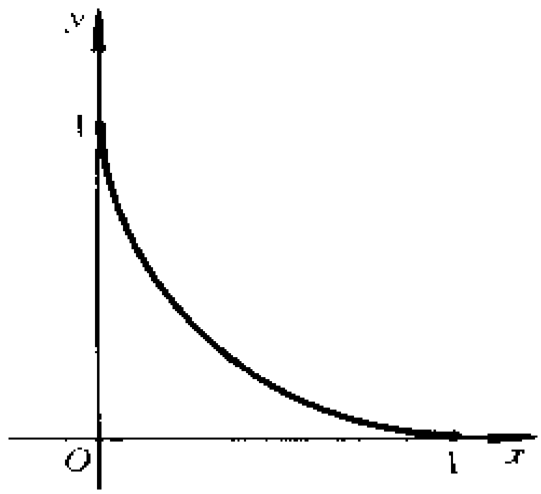


图 2.126

1538. $x = t\ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$.

解 当 $t > 0$ 时，x 及 y 才有意义.

当 $0 < t \leqslant 1$ 时，令 $t' = \frac{1}{t}$，则 $t' \geqslant 1$，且 $x = -\frac{\ln t'}{t'}$，$y = -t'\ln t'$，所以，图形关于直线 $x + y = 0$ 对称.

以下讨论图形的极值点，凹凸性及拐点，不妨设 $t \geqslant 1$：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ln^2 t - 4}{t^3(1+\ln t)^3}.$$

令 $1 - \ln t = 0$，得 $t = e$. 经判别此时图形有极大值点：$A\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

令 $\ln^2 t - 2 = 0$，得 $t = e^{\sqrt{2}}$，相应的点

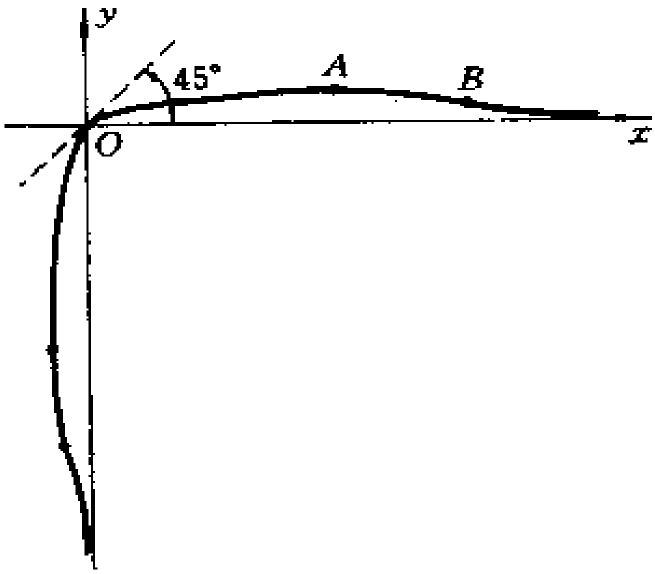


图 2.127

$B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$为图形的拐点.

当$1\leqslant t\leqslant e^{\sqrt{2}}$,即当$0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$时,图形呈凸状.当$t\geqslant e^{\sqrt{2}}$,即当$x\geqslant\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$时,图形呈凹状.

作下表:

t的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$-$	$+$	由0下降到$-\frac{1}{e}$	由$-\infty$上升到$-e$	$-$	下降
$\left(\frac{1}{e},e\right)$	$+$	$+$	由$-\frac{1}{e}$上升到e	由$-e$上升到$\frac{1}{e}$	$+$	上升
$(e,+\infty)$	$+$	$-$	由e上升到$+\infty$	由$\frac{1}{e}$下降到0	$-$	下降

曲线通过点(0,0)，在此点切线的倾角为45°.

水平渐近线为 $y=0$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}}{1}=0.$$

垂直渐近线为 $x=0$. 事实上，

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{t\to+0}y=\lim_{t\to+0}\frac{\ln t}{t}=-\infty.$$

图形如图 2.127 所示.

1539. $x=\frac{a}{\cos^3 t}, y=a\operatorname{tg}^3 t\,(a>0)$.

解 将此参数方程化为直角坐标系下的方程：

$$x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

显然，$|x|\geqslant a$. 且图形对于两坐标轴都对称，故只须考虑在第一象限部分的函数图形. 由于

$$y'=x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}, y''=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(y^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right).$$

而当 $x>0, y>0$ 时，有 $x>y$. 从而有

$$y'>0, y''>0,$$

故图形上升且呈凹状.

在$(a,0)$点的切线的倾角为0°. 图形如图 2.128 所示.

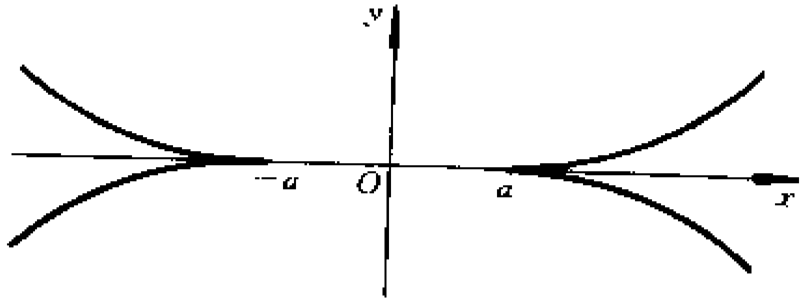


图 2.128

1540. $x=a(\operatorname{sh}t-t),y=a(\operatorname{ch}t-1)\ (a>0)$.

解 当 t 用 $-t$ 换时,x 的大小不变符号相反,而 y 却不变,故图形对于 Oy 轴对称.

$$x'_t=a(\operatorname{ch}t-1),\ y'_t=a\operatorname{sh}t,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t+1}{e^t-1},\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4e^{2t}}{a(e^t-1)^4}.$$

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图形
$(-\infty,0)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0	−	−	下降
$(0,+\infty)$	+	+	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 上升到 $+\infty$	+	−	上升

当 $t\to-0$ 时,$x\to-0,\frac{dy}{dx}\to-\infty$;

当 $t\to+0$ 时,$x\to+0,\frac{dy}{dx}\to+\infty$. 因此在(0,0)点的切

线垂直于 Ox 轴.

图形如图 2.129 所示.

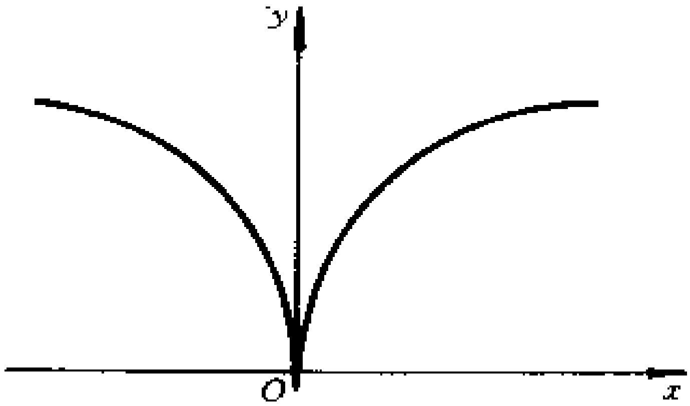


图 2.129

把下列曲线方程变成参数式,然后作出这些曲线:

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0 (a > 0)$.

解 设 $y = tx$,代入方程,并消去 x^2,即得

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$x'_t = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2}, y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

考虑 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于无穷的 t 值:

$$t = -1, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ 及 } \sqrt[3]{2}.$$

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1,0)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	+	+	由 0 上升到 $\sqrt[3]{4a}$	由 0 上升到 $\sqrt[3]{2a}$
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\sqrt[3]{2}\right)$	−	+	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 $\sqrt[3]{2a}$	由 $\sqrt[3]{2a}$ 上升到 $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2},+\infty)$	−	−	由 $\sqrt[3]{2a}$ 下降到 0	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)},$$

当 $t=0$ 时，$x=0,y=0,\frac{dy}{dx}=0$；当 $t\to+\infty$ 时，

$x=0,y=0,\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t(2-t^3)}{2(\frac{1}{2}-t^3)}=\infty$. 这说明，

坐标原点是曲线的二重点．曲线的一支与 Ox 轴相切，一支与 Oy 轴相切．

渐近线：$x+y+a=0$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2+3at}{1+t^3}=\lim_{t\to-1}\frac{6at+3a}{3t^2}$$

$$=-a.$$

图形如图 2.130 所示．图中主要点的坐标：

$A\left(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}\right)$,

$B\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$,

$C\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}\right)$.

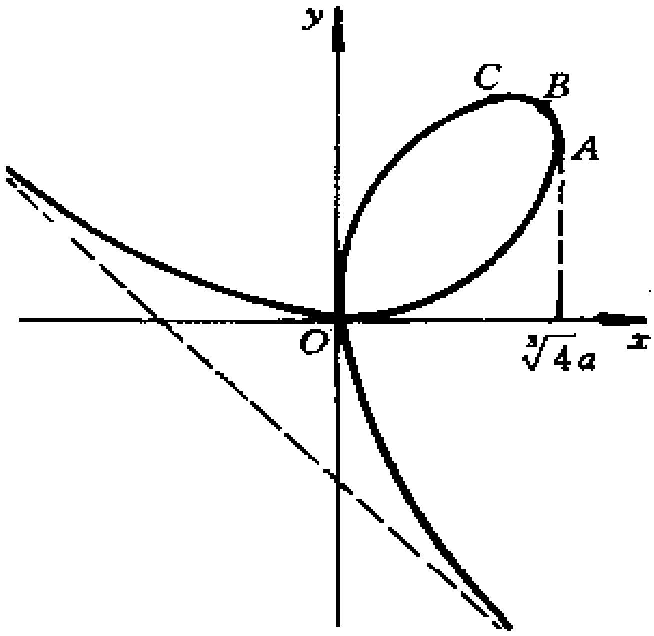


图 2.130

1542. $x^2+y^2=x^4+y^4$.

解 显见曲线关于两坐标轴对称，同时关于直线 $y=x$ 对称.

设 $x=ty$，则当 $y\neq 0$ 时，得

$$y=\pm\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}.$$

根据对称性，不妨限于考察方程

$$\begin{cases} x=t\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}}, \\ y=\sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^4+1}}. \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

由于 $0\leqslant x\leqslant 1, x\leqslant y$，故曲线界于纵轴正半轴与直线 $y=x$ 之间，由此根据对称性即可作出全部图形．当 t 由0连续变到1时，曲线上的点(0,1)连续变化到点

(1,1). 由于

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}+\sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}}\cdot\frac{t^2(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}}\cdot\frac{t(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2}.$$

令$\frac{dy}{dx}=0$,得$t=0,\sqrt{\sqrt{2}-1}$.相应地,有$x=0$,

$y=1$; $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.71$, $y\approx 1.10$.

经判别知,当$x=0$时y取得极小值;当$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$时,y取得极大值. 类似地,当$y=0$时,x取得极小值$x=1$;当$y=\frac{1}{\sqrt{2}}$时,x取得极大值$x\approx 1.10$.

由对称性即得知:当$x=0$时,有极小值$|y|=1$;当$|x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$时,有极大值$|y|\approx 1.10$;当$y=0$时有极小值$|x|=1$;当$|y|=\frac{1}{\sqrt{2}}$时,有极大值$|x|\approx 1.10$.

值得注意的是,当$t=1$时即在点(1,1)处,$\frac{dy}{dx}=-1$,因而曲线在点(1,1)光滑联接.

原点(0,0)是一个孤立点,再计算几点的坐标($0\leqslant t\leqslant 1$):

t	0	0.2	0.4	0.6	$\sqrt{\sqrt{2}-1}$	0.8	0.9	1
x	0	0.20	0.42	0.65	0.71	0.86	0.94	1
y	1	1.02	1.06	1.09	1.10	1.08	1.04	1

曲线与两坐标轴的交点为$(-1,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$及$(0,-1)$，如图2.131所示.

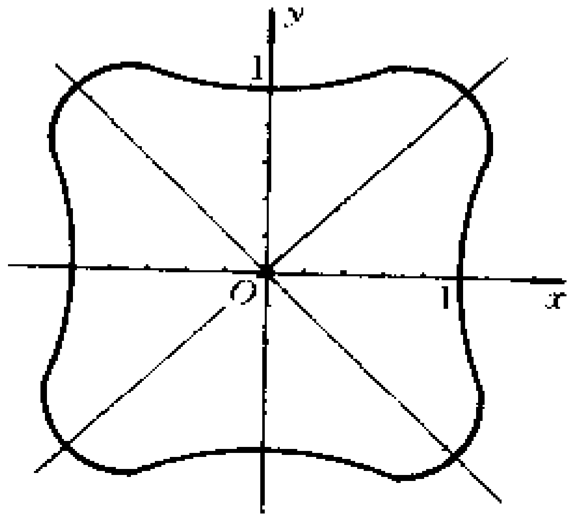


图 2.131

1543. $x^2y^2=x^3-y^3$.

解 设$y=tx$，代入原方程，即得

$$x=\frac{1-t^3}{t^2},$$

$$y=\frac{1-t^3}{t}\ (t\neq 0).$$

$$x'_t=-\frac{2+t^3}{t^3},\ y'_t=-\frac{1+2t^3}{t^2}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(1+2t^3)}{2+t^3}.$$

令$x'_t=0$，$y'_t=0$及x'_t，y'_t趋于∞，得

$$t=-\sqrt[3]{2},\ -\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ 0.$$

作下表：

t的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(-\infty,-\sqrt[3]{2})$	$-$	$+$	由$+\infty$下降到$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由$-\infty$上升到$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$-$	下降
$\left(-\sqrt[3]{2},-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$+$	$+$	由$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$上升到$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$上升到$-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	$+$	上升
$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)$	$+$	$-$	由$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$上升到$+\infty$	由$-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$下降到$-\infty$	$-$	下降
$(0,+\infty)$	$-$	$-$	由$+\infty$下降到$-\infty$	由$+\infty$下降到$-\infty$	$+$	上升

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\sqrt[3]{2}}=\infty,\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=0,$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=1.$$

图形通过点 $A\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}},-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)$，$B\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}},-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$，及 $O(0,0)$. 如图 2.132 所示.

1544. $x^y=y^x(x>0,y>0)$.

解 由方程显见直线 $y=x$ 是图形的一部分. 对于 $y\neq x$ 的部分,图形显然关于直线 $y=x$ 对称.

设 $x=(1+t)^{\frac{1}{t}}$,则 $y=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}$,即当 $x\neq y$ 时,曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=(1+t)^{\frac{1}{t}},\\y=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}.\end{cases}$$

由条件 $x>0,y>0$ 知,t 满足 $-1<t<+\infty$,由于

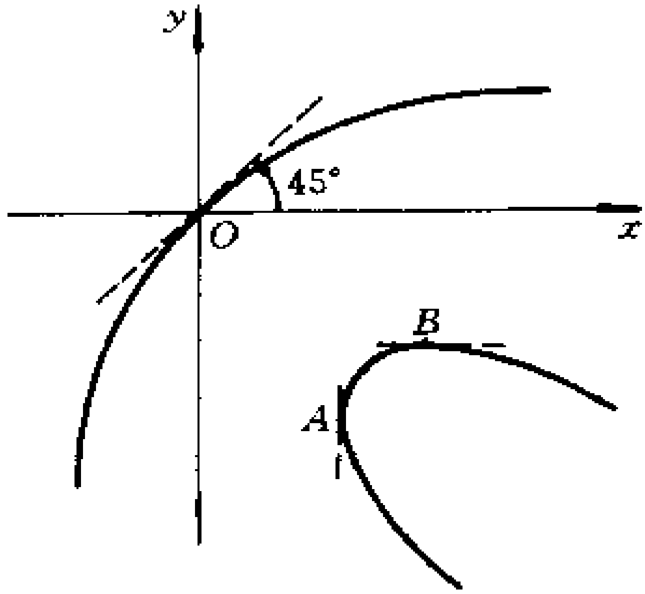


图 2.132

$$\lim_{t\to -1+0} x = \lim_{t\to -1+0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to -1+0} y = \lim_{t\to -1+0} (1+t)^{1+\frac{1}{t}} = 1;$$

$$\lim_{t\to +\infty} x = 1, \lim_{t\to +\infty} y = +\infty,$$

故直线 $x=1$ 和 $y=1$ 是曲线的渐近线．又因

$$\lim_{t\to 0} x = \lim_{t\to 0} y = e,$$

故点(e,e)是曲线上的二重点．由于

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}\left[\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right],$$

$$\frac{dx}{dt} = (1+t)^{\frac{1}{t}}\left[\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}\right],$$

于是，

$$\frac{dy}{dx} = (1+t)\left[1+\frac{t^2}{t-(1+t)\ln(1+t)}\right].$$

容易证明：

$$\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=-1,$$

并且当 $t\in(0,+\infty)$，从而 $x\in(1,e)$ 时，恒有 $\frac{dy}{dx}<0$.

事实上，设

$$g(t)=t^2-[(1+t)\ln(1+t)-t],$$

则 $g(0)=0$，并且容易证明

$$g'(t)=2t-\ln(1+t)>0,$$

$$(1+t)\ln(1+t)-t>0.$$

从而，有

$$g(t)=t^2-[(1+t)\ln(1+t)-t]>0,$$

即

$$\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t)-t}>1.$$

于是，

$$\frac{dy}{dx}=(1+t)\left[1-\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t)-t}\right]<0.$$

由对称性知，对于 $t\in(-1,0)$，也有 $\frac{dy}{dx}<0$. 而当 $t\to 0$ 时，有

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=-1,$$

所以，曲线始终是单调下降的，并呈凹状，无极值和拐点. 对应于 t 的变化范围 0 至 1.

计算几点坐标如下：

t	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-0.9	$t\to-1$
x	e	3.05	3.59	4.50	7.48	12.9	$x\to+\infty$
y	e	2.44	2.15	1.84	1.49	1.29	$y\to 1$

综上所述，曲线的图形由两部分组成，一部分是直线，另一部分是对称于直线 $y=x$ 的曲线(图 2.133).

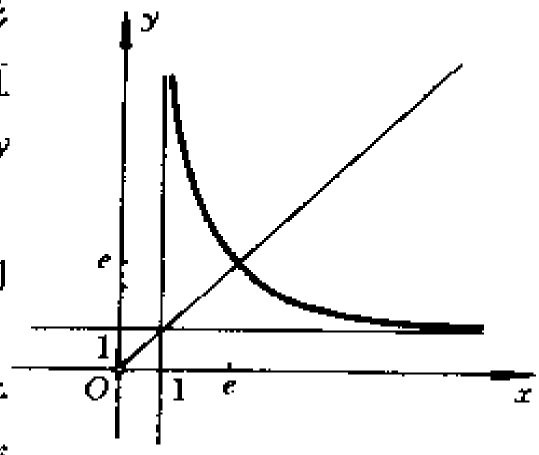


图 2.133

1545. 作出曲线 $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{ch}^2 y=1$ 的图形.

解 显见曲线的图形关于两坐标轴是对称的，故只须在第一象限 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 范围内进行讨论. 考虑渐近线：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\operatorname{sh}x+\sqrt{\operatorname{sh}^2x-1})}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}x+\sqrt{\operatorname{sh}^2x-1}}\left(\operatorname{ch}x+\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2x-1}}\operatorname{ch}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2x+1}{\operatorname{sh}^2x-1}}=1.$$

为求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)$，令

$$u=y-x=\ln(\operatorname{sh}x+\sqrt{\operatorname{sh}^2x-1})-x.$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}e^u=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sh}x+\sqrt{\operatorname{sh}^2x-1}}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{ch}x+\dfrac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2x-1}}}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{ch}x(\operatorname{sh}x+\sqrt{\operatorname{sh}^2x-1})}{e^x\sqrt{\operatorname{sh}^2x-1}}=1,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=0.$$

因此，直线 $y=x$ 是原曲线的渐近线.

因为当 $y=0$ 时 $\operatorname{ch}y$ 取最小值 $\operatorname{ch}y=1$，所以，x 必须满足

$$\operatorname{ch}^2x\geqslant 2 \text{ 或 } |x|\geqslant \ln(1+\sqrt{2})\approx 0.88,$$

并且当 $y=0$ 时，$|x|=\ln(1+\sqrt{2})$.

曲线方程也可表示成

$$(\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y)(\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y)=1,$$

从而令

$$\operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y=t,$$

即

$$\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y=\frac{1}{t}.$$

所以，对于第一象限部分的曲线方程可表示为

$$\begin{cases}\operatorname{ch}x=\dfrac{t+\dfrac{1}{t}}{2},\\[2ex] \operatorname{ch}y=\dfrac{\dfrac{1}{t}-t}{2},\end{cases}\quad (0<t\leqslant\sqrt{2}-1).$$

由原方程知

$$2\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x-2\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y\cdot y'=0$$

或

$$y'=\frac{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y}>0.$$

因而，曲线是单调上升的.

又由于

$$y''=\frac{(\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x)\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y-(\mathrm{sh}^2y+\mathrm{ch}^2y)\cdot y'\cdot\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x}{(\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y)^2}$$
$$=\frac{(\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x)\mathrm{ch}^2y\mathrm{sh}^2y-(\mathrm{sh}^2y+\mathrm{ch}^2y)\mathrm{ch}^2x\mathrm{sh}^2x}{(\mathrm{ch}y\mathrm{sh}y)^3},$$

而

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x)\mathrm{ch}^2y\mathrm{sh}^2y-(\mathrm{sh}^2y\\&\quad+\mathrm{ch}^2y)\mathrm{ch}^2x\mathrm{sh}^2x\\&=\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y(\mathrm{sh}^2y-\mathrm{sh}^2x)+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)\\&=\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)\\&=(\mathrm{ch}^2y-\mathrm{ch}^2x)(\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y)\\&=-(\mathrm{ch}^2x\mathrm{ch}^2y+\mathrm{sh}^2x\mathrm{sh}^2y)<0.\end{aligned}$$

于是，$y''<0$ 恒成立．所以，曲线呈凸状．

计算几点的坐标如下：

t	$\sqrt{2}-1$	0.4	0.3	0.2	0.1	$t\to 0$
x	$\ln(1+\sqrt{2})$	0.92	1.07	1.61	2.31	$x\to+\infty$
y	0	0.33	0.98	1.53	2.28	$y\to+\infty$

曲线形状如图 2.134 所示．

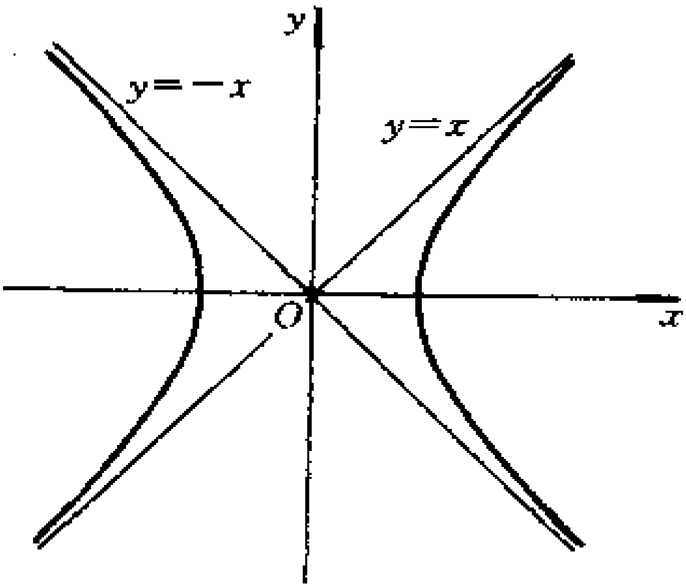


图 2.134

作出下列用极坐标(φ,r) $(r\geqslant 0)$表示的函数的图形：

1546. $r=a+b\cos\varphi$ $(0<a\leqslant b)$.

解 当 $a=b$ 时，$r=a(1+\cos\varphi)$，这就是心脏线，如

图 2.135 所示．

当 $0 < a < b$ 时，其几何轨迹叫做蚶线，由于 $r(-\varphi) = r(\varphi)$，故图形关于极轴对称．由于当 $r \geqslant 0$ 时，$|\varphi| \leqslant \alpha = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$，故当 $\varphi = 0$ 时 r 有极大值 $r = a + b$；当 $\varphi = \pm\alpha$ 时 r 有边界的极小值 $r = 0$．又由于 $r' = -b\sin\varphi < 0$，故当 φ 由 0 变到 α 时，r 由 $a+b$ 变到 0．

当 $r < 0$ 时，$\alpha < |\varphi| \leqslant \pi$，仿照上述讨论，$r$ 由 0 下降到 $a - b$．

极点 O 为二重点，如图 2.136 所示．如果不考虑 $r < 0$，则极点 O 不是二重点．

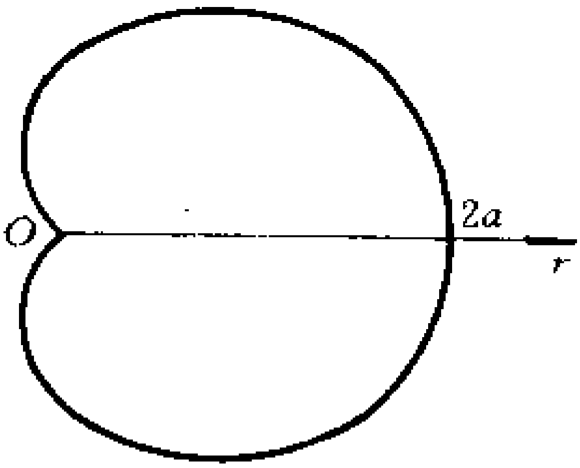


图 2.135

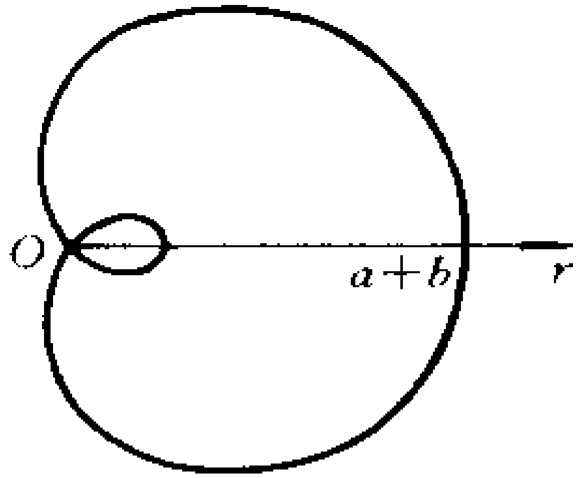


图 2.136

1547. $r = a\sin3\varphi\ (a > 0)$．

解 由于 $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$，故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数．

函数的存在域为：

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \pi;\ \frac{4\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{3}.$$

为此，只要讨论 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$ 即可．

$$r' = 3a\cos 3\varphi \begin{cases} > 0, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right), \\ < 0, \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

故当 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时 r 有极大值 $r = a$；当 $\varphi = 0$ 及 $\frac{\pi}{3}$ 时，r 有极小值 $r = 0$.

射线 $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6}$ 及 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ 为图形的三对称轴．

曲线在点 O 自交且为三重点，整个图形有三个形状相同的瓣．如图 2.137 所示．

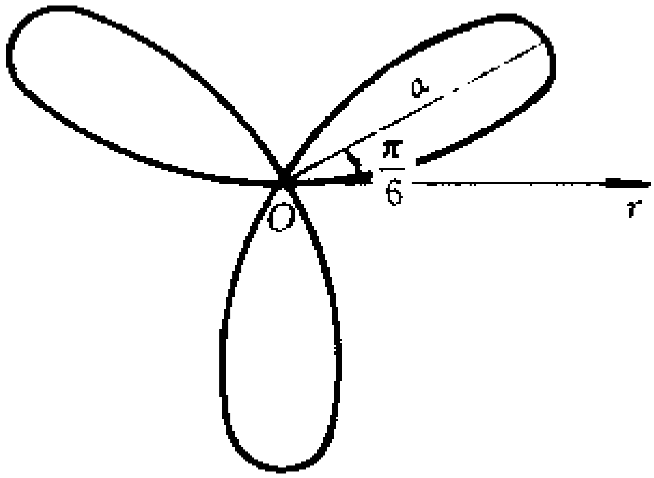


图 2.137

1548. $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} (a > 0)$.

解 由于 $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$，故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数．显然图形关于极轴对称．

函数的存在域为：

$$|\varphi| < \frac{\pi}{6} \text{ 及 } \frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}.$$

为此只要讨论 $-\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{6}$ 即可.

$$r'=\frac{3a\sin3\varphi}{2(\cos3\varphi)^{\frac{3}{2}}}\begin{cases}<0,\varphi\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right),\\>0,\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right),\end{cases}$$

故当 $\varphi=0$ 时有极小值 $r=a$. 当 φ 由 0 单调地增大到 $\frac{\pi}{6}$ 时,r 由 a 单调地增大到 $+\infty$,在这种意义上,$\varphi=\frac{\pi}{6}$ 为曲线的渐近线. 同样地 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$ 也为渐近线.

由周期性可知,当 $\varphi=\pm\frac{2\pi}{3}$ 时有极小值 $r=a$. $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ 及 $\varphi=\pm\frac{5\pi}{6}$ 均为曲线的渐近线.

最后还要研究在点$(a,0)$附近的状态,为此,只要考虑在该点切线的斜率:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

再以$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{3a\sin3\varphi}{2(\cos3\varphi)^{\frac{3}{2}}}$ 代入上式,即得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3a\sin3\varphi\sin\varphi+2a\cos\varphi\cos3\varphi}{3a\sin3\varphi\cos\varphi-2a\sin\varphi\cos3\varphi}.$$

于是,

$\operatorname{tg}\alpha\big|_{\varphi=0}=\infty$,即在$(a,0)$点曲线的切线垂直于极轴. 如图 2.138 所示.

1549. $r=a\frac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi-1}$,其中 $\varphi>1(a>0)$.

解 由于

$$\lim_{\varphi\to 1} r = \lim_{\varphi\to 1}\frac{a\,\text{th}\varphi}{\varphi-1} = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi\to+\infty} r = \lim_{\varphi\to+\infty}\frac{\text{th}\varphi}{\varphi-1} = \lim_{\varphi\to+\infty}\frac{a}{\text{ch}^2\varphi} = 0,$$

从而曲线以 $\varphi=1$ 为渐近线，以极点为渐近点．又

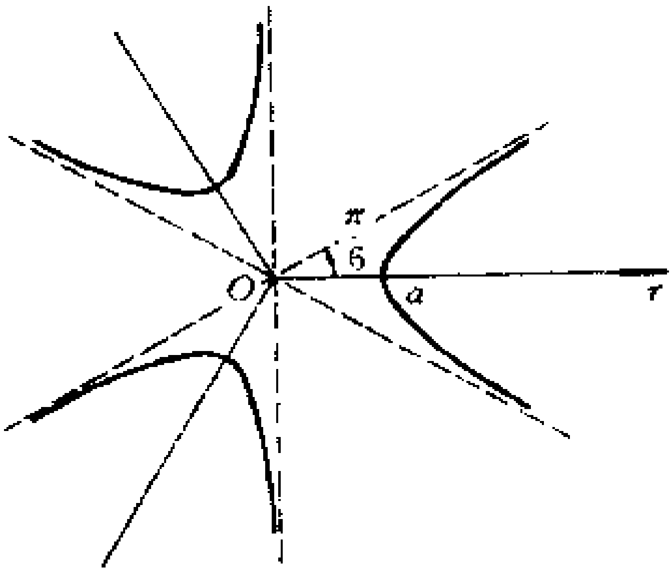


图 2.138

$$\frac{dr}{d\varphi} = a\cdot\frac{\frac{1}{\text{ch}^2\varphi}(\varphi-1)-\text{th}\varphi}{(\varphi-1)^2}$$

$$= a\cdot\frac{(\varphi-1)-\frac{1}{2}\text{sh}2\varphi}{(\varphi-1)^2\text{ch}^2\varphi},$$

当 $1<\varphi<+\infty$ 时恒有 $(\varphi-1)-\frac{1}{2}\text{sh}2\varphi<0$. 事实上，令

$$y(\varphi) = (\varphi-1)-\frac{1}{2}\text{sh}2\varphi.$$

则 $y(1) = -\frac{1}{2}\text{sh}2<0$，而

$$y'(\varphi) = 1-\text{ch}2\varphi<0,$$

故有 $y(\varphi)\leqslant y(1)<0$. 这就证明了当 $1<\varphi<+\infty$ 时恒有 $\frac{dr}{d\varphi}<0$，即当 φ 增大时 r 单调减小．

为考察当 $r\to+\infty$ 时曲线的变化趋势，令

$$y_1 = x\mathrm{tg}1, \quad y_2 = a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\sin\varphi.$$

由于

$$\begin{aligned}
y_2 - y_1 &= a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\sin\varphi - x\mathrm{tg}1 \\
&= a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\sin\varphi - a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\cos\varphi\,\mathrm{tg}1 \\
&= a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\cos\varphi\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}\cos\varphi\,\mathrm{tg}1 \\
&= a\,\mathrm{th}\varphi\cos\varphi\frac{\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}1}{\varphi - 1},
\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{\varphi\to1}(y_2 - y_1) = \lim_{\varphi\to1} a\,\mathrm{th}\varphi\cos\varphi\frac{\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}1}{\varphi - 1}$$

$$= \frac{a\,\mathrm{th}1}{\cos 1}.$$

于是，在直角坐标系下，当 $r \to +\infty$ 时，曲线 $r = a\frac{\mathrm{th}\varphi}{\varphi - 1}$ 以直线

$$y = x\mathrm{tg}1 + a\frac{\mathrm{th}1}{\cos 1}$$

为渐近线．

计算几点的坐标如下表：

φ	1.2	1.4	$\frac{\pi}{2}$	1.6	1.8	2	2.5	π	5	$\frac{3\pi}{2}$	2π	10	$\varphi \to +\infty$
r	$4.15a$	$2.20a$	$1.59a$	$1.53a$	$1.17a$	$0.96a$	$0.65a$	$0.46a$	$0.24a$	$0.21a$	$0.18a$	$0.11a$	$r \to 0$

综上分析知，曲线是螺状线，如图 2.139 所示．

1550. $\cos\varphi = \frac{r - 1}{r^2}$.

解 由方程容易判定，曲线关于极轴对称．因而只需在 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ 范围内研究图形．方程可化为

$$r=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}.$$

由于必有 $1-4\cos\varphi\geqslant 0$，故角 φ 的最小值应为

$$\varphi=\arccos\frac{1}{4}\approx 75°30',$$

对应的 $r=2$. 由 $r>0$ 知曲线方程为

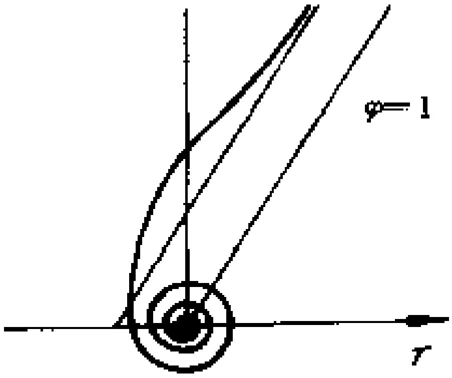


图 2.139

$$r=\frac{1+\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}\left(\arccos\frac{1}{4}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right);\quad(1)$$

$$r=\frac{1-\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}\quad(2)$$

首先研究方程(1) 所表示的曲线的图形. 因为随着 φ 增加，$2\cos\varphi$ 减小，$\sqrt{1-4\cos\varphi}$ 增大，因而 r 随 φ 增加而单调增加，事实上，易证 $\frac{dr}{d\varphi}>0$. 又

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}r=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1+\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}=+\infty,$$

所以，当 $r\to+\infty$ 时有渐近线 $\varphi=\frac{\pi}{2}$. 又由 $\cos\varphi=\frac{r-1}{r^2}$，得

$$x=\frac{r-1}{r},$$

故当 $r\to+\infty$ 时 $x\to 1$，即当 $r\to+\infty$ 时，曲线与直线 $r=\frac{1}{\cos\varphi}$ 无限接近(直角坐标系下 $x=1$ 为渐近线).

再来研究拐点，由

$$\frac{d\cos\varphi}{dr}=\frac{r^2-2r(r-1)}{r^4}=\frac{2-r}{r^3},$$

$$-\sin\varphi\frac{d\varphi}{dr}=\frac{2-r}{r^3},$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{r^3}{r-2}\sin\varphi,$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{d\varphi^2}&=\frac{3r^2(r-2)-r^3}{(r-2)^2}\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+\frac{r^3}{r-2}\cos\varphi\\&=\frac{r^3(2r^3-6r^2)}{(r-2)^3}\sin^2\varphi+\frac{r^3}{r-2}\cos\varphi\\&=\frac{r^5(2r-6)}{(r-2)^3}\left[1-\frac{(r-1)^2}{r^4}\right]+\frac{r^3}{r-2}\cdot\frac{r-1}{r^2}\\&=\frac{r\{(2r-6)[r^4-(r-1)^2]+(r-2)^2(r-1)\}}{(r-2)^3}.\end{aligned}$$

由 $r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}=0$ 得 $2r^4-3r^2+8r-6=0$，经判别知：拐点的 r 介于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和 1 之间.

再来研究方程(2). 由于

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}r=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}=1,$$

事实上，由 $\cos\varphi=\frac{r-1}{r^2}$ 也可得：当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$r=1$. 因而点 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 是曲线上的点. 又

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{1}{(2\cos\varphi)^2}\left[(1-4\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin\varphi)\right.$$

$$\left.\cdot(2\cos\varphi)+2\sin\varphi(1-\sqrt{1-4\cos\varphi})\right]$$

$$= \frac{2\sin\varphi[(1-\sqrt{1-4\cos\varphi})\sqrt{1-4\cos\varphi}-2\cos\varphi]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}}$$

$$= \frac{2\sin\varphi[\sqrt{1-4\cos\varphi}-(1-2\cos\varphi)]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}}. \qquad (1)$$

容易证明：$f(\varphi)=\sqrt{1-4\cos\varphi}-(1-2\cos\varphi)<0$. 事实上，有

$$f'(\varphi)=2\sin\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\cos\varphi}}-1\right)<0 \quad 且 f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

又因当 $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，(1) 的其它因子均为正，故得 $\frac{dr}{d\varphi}<0$，即 r 随 φ 的增加而单调下降，并且当 $\varphi=\pi$ 时达到极小值

$$r=\frac{1-\sqrt{5}}{-2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

事实上，$\frac{dr}{d\varphi}$ 经过 $\varphi=\pi$ 从负变到正．

计算几点的坐标列表如下：

φ	75°30′	76°5′	77°10′	81°	84°	87°	$\varphi\to\frac{\pi}{2}+0$	90°	105°	140°	155°	180°
r	2	2.5	3	5	8.85	19.7	$r\to+\infty$	1	0.81	0.66	0.63	0.62

曲线如图 2.140 所示．

作出下列曲线族的图表（a 表参变量）：

1551. $y=x^2-2x+a$.

解 将方程变形：

$$y-(a-1)=(x-1)^2.$$

作平移

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' + (a - 1), \end{cases}$$

即得标准方程

$$y' = x'^2,$$

此为向上凹的抛物线.

当 $a > 1$ 时,抛物线的顶点位于第一象限;当 $a < 1$ 时,抛物线的顶点位于第四象限;当 $a = 1$ 时,抛物线的顶点在(1,0).不论 a 为何值,此抛物线族的顶点位于直线 $x = 1$ 上.如图 2.141 所示.

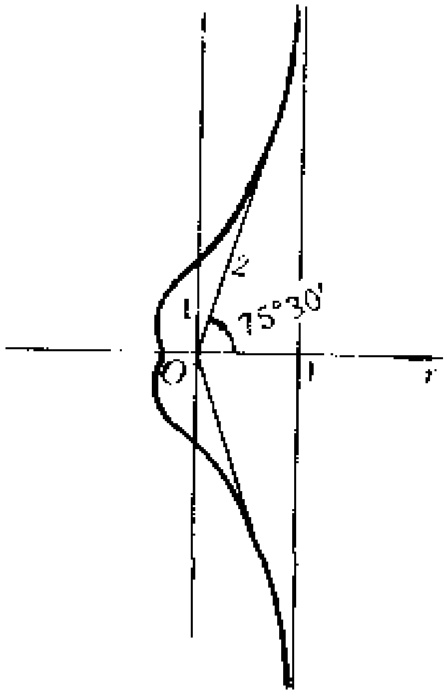


图 2.140

1552. $y = x + \dfrac{a^2}{x}$.

解 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$. 当 $a \neq 0$ 时为双曲线族,其图形可由

$y = x$ 和 $y = \dfrac{a^2}{x}$ 相加而成,它们均以直线

$y = x$ 和 $x = 0$ 为渐近线.

当 $x = |a|$ 时,有极小值 $y = 2|a|$;当 $x = -|a|$ $(a \neq 0)$ 时有极大值 $y = -2|a|$. 如图 2.142 所示.

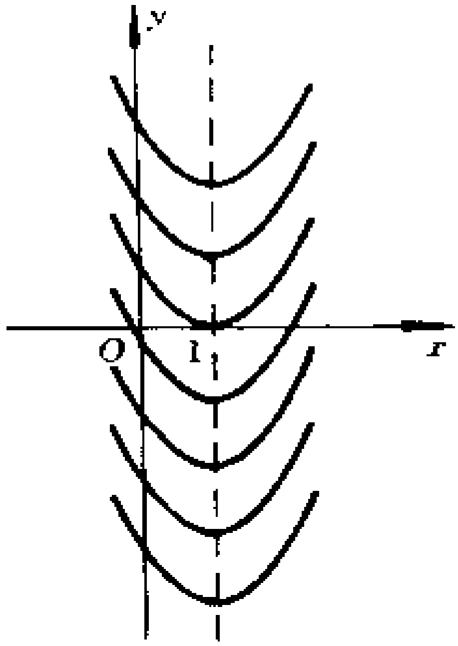


图 2.141

1553. $y=x\pm\sqrt{a(1-x^2)}$.

解 $y-x=\pm\sqrt{a(1-x^2)}$，即 $(y-x)^2+ax^2=a$.

作仿射变换

$$\begin{cases}\xi_1=-x+y,\\ \xi_2=x,\end{cases}$$

则原方程变形为

$$\xi_1^2+a\xi_2^2=a.$$

当 $0<a<+\infty$ 时为椭圆族；当 $-\infty<a<0$ 时为双曲线族；当 $a=0$ 时为直线 $y=x$.

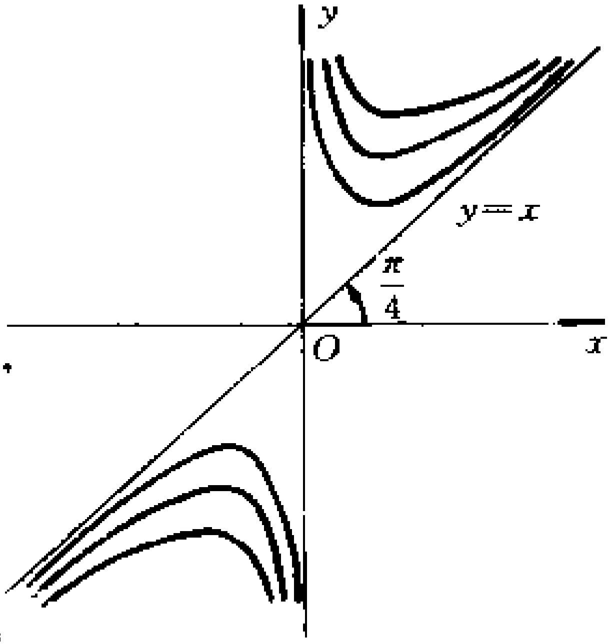


图 2.142

全族曲线均通过点 $(-1,-1)$ 及 $(1,1)$.

$y'=1\mp\dfrac{ax}{\sqrt{a(1-x^2)}}$. 令 $y'=0$，得

$$x^2=\frac{1}{1+a},$$

则 $1+a>0$ 或 $a>-1$.

$$y''=\mp\frac{a^2}{[a(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

当 $y\geqslant x$ 时上式取负号；当 $y\leqslant x$ 时上式取正号.

于是，当 $y\geqslant x$ 时，有

(1) 若 $a>0$，则当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时，由于 $y''<0$，故取得极大值 $y=\sqrt{1+a}$.

若 $-1<a<0$，则当 $x=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时也取得极大值 $y=-\sqrt{1+a}$.

当 $x=\mp 1$ 时取得边界极小值 $y=\mp 1(a\neq 0)$.

(2) 由于 $y''<0$，故曲线是凸的.

当 $y\leqslant x$ 时，有

(1) 若 $a>0$，当 $x=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y=-\sqrt{1+a}.$$

若 $-1<a<0$，当 $x=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y=\sqrt{1+a}.$$

当 $x=\mp 1$ 时取得边界极大值 $y=\mp 1$.

(2) 由于 $y''>0$，故曲线是凹的.

此外，当 $a<0$ 时，曲线有渐近线，容易求得它们为 $y=(1\pm\sqrt{-a})x$.

椭圆族、双曲线族与直线已为大家所熟悉，故图略.

1554. $y=\frac{x}{2}+e^{-ax}$.

解 原方程可变形为

$$y-\frac{x}{2}=e^{-ax}.$$

因此，若作仿射变换

$$\begin{cases}\xi_1=-\frac{x}{2}+y,\\ \xi_2=x,\end{cases}$$

则原方程化成标准形式

$$\xi_1 = e^{-ax}2.$$

当 $a \neq 0$ 时，表示一指数曲线族；当 $a = 0$ 时，表示直线 $y = 1 + \frac{x}{2}$.

全族曲线均通过点(0,1).

$y' = \frac{1}{2} - ae^{-ax}$. 令 $y' = 0$ 得

$$x = \frac{1}{a}\ln 2a.$$

$y'' = a^2e^{-ax} > 0$，故曲线呈凹状.

若 $a > 0$，则当 $x = \frac{1}{a}\ln 2a$ 时有极小值

$$y = \frac{1}{2a}(1 + \ln 2a);$$

若 $a \leqslant 0$，则因 $y' > 0$，故函数 y 是增大的.

现求渐近线：当 $a > 0$ 时，

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xe^{ax}}\right) = \frac{1}{2}$,

$b = \lim\limits_{x \to +\infty}(y - kx) = 0$,

故渐近线为 $y = \frac{x}{2}$.

同法求得当 $a < 0$ 时，渐近线也为 $y = \frac{x}{2}$，然此时应考虑 $x \to -\infty$.

如图 2.143 所示.

1555. $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

解　全族曲线均通过原点.

$y' = e^{-\frac{x}{a}}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. 令 $y' = 0$，得

$$x = a.$$

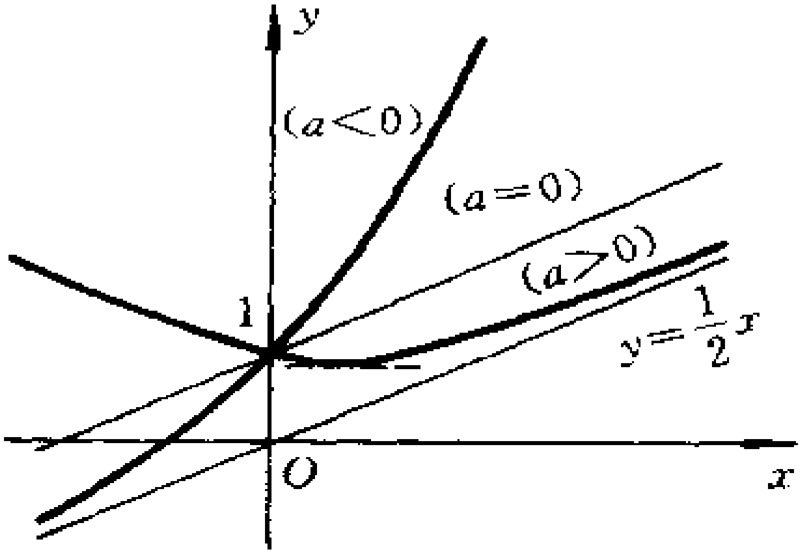


图 2.143

$$y''=e^{-\frac{x}{a}}\left(\frac{x}{a^2}-\frac{2}{a}\right).\text{令 } y''=0,\text{得}$$

$$x=2a.$$

经判别知：若 $a>0$，当 $x=a$ 时有极大值 $y=ae^{-1}\approx 0.37a$；若 $a<0$，当 $x=a$ 时有极小值 $y=ae^{-1}$. 拐点 $x=2a, y=2ae^{-2}\approx 0.27a$.

容易求得：渐近线为 $y=0$. 与1554题类似，当 $a>0$ 时应考虑 $x\to+\infty$；当 $a<0$ 时应考虑 $x\to-\infty$.

又曲线族与直线 $y=x$ 在原点相切，如图 2.144 所示.

§ 13. 函数的极大值与极小值问题

1556. 证明：若函数 $f(x)$ 不为负，则函数

$$F(x)=Cf^2(x)(C>0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点.

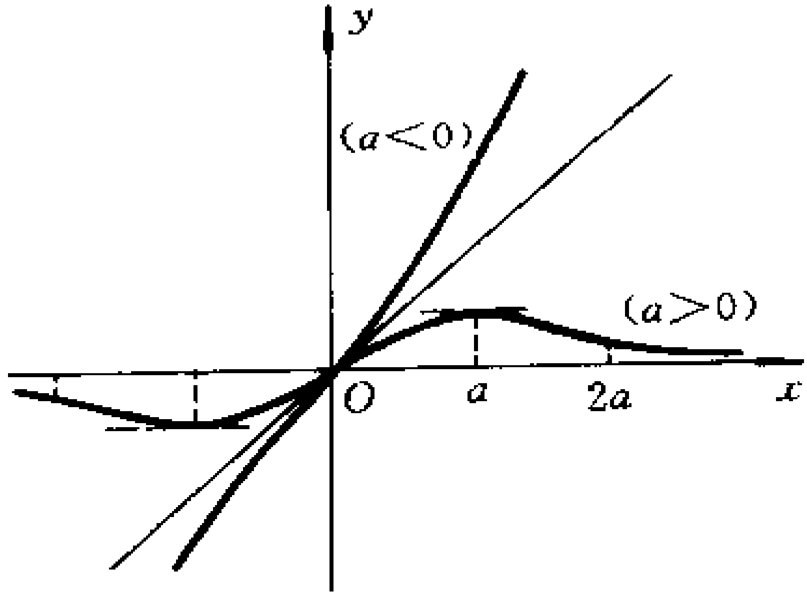


图 2.144

证　如果 x_0 为 $F(x)$ 的极大值点，则在 x_0 点附近有

$$F(x_0) > F(x)\ (x \neq x_0) \qquad (*)$$

即 $Cf^2(x_0) > Cf^2(x)$. 根据 $C > 0$，以及 $f(x)$ 不为负，必有

$$f(x_0) > f(x)\ (x \text{ 在 } x_0 \text{ 附近，且 } x \neq x_0)$$

这就证明了 x_0 点也为 $f(x)$ 的极大值点. 反之，若 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，则在 x_0 附近，有

$$f(x_0) > f(x)\ (x \neq x_0).$$

于是，

$$Cf^2(x_0) > Cf^2(x),$$

即 $(*)$ 式成立. 这就证明了 x_0 点也为 $F(x)$ 的极大值点. 同样道理，若 x_0 为极小值点时，也可证明 $F(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的极小值点.

1557. 证明：若当 $-\infty < x < +\infty$ 时，函数 $\varphi(x)$ 单调增加，

则函数

$$f(x) \text{ 与 } \varphi(f(x))$$

有相同的极值点.

证 设 x_0 点为 $f(x)$ 的极值点,例如是极大值点,则在 x_0 点附近有

$$f(x_0) > f(x) \ (x \neq x_0). \tag{1}$$

因为函数 $\varphi(x)$ 为单调增加的,故也有

$$\varphi(f(x_0)) > \varphi(f(x)) \ (x \neq x_0). \tag{2}$$

这就证明了 x_0 点也是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点. 反之也对,因为由(2),从 $\varphi(x)$ 的单调增加性质知必有(1). 另一种情形,即设 x_0 点是极小值点时,也可类似获证. 于是,原命题得证.

1558. 二正数的和等于常数 a,求此二正数的 m 次幂与 n 次幂 $(m>0, n>0)$ 相乘积的极大值.

解 设一正数为 x,则按题设,我们须求函数

$f(x) = x^m(a-x)^n (0<x<a)$ 的极大值. 由于 $f'(x) = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x]$,故若令 $f'(x)=0$,即得 $x=\frac{ma}{m+n}$. 当 $0<x<\frac{ma}{m+n}$ 时,$f'(x)>0$;当 $a>x>\frac{ma}{m+n}$ 时 $f'(x)<0$. 因此,当 $x=\frac{ma}{m+n}$ 时,$f(x)$ 有极大值

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right) = \frac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

1559. 二正数的乘积等于常数 a,求此二数的 m 次幂与 n 次幂 $(m>0, n>0)$ 之和的极小值.

解　设一正数为 x，则按题设，我们须求函数

$$f(x)=x^m+\left(\frac{a}{x}\right)^n(0<x<+\infty)$$

的极小值．

由于

$$f'(x)=\frac{mx^{m+n}-na^n}{x^{n+1}}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$. 显然，在此点的左边，$f'(x)<0$，而在此点的右边，有 $f'(x)>0$，故知当 $x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值

$$f\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}\right]=(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^mn^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

1560. 取怎样的数为对数之底时有一个数，它本身和它的对数相等？

解　解法一：

设所求之数为 a，则对于 $0<a<1,1<a<+\infty$ 及 $x>0$ 时

$$\log_a x=x$$

或

$$a^x=x. \tag{1}$$

问题即为 a 取怎样的数，上式才成立．

为研究使(1)式成立的 a 及相应的 x 的取值情况．我们在直角坐标系内取曲线

$$\begin{cases}y=a^x,\\ y=x.\end{cases} \tag{2}$$

在交点处，方程(1)与(2)等价(图 2.145)

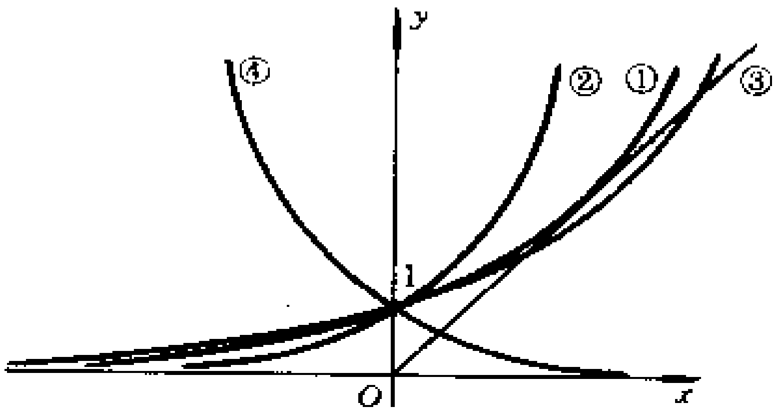


图 2.145

注意，指数曲线 $y = a^x$ 与直线 $y = x$ 是否有公共点，就看其差

$$\Delta = f(x) = a^x - x$$

有无使 $\Delta = f(x) = 0$ 的点 x.

设 $y = a_0^x$ 与 $y = x$ 相切于一点 $(x_0, a_0^{x_0})$，此时

$f'(x_0) = 0$,

即有

$$a_0^{x_0} \ln a_0 - 1 = 0. \tag{3}$$

从 $\Delta = 0$ 知有(1)，即

$$a_0^{x_0} - x_0 = 0. \tag{4}$$

由(3)和(4)可解得

$$a_0 = e^{\frac{1}{e}}, x_0 = e. \tag{5}$$

当 $a > a_0$ 时，易见 $y = a^x$ 比 $y = a_0^x$ 远离直线 $y = x$. 故此时无交点．实际上，注意到有 $a_0^x \geqslant x$，并记 $g(a, x) = a^x$，对于 $x \geqslant 0$，只要 $a > a_0$ 就有 $a^x > a_0^x \geqslant x$，也即 $g(a_0, x)$ 是 $g(a, x)$ 的极小值．故当 $a > a_0$ 时，$y = a$ 与 $y =$

x 无交点．而当 $0<a\leqslant a_0$ 时(且要求 $a\neq 1$)，此时(2)有解，从而(1)有解．如图 2.145 中曲线 ①、②、③、④ 所示．

解法二：

设 $f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}$，则由 $f'(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$ 得 $x=e$. 显然当 x 通过 e 时 $f'(x)$ 由正变负，故知 $f(e)=e^{\frac{1}{e}}\approx 1.445$ 为极大值．从而 $0<x^{\frac{1}{x}}\leqslant e^{\frac{1}{e}}$.

因此，当 $0<a\leqslant e^{\frac{1}{e}}$ 且 $a\neq 1$ 时，有 $\log_a x=x$.

1561. 从面积为 S 的一切矩形中，求其周界为最小者．

解 设矩形的一边长为 x，则另一边长为 $\dfrac{S}{x}$，周界长为

$$f(x)=2\left(x+\frac{S}{x}\right),$$

按题设，我们须求其最小值．

由于 $f'(x)=2\left(1-\dfrac{S}{x^2}\right)$，故令 $f'(x)=0$，即得 $x=\sqrt{S}$. 由 $f''(\sqrt{S})>0$ 知此时 $f(x)$ 有极小值．又由于极值的唯一性，故此也为最小值．因此，所求的矩形为以 $\sqrt{S}$ 为边的正方形．

1562. 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数，求有最大面积的直角三角形．

解 设一直角边为 x，则按题设，另一直角边为 $\sqrt{(a-x)^2-x^2}=\sqrt{a^2-2ax}$，故直角三角形的面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}.$$

利用极值的解法得：当 $x=\dfrac{a}{3}$ 时，$S(x)$ 值为极大值．又

由于极值的唯一性，故知当 $x=\frac{a}{3}$ 时，$S(x)$ 取最大值．此时斜边为 $a-x=a-\frac{a}{3}=\frac{2}{3}a$，它为直角边的两倍，故此三角形的两锐角分别为 30° 及 60°．

本题也可用 1556 题结论求得结果．事实上，令 $F(x)=4S^2(x)$，则 $F(x)$ 与 $S(x)$ 有相同的极值点，对 $F(x)$ 求极值可得同样的结果．

1563．当有怎样的长度大小时，容积为 V 的圆柱形闭合罐子有最小的表面积？

解　设底半径为 x，则高为 $H=\frac{V}{\pi x^2}$，故圆柱的表面积为

$$S(x)=2\pi x\cdot\frac{V}{\pi x^2}+2\pi x^2.$$

由于，

$$S'(x)=\frac{4\pi x^3-2V}{x^2},$$

令 $S'(x)=0$ 得 $x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，由 $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)>0$ 知，当 $x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，$S(x)$ 有极小值

$$s\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)=\sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

由于只有一个极值，故知当底半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，而高为 $\frac{V}{\pi x^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时有最小面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}$．

1564. 在不超过半圆的已知弓形内嵌入有最大面积的矩形.

解 由图 2.146 知,不妨设圆的半径为单位长度,则

$$OA = \cos\varphi$$
$$BC = \sin\alpha,$$
$$BA = \cos\alpha - \cos\varphi.$$

从而矩形面积为

$$S(\alpha) = 2BC \cdot BA$$
$$= 2\sin\alpha(\cos\alpha - \cos\varphi)$$
$$= \sin 2\alpha - 2\sin\alpha\cos\varphi.$$

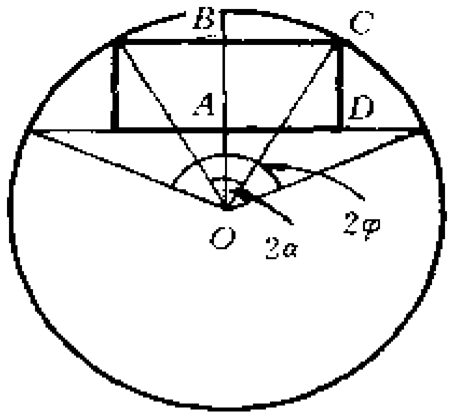


图 2.146

而

$$S'(\alpha) = 2\cos 2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi = 4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha \cdot$$
$\cos\varphi - 2$,令 $S'(\alpha) = 0$,可得

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 8}}{4}.$$

注意到 $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$,故 $\cos\varphi \leqslant \cos\alpha$,于是有

$$S''(\alpha) = -4\sin 2\alpha + 2\cos\varphi\sin\alpha \leqslant -4\sin 2\alpha$$
$$+ 2\cos\alpha\sin\alpha = -3\sin 2\alpha < 0.$$

这就说明

$$\alpha = \arccos\frac{\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 8}}{4}$$

是使 $S(\alpha)$ 达到极大值的点,也就是说此时弓形内所对应的矩形面积最大.

1565. 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

中，嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形．

解 如图 2.147 所示．

由于点 $M(x,y)$ 在椭圆上，故适合方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 解之，得 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

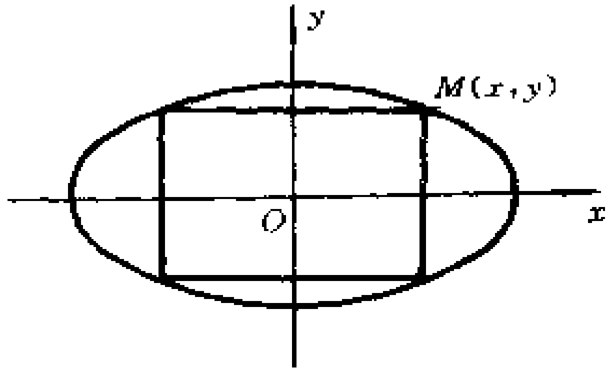


图 2.147

于是按题设，求函数

$$f(x)=4x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

当 x 为何值时最大，记 $C=\frac{a^2}{16b^2}$，利用 1556 题的结果，$f(x)$ 与 $F(x)=Cf^2(x)=x^2(a^2-x^2)$ 有相同的极值，但 $F'(x)=4x\left(\frac{a^2}{2}-x^2\right)$，令 $F'(x)=0$，则 $x=0$（不适合），$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$. 当 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时，有 $F''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-4a^2<0$，故 $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=2ab$ 为最大面积．此时矩形的边为 $a\sqrt{2}$ 和 $b\sqrt{2}$.

1566. 在底边为 b 及高为 h 的三角形中，嵌入有最大周长的矩形，研究此问题有解的可能性．

解 如图 2.148 所示．

$AB=b$，$CD=h$. 由于 $\frac{x}{b}=\frac{h-y}{h}$，故 $x=\frac{b}{h}(h-y)$.

矩形的周长为

$$p=2\left[y+\frac{b}{h}(h-y)\right]=2\left[\left(1-\frac{b}{h}\right)y+b\right].$$

显见，当 $h=b$ 时，周长 $p=2b$ 为一定值；当 $h>b$ 时，$p'_y>0$，p 单调增加，故当 $y=h$ 时有边界的极大值 $p=2h$；当 $h<b$ 时，$p'_y<0$，p 单调减少，理论上当 $y=0$ 时有边界的极大值 $2b$. 但嵌入的矩形不允许边长为0，故当 $h<b$ 时嵌入的矩形有最大周长者是不存在的，即此时问题无解.

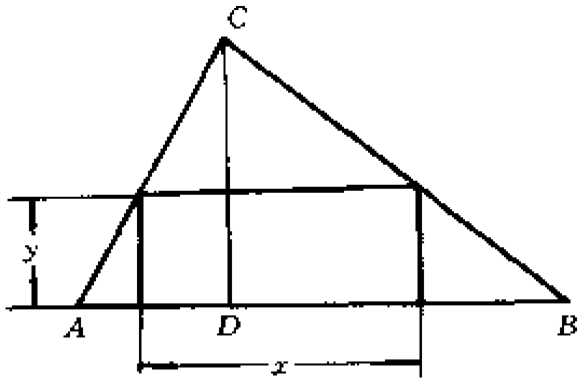


图 2.148

1567. 从直径为 d 的圆形树干切出横断面为矩形的梁，此矩形的底等于 b，高等于 h. 若梁的强度与 bh^2 成比例，问梁的尺寸为如何时，其强度最大？

解 由于 $b^2+h^2=d^2$，故 $h^2=d^2-b^2$，从而考虑函数

$$f(b)=b(d^2-b^2)$$

何时取最大值.

由于 $f'(b)=d^2-3b^2$，令 $f'(b)=0$ 得 $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$.

此时 $h=d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，$f''(b)=-6b<0$，$f(b)$ 的值最大. 因此，所求的矩形的底为 $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$，高为 $d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

1568. 于半径为 R 的半球中，嵌入有最大体积的底为正方形的直角平行六面体.

解 设底边之一半为 x，则按题设，有

$$2x^2+y^2=R^2,$$

其中 y 为平行六面体高之一半．解之，得 $y = \sqrt{R^2 - 2x^2}$，由题意求函数

$$f(x) = 4x^2y = 4x^2\sqrt{R^2 - 2x^2}.$$

何时取最大值．

$$f'(x) = \frac{8x(R^2 - 3x^2)}{\sqrt{R^2 - 2x^2}},$$ 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$，此时 $y = \frac{R}{\sqrt{3}}$．经判别可知，$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ 值为最大．因此，所求的直角平行六面体之底、宽、高分别为 $\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}$，而最大体积为

$$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4R^3}{3\sqrt{3}}.$$

1569．于半径为 R 的球内嵌入有最大体积的圆柱．

解　设圆柱的底半径为 r，高为 $2h$，则有

$$r^2 + h^2 = R^2,$$

即 $h = \sqrt{R^2 - r^2}$．按题设，求函数

$$f(r) = 2\pi r^2 h = 2\pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$$

何时最大．

$$f'(r) = \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$ 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$，

此时 $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$，且

$$f(r) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

经判别可知此值即为柱体体积的最大值．

1570．于半径为 R 的球内嵌入有最大表面积的圆柱．

解 如图 2.149,圆柱的表面积为

$$S = 2\pi(R\cos\varphi)^2 + 4\pi(R\cos\varphi)\cdot(R\sin\varphi)$$
$$= \pi R^2(1+\cos 2\varphi) + 2\pi R^2\sin 2\varphi.$$

由 $\frac{dS}{d\varphi}=0$ 得 $\operatorname{tg}2\varphi=2$. 记其解为 $\varphi_0=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}2, \varphi_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 于是 $\sin 2\varphi_0=\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos 2\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{5}}$. 又由于

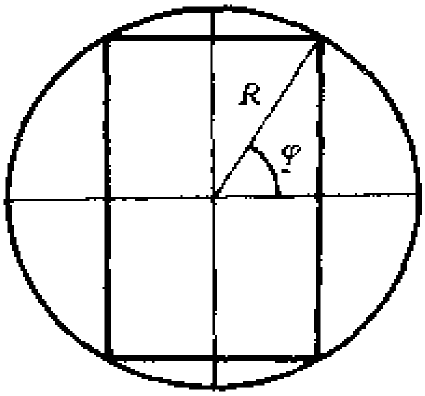


图 2.149

$$\left.\frac{d^2S}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -4\pi R^2[2\sin 2\varphi + \cos 2\varphi]_{\varphi=\varphi_0}$$
$$= -4\pi R^2\left[2\sin 2\varphi_0 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0\right]$$
$$= -10\pi R^2\sin 2\varphi_0 < 0,$$

故此时表面积最大,且最大表面积为

$$S = \pi R^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi R^2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$= \pi R^2\left(1+\sqrt{5}\right)$$
$$\approx 0.81\times 4\pi R^2.$$

从而,球内嵌入圆柱的最大表面积约为球面面积的 81%.

1571. 对于已知球作具有最小体积的外切圆锥.

解 设外切圆锥的底半径为 x,高为 h,球的半径为 R,则可求得 $h=\frac{2Rx^2}{x^2-R^2}$,于是,外切圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2\cdot\frac{2Rx^2}{x^2-R^2} = \frac{2}{3}\pi R\cdot\frac{x^4}{x^2-R^2}\ (x>0).$$

由

$$\frac{dV}{dx}=\frac{4}{3}\pi R\cdot\frac{x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}=0,$$

得 $x=\sqrt{2}R$,经检验知此时体积最小,且

$$V|_{x=\sqrt{2}R}=2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以,外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只须求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}l$,此时 $h=\frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大,因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$,高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中,嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高,H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设,只须求函数

$$S=2\pi r^2+2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD}=\frac{AN}{AD}$,即 $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$,故 $h=$

$\frac{R-r}{R}H$，其中 $H = R\mathrm{ctg}\alpha$ 是已知常数．于是，

$$S = f(r) = 2\pi\left[r^2 + rH\left(1 - \frac{r}{R}\right)\right]\quad(0 \leqslant r \leqslant R),$$

$$f'(r) = 2\pi\left(2r + H - \frac{2r}{R}H\right).$$

令 $f'(r) = 0$，得 $r = \frac{HR}{2(H-R)}$．此值应在 0 与 R 之间，即 $H > R$ 与 $\frac{R}{H} = \mathrm{tg}\alpha < \frac{1}{2}$．经判别可知，此时 $f(r)$ 为最大．因此，所求的圆柱当 $\mathrm{tg}\alpha < \frac{1}{2}$ 及 $r = \frac{R}{2(1-\mathrm{tg}\alpha)}$ 时达到最大值．

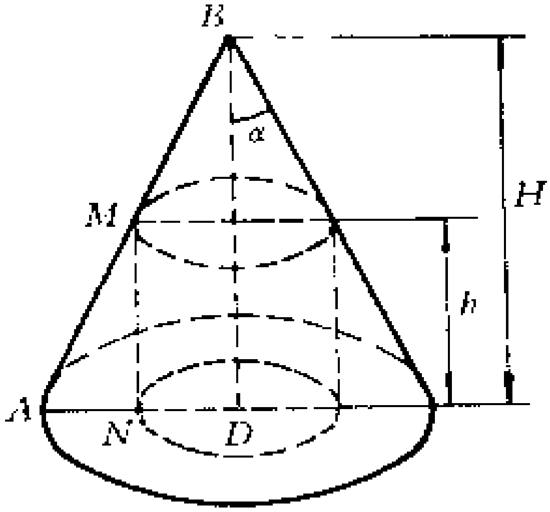


图 2.150

当 $\mathrm{tg}\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ 即 $H \leqslant 2R$ 时，由于 $f'(r) = \frac{2\pi}{R}[(2R-H)r + H(R-r)]$ 大于零．因此，当 $r = R$ 时，达到边界的极大值，但是，当 $r = R$ 时，显然有 $h = 0$，于是得到的解可以考虑作为一个扁平的圆柱，它的两底都与已知圆锥的底重合，而全表面积为 $2\pi R^2$．

1574．求从点 $M(p,p)$ 到抛物线 $y^2 = 2px$ 的最短距离．

解 按题设，只须考虑函数

$$f(y) = (x-p)^2 + (y-p)^2 = x^2 + 2p^2 - 2py$$
$$= \frac{y^4}{4p^2} + 2p^2 - 2py$$

的极值．

由于 $f'(y)=\frac{y^3-2p^3}{p^2}$. 令 $f'(y)=0$ 得 $y=\sqrt[3]{2}\cdot p$,此时 $x=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}p$. 经判别可知,$f(\sqrt[3]{2}p)$ 为最小. 因此,所求的最短距离为

$$\sqrt{f(\sqrt[3]{2})}=p\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}-1\right)^2+(\sqrt[3]{2}-1)^2}$$

$$=p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{4}-2}{2(\sqrt[3]{2}-1)}\right)^2+1}$$

$$=p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\frac{\sqrt[3]{2}+2}{2}}.$$

1575. 求从点 $A(2,0)$ 到圆 $x^2+y^2=1$ 的最短与最长距离.

解 显见,最短距离为1,最长距离为3,事实上,用微分法也可解之,只须求函数

$$(x-2)^2+y^2=5-4x=f(x)$$

的极值.

由于 $f'(x)=-4<0$,故 $f(x)$ 单调下降,因此,当 $x=-1$ 时,有最大值 $\sqrt{f(-1)}=3$;而当 $x=1$ 时有最小值 $\sqrt{f(1)}=1$.

1576. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(0<b<a)$ 的经过顶点 $(0,-b)$ 的最大弦.

解 按题设,我们须求函数

$$x^2+(y+b)^2=x^2+y^2+2by+b^2$$

$$=\left(a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2\right)+y^2+2by+b^2$$

$$=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y^2+2by+(a^2+b^2)=f(y)$$

的最大值. 为此,先求得 $f'(y)=2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y+2b$. 令 $f'(y)=0$,得 $y=\frac{b^3}{a^2-b^2}=\frac{b^3}{c^2}(c=\sqrt{a^2-b^2})$,此时

$$x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^6}{c^4}=a^2\left(1-\frac{b^4}{c^4}\right),$$

或

$$\begin{aligned}x&=\pm\frac{a}{c^2}\sqrt{c^4-b^4}\\&=\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2}\left(b\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

经判别可知此时为最大值,其值为

$$\sqrt{a^2\left(1-\frac{b^4}{c^4}\right)+\left(\frac{b^3}{c^2}+b\right)^2}=\frac{a^2}{c}.$$

此即最大弦长. 弦的一端点为$(0,-b)$,另一端点为 $\left(\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2},\frac{b^3}{c^2}\right)$, 但必须 $b\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, $\sqrt{a^2-2b^2}$ 才有意义.

若 $b>\frac{a}{\sqrt{2}}$,则由于

$$\begin{aligned}f'(y)=2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y+2b&>2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot(-b)\\&+2b=\frac{2a^2}{b}>0,\end{aligned}$$

故当 $y=b,x=0$ 时,取得弦长的边界最大值. 此时最大弦长为 $2b$.

1577. 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上的点 $M(x,y)$ 引切线,此切线与坐标轴构成一个三角形,使此三角形的面积为最小.

解 切线斜率为 $k=-\frac{b^2x}{a^2y}$，于是切线方程为

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x).$$

不失一般性，可设点 M 在第一象限．它在两坐标轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x}$ 和 $\frac{b^2}{y}$．因此，所求三角形的面积为

$$\frac{a^2b^2}{2xy}=\frac{a^3b}{2x\sqrt{a^2-x^2}}.$$

按题设，我们考虑函数

$$f(x)=x^2(a^2-x^2)$$

的最大值．为此，先求得

$$f'(x)=2a^2x-4x^3.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$，此时，$y=\frac{b}{\sqrt{2}}$．经判别可知 $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 为最大值．因此，所求的点 M 为 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$，三角形面积的最小值为 ab.

1578. 一物体为直圆柱形，其上端为半球形．若此物体的体积等于 V，问这物体的尺寸如何，才有最小表面积？

解 设 r 为圆柱的底半径，h 为圆柱的高，则按题设，我们有

$$V=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2h \text{ 或 } h=\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r,$$

故知其表面积为

$$S(x)=3\pi r^2+2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r\right)=\frac{5}{3}\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

$S'(r)=\frac{10}{3}\pi r-\frac{2V}{r^2}$，令 $S'(r)=0$，得

$r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$，此时 $h=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$. 经判别可知 $S\left(\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}\right)$ 为最小值．因此，当 $r=h=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$ 时表面积最小．

1579. 露天水沟的横断面为等腰梯形．若沟中流水的横断面等于 S，水面的高等于 h，问水沟侧边的倾角 φ 如何，才使横断面被水浸湿的周长为最小？

解 浸湿周长 $l=a+2h\csc\varphi$，其中 a 为底边长，而截面积

$$S=\frac{1}{2}(2a+2h\operatorname{ctg}\varphi)h=ah+h^2\operatorname{ctg}\varphi.$$

于是，

$$l=2h\csc\varphi+\frac{S}{h}-h\operatorname{ctg}\varphi.$$

由 $\dfrac{dl}{d\varphi}=-\dfrac{2h\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\dfrac{h}{\sin^2\varphi}=0$，得 $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$，所以，$\varphi=60°$.

因为

$$\left.\frac{d^2l}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=60°}=\left.\frac{2h\sin^3\varphi-h\sin2\varphi(1-2\cos\varphi)}{\sin^4\varphi}\right|_{\varphi=60°}>0,$$

所以，当 $\varphi=60°$ 时，横断面被水浸湿周长为最小．

1580. 设闭曲线所包围的面积为 S 及一圆周也包围同一的面积 S，则闭曲线的长与圆周长之比为该曲线的“弯曲性”.

设等腰梯形 $ABCD(AD\,/\!/\,BC)$ 的底边 $AD=2a$ 及锐角 $BAD=\alpha$，问等腰梯形的形状如何，才有最小的弯曲性？

解 设腰 $AB=CD=b$，则梯形的周长为

$$l = 4a + 2b(1 - \cos\alpha),$$

梯形的面积为

$$S = (2a - b\cos\alpha)b\sin\alpha.$$

令 $S = \pi R^2$ 得

$$R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{(2a - b\cos\alpha)b\sin\alpha},$$

相应的圆周长为

$$L = 2\pi R = 2\sqrt{\pi(2a - b\cos\alpha)b\sin\alpha}.$$

令弯曲性为 K,则

$$K = \frac{l}{L} = \frac{2a + b(1 - \cos\alpha)}{\sqrt{\pi(2a - b\cos\alpha)b\sin\alpha}}.$$

由$\frac{dK}{db} = 0$,得 $b = a\sec^2\frac{\alpha}{2}$. 可以验证,当 $AB = CD = a\sec^2\frac{\alpha}{2}$ 时,具有最小的弯曲性,此时,梯形恰好外切于某圆.

1581. 从半径为 R 的圆中应切去怎样的扇形,才能使余下的部分,可卷成一漏斗,其容积为最大?

解 设余下部分的中心角为 x,则漏斗(呈圆锥状)底的周长为 Rx,底半径为$\frac{Rx}{2\pi}$(R 为原圆的半径),其高 $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$,其容积为

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

按题设,我们只须考虑当 x 为何值时,函数

$$f(x) = x^4(4\pi^2 - x^2)$$

的值最大. 为此,先求得

$$f'(x) = 16\pi^2 x^3 - 6x^5.$$

令 $f'(x)=0$，要注意不允许 $x=0$，得 $x=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. 经判别可知 $f\left(2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ 最大. 因此，所割去的扇形的中心角应为 $2\pi\left(1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

1582. 从南至北的铁路经过 B 城，某工厂 A 距此铁路的最短距离为 a 千米，距北面之 B 城 b 千米. 为了从 A 到 B 运输货物最经济，从工厂建设一条侧轨，若每吨货物沿侧轨运输的价格是每一千米 p 卢布，而沿铁路为一千米 q 卢布($p>q$)，则侧轨应向铁路取怎样的角度 φ?

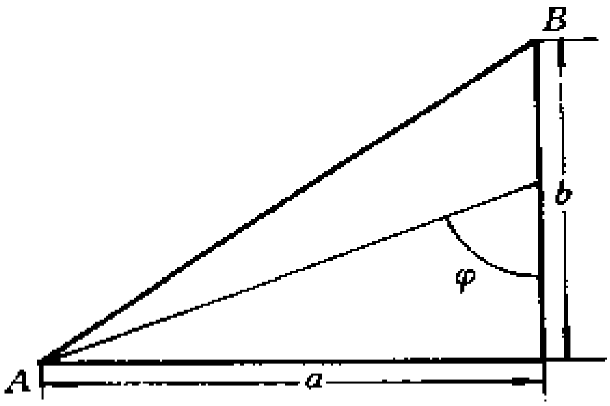


图 2.151

解 所需运费为

$M=(b-a\operatorname{ctg}\varphi)q+\sqrt{a^2+a^2\operatorname{ctg}^2\varphi}\,p=qb-aq\operatorname{ctg}\varphi+pa\csc\varphi.$

由 $\dfrac{dM}{d\varphi}=\dfrac{aq}{\sin^2\varphi}-\dfrac{ap\cos\varphi}{\sin^2\varphi}=0$，得 $\varphi_0=\arccos\dfrac{q}{p}$. 又

$$\left.\frac{d^2M}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0}=ap\frac{1}{\sin\varphi_0}>0,$$

故当 $\arccos\dfrac{q}{p}\geqslant\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a}{b}$ 时，$\varphi_0=\arccos\dfrac{q}{p}$，相应运

费最省；当 $\arccos\frac{q}{p} < \arctan\frac{a}{b}$ 时，$\varphi_0 = \arctan\frac{a}{b}$ 运费最省(图 2.151).

1583. 两船各以一定的速度 u 和 v 沿直线前进，两者前进方向所成的角为 θ. 若于某时刻它们与其路线交点之距离分别为 a 和 b，求二船的最小距离.

解　设两船与路线交点的距离分别为 a、b 时的时刻 $t_0 = 0$，则时刻为 t 时两船的距离 s 适合下式：

$$s^2 = (a + ut)^2 + (b + vt)^2 - 2(a + ut)(b + vt)\cos\theta.$$

由 $2s\frac{ds}{dt} = 2(a + ut)u + 2(b + vt)v - 2(bu + 2uvt + av)\cos\theta = 0$，解得

$$t_1 = -\frac{au + bv - (av + bu)\cos\theta}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}.$$

于是，相应地有

$$\begin{aligned} s^2 &= (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) + 2[(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]t_1 + (u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta)t_1^2 \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}\{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)(u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta) - 2[(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]^2 + [(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]^2\} \\ &= \frac{[(av - bu)\sin\theta]^2}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}. \end{aligned}$$

经检验可知，此时 s 最小：

$$s = \frac{|av - bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}.$$

又两船的最小距离也可在 $t_0=0$ 之前达到．类似地，可求得最小距离为 $s=\dfrac{|av+bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}$.

总之，两船间的最小距离为

$$s=\frac{|av\mp bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}.$$

1584. 在 A 与 B 二点处各有一光源，其强度分别为 S_1 枝烛光与 S_2 枝烛光．在线段 $AB=a$ 上求出最小照明的点 M.

解　设 $AM=x$，则照度

$$I=\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{(a-x)^2}.$$

由 $\dfrac{dI}{dx}=-\dfrac{2S_1}{x^3}+\dfrac{2S_2}{(a-x)^3}=0$ 得

$$S_2x^3=S_1(a-x)^3.$$

解之，得

$$x=a\left(1+\sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}}\right)^{-1}.$$

经检验此时照度最小．

1585. 发光点位于半径为 R 与 $r(R>r)$ 的二互不相交之球的连心线上，并在此二球的外面，此发光点的位置如何，才可使二球表面上照明部分之和为最大?

解　设发光点离大球中心之距离为 x，两球中心之距离为 a，则按球冠面积公式推知照明部分面积之和为

$$S=2\pi R\left(R-\frac{R^2}{x}\right)+2\pi r\left(r-\frac{r^2}{a-x}\right),$$

式中 x 应满足 $R<x\leqslant a-r$．由

$$\frac{dS}{dx}=2\pi R^3\cdot\frac{1}{x^2}-2\pi r^3\cdot\frac{1}{(a-x)^2}=0$$

得

$$x=\frac{a}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

又由 $x\leqslant a-r$ 可得

$$\frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}+r^{\frac{3}{2}}}a\leqslant a-r,$$

即

$$a\geqslant r+R\sqrt{\frac{R}{r}},$$

经检验此时照明面积最大.

当 $R+r<a<r+R\sqrt{\frac{R}{r}}$ 时,显然有 $x=a-r$,经检验此时照明面积也为最大.

1586. 设圆桌面的半径为 a,应当在圆桌面中央上面怎样高的地方安置电灯,才可使其桌子边沿上的照度为最大?

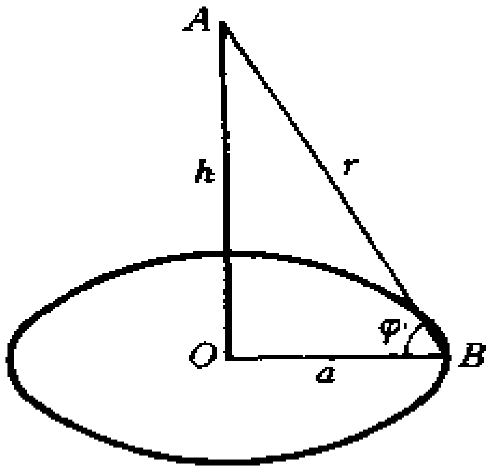


图 2.152

解 如图 2.152 所示. 由物理学知,照度 I 为

$$I=k\frac{\sin\varphi}{r^2}$$

$$=k\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r^3}$$(k 为常数). 考虑函数

$f(r)=\frac{r^2-a^2}{r^6}=\frac{1}{r^4}-\frac{a^2}{r^6}$ 何时最大. $f'(r)=-\frac{4}{r^5}+$

$\frac{6a^2}{r^7}=\frac{6a^2-4r^2}{r^7}$，令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{3}{2}}a$. 经判别可知 $f\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 最大. 因此，我们应在高 $h=\sqrt{\frac{3}{2}a^2-a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 的地方安置电灯，才可使桌子边沿上的照度为最大.

1587. 向宽为 a 米的河修建一宽为 b 米的运河，二者成直角相交，问能驶进这运河的船，其最大的长度如何？

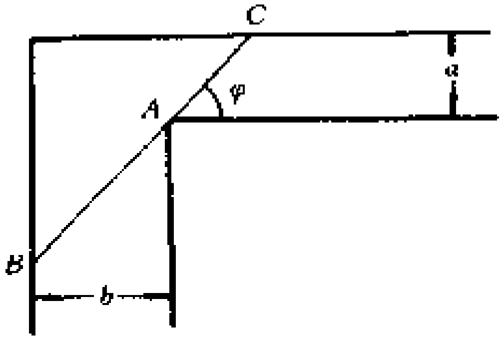


图 2.153

解 如图 2.153 所示. BC 的长度

$$l=a\csc\varphi+b\sec\varphi.$$

$$l'=\frac{b\sin^3\varphi-a\cos^3\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi},$$

令 $l'=0$ 得 $\operatorname{tg}\varphi_0=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 或 $\operatorname{ctg}\varphi_0=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$，从而有

$$\csc\varphi_0=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}},\sec\varphi_0=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}.$$

$$l''\Big|_{\varphi=\varphi_0}=3\left(\frac{b}{\cos\varphi_0}+\frac{a}{\sin\varphi_0}\right)>0,$$

因此，$l|_{\varphi=\varphi_0}$ 为最小值，即船的最大长度为

$$l|_{\varphi=\varphi_0}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

1588. 船航行一昼夜的耗费由两部分组成：固定部分等于 a 卢布，变动部分与速度的立方成比例增加. 在怎样的速度

v 时，船航行为最经济？

解 设航行的全路程为 s，速度为 v，则总耗费

$$Q=(a+kv^3)\frac{s}{v}=\frac{as}{v}+skv^2.$$

由 $\frac{dQ}{dv}=0$ 得 $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. 经检验知，此时船航行最经济．

1589. 重量为 P 的物体位于粗糙的水平面上，须用力把物体从原位置移动．若物体摩擦系数等于 k，问作用力对水平面的倾斜如何，才使所须的力量为最小？

解 设作用力 F 对水平面的倾角为 α，则

$$F\cos\alpha=k(P-F\sin\alpha),$$

即

$$F=\frac{kP}{\cos\alpha+k\sin\alpha}.$$

令 $y=\cos\alpha+k\sin\alpha$，为使 F 最小，只要使 y 最大．由 $y'_\alpha=-\sin\alpha+k\cos\alpha=0$ 得 $\alpha_0=\operatorname{arc\,tg}k$. 此时，

$$y''_\alpha\Big|_{\alpha=\alpha_0}=-\cos\alpha_0-k\sin\alpha_0=-\sqrt{1+k^2}<0.$$

即当 $\alpha_0=\operatorname{arc\,tg}k$ 时，y 为最大值，从而 F 为最小值，也即此时用力最省．

1590. 有一茶杯，其形状为半径为 a 的半球，于茶杯中放一长为 $l>2a$ 的棒，求棒的平衡位置．

解 取球心为坐标原点．当 $2a<l\leqslant 4a$ 时，设棒的重心的纵坐标为 y，棒对杯口所在平面的倾角为 φ，则

$$y=-\left(2a\cos\varphi-\frac{l}{2}\right)\sin\varphi\quad\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right).$$

当棒平衡时，y 最小，为此，求 y 的极值．由 $y'_\varphi=$

$$-4a\cos^2\varphi-\frac{l}{2}\cos\varphi+2a=0 \text{ 得}$$

$$\cos\varphi=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$$（负值不合适，舍去）．经检验知此时 y 取最小值．即当 $\cos\varphi=\frac{l-\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$ 时棒取平衡位置．

当 $l>4a$ 时，棒的重心必在半球心外，于是此时棒失去平衡，无平衡位置．

§14. 曲线的相切．曲率圆．渐屈线

1° n 阶相切　有两曲线 $y=\varphi(x)$ 及 $y=\psi(x)$，若于点 x_0，

$$\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)\quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

及

$$\varphi^{(n+1)}(x_0)\neq\psi^{(n+1)}(x_0),$$

便说这两曲线于点 x_0 有 n 阶相切（在严格的意义上讲！）．当 $x\to x_0$ 时在这种情形有：

$$\varphi(x)-\psi(x)=O((x-x_0)^{n+1})$$

2° 曲率圆　圆周

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2,$$

与已知曲线 $y=f(x)$ 有不低于 2 阶的相切，此圆称为在对应点的曲率圆．这个圆的半径：

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为曲率半径，而量 $k=\frac{1}{R}$ 为曲率．

3° 渐屈线　曲率圆中心 (ξ,η)（曲率中心）

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

的轨迹称为已知曲线 $y = f(x)$ 的渐屈线．

1591．选择直线

$$y = kx + b$$

的参数 k 与 b，使它与曲线

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

有高于一阶的相切．

解 要有高于一阶的相切，必须使 $y'' = 6x - 6 = 0$，即要 $x = 1$；同时在 $x = 1$ 时，两个一阶导数也应相等，即 $k = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$.

当 $x = 1$ 时，代入方程 $x^3 - 3x^2 + 2 - y = 0$，得 $y = 0$. 由于直线 $y = kx + b$ 也须通过点 $(1,0)$，故有 $0 = -3 \cdot 1 + b$，即 $b = 3$.

因此，所求的直线为

$$y = 3(1 - x),$$

参数 $k = -3, b = 3$.

1592．应当怎样选择系数 a, b 和 c，才能使抛物线

$$y = ax^2 + bx + c$$

于点 $x = x_0$ 与曲线 $y = e^x$ 有二阶的相切？

解 对于抛物线 $y = ax^2 + bx + c$，在点 $x = x_0$ 有

$$y'\Big|_{x=x_0} = 2ax_0 + b, y''\Big|_{x=x_0} = 2a, y''' = 0.$$

按假设，应有

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = e^{x_0}, \\ 2ax_0 + b = e^{x_0}, \\ 2a = e^{x_0}, \end{cases}$$

解之，得

$$a=\frac{1}{2}e^{x_0},b=e^{x_0}(1-x_0),c=e^{x_0}\left(1-x_0+\frac{x_0^2}{2}\right).$$

1593. 下列曲线与 Ox 轴在点 $x=0$ 相切的阶如何：

(а) $y=1-\cos x$；　(б) $y=\operatorname{tg}x-\sin x$；

(в) $y=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$.

解　(а) $y'=\sin x, y''=\cos x$，于是

$$y'\Big|_{x=0}=0 \qquad y''\Big|_{x=0}=1.$$

而对于 Ox 轴 $y=0$，始终有 $y'=0, y''=0$. 因此，曲线 $y=1-\cos x$ 与 Ox 轴有一阶的相切.

(б) $y'=\sec^2x-\cos x, y''=2\sec^2x\operatorname{tg}x+\sin x$,

$y'''=4\sec^2x\operatorname{tg}^2x+2\sec^4x+\cos x$,

于是 $y'\Big|_{x=0}=y''\Big|_{x=0}=0, y'''\Big|_{x=0}=3\neq 0$. 因此，曲线 $y=\operatorname{tg}x-\sin x$ 与 Ox 轴有二阶的相切.

(в) $y'=e^x-1-x, y''=e^x-1, y=e^x$，于是

$$y'\Big|_{x=0}=y''\Big|_{x=0}=0, y'''\Big|_{x=0}=1\neq 0.$$

因此，曲线 $y=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$ 与 Ox 轴有二阶的相切.

1594. 证明曲线：

当 $x\neq 0$ 时，$y=e^{-\frac{1}{x^2}}$；当 $x=0$ 时，$y=0$ 在点 $x=0$ 与 Ox 轴相切的阶为无穷大.

解　利用 1225 题的结果知，对于任意自然数 n，有

$$y^{(n)}\Big|_{x=0}=0,$$

此即证明了所给的曲线在点 $x=0$ 与 Ox 轴相切的阶为

无穷大.

1595. 求双曲线

$$xy=1$$

在下列各点的曲率半径和曲率中心：

(a)$M(1,1)$；(6)$N(100,0.01)$.

解 $y=\frac{1}{x},y'=-\frac{1}{x^2},y''=\frac{2}{x^3}$.

(a) 在点$M(1,1)$，$y=1,y'=-1,y''=2$，于是，曲率半径

$$R=\frac{[1+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}{2}=\sqrt{2},$$

曲率中心(ξ,η)为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=1-\frac{-1(1+1)}{2}=2,$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=1+\frac{2}{2}=2.$$

(6) 在点$N(100,0.01)$，

$$y=0.01,y'=-0.0001,y''=0.000002.$$

与(a)相似，代入公式，近似地有

曲率半径$R=500000$和曲率中心$(150,500000)$.

求下列曲线的曲率半径：

1596. 抛物线$y^2=2px$.

解 $y'=\frac{p}{y},y''=-\frac{p}{y^2}y'=-\frac{p^2}{y^3}$. 于是，曲率半径

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{p^2}{y^3}\right|}=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

$$= p\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}} = p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

1597. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 不妨设 $a>b$. 由于

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}, y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

于是,曲率半径

$$R = \frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2|y|^3}} = \frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$= \frac{(a^4b^2-a^2b^2x^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$= \frac{a^3b^3\left(a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \frac{(a^2-\epsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

其中 $\epsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率.

1598. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 由于 $y'=\frac{b^2x}{a^2y}, y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$. 于是,曲率半径

$$R = \frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2|y|^3}} = \frac{(a^4y^3+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$= \frac{(a^2b^2x^2-a^4b^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{(\varepsilon^2 x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

其中 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ 为双曲线的离心率．

1599. 内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

解 由于 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, y'' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$. 于是，曲率半径为

$$R = \frac{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\right|} = \left|\frac{\frac{a}{x}}{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}}\right| = 3|axy|^{\frac{1}{3}}.$$

1600. 椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

于是，曲率半径为

$$R = \frac{\left(1+\frac{b^2\operatorname{ctg}^2 t}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{a^2|\sin t|^3}} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$$

$$= \frac{a^3\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^2}{b}(1-\varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}},$$

其中 ε 为椭圆的离心率．

1601. 摆线 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=\frac{1}{4a\cos^4\frac{t}{2}}.$$

于是,曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}}=4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|=2\sqrt{2ay}.$$

1602. 圆的渐伸线 $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}t,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{at\cos^3t}.$$

于是,曲率半径为

$$R=\frac{(1+\operatorname{tg}^2t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a|t\cos^3t|}}=a|t|.$$

1603. 证明二次曲线

$$y^2=2px-qx^2$$

的曲率半径与法线段的立方成比例.

证 曲线的曲率半径公式为

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

而法线段公式为

$$l=|y\sqrt{1+y'^2}|,$$

因此，$\frac{R}{l^3}=\frac{1}{|y^3y''|}$. 下面求 y^3y''：

因为 $y^2=2px-qx^2$，故在等式两端分别对 x 求两次导数，即得

$$2yy'=2p-2qx \text{ 或 } yy'=p-qx, \qquad (1)$$

$$yy''+y'^2=-q. \qquad (2)$$

以 y^2 乘(2)式两端，并以(1)式及原二次曲线的表达式代入左右端，即得

$$y^3y''+(p-qx)^2=-q(2px-qx^2);$$

化简之，最后得

$$y^3y''=-p^2.$$

因此，$\frac{R}{l^3}=\frac{1}{p^2}$ 为一常数．证完．

1604. 写出以极坐标表示的曲线的曲率半径公式．

解 设曲线的极坐标方程为 $r=r(\varphi)$，则由

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$$

可求得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2r'r'-rr''}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^3},$$

其中 $r'=\frac{dr}{d\varphi}, r''=\frac{d^2r}{d\varphi^2}$.

于是，曲率半径为

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|}.$$

求下列极坐标方程所表曲线的曲率半径：

1605. 阿基米德螺线 $r=a\varphi$.

解　由于 $r' = a, r'' = 0$. 于是,曲率半径为

$$R = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2}.$$

1606. 对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$.

解　由于 $r' = mae^{m\varphi} = mr, r'' = m^2 r$. 于是,曲率半径为

$$R = \frac{r^3(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + m^2 r^2} = r\sqrt{1 + m^2}.$$

1607. 心脏形线 $r = a(1 + \cos\varphi)$.

解　$r' = -a\sin\varphi, r'' = -a\cos\varphi$.

$$R = \frac{[a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi(1 + \cos\varphi)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}a^3(1 + \cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3a^2(1 + \cos\varphi)}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2ar}.$$

1608. 双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

解　$r' = -\frac{a^2\sin 2\varphi}{r}, r'' = -\frac{r^4 + a^4}{r^3}$,

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = \frac{3a^4}{r^2}, (r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^6}{r^3}.$$

于是,曲率半径为

$$R = \frac{\frac{a^6}{r^3}}{\frac{3a^4}{r^2}} = \frac{a^2}{3r}.$$

1609. 在曲线 $y = \ln x$ 上求曲率最大的点.

解　由于 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$,所以,曲率半径为

$$R=\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|}.$$

按题设，我们只须考虑函数

$$f(x)=\frac{(1+x^2)^3}{x^2}$$

当 x 取何值时达到最小值. 由于

$f'(x)=\dfrac{2(1+x^2)^2(2x^2-1)}{x^3}$，故令 $f'(x)=0$ 求得正根 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 当 $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$f'(x)>0$. 因此，当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$f(x)$ 取极小值. 又由于只有一个极小值，故也是最小值.

这样一来，当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$y=-\dfrac{\ln 2}{2}$ 时，曲率半径为最小，也即曲率为最大. 因此，所求的点为 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{\ln 2}{2}\right)$.

1610. 三次抛物线 $y=\dfrac{kx^3}{6}(0\leqslant x<+\infty,k>0)$ 的最大曲率等于 $\dfrac{1}{1000}$，求达到此最大曲率的点 x.

解 为方便起见，令 $c=\dfrac{k}{6}$. 因为

$$y'=3cx^2,y''=6cx,$$

所以，曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6cx}{(1+9c^2x^4)^{\frac{3}{2}}}(x\geqslant 0).$$

由$\frac{dK}{dx}=6c\frac{\sqrt{1+9c^2x^4}(1-45c^2x^4)}{(1+9c^2x^4)^3}=0$,得

$$x_0^4=\frac{1}{45c^2}.$$

可证$\left.\frac{d^2K}{dx^2}\right|_{x=x_0}<0$,又根据条件,$K(x_0)$为$K(x)$的最大值,且有

$$K(x_0)=\frac{6c\sqrt[4]{\frac{1}{45c^2}}}{\left(1+9c^2\cdot\frac{1}{45c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6\sqrt{c}\sqrt[4]{\frac{1}{45}}}{\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{10^3},$$

解之,得

$$c=\frac{18\sqrt{5}}{5^3\times10^6},$$

从而

$$x_0^2=\frac{1}{\sqrt{45}c}=\frac{5^2\times10^6}{54}$$

或

$$x_0=\sqrt{\frac{5^2\times10^6}{54}}\approx680.$$

此即达到最大曲率的点.

求下列各曲线的渐屈线方程:

1611. 抛物线$y^2=2px$的渐屈线.

解 由于$y'=\frac{p}{y}$,$y''=-\frac{p^2}{y^3}$,故曲率中心坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{\frac{p}{y}\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)}{\frac{p^2}{y^3}}$$

$$= x + \frac{y^2 + p^2}{p} = x + \frac{2px + p^2}{p} = 3x + p,$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y - \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2},$$

即

$$x = \frac{\xi - p}{3}, y^3 = -p^2\eta. \qquad (*)$$

由于 $y^6 = 8p^3x^3$，故将(*)式代入后，消去 x 及 y，即得渐屈线方程为

$$27p\eta^2 = 8(\xi - p)^3.$$

1612. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐屈线.

解 由于 $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}, y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}$，故曲率中心的坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = x - \frac{\frac{b^2x}{a^2y}\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)}{\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

$$= x - \frac{b^2x \cdot a^2y^3 \cdot (a^4y^2 + b^4x^2)}{a^6y^3b^4}$$

$$= x - \frac{xa^2b^2\left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2\right)}{a^4b^2}$$

$$= x - \frac{x\left(a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right)}{a^2} = \frac{c^2}{a^4}x^3,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y - \frac{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

$$= y - \frac{y(a^4y^2+b^4x^2)}{a^2b^4}$$

$$= y - \frac{ya^2b^2\left(b^2+\frac{c^2}{b^2}y^2\right)}{a^2b^4} = -\frac{c^2}{b^4}y^3,$$

即

$$c^2y^3 = -b^4\eta, c^2x^3 = a^4\xi.$$

于是，

$$c^{\frac{4}{3}}y^2 = b^{\frac{8}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}, c^{\frac{4}{3}}x^2 = a^{\frac{8}{3}}\xi^{\frac{2}{3}},$$

从而，将$\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^{\frac{2}{3}}\xi^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}, \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$ 相加即得渐屈线方程

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

其中 $c^2 = a^2 - b^2$. 它为一内摆线.

1613. 内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的渐屈线.

解 由于 $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, y'' = \frac{1}{3}a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$，故曲率中心的坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$= x + \frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}} = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}}$$

$$= y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

于是，

$$\xi + \eta = (x + y) + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})$$

$$= (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})\left[\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right) + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$

$$\xi - \eta = (x - y) - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})$$

$$= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left[\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right) - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3.$$

因此，

$$(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^2$$

$$= 2\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

此即所求的渐屈线方程，它仍为一内摆线．

1614. 曳物线 $x = a\ln\dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ 的渐屈线．

解 先求 y' 和 y''. 在等式

$$x = a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

两端分别对 x 求导，得

$$1 = a\left(-\frac{-1}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} \cdot \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \frac{y'}{y}\right)$$

$$+ \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

化简得

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \qquad (1)$$

再将(1)式两端分别对 x 求导并以(1)式代入，化简即

得

$$y''=\frac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}.$$

于是,曲率中心的坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{\dfrac{a^2y}{(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}}$$

$$=x+\sqrt{a^2-y^2},$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{\dfrac{a^2}{a^2-y^2}}{\dfrac{a^2y}{(a^2-y^2)^2}}=\frac{a^2}{y}.$$

由于点(x,y)的坐标x和y,适合方程

$$x+\sqrt{a^2-y^2}=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

故

$$\xi=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

即

$$\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}=e^{\frac{\xi}{a}}. \tag{2}$$

将(2)式分子有理化,得

$$\frac{a^2-(a^2-y^2)}{y(a-\sqrt{a^2-y^2})}=e^{\frac{\xi}{a}},$$

即

$$\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}=e^{-\frac{\xi}{a}}. \tag{3}$$

(2)+(3)并除以2,即得

$$\frac{a}{y}=\operatorname{ch}\frac{\xi}{a},$$

从而得

$$\eta=a\operatorname{ch}\frac{\xi}{a},$$

此即所要求的渐屈线方程，它为一悬链线．

1615．对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$ 的渐屈线．

解 利用直角坐标与极坐标的互化公式来求渐屈线方程．首先，我们有

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+m\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

两边对 x 求导得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{m(xy'-y)}{x^2+y^2},$$

即

$$x+yy'=m(xy'-y). \tag{1}$$

解(1)式即得

$$y'=\frac{x+my}{mx-y}.$$

由(1)式再对 x 求导，化简得

$$y''=\frac{1+y'^2}{mx-y}.$$

以 y' 及 y'' 代入曲率中心的表达式中，化简整理得

$$\xi=-my,\eta=mx. \tag{2}$$

设 $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$，$\psi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}$，于是由(2)式得

$$\begin{cases}\xi^2+\eta^2=m^2(x^2+y^2), & (3)\\ -\dfrac{\xi}{\eta}=\dfrac{y}{x}. & (4)\end{cases}$$

(3) 式即 $\rho = mr = mae^{m\varphi}$,(4) 式即 $-\mathrm{ctg}\psi = \mathrm{tg}\varphi$ 或 $\varphi = \Psi - \frac{\pi}{2}$. 因此,最后我们得到所求的渐屈线方程为对数螺线

$$\rho = mae^{m(\varphi-\frac{\pi}{2})}.$$

1616. 证明摆线

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

的渐屈线仍为一摆线,仅其位置与已知摆线不同而已.

证 由于

$$y' = \frac{dy}{dx} = \mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

于是,

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = a(t - \sin t)$$

$$+ \frac{\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}\cdot\left(1+\mathrm{ctg}^2\,\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}}$$

$$= a(t + \sin)t,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = a(\cos t - 1).$$

令 $t - \pi = \tau$,即得

$$\xi = \pi a + a(\tau - \sin\tau), \eta = -2a + a(1 - \cos\tau).$$

此仍为摆线,显然,只是位置与原摆线不同而已.

§ 15. 方程的近似解法

1° 比例法(弦位法) 若函数 $f(x)$ 于闭区间$[a,b]$上连续及

$$f(a)f(b)<0,$$

且当 $a<x<b$ 时，$f'(x)\neq 0$，则方程

$$f(x)=0 \tag{1}$$

于区间 (a,b) 内有一个而且仅有一个实根 ξ. 可取下面的值作为此根的第一近似值：

$$x_1=a+\delta_1,$$

式中 $\delta_1=-\dfrac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$.

更进而对于区间 (a,x_1) 或 (x_1,b) 中，函数 $f(x)$ 在其两端异号的那一个区间运用这方法，得到根 ξ 的第二近似值 x_2，由此类推. 对于第 n 近似值 x_n，下列公式正确：

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{2}$$

式中 $m=\inf\limits_{a<x<b}|f'(x)|$，并且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi.$$

2° 牛顿法(切线法)　若在闭区间 $[a,b]$ 内 $f''(x)\neq 0$ 及 $f(a)f''(a)>0$，则可取数值

$$\xi_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

作为方程(1)的根 ξ 的第一近似值 ξ_1.

重复利用这个方法，很快就得到趋近于根 ξ 的一系列近似值 $\xi_n(n=1,2,\cdots)$，这些近似值的精确性可根据公式(2)来估计.

为了大略的确定方程的根，最好可作函数 $y=f(x)$ 的图形.

利用比例法，求下列方程的根(精确到 0.001)：

1617. $x^3-6x+2=0$.

解　设 $f(x)=x^3-6x+2=0$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续及 $f(0)=2$，$f(1)=-3$，且当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=3x^2-6x\neq 0$. 因而所给方程在 $(0,1)$ 内有且仅有一实根 ξ_1. 现求之，以 x_i 表示此根的第 i 次近似值，则有

$$x_1 = 0 + \delta_1 = -\frac{f(0)}{f(1) - f(0)}(1 - 0) = 0.4;$$

又因 $f(0.4) = -0.336$，故

$$x_2 = -\frac{f(0)}{f(0.4) - f(0)}(0.4 - 0) = 0.342;$$

$f(0.342) = -0.012$，故

$$x_3 = -\frac{f(0)}{f(0.342) - f(0)}(0.342 - 0) = 0.340;$$

由于 $f(0.340) = -0.001$，$m_1 = \inf\limits_{0<x<1} |f'(x)| = 3$，因此，如果取 0.340 作为此根的第二次近似值，其误差为

$$|0.340 - \xi_1| \leqslant \frac{|f(0.340)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的一近似根为 0.340.

再求其它的根：

因为 $f(2) = -2$，$f(3) = 11$，且当 $2 < x < 3$ 时，$f'(x) \neq 0$，故方程在 $(2,3)$ 内有且仅有一实根 ξ_2．与求 ξ_1 的方法类似，分别求得其各次的近似值为：

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f(3) - f(2)}(3 - 2) = 2.15;$$

$$x_2 = 2.15 - \frac{f(2.15)}{f(3) - f(2.15)}(3 - 2.15) = 2.22;$$

$$x_3 = 2.22 - \frac{f(2.22)}{f(3) - f(2.22)}(3 - 2.22)$$
$$= 2.245;$$

$$x_4 = 2.245 - \frac{f(2.245)}{f(3) - f(2.245)}(3 - 2.245)$$
$$= 2.256;$$

$$x_5 = 2.256 - \frac{f(2.256)}{f(3) - f(2.256)}(3 - 2.256)$$
$$= 2.260;$$

$$x_6 = 2.260 - \frac{f(2.260)}{f(3) - f(2.260)}(3 - 2.260)$$
$$= 2.261;$$
$$x_7 = 2.261 - \frac{f(2.261)}{f(3) - f(2.261)}(3 - 2.261)$$
$$= 2.262.$$

由于$f(2.262) = 0.003$，$m_2 = \inf\limits_{2<x<3} |f'(x)| = 6$，因此，如果取 2.262 作为$\xi_2$的第七次近似值，其误差为

$$|2.262 - \xi_2| \leqslant \frac{|f(2.262)|}{m_2} < 0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的一近似根为 2.262.

由于此方程为一个三次方程，最后必然还有一实根．

因为$f(-2) = 6$，$f(-3) = -7$，且当$-3 < x < -2$时，$f'(x) \neq 0$，故此根ξ_3介于-3和-2之间．同上法求得其各次近似值为

$$x_1 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2) - f(-3)}(-2 + 3)$$
$$= -2.461;$$
$$x_2 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.461) - f(-3)}(-2.461 + 3)$$
$$= -2.574;$$
$$x_3 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.574) - f(-3)}(-2.574 + 3)$$
$$= -2.596;$$
$$x_4 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.596) - f(-3)}(-2.596 + 3)$$
$$= -2.601;$$

$$x_5 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.601) - f(-3)}(-2.601 + 3)$$
$$= -2.602.$$

由于 $f(-2.602) = -0.004$，$m_3 = \inf\limits_{-3<x<-2} |f'(x)| = 6$，因此，如果取 -2.602 作为 ξ_3 的第五次近似值，则其误差为

$$|-2.602 - \xi_3| \leqslant \frac{|f(-2.602)|}{m_3} < 0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的第三个根的近似值为 -2.602.

1618. $x^4 - x - 1 = 0$.

解 设 $f(x) = x^4 - x - 1$. 由于 $f(1) = -1$，$f(2) = 13$，且当 $1 < x < 2$ 时，$f'(x) \neq 0$，故所给方程在 $(1,2)$ 内有且仅有一实根 ξ_1，按1617题的方法，依次求得该根的各次近似值为

$$x_1 = 1.07; x_2 = 1.12; x_3 = 1.156; x_4 = 1.180;$$
$$x_5 = 1.196; x_6 = 1.205; x_7 = 1.217;$$
$$x_8 = 1.220; x_9 = 1.221.$$

由于 $f(1.221) = 0.002$，$m_1 = \inf\limits_{1<x<2} |f'(x)| = 3$，因此，如果取 1.221 作为 ξ_1 的第九次近似值，其误差为

$$|1.221 - \xi_1| \leqslant \frac{|f(1.221)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的一近似根为 1.221.

又因 $f(-1) = 1$，$f(-0.5) = -0.4375$，且当 $-1 < x < -0.5$ 时 $f'(x) \neq 0$，故所给方程在 $(-1, -0.5)$ 内有且仅有一实根 ξ_2，依次求得其各次近似值

为

$$x_1 = -0.652;\ x_2 = -0.789;\ x_3 = -0.706;$$

$$x_4 = -0.719;\ x_5 = -0.723;\ x_6 = -0.724.$$

由于 $f(-0.724) = -0.001$，$m_2 = \inf\limits_{-1<x<-0.5} |f'(x)| = 1$，因此，如果取 -0.724 作为 ξ_2 的第六次近似值，其误差为

$$|-0.724 - \xi_2| \leqslant \frac{|f(-0.724)|}{m_2} = 0.001,$$

已达到所需的精确度，于是，所给方程的另一近似根为 -0.724.

由于 $f'(x) = 4x^3 - 1 = 0$ 只有一实根，且 $f''(x) = 12x^2 > 0 (x \neq 0)$，故所给方程仅有二实根，其余二根为一对共轭复根.

1619. $x - 0.1\sin x = 2$.

解 设 $f(x) = x - 0.1\sin x - 2$，则 $f(2) = -0.091$，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0.0237$，且当 $2 < x < \frac{2\pi}{3}$ 时，$f'(x) \neq 0$，故所给方程在 $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一实根 ξ_1，依次求得其各次近似值为

$$x_1 = 2.075;\ x_2 = 2.080;\ x_3 = 2.083;\ x_4 = 2.087.$$

由于 $f(2.087) = 0.00003$，$m_1 = \inf\limits_{2<x<\frac{3\pi}{2}} |f'(x)| = 1 - 0.1\cos 2^{*)} \approx 0.959$，因此，如果取 2.087 作为 ξ_1 的第四次近似值，其误差为

$$|2.087 - \xi_1| \leqslant \frac{|f(2.087)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是，所给方程的近似根为

2.087(弧).

又方程 $x-0.1\sin x=2$ 与方程 $x-2=0.1\sin x$ 等价，而曲线 $y=x-2$ 与 $y=0.1\sin x$ 只有一个交点，因此，原方程只有一个实根．

*）因 $f'(x)=1-0.1\cos x, f''(x)=0.1\sin x>0$，故 $m_1=|f'(2)|=1-0.1\cos 2$. 以下同样情况不再说明．

1620. $\cos x=x^2$.

解 设 $f(x)=\cos x-x^2$，则因 $f(-x)=f(x)$，故原方程若有一根 ξ，必有另一根 $-\xi$. 又曲线 $y=x^2$ 与 $y=\cos x$ 只有两个交点．因此，原方程有且仅有两个根 $\pm\xi$. 为此，只需求一正根即可．

由于 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.09, f(1)=-0.46$，且当 $\frac{\pi}{4}<x<1$ 时，$f'(x)\neq 0$，故所给方程在 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 内有且仅有一实根 ξ，依次求得其各次的近似值为

$$x_1=0.821; x_2=0.828; x_3=0.826; x_4=0.825.$$

由于 $f(0.825)=-0.002, m=\inf\limits_{\frac{\pi}{4}<x<1}|f'(x)|=\left|f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=2.278$，因此，如果取 0.825 作为 ξ 的第四次近似值，其误差为

$$|0.825-\xi|\leqslant\frac{f(0.825)}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度，于是，所给方程的二近似根为 ± 0.825.

如果注意到 $f(0.824)=0.002, f(0.825)=$

-0.002，因此，取 ± 0.824 作为所给方程的二近似根，也可保证所需的精确度．

利用牛顿法，求下列方程的根（精确到所指定的程度）：

1621. $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$ （精确到 10^{-3}）.

解 曲线 $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ 与 $y=10x$ 共有两个交点．因此，所给方程共有两个实根．

设 $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}-10x$，则因 $f(0.4)=2.41$，$f(0.5)=-0.75$，且当 $0.4<x<0.5$ 时 $f'(x)\neq 0$，故所给方程在 $(0.4,0.5)$ 内有且仅有一实根．又由于在 $[0.4,0.5]$ 内 $f''(x)\neq 0$ 且 $f(0.4)f''(0.4)>0$，故利用牛顿法求近似根时，切点应取 $(0.4,f(0.4))$. 依次求得其各次近似值为

$$x_1=0.4-\frac{f(0.4)}{f'(0.4)}=0.459;$$

$$x_2=0.459-\frac{f(0.459)}{f'(0.459)}=0.471;$$

$$x_3=0.471-\frac{f(0.471)}{f'(0.471)}=0.472.$$

今估计误差：$f(0.472)=-0.013$. 由于 $f'(x)$ 为增函数，且为负的，故 $m=\inf\limits_{0.4<x<0.5}|f'(x)|=|f'(0.5)|=25$. 此，如果取 0.472 作为根的近似值，其误差为

$$|0.472\quad \xi|\leqslant\frac{f(0.472)}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的一近似根为 0.472.

现求第二个近似根，由于 $f(10)=0.001$，故此根可能逼近 10. 现分别以 9.9 及 9.99 试之：$f(9.9)=-0.98$，$f(9.99)=-0.09$. 因此，$f(9.99)\cdot f(10)<0$，加以在 $(9.99,10)$ 内 $f'(x)\neq 0$，故所给方程在 $(9.99,10)$ 内有且仅有一实根. 又因 $f(10)f''(10)>0$ 及 $f''(x)\neq 0$，故应用牛顿法求近似根时，切点应选在 $(10,f(10))$ 处，于是

$$x_1=10-\frac{f(10)}{f'(10)}=9.99999,$$

如果取 9.999 作为根的近似值，则其误差显然已达到所需的精确度. 于是，所给方程的又一近似根为 9.999.

1622. $x\lg x=1$ （精确到 10^{-4}）.

解 曲线 $y=\lg x$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$ 只有一个交点. 因此，所给方程只有一个实根. 现确定其范围. 设 $f(x)=x\lg x-1$，由于 $f(2.506)=-0.0004$，$f(2.507)=0.0005$，且当 $2.506<x<2.507$ 时，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，故在 $(2.506,2.507)$ 内有且仅有一实根，切点选在 $(2.507,f(2.507))$. 依次求得其各次近似值为

$$x_1=2.5064;\ x_2=2.5062.$$

由于 $f(2.5062)=0.00002$，$m=\inf\limits_{2.506<x<2.507}|f'(x)|=|f'(2.506)|=0.84$，因此，如果取 2.5062 作为根的近似值时，其误差为，

$$|2.5062-\xi|\leqslant\frac{|f(2.5062)|}{m}<0.0001,$$

已达到所需的精确度，故所求的唯一近似根为 2.5062.

1623. $\cos x\cdot\operatorname{ch}x=1$ （精确到 10^{-3}） （二正根）.

解 曲线 $y=\cos x$ 与 $y=\frac{1}{\operatorname{ch}x}$ 的交点有无穷多个，其中最小的三个正根分别记为 α,β,γ，且

$$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi,$$

$$2\pi<\beta<\frac{5\pi}{2},$$

$$\frac{7\pi}{2}<\gamma<4\pi.$$

现在我们将求 α 与 γ 两正根的计算方法叙述如下. 设 $f(x)=\cos x\operatorname{ch}x-1$.

(1) 先求 α.

由于 $f(4.7)=-1.6812$，$f(4.8)=4.3159$，知 $4.7<\alpha<4.8$. 又因在 $(4.7,4.8)$ 内 $f''(x)>0$，故切点应取在 $(4.8,f(4.8))$ 处，依次求得 α 的各次近似值为

$x_1=4.7345$；$x_2=4.7301$.

本题若采用 $\frac{|f(x_n)|}{m}$ 估计误差，由于 m 本身也需估计，而且繁琐，今用比例法与牛顿法联合使用求根的近似值. 设以右上角带“′”的 x'_i 表示用比例法求出的第 i 次近似根，则有

$$x'_1=4.7-\frac{f(4.7)}{f(4.8)-f(4.7)}(4.8-4.7)$$
$$=4.7280,$$

从而知

$$4.7280<\alpha<4.7345.$$

于是，

$$x'_2 = 4.7280 - \frac{f(4.7280)}{f(4.7345) - f(4.7280)}$$

$$(4.7345 - 4.7280) = 4.7300.$$

因此，

$$4.7300 < \alpha < 4.7301.$$

取 4.730 作为 α 的近似值，即可保证所需的精确度，于是，所给方程的一正根的近似值为 4.730.

(2) 再求 γ.

由于 $f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -1$，$f(11) \approx 133$，故知 $\frac{7\pi}{2} < \gamma < 11$. 切点取在 $(11, f(11))$ 处．分别用比例法及牛顿法求得

$$x'_1 = 10.9956, x_1 = 10.9956,$$

因而取 10.996 作为 γ 的近似值，即可保证所需的精确度．于是，所给方程的又一正根的近似值为 10.996.

1624. $x + e^x = 0$ （精确到 10^{-5}）.

解 设 $f(x) = x + e^x$，则 $f'(x) = 1 + e^x > 0$，$f''(x) = e^x > 0$. 由于 $f(0) = 1$，$f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$，故在 $(-1, 0)$ 内所给方程有且仅有一实根，切点选在 $(0, f(0))$ 处．依次求得此根的各次近似值为

$$x_1 = -0.5; x_2 = -0.56631; x_3 = -0.567132;$$

$$x_4 = -0.567145.$$

由于

$$|x_4 - \xi| \leqslant \frac{|f(-0.567145)|}{m}$$

$$= \frac{|f(-0.567145)|}{1 + e^{-1}} < 10^{-5},$$

故取 -0.56715 作为根的近似值，即可保证所需的精确度．

由于曲线 $y=e^x$ 与 $y=-x$ 只有一个交点，故上述近似根 -0.56715 即为所给方程的唯一近似根.

1625. $x\operatorname{th}x=1$. （精确到 10^{-6}）.

解 设 $f(x)=\operatorname{th}x-\frac{1}{x}$，则因曲线 $y=\operatorname{th}x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 仅有两个交点，故所给方程仅有二实根. 又因在 $x\operatorname{th}x$ 中以 $-x$ 代 x，其值不变，故方程的二实根为 $\pm\xi$.

由 $f'(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}+\frac{1}{x^2}>0$，知 $f(x)$ 是增函数. 又因 $f(1)=-0.2384$，$f(2)=0.4640$. 故所给方程在 $(1,2)$ 内有且仅有一实根. 又

$$f''(x)=-\frac{2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^3x}-\frac{2}{x^3}<0\quad(x>0),$$

因此切点应选为 $(1,f(1))$. 仍以 x'_i 及 x_i 分别表示用比例法及牛顿法求得的根的第 i 次近似值，重复使用，即得

$$x'_1=1.339,x_1=1.168,$$

故 $\quad 1.168<\xi<1.339$.

$$x'_2=1.2032,x_2=1.1989,$$

有 $\quad 1.1989<\xi<1.2032$.

$$x'_3=1.1996796,x_3=1.1996781.$$

故 $\quad 1.1996781<\xi<1.1996796$.

于是，取 ± 1.199678 作为根的近似值，即可保证所需的精确度.

1626. 求方程

$$\operatorname{tg}x=x$$

最小的三个正根（精确到 0.001）.

解 由 $y=\operatorname{tg}x$ 及 $y=x$ 的图形知方程有正根，且有无

穷个，只求其最小三正根，设 $f(x)=\operatorname{tg}x-x$.

(1) 由于 $f'(x)=\operatorname{tg}^2x>0, f''(x)=2\operatorname{tg}x\cdot\sec^2x>0\left(x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ 及 $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)f\left(\frac{23\pi}{16}\right)<0$，故在 $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{23\pi}{16}\right)$ 内所给方程有且仅有一实根 ξ_1，切点应选在 $\left(\frac{23\pi}{16},f\left(\frac{23\pi}{16}\right)\right)$ 处．依次求得其各次近似值为

$x_1=4.4959; x_2=4.4933.$

由于 $|f(4.4933)|=0.0012, m=\inf\limits_{\frac{4\pi}{3}<x<\frac{23\pi}{16}}|f'(x)|=\operatorname{tg}^2\frac{4\pi}{3}=3$，因此，如果取 4.493 作为根 ξ_1 的近似值，其误差为

$$|x_2-\xi_1|\leqslant\frac{|f(4.4933)|}{m}<0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的一最小正近似根为 4.493.

(2) 再求第二个最小正根．

由于 $f\left(\frac{39\pi}{16}\right)<0, f\left(\frac{79\pi}{32}\right)>0$，故在 $\left(\frac{39\pi}{16},\frac{79\pi}{32}\right)$ 内方程有且仅有一实根 ξ_2. 又因在此区间内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，故切点应选在 $\left(\frac{79\pi}{32},f\left(\frac{79\pi}{32}\right)\right)$ 处．依次求得 ξ_2 的各次近似值为

$x_1=7.7325; x_2=7.7258; x_3=7.7254.$

由于 $|f(7.7254)|=0.0083, m=\inf\limits_{\frac{39\pi}{16}<x<\frac{79\pi}{32}}|f'(x)|=\operatorname{tg}^2\frac{39\pi}{16}>25$，因此，如果取 7.725 作为 ξ_2 的近似值，其误差为

$$|x_3-\xi_2| \leqslant \frac{|f(7.7254)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的第二个最小正根的近似值为 7.725．

(3) 最后求第三个最小正根．

由于 $f\left(\frac{111\pi}{32}\right) < 0, f\left(\frac{223\pi}{64}\right) > 0$，故在 $\left(\frac{111\pi}{32}, \frac{223\pi}{64}\right)$ 内方程有且仅有一实根 ξ_3．又因在此区间内 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$，故切点应选在 $\left(\frac{223\pi}{64}, f\left(\frac{223\pi}{64}\right)\right)$ 处，依次求得 ξ_3 的各次近似值为

$$x_1 = 10.9233; x_2 = 10.9086; x_3 = 10.9041.$$

由于 $|f(10.9041)| = 0.014, m = \mathrm{tg}^2\frac{111\pi}{32} = 102.78$．因此，如果取 10.904 作为 ξ_3 的近似值，其误差为

$$|x_3-\xi_3| \leqslant \frac{|f(10.9041)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度．于是，所给方程的第三个最小正根的近似值为 10.904．

1627. 求方程

$$\mathrm{ctg}x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

的二正根(精确到 10^{-3})．

解 由 $y = \mathrm{ctg}x$ 与 $y = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ 的图形知交点有无穷个，我们只求其最小二正根 ξ_1 及 ξ_2：

$$\frac{\pi}{2} < \xi_1 < \pi, \frac{3\pi}{2} < \xi_2 < 2\pi.$$

(1) 先求 ξ_1

设 $f(x)=\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$,则在所考虑的区间内 $f'(x)=-\operatorname{ctg}^2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}<0, f''(x)=\frac{2\cos x}{\sin^3x}-\frac{2}{x^3}<0$. 又因 $f(2.0708)=0.0062, f(2.1708)=-0.0593$,故切点应选在$(2.1708, f(2.1708))$处. 用比例法与牛顿法联合求 ξ_1. 重复应用,即得

$x'_1=2.0803, x_1=2.0923$,

故 $2.0803<\xi_1<2.0923$.

$$x'_2=2.0815, x_2=2.0816,$$

故取 2.081 作为 ξ_1 的近似值,即可保证所需的精确度. 于是,所给方程的一正根的近似值为 2.081.

(2) 再求 ξ_2.

由于 $f(5.9324)=0.0648, f(5.9424)=-0.0169$,故

$5.9324<\xi_2<5.9424$,

切点取$(5.9424, f(5.9424))$.

用比例法及牛顿法各一次,即得

$$x'_1=5.9403, x_1=5.9404,$$

因此,取 5.940 作为 ξ_2 的近似值,即可保证所需的精确度. 于是,所给方程的又一正根的近似值为 5.940.