第一章 分析引论

§1. 实 数

1° 数学归纳法　为了证明某定理对任意的自然数 n 为真，只须证明下面两点就够了：(1) 这定理对 $n = 1$ 为真，(2) 设这定理对任何的一个自然数 n 为真，则它对其次的一自然数 $n + 1$ 也为真.

2° 分割　假设分有理数为 A 和 B 两类，使其满足于下列条件：(1) 两类均非空集，(2) 每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，(3) 属于 A 类(下类) 的任一数小于属于 B 类(上类) 的任何数，这样的一个分类法称为分割. (a) 若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数. (b) 若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数，则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数*.

3° 绝对值　假若 x 为实数，则用下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值：

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，有以下的不等式成立：

$$|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

4° 上确界和下确界　设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合. 若：

* 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数.

(1) 每一个 $x \in X$* 满足不等式

$$x \geqslant m;$$

(2) 对于任何的 $\epsilon > 0$，存在有 $x' \in X$，使

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样，若：

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leqslant M,$$

(2) 对于任何的 $\epsilon > 0$，存在有 $x'' \in X$，使

$$x'' > M - \epsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界，则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界，则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5° 绝对误差和相对误差　设 $a(a \neq 0)$ 是被测的量的准确数值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差，而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差.

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半，则说 x 有 n 位准确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立：

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

---

* 符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X.

证 当 $n=1$ 时,等式成立.

设对于 $n=k$(自然数)时,等式成立,即

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$
$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

即对于 $n=k+1$ 时等式也成立.

于是,由数学归纳法知,对于任何自然数 n,有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证 当 $n=1$ 时,等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立,即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$$
$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

即对于 $n=k+1$,时等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

证 当 $n=1$ 时,等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立,即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2,$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}
&1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3\\
&=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3\\
&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\
&=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\\
&=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2\\
&=[1+2+\cdots+(k+1)]^2,
\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时,等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

4. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

证 当 $n=1$ 时,等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立,即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}
&1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k\\
&=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,
\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时,等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

5. 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$，求证

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中C_n^m是由n个元素中选取m个的组合数，由此推出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时，由于

$$[a+b]^{[1]}=a+b$$

及
$$\sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b,$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}, \tag{1}$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}\cdot(a+b-kh). \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned}(a+b)^{[k+1]}&=(a+b-kh)\cdot\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}\\&=(a+b-kh)\{C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}\\&\quad+\cdots+C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\}\\&=\{(a-kh)+b\}C_k^0a^{[k]}b^{[0]}\\&\quad+\{[a-(k-1)h]+(b-h)\}C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}\\&\quad+\cdots+\{a+(b-kh)\}C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\\&=C_k^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k]}b^{[1]}\\&\quad+C_k^1a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^ka^{[1]}b^{[k]}\\&\quad+C_k^ka^{[0]}b^{[k+1]}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_{k+1}^{0}a^{[k+1]}b^{[0]} + (C_k^0 + C_k^1)a^{[k]}b^{[1]} \\
&\quad + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^k)a^{[1]}b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]} \\
&= C_{k+1}^{0}a^{[k+1]}b^{[0]} + (C_{k+1}^{0}a^{[k]}b^{[1]} \\
&\quad + \cdots + (C_{k+1}^{k}a^{[1]}b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^{m}a^{[k+1-m]}b^{[m]},
\end{aligned}
$$

故由$(a+b)^{[k]} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$可推得下式成立：

$$(a+b)^{[k+1]} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^{m}a^{[k+1-m]}b^{[m]},$$

即对于 $n = k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}. \tag{3}$$

在式子

$$a^{[n]} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$$

中，令 $h = 0$，即得

$$a^{[n]} = a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m}b^m.$$

6. 证明贝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证　当 $n = 1$ 时，此式取等号.

设 $n = k$ 时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，由于 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 大于 -1，所以 $1+x_i>0$. 因而有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\&\quad\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\&\quad=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})\\&\qquad+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

由于 $x_ix_j\geqslant 0$，所以

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\\&\qquad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立，

于是，对于任何自然数 n，有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\\&\quad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.\end{aligned}$$

7. 证明若 $x>-1$，则不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\quad(n>1)$$

为真，且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

证 只要在 6 题的贝努里不等式中，设

$$x_i=x\quad(i=1,2\cdots,n),$$

即得证

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,$$

从 6 题的证明过程中看出，仅当 $x=0$ 时，上式才取等号.

8. 证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad 当 n > 1.$$

证 当 $n=2$，因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，则

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2(k=1,2,\cdots),$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

于是，对于任何自然数 n，有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

9. 证明不等式

$$2!\cdot 4!\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n \quad 当 n > 1.$$

证 当 $n=2$ 时，因为 $2!\cdot 4! = 48$. 及 $[(2+1)!]^2 = 36$，所以，$2!\cdot 4! > [(2+1)!]^2$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$2!\cdot 4!\cdots(2k)! > [(k+1)!]^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$2!\cdot 4!\cdots(2k+2)! > [(k+1)!]^k(2k+2)!$$

$$= [(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)$$
$$> [(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1} = [(k+2)!]^{k+1},$$

即对于 $n = k+1$ 时，不等式也成立. 于是，据归纳法原理，本题证毕.

10. 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证　当 $n=1$ 时，因为 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式显然成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

对于 $n=k+1$ 而言，由于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$
$$= \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即证　$(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$，

而上述不等式由于

$$4k^2+8k+3 < 4k^2+8k+4,$$

因而是成立的. 于是，最后得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立. 由归纳法证毕.

11. 设 c 为正整数，而不为整数的平方，且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数 b，而 A 类包含所有其余的有理数. 求证在 A 类中无最大数，而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a\in A$. 若 $a\leqslant 0$，则显然存在 $a'>a(a'>0)$ 且 $a'\in A$. 故可设 $a>0$，于是 $a^2\leqslant c$. 但不可能有 $a^2=c$. 因若 $a^2=c$，设 $a=\dfrac{p}{q}$，p 与 q 为互质的正整数，则 $\dfrac{p^2}{q^2}=c$. 由于 c 是正整数，而 p^2 与 q^2 也是互质的，故必 $q=1$，从而 $c=p^2$，此与假定矛盾，故必 $a^2<c$. 下面我们证明，存在正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<c,$$

于是 $a+\dfrac{1}{n}$ 也属于 A.

上述不等式相当于：

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c,\quad \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2,$$

若 n 满足不等式

$$\frac{2a+1}{n}<c-a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此，只要取

$$n>\frac{2a+1}{c-a^2},$$

而这是恒为可能的. 因此，不论 a 为 A 类内的怎样的数，在 A 类内总能找到大于它的数，故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中也无最小数.

实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$.

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成：A 类包含所有的有理数 a，而 $a^3<2$；B 类包含所有其余的有理数. 证明在 A 类中无最大数，而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a\in A$. 即 $a^3<2$. 下证必可取正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3<2.$$

事实上，上式相当于$\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<2-a^3$. 若 $a\leqslant 0$，取 $n=1$ 即可. 若 $a>0$，注意到 $n\geqslant 1$，即知若取 n 充分大，使 $n>\frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$，则上列各式均成立. 从而 $a+\frac{1}{n}\in A$. 故 A 中无最大数.

下设 $b\in B$，则 $b^3\geqslant 2$. 下证不可能有 $b^3=2$. 事实上，若 $b^3=2$，设 $b=\frac{p}{q}$，p 与 q 为互质的正整数，则$\frac{p^3}{q^3}=2$，$p^3=2q^3$，从而 p^3 为偶数，因此 p 必为偶数：$p=2r$，r 为正整数. 由于 q 与 p 是互质的，故 q 必为奇数，从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3=4r^3$，故 q^3 又必是偶数，因此矛盾. 由此可知必有 $b^3>2$. 仿前面之证，可取正整数 n，使$\left(b-\frac{1}{n}\right)^3>2$，从而 $b-\frac{1}{n}\in B$. 由此可知 B 类中无最小数. 实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt[3]{2}$.

13. 作出适当的分割，然后证明等式：

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$；

(б) $\sqrt{2}\ \sqrt{3}=\sqrt{6}$.

证 (a) 作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B：一切有理数 $a\leqslant 0$ 以及满足 $a^2<2$ 的正有理数 a 都归于 A 类，一切满足 $b^2>2$ 的

正有理数b归入B类.又作确定$\sqrt{8}$的分割A'/B':一切有理数$a'\leqslant 0$以及满足$a'^2<8$的正有理数a'归入A'类,一切满足$b'^2>8$的正有理数b'归入B'类.我们知道,根据实数加法的定义,满足不等式.

$a+a'<c<b+b'$(对任何$a\in A,b\in B,a'\in A',b'\in B'$)

的唯一实数c就是$\sqrt{2}+\sqrt{8}$.因此,如果我们能证明恒有$(a+a')^2<18$(当$a+a'>0$时),$(b+b')^2>18$,则有$a+a'<\sqrt{18}<b+b'$.于是得知$\sqrt{18}=c=\sqrt{2}+\sqrt{8}$.

若$a+a'>0$,则a与a'中至少有一个为正,从而由$a^2a'^2<16$知$aa'<4$,从而$(a+a')^2=a^2+a'^2+2aa'<2+8+8=18$;同样,因$b^2>2,b'^2>8,b>0,b'>0$,故$b^2b'^2<16,bb'>4,(b+b')^2=b^2+b'^2+2bb'>2+8+8=18$.于是证毕.

(б)作确定$\sqrt{2}$的分割A/B如(a)中所示,再作确定$\sqrt{3}$的分割A_1/B_1:一切有理数$a_1\leqslant 0$以及满足$a_1^2<3$的正有理数a_1归入A_1类,一切满足$b_1^2>3$的正有理数b_1归入B_1类.根据实数乘法的定义,满足

$aa_1<c_1<bb_1$ (对任何$a\in A,a>0,a_1\in A_1,a_1>0,b\in B,b_1\in B_1$)

的(正)实数c_1存在唯一,它就是$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.但由于当$a\in A,a>0,a_1\in A_1,a_1>0$时$(aa_1)^2<6$,而当$b\in B,b_1\in B_1$时,$(bb_1)^2>6$.故恒有$aa_1<\sqrt{6}<bb_1$.由此可知$\sqrt{6}=c_1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.证完.

14. 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

解　先作分割 A_1/B_1,使之确定数 $\sqrt{2}$.

其次,作分割 A/B,其中 A 类包含全体负有理数、零以及满足下述条件的正有理数 a:

如果有 $\frac{p}{q}$(p、q 互质)属于 A_1,则有

$$a^q < 2^p;$$

而其余的正有理数归入 B 类.

这样的分割 A/B 就确定数 $2^{\sqrt{2}}$.

15. 求证任何非空且下方有界的数集有下确界,而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证　不失一般性,只证本题的后半部分,分两种情形:

(1)A 中有最大数 $\bar{a}$. 设 $a\in A$,此时则有 $a\leqslant\bar{a}$,说明 $\bar{a}$ 为 A 的上界. 又由于 $\bar{a}\in A$,故对 A 的任何上界 M,均有 $\bar{a}\leqslant M$,故 $\bar{a}$ 为 A 的有上确界.

(2)A 中无最大数. 此时,作分割 A_1/B_1:取集 A 的一切上界归入 B_1 类,而其余的数归入 A_1 类. 这样,A 中一切数全部落在 A_1 内,A_1 及 A_2 均非空,且 A_1 中的数小于 B_1 中的数,这确实是一个实数分割,易知由此分割所产生的实数 β 是 B_1 类中的最小数,即 β 是 A 的最小上界,从而 β 是 A 的上确界.

16. 证明一切有理真分式 $\frac{m}{n}$(式中 m 及 n 为自然数,且 $0<m<n$)的集合无最小及最大的元素. 并求集合的上确界及下确界.

证　令 E 表一切有理真分式 $\frac{m}{n}$(式中正整数 m,n 满足 0

$< m < n$) 所成的集合. 对任何$\frac{m}{n} \in E$, 显然$\frac{m+1}{n+1} \in E$ 且$\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$, 又$\frac{m^2}{n^2} \in E$, 且$\frac{m^2}{n^2} < \frac{m}{n}$; 故 E 中既无最大数, 也无最小数. 显然

$$\sup E = 1, \quad \inf E = 0.$$

17. 有理数 r 满足不等式

$$r^2 < 2.$$

求这些有理数 r 所成集合的下确界和上确界.

解 用 E 表所有满足 $r^2 < 2$ 的有理数 r 所成的集合. 我们知道, 分割 A/B 确定无理数 $\sqrt{2}$, 这里 A 表由一切非正有理数以及满足 $r^2 < 2$ 的正有理数 r 所成的类, B 表其余有理数构成的类, 并且已证 A 中无最大数, 于是

$$\sup E = \sup A = \sqrt{2}.$$

同样, 分割 A'/B' 确定无理数 $-\sqrt{2}$, 这里 B' 表由所有非负有理数以及满足 $r^2 < 2$ 的负有理数 r 构成的类, A' 表其余有理数构成的类, 并且 B' 中无最小数. 于是, 显然有

$$\inf E = \inf B' = -\sqrt{2}.$$

18. 设$\{-x\}$为数的集合, 这些数是与 $x \in \{x\}$ 符号相反的数. 证明等式:

(a) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$; (б) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

证 (a) 设 $\inf\{-x\} = m'$, 则有:

(1) 当 $-x \in \{-x\}$ 时, $-x \geqslant m'$;

(2) 对于任何的正数 ε, 存在有 $-x' \in \{-x\}$, 使

$$-x' < m' + \varepsilon.$$

由 (1) 及 (2) 推得:

(3) 当 $x \in \{x\}$ 时，$x \leqslant -m'$；

(4) 对于任何的正数 ε，存在有 $x' \in \{x\}$，使

$$x' > -m' - \varepsilon.$$

由(3)及(4)知数 $-m' = \sup\{x\}$，即 $m' = -\sup\{x\}$，所以 $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$.

(б) 设 $\sup\{-x\} = M'$，则有：

(5) 当 $-x \in \{-x\}$ 时，$-x \leqslant M'$；

(6) 对于任何的正数 ε，存在有 $-x' \in \{-x\}$，使

$$-x' > M' - \varepsilon.$$

由(5)及(6)推得：

(7) 当 $x \in \{x\}$ 时，$x \geqslant -M'$；

(8) 对于任何的正数 ε，存在有 $x' \in \{x\}$，使

$$x' < -M' + \varepsilon.$$

由(7)及(8)知数 $-M' = \inf\{x\}$，即 $M' = -\inf\{x\}$，所以，$\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

19. 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合，其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$. 证明等式：

(a) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$；

(б) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

证 (a) 设 $\inf\{x\} = m_1$，$\inf\{y\} = m_2$，则有：

(1) 当 $x \in \{x\}$，$y \in \{y\}$ 时，$x \geqslant m_1$，$y \geqslant m_2$；

(2) 对于任何的正数 ε，存在有数 $x' \in \{x\}$，$y' \in \{y\}$，使

$$x' < m_1 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad y' < m_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由(1)及(2)推得：

(3) 当 $x+y \in \{x+y\}$ 时(其中 $x \in \{x\}$，$y \in \{y\}$)，

$$x + y \geqslant m_1 + m_2;$$

(4) 对于任何的正数 ε,存在有 $x' + y' \in \{x + y\}$(其中 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$),使

$$x' + y' < (m_1 + m_2) + \varepsilon.$$

由(3) 及(4) 知数 $m_1 + m_2 = \inf\{x + y\}$,即

$$\inf\{x + y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}.$$

(б) 同法可证

$$\sup\{x + y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

20. 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合,其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$,且 $x \geqslant 0$ 及 $y \geqslant 0$. 证明等式:

(a) $\inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}$;

(б) $\sup\{x\}\sup\{y\} = \sup\{xy\}$.

证 (a) 设 $\inf\{x\} = m_1, \inf\{y\} = m_2$,由于恒有 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. 故必 $m_1 \geqslant 0, m_2 \geqslant 0$. 于是

(1) 当 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ 时,$x \geqslant m_1 \geqslant 0, y \geqslant m_2 \geqslant 0$;

(2) 对任何的正数 ε,存在有数 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$,使

$$0 \leqslant x' < m_1 + \varepsilon,\ 0 \leqslant y' < m_2 + \varepsilon.$$

由(1) 及(2) 推得:

(3) 当 $xy \in \{xy\}$,其中 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$, $xy \geqslant m_1 m_2$;

(4) 对于任何的正数 ε,存在有 $x'y' \in \{xy\}$(其中 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$),使

$$0 \leqslant x'y' < (m_1 + \varepsilon)(m_2 + \varepsilon) = m_1 m_2 + \varepsilon',$$

其中 $\varepsilon' = (m_1 + m_2)\varepsilon + \varepsilon^2$.

由(3) 及(4) 知数 $m_1 m_2 = \inf\{xy\}$,即

$$\inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}.$$

(б) 同法可证

$$\sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}.$$

21. 求证不等式：

(a) $|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$；

(б) $|x+x_1+\cdots+x_n| \geqslant |x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

证　(a) 由 $|x-y| = |x+(-y)| \geqslant |x|-|-y|$

$$= |x|-|y|,$$

及　$|x-y| = |y-x| \geqslant |y|-|x|$

$$= -(|x|-|y|),$$

即得

$$|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$$

也可如下证明：由 $|xy| \geqslant xy$ 知

$$x^2-2xy+y^2 \geqslant x^2-2|xy|+y^2,$$

则　$(x-y)^2 \geqslant (|x|-|y|)^2$,

开方即得

$$|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|.$$

(б) $|x+x_1+\cdots+x_n| \geqslant |x|-|x_1+\cdots+x_n|$,

而　$|x_1+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2+\cdots+x_n| \leqslant \cdots$

$\leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$,

所以，

$$|x+x_1+\cdots+x_n| \geqslant |x|-(|x_1|+\cdots+|x_n|).$$

解不等式：

22. $|x+1| < 0.01$.

解　由 $|x+1| < 0.01$ 推得

$$-0.01 < x+1 < 0.01,$$

所以，

$$-1.01 < x < -0.99.$$

23. $|x-2| \geqslant 10$.

解 由 $|x-2| \geqslant 10$ 推得

$$x-2 \geqslant 10 \quad 或 \quad x-2 \leqslant -10,$$

所以，

$$x \geqslant 12 \quad 或 \quad x \leqslant -8.$$

24. $|x| > |x+1|$.

解 两边平方，即得

$$x^2 > (x+1)^2 \quad 或 \quad 2x+1 < 0,$$

于是，有

$$x < -\frac{1}{2}.$$

25. $|2x-1| < |x-1|$.

解 两 边平方，即得

$$(2x-1)^2 < (x-1)^2 \quad 或 \quad 3x^2-2x < 0,$$

解之，得

$$0 < x < \frac{2}{3}.$$

26. $|x+2| + |x-2| \leqslant 12$.

解 令 $x-2=t$，则得

$$|t+4| + |t| \leqslant 12 \quad 或 \quad |t+4| \leqslant 12-|t|.$$

两边平方，即有

$$t^2+8t+16 \leqslant 144-24|t|+t^2,$$

或

$$3|t| \leqslant 16-t.$$

将上式两端再平方，化简整理得

$$t^2+4t-32\leqslant 0,$$

于是,有

$$-8\leqslant t\leqslant 4.$$

从而得

$$-8\leqslant x-2\leqslant 4,$$

即

$$-6\leqslant x\leqslant 6 \quad 或 \quad |x|\leqslant 6.$$

27. $|x+2|-|x|>1$.

解 $1+|x|<|x+2|$,将此式两端平方,化简得

$$2|x|<4x+3.$$

再平方之,化简得

$$4x^2+8x+3>0.$$

于是,有

$$x>-\frac{1}{2} \quad 或 \quad x<-\frac{3}{2}.$$

后者不适合,所以,

$$x>-\frac{1}{2}.$$

28. $\Big||x+1|-|x-1|\Big|<1$.

解 两端平方,化简得

$$x^2+\frac{1}{2}<|x^2-1|,$$

即

$$x^2-1>x^2+\frac{1}{2} \quad 或 \quad x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right).$$

前者不可能,所以,

$$x^2-1<-\left(x^2+\frac{1}{2}\right),$$

即 $x^2<\frac{1}{4}$，解之得

$$|x|<\frac{1}{2}.$$

29. $|x(1-x)|<0.05$.

解 由 $|x-x^2|<\frac{1}{20}$ 得

$$x^2-x+\frac{1}{20}>0 \quad 或 \quad x^2-x-\frac{1}{20}<0,$$

解之得

$$\begin{cases}\dfrac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\dfrac{5+\sqrt{30}}{10}\\[2ex] \dfrac{5+\sqrt{20}}{10}<x \quad 或 \quad x<\dfrac{5-\sqrt{20}}{10},\end{cases}$$

即

$$\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5-\sqrt{20}}{10} \text{ 或}$$

$$\frac{5+\sqrt{20}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10}.$$

30. 证明恒等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

证 $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x|x|+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x|x|=x^2.$$

31. 当测量长度10厘米时，绝对误差为0.5毫米；当测量距离500千米时，绝对误差等于200米．哪种测量较为精确？

解 用相对误差

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

进行比较，其中 a 为被测量的精确值，而 Δ 是绝对误差.

对于前者，$\delta = \dfrac{0.5 \times 0.1}{10} = 0.5\%$，

对于后者，$\delta = \dfrac{200}{500 \times 1000} = 0.04\%$，

所以，后者测量较为精确.

32. 设数

$$x = 2.3752$$

的相对误差为 1%，试求此数包含若干位准确数字？

解 因为$\dfrac{\Delta}{2.3752} = 0.01$，所以 $\Delta = 0.023752$.

因而，此数包含两位准确数字.

33. 数

$$x = 12.125$$

包含三位准确数字. 试求此数的相对误差？

解 因为 x 包含三位准确数字，所以 $\Delta < 0.05$. 于是得相对误差

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|} < \frac{0.05}{12.125} < 0.42\%$$

即

$$\delta < 0.42\%.$$

34. 矩形的边等于：

$$x = 2.50\ 厘米 \pm 0.01\ 厘米，$$

$$y = 4.00\ 厘米 \pm 0.02\ 厘米.$$

这个矩形的面积 S 界于甚么范围内？设其边长取平均值时，矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 为何？

解 $S_{\min} = (2.50 - 0.01)(4.00 - 0.02)$

$= 9.9102$(平方厘米)*)，

$$S_{\max} = (2.50 + 0.01)(4.00 + 0.02)$$
$$= 10.0902(平方厘米),$$
$$S_{\min} \leqslant S \leqslant S_{\max},$$
$$S_{平均} = 2.50 \times 4.00 = 10(平方厘米),$$
$$\Delta_1 = 10.0902 - 10 = 0.0902(平方厘米),$$
$$\Delta_2 = 10 - 9.9102 = 0.0898(平方厘米);$$
$$\Delta \leqslant \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.0902(平方厘米),$$
$$\delta = \frac{\Delta}{10} \leqslant \frac{0.0902}{10} < 0.91\%.$$

*）以后各题简写为厘米^2，厘米^3 等.

35. 物体的重量 $P = 12.59$ 克 ± 0.01 克，其体积 $V = 3.2$ 厘米^3 ± 0.2 厘米^3. 若对物体的重量和体积都取其平均值，试求物体的比重，并估计比重的绝对误差和相对误差.

解 比重 $C = \dfrac{12.59}{3.2}$ 克 / 厘米^3 $= 3.93$ 克 / 厘米^3.

$$C_{\max} = \frac{12.60}{3.0} 克 / 厘米^3 = 4.20 克 / 厘米^3,$$
$$C_{\min} = \frac{12.58}{3.4} 克 / 厘米^3 = 3.70 克 / 厘米^3,$$
$$C_{\min} \leqslant C \leqslant C_{\max},$$
$$\Delta_1 = C_{\max} - C = 0.27 克 / 厘米^3,$$
$$\Delta_2 = C - C_{\min} = 0.23 克 / 厘米^3;$$
$$\Delta \leqslant \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.27 克 / 厘米^3;$$

一般地，比重为(3.93 $\pm$ 0.27) 克 / 厘米^3；

$$\delta \leqslant \frac{0.27}{3.70} < 7.3\%.$$

36+. *圆半径

$$r = 7.2\text{ 米} \pm 0.1\text{ 米}.$$

若取 $\pi = 3.14$，则求出的圆面积的最小相对误差为何？

解 圆面积 $A = \pi \times 7.2^2 \approx 51.84\pi(\text{米}^2)$

$$\Delta_1 = \pi(7.2 + 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2 = 1.45\pi.$$

$$\Delta_2 = |\pi(7.2 - 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2| = 1.43\pi.$$

$$\Delta \leqslant \max(\Delta_1, \Delta_2) = 1.45\pi(\text{米}^2)$$

即一般的圆面积 A 为 $(51.84 \pm 1.45)\pi(\text{米}^2)$，故

$$\delta \leqslant \frac{1.45\pi}{51.84\pi} < 2.80\%.$$

37. 对直角平行六面体测得

$$x = 24.7\text{ 米} \pm 0.2\text{ 米};$$

$$y = 6.5\text{ 米} \pm 0.1\text{ 米};$$

$$z = 1.2\text{ 米} \pm 0.1\text{ 米}.$$

这个平行六面体的体积 V 界于甚么范围内？若测量的各结果都取其平均值，则求出的平行六面体的体积可能有的绝对误差和相对误差为何？

解 $24.5 \times 6.4 \times 1.1 \leqslant V \leqslant 24.9 \times 6.6 \times 1.3$

即 $172.480\text{ 米}^3 \leqslant V \leqslant 213.642\text{ 米}^3.$

当 x, y, z 均取平均值时，

$$V = 24.7 \times 6.5 \times 1.2 = 192.660\text{ 米}^3.$$

$$\Delta_1 = 213.642 - 192.660 = 20.982(\text{米}^3),$$

$$\Delta_2 = 192.660 - 172.480 = 20.180(\text{米}^3).$$

---

* 题号右上角带"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明．中译本基本是按俄文第二版翻译的．俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正．

于是，

$$\Delta \leqslant 20.982 \text{ 米}^3;$$

$$\delta \leqslant \frac{20.982}{172.480} \approx 12.2\%.$$

38. 测量正方形的边 x，此处 2 米 $< x <$ 3 米，应有多小的绝对误差，才能使此正方形面积有可能精确到 0.001 米^2？

解 按题设我们有 $0 < x^2 - 4 < 0.001$ 或 $0 < 9 - x^2 < 0.001$，解之得

$$2.99983 < x < 3 \quad \text{或} \quad 2 < x < 2.00024.$$

因此，$\varDelta$ 取二者中误差较小者，即

$$\varDelta \leqslant 0.00017(\text{米}) = 0.17 \text{ 毫米},$$

故当边长 x 的绝对误差不超过 0.17 毫米时，就能使此正方形的面积精确到 0.001 米^2.

39. 假定矩形每边的长皆不超过 10 米，为了使根据测量所计算出来的面积与原面积之差不超过 0.01 平方米，问测量矩形的边 x 与 y 时，许可的绝对误差 $\varDelta$ 的值多大*)？

解 按题设我们有

$$(x + \varDelta)(y + \varDelta) - xy \leqslant 0.01,$$

即 $\qquad \varDelta^2 + (x + y)\varDelta \leqslant 0.01,$

由于 $x \leqslant 10$ 及 $y \leqslant 10$，所以只要

$$\varDelta^2 + 20\varDelta \leqslant 0.01 \quad \text{或} \quad \varDelta^2 + 20\varDelta - 0.01 \leqslant 0$$

即可. 解之，得

$$\varDelta \leqslant \frac{-20 + \sqrt{20^2 + 0.04}}{2} = -10 + \frac{20.00099}{2}$$

$$= 0.000499 < 0.0005(\text{米}).$$

*) 此题假设 x,y 有相等的绝对误差. 又原著上为“0.01 平方米”，而误译为“0.01 平方厘米”.

40. 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x和 y的相对误差，$\delta(xy)$为数 xy的相对误差.求证：

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

证　设 $x=a+\Delta_x$，　$y=b+\Delta_y$，

其中 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值，Δ_x 及 Δ_y 是绝对误差，则有

$$xy-ab=b\Delta_x+a\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y$$

于是，

$$\begin{aligned}\Delta&=|xy-ab|\\&\leqslant|b|\cdot\Delta_x+|a|\cdot\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y\end{aligned}$$

最后即得

$$\delta(xy)=\frac{\Delta}{|ab|}\leqslant\frac{\Delta_x}{|a|}+\frac{\Delta_y}{|b|}+\frac{\Delta_x}{|a|}\cdot\frac{\Delta_y}{|b|}.$$

此即

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

§2. 叙列的理论

1° 叙列的极限的概念　假设对于任何的 $\varepsilon>0$，有数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，

则称叙列 $x_1,x_2\cdots,x_n,\cdots$有极限 a（或者说，收敛于 a）亦即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

其中，若

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

则称 x_n 为无穷小.

没有极限的叙列，称为发散的.

2° 极限存在的准则

(1)设

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

及 $$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

则 $$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

(2)单调而且有界的叙列有极限.

(3)哥西判别法　叙列 $\{x_n\}$ 的极限存在的必要而且充分的条件是：对于任何的 $\varepsilon > 0$，有数 $N = N(\varepsilon)$，使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时，$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

3° 关于叙列的极限的基本定理　设

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} y_n$$

存在，则有：

(1)若 $x_n \leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

(4)若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

4° 数 e，叙列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

有确定的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284\cdots$$

5° 无穷极限　　符号

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$，有数 $N = N(E)$，使

当 $n > N$ 时，$|x_n| > E$.

6° 聚点　设已知叙列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 有子叙列

$$x p_1, x p_2, \cdots, x p_n \cdots$$

适合

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi,$$

则称数 ξ(或符号 ∞) 为已知数列 $a_n(n = 1,2,\cdots)$ 的聚点.

一切有界的叙列至少有一个有穷的聚点(波尔查诺——外尔斯特拉斯原理). 若这个聚点是唯一的,则它即为已知叙列的有穷极限.

叙列 x_n 的最小聚点(有穷的或无穷的)

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n$$

称为下极限,而它的最大聚点

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

称为此叙列的上极限

等式

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

为叙列 x_n 的(有穷或无穷)极限存在的必要而且充分的条件.

41. 设

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

即:对于任一个给定的 $\varepsilon > 0$,求数 $N = N(\varepsilon)$

使得

在 $n > N$ 时,$|x_n - 1| < \varepsilon$.

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
N					

证 $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n+1}$. 任给 $\varepsilon > 0$,要 $|x_n - 1| < \varepsilon$,只

要

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

即只要 $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. 可取

$$N = N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

则当 $n > N$ 时，$|x_n - 1| < \varepsilon$. 所以，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
N	10	100	1000	10000	…

42. 假若：

(a) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$；(б) $\frac{2n}{n^3+1}$；

(в) $x_n = \frac{1}{n!}$；(г) $x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n$.

对于任何的 $\varepsilon > 0$，求出数 $N = N(\varepsilon)$，使

当 $n > N$ 时，$|x_n| < \varepsilon$；

即证明 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 为无穷小（就是说，有极限值为 0）

对应着上面四种情形，填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	…	
N					

证 (a) $|x_n| = \frac{1}{n}$. 任给 $\varepsilon > 0$，要 $|x_n| < \varepsilon$，只要

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

即只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]^{*)}$,则当 $n > N$ 时,$|x_n| < \varepsilon$,所以,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(б) $|x_n| = \frac{2n}{n^3+1} < \frac{2}{n^2}$. 任给 $\varepsilon > 0$,要 $|x_n| < \varepsilon$,只要

$$\frac{2}{n^2} < \varepsilon,$$

即只要 $n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$. 取 $N = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]$,则当 $n > N$ 时,$|x_n| < \varepsilon$,所以,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(в) $|x_n| = \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. 任给 $\varepsilon > 0$,要 $|x_n| < \varepsilon$,只要

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon,$$

即只要 $n > 1 + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. 取

$$N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1,$$

则当 $n > N$ 时,$|x_n| < \varepsilon$,所以,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(г) $|x_n| = 0.999^n$. 任给 $\varepsilon > 0$,要 $|x_n| < \varepsilon$,只要

$$n \lg 0.999 < \lg \varepsilon.$$

由于 $\lg 0.999 < 0$,故只要 $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg 0.999} \approx 2500 \lg \frac{1}{\varepsilon}$. $^{**)}$

取

$$N = \left[2500\lg\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

则当 $n > N$ 时，$|x_n| < \varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

填下表：

ε		0.1	0.01	0.001	…
(а)	N	10	100	1000	…
(б)	N	4	14	44	…
(в)	N	4	7	10	…
(г)	N	2500	5000	7500	…

*）或取 $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. 以下各题类似，不再一一说明.

**）查四位数学用表所得的数据.

43. 证明叙列

(а)$x_n = (-1)^n n$，(б)$x_n = 2^{\sqrt{n}}$，(в)$x_n = \lg(\lg n)(n \geqslant 2)$

当 $n \to \infty$ 时，有无穷极限(即成为无穷大)，即：

对任意的 $E > 0$，求数 $N = N(E)$，使

当 $n > N$ 时，$|x_n| > E$.

对应着上面的每一种情形，填下表：

E	10	100	1000	10000	…
N					

证　(а) $|x_n| = n$. 任给 $E > 0$, 要 $|x_n| > E$, 只要

$$n > E.$$

取 $N = [E]$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

(б) $|x_n| = 2^{\sqrt{n}}$, 任给 $E>0$, 要 $|x_n|>E$, 只要 $2^{\sqrt{n}}>E$.

即只要 $n>\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$. 取

$$N=\left[\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2\right],$$

则当 $n>N$ 时, $|x_n|>E$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty.$$

(в) 当 $n>10$ 时, $\lg n>1$ 及 $\lg(\lg n)>0$.

任给 $E>0$, 要 $|x_n|>E$, 只要

$$\lg(\lg n)>E,$$

即只要 $n>10^{(10^E)}$. 取

$$N=[10^{(10^E)}],$$

则当 $n>N$ 时, $|x_n|>E$, 所以,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty.$$

填下表:

E		10	100	1000	10000	…
(а)	N	10	100	1000	10000	…
(б)	N	11	44	99	176	…
(в)	N	$10^{(10^{10})}$	$10^{(10^{100})}$	$10^{(10^{1000})}$	$10^{(10^{10000})}$	…

44. 求证

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

无界，但当 $n\to\infty$ 时，它并不成为无穷大.

证 因为 $x_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} 2k, 当\ n=2k, k\ 为自然数, \\ \dfrac{1}{2k+1}, 当\ n=2k+1, \end{cases}$

所以，

$$x_{2k}\to\infty, \quad x_{2k+1}\to 0 \quad (k\to\infty).$$

由于 $x_{2k}\to\infty$，故 x_n 无界；但因 $x_{2k+1}\to 0$，故 x_n 并不趋于无穷大.

45. 用不等式表示下列各式：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$；(б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$；(в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

解 (a)对于任给的正数 E，存在有自然数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$|x_n|>E$，

此即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(б)对于任给的正数 E，存在有自然数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$x_n<-E$，

此即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

(в)对于任给的正数 E，存在有自然数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$x_n>E$，

此即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

设 n 跑过自然数列，求下列各式之值：

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10000n}{n^2+1}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10000n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10000}{n+\dfrac{1}{n}} = 0.$

47. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

48. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解 因为 $\sin n!$ 有界：$|\sin n!|\leqslant 1$ 及 $\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\to 0(n\to\infty)$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=\frac{1}{3}.$$

50. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}(|a|<1,|b|<1)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\frac{1-b}{1-a}.$$

51. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

52. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$.

解 当 $n=2k$ 时（k 为自然数），

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$$

$$=\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}+\frac{3}{2k}-\cdots-\frac{2k}{2k}=\frac{-k}{2k}=-\frac{1}{2};$$

当 $n=2k+1$，

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}$$

$$=\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{2k+1}+\frac{3}{2k+1}-\cdots+\frac{2k+1}{2k+1}$$

$$=\frac{k+1}{2k+1}\to\frac{1}{2};$$

由于取不同方式时，所得的极限值不同，所以，极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$$

不存在.

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]=\frac{1}{3}.$$

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 设 $f(n)=\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}$，由 53 题

即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}[8f(2n)-4f(n)]=\frac{4}{3}.$$

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 设 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

$$g(n)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}},$$

则有 $2f(n+1)-g(n)=f(n)+1$,

又由 $2f(n+1)-f(n)=f(n)+\frac{2n+1}{2^n}=g(n)+1$,

故 $$f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}[g(n)+1]=3$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^n}=0^{*)}$,故得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}-\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.$$

*)参看 58 题

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

解 $\frac{1}{1\cdot2}=1-\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

相加之,得 $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

57. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2n]{2})$.

解 由于 $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2n]{2}$

$$=2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}$$

$$=2^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2n]{2})$

$$=\lim_{n\to\infty}2^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]}=2.$$

证明下列等式：

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

证 因为 $2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+1$

$$>\frac{n(n-1)}{2}\quad(n>2),$$

故 $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}$；

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.$$

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

证 因为 $0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdots\frac{2}{n}\leqslant\frac{4}{n}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$$

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\quad(a>1)$.

证 令 $a=1+\lambda\quad(\lambda>0)$，

则 $a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots$

$$+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2\quad(n>2).$$

当 $n>2$ 时，$n-1>\frac{n}{2}$，此时，

$$a^n>\frac{n^2}{4}\lambda^2=\frac{n^2(a-1)^2}{4}.$$

分三种情形：

(1)当 $k\leqslant 0$ 时，这时显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n\cdot n^{-k}}=0.$$

(2)当 $k=1$ 时，

$$0<\frac{n^k}{a^n}=\frac{n}{a^n}<\frac{4n}{n^2(a-1)^2},$$

而 $\frac{4n}{n^2(a-1)^2}\to 0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0;$$

(3)当 $k>0$ 时，

$$\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right]^k,$$

而 $a^{\frac{1}{k}}>1$，于是由(1)知，$\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\to 0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

61. $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$

证 令 k 代表任何一个大于 $2|a|$ 的自然数，

则当 $n>k$ 时，有

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\left(\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{k}\right)\left(\frac{|a|}{k+1}\cdot\frac{|a|}{k+2}\cdots\frac{|a|}{n}\right)$$

$$<|a|^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{(2|a|)^k}{2^n}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2|a|)^k}{2^n}=0$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

62. $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$，若$|q|<1$.

证 (1)当 $0<q<1$ 时，可令 $q=\frac{1}{a}$，其中 $a>1$，所以，

当 $n\to\infty$时，$nq^n=\frac{n}{a^n}\to0$ *)；

(2)当 $-1<q<0$ 时，可令 $q=-q'$，其中 $0<q'<1$，所以，

当 $n\to\infty$时， $nq^n=(-1)^n nq'^n\to0$；

(3)当 $q=0$ 时， $nq^n=0$.

总之，当 $|q|<1$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$.

*) 利用 60 题的结果。

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$.

证 (1)当 $a=1$ 时，等式显然成立；

(2)当 $a>1$ 时，因为$(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon(n>1,\varepsilon>0)$，则当 n 充分大后，可使 $1+n\varepsilon>a$，即$(1+\varepsilon)^n>a$. 事实上，只要取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，就可保证这点. 所以，

$$1<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon,$$

于是，当 $n>N$ 时，$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，

此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；

(3)当 $0<a<1$ 时，则令 $a=\frac{1}{a'}$，其中 $a'>1$.

于是,当 $n\to\infty$时, $\sqrt[n]{a}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a'}}\to 1$.

总之,当 $a>0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0 \quad (a>1)$.

证 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 事实上,令 $a_n=\sqrt[n]{n}$. 则 $a_n>1$. 由 60 题前半部分的推导知

$$a_n^n>\frac{n^2}{4}(a_n-1)^2,$$

即 $$n>\frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n}-1)^2,$$

由此可知

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \text{ 成立.}$$

现任给 $\varepsilon>0$. 因 $a^\varepsilon>1\,(a>1)$,故存在 $N=N(\varepsilon)$,使当 $n>N$ 时,恒有 $\sqrt[n]{n}<a^\varepsilon$,由此可知 $(n>N)$,

$$0<\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon.$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0.$$

65. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 在 64 题的证明过程中已证.

66. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

证 由数学归纳法易证 $n!\geqslant\dfrac{1}{2}n^{\frac{n}{2}}$,从而 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\leqslant 2^{\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,又因 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$,所以,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

67. 当 n 充分大时，下面的式子哪个大些？

(а) $100n+200$ 或 $0.01n^2$?；(б) 2^n 或 n^{1000}?；

(в) 1000^n 或 $n!$?.

证 (а)因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n+200}{0.01n^2}=0$，所以，

当 n 充分大时，$0.01n^2$ 较 $100n+200$ 大些.

(б)因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1000}}{2^n}=0$ *)，所以，

当 n 充分大时，2^n 较 n^{1000} 大些.

(в)因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000^n}{n!}=0$ **)，所以，

当 n 充分大时，$n!$ 较 1000^n 大些.

*）利用 60 题的结果.

**）利用 61 题的结果.

68. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

证 因为 $0<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ *)，

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

*）利用 10 题的结果.

69. 证明叙列

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ (n=1,2\cdots)$$

是单调增加的，且上方有界. 而叙列

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

是单调减少的，且下方有界. 由此推出这些叙列有公共的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

证 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}$

$$+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

其中每一项都为正，当 n 增加时，不但对应的项数增多，而且每一个括弧内的数值也增大，所以，叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$单调增加.

又当 $k>2$ 时，$\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1$，$\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}}$，所以，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3,$$

此即叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$上方有界.

由此，我们知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$存在，以 e 表之.

其次，由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n},$$

即$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\frac{n+1}{n}$，

也即$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$，所以，

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

此即 $y_{n-1}>y_n$，因而，叙列 $y_n(n=1,2,\cdots)$单调减少. 又因

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)>1+n\cdot\frac{1}{n}=2,$$

所以，叙列 $y_n(n=1,2,\cdots)$下方有界.

由此，我们知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e.$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

70. 证明

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

当指数 n 是甚么样的数值时，表示式$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$与数 e 之差小于 0.001?

证 利用 69 题的结果知

$$0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

即 $0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，

而$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$

$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\frac{3}{n},$$

因而 $$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\frac{3}{n}.$$

其次，要 $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<0.001$，只要 $\frac{3}{n}\leqslant 0.001$，即只要 $n\geqslant 3000$，所以，当指数 n 是代表任一不小于 3000 的自然数，表示式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 与数 e 之差就小于 0.001.

71. 设 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列，而 $q_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $-\infty$ 的任意数列. 求证

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e.$$

证 令 $k_n=[p_n]$，即 k_n 表 p_n 的整数部分，则

$$k_n\leqslant p_n<k_n+1.$$

由于 $p_n\to+\infty$，故 $k_n\to+\infty$. 从而显然 $\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\to e$（参看 89 题题解）. 由于

$$\frac{1}{k_n}\geqslant\frac{1}{p_n}>\frac{1}{k_n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}>\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}>\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}=e,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=e.$$

其次，若 $q_n\to-\infty$，令 $q_n=-p_n$，其中 $p_n\to+\infty$.

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{p_n-1}\right)^{p_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)^{p_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{p_n}\right)=e,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e.$

72. 已知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$

由此推出公式

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\,n},$$

其中 $0<\theta_n<1$，并计算数 e 准确到 10^{-5}.

证 因为 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

若固定 k，且 $n>k$，则有

$$x_n>2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

今使 n 趋于无穷，在上式两边取极限，得

$$e\geqslant 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{k!}.$$

由于此不等式对任何自然数 k 皆成立，因此，

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}\leqslant e.$$

另一方面，有

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}, \text{及 } x_n\to e,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$

其次，设 $\omega_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$，则

$$0<\omega_{n+m}-\omega_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right\}<\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\cdot\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\}$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1},$$

今让 n 固定不变，并让 m 趋于无穷，取极限，得

$$0\leqslant e-\omega_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

由于 $\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n}$，所以，

$$0<e-\omega_n<\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n},$$

即 $$0<e-\omega_n=\frac{\theta_n}{n!\,n}, \text{其中 } 0<\theta_n<1,$$

因而 $$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\,n}. \qquad (1)$$

下面将用公式(1)计算 e，使之准确到 10^{-5}. 首先须确定怎

样选取 n，才能实现这一准确度。取 $n=8$，在公式(1)中的余项已是小于

$$\frac{1}{8!\ 8}<0.0000032,$$

所以弃去它时，由公式所造成的误差远远地小于所规定的限度，因此，取 $n=8$ 计算之. 其次，还须考虑计算每一项时的舍入误差，为保证 e 准确到 10^{-5}，我们在计算每一项时，计算到第六位小数上四舍五入凑成整数，则舍入误差总的不超过 $\frac{1}{2\cdot 10^6}\times 6=\frac{3}{10^6}$. 于是总误差不超过

$$6.2\times 10^{-6}<10^{-5}.$$

列表：

$$\begin{array}{rl}
2.000000 & \\
\frac{1}{2!}=0.500000 & \\
\frac{1}{3!}=0.166667 & (-) \\
\frac{1}{4!}=0.041667 & (-) \\
\frac{1}{5!}=0.008333 & (+) \\
\frac{1}{6!}=0.001389 & (-) \\
\frac{1}{7!}=0.000198 & (+) \\
\frac{1}{8!}=0.000025 & (-) \\
\hline
2.718279 &
\end{array}$$

考虑到修正数的符号，则总误差介于 $-\frac{2}{10^6}$ 和 $\frac{4}{10^6}$ 之间，因而，数 e 介于

$$2.718277 \text{ 及 } 2.718283$$

之间，所以，

$$e=2.71828\pm0.00001.$$

73. 证明数 e 为无理数.

证 假设 e 为有理数$\frac{m}{n}$，则对于这个 n 有公式

$$\frac{m}{n}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\,n} \quad (0<\theta_n<1).$$

在等式两端同乘以 $n!$，我们即得出左端是整数，而右端是整数加一真分数$\frac{\theta_n}{n}$，但这是矛盾的. 所以数 e 为无理数.

74. 证明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

证 由 $\sqrt{i(n-i)}\leqslant\frac{n}{2}$，则$\frac{1}{2}[\ln i+\ln(n-i)]\leqslant\ln\frac{n}{2}$.

从而$\sum\limits_{i=1}^{n-1}\ln i\leqslant(n-1)\ln\frac{n}{2}$，$(n-1)!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$.

两边同乘以$\frac{n}{2}$，得$\frac{1}{2}n!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^n$. 于是

$$n!\leqslant2\left(\frac{n}{2}\right)^n<e\left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

即 $\qquad n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$

再证$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!$.

设 $x_n=\left(\frac{n}{e}\right)^n$，则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}e}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{e}<n.$$

所以 （注意到 $x_1=\frac{1}{e}<1$）

$$x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}<n!.$$

从而证得$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!$.

75. 证明不等式：

(a)$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，式中 n 为任意的自然数.

(6)$1+a<e^a$，式中 a 为异于零的实数.

证 (a)因为 $1<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，两边取对数，得

$$0<n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1,$$

故 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$；

又因为 $e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，两边取对数，得

$$1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

故 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$.

因而 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

(6)$(1+x)^n\geqslant 1+nx$ ($x>0$，n 为正整数).

设 a 为正有理数：$a=\frac{p}{q}$，p，q 是正整数. 则由于 $e>\left(1+\frac{1}{q}\right)^q$，故 $e^a>\left(1+\frac{1}{q}\right)^{qa}=\left(1+\frac{1}{q}\right)^p\geqslant 1+\frac{p}{q}=1+a$.

至于 a 为任意实数($\neq 0$)时的证明见 1289 题(a).

76. 求证

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a \quad (a>0),$$

式中 $\ln a$ 是取 $e=2.718\cdots$ 作底时数 a 的对数.

证 先设 $a>1$. 令 $b_n=a^{\frac{1}{n}}-1$,则 $b_n>0$,

且 $\frac{\ln a}{n}=\ln(1+b_n)$,故

$$n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a\,\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}.$$

由于 $b_n\to0$,故存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,$0<b_n<1$. 于是,对每个 $n>N$,存在唯一正整数 k_n,使 $\frac{1}{k_n+1}\leqslant b_n<\frac{1}{k_n}$. 由于 $b_n\to0$,故 $k_n\to+\infty$. 由 75 题(a)知

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots),$$

故

$$\frac{1}{k_n+2}<\ln\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)\leqslant\ln(1+b_n)$$
$$<\ln\left(1+\frac{1}{k_n}\right)<\frac{1}{k_n},$$

从而

$$1-\frac{1}{k_n+1}=\frac{k_n}{k_n+1}<\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}<\frac{k_n+2}{k_n}$$
$$=1+\frac{2}{k_n},$$

由于 $k_n\to+\infty(n\to\infty)$,故 $\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}\to1(n\to\infty)$,由此得

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a.$$

现设 $0<a<1$. 则 $\frac{1}{a}>1$. 于是,由上结果可知

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-a^{\frac{1}{n}}\right)\cdot n\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$$=-\ln\frac{1}{a}=\ln a.$$

当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a$ 显然成立，故此式对任何 $a>0$ 成立，证毕.

利用关于单调而且有界的叙列的极限存在的定理，证明以下各叙列的收敛性：

77. $x_n=p_0+\frac{p_1}{10}+\cdots+\frac{p_n}{10^n}\quad(n=1,2,\cdots)$

式中 $p_i(i=0,1,2,\cdots)$ 是非负的整数，从 p_1 起不大于 9.

证 $x_{n+1}=x_n+\frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$，由于 $p_{n+1}>0$，所以，

$$x_{n+1}>x_n,$$

因而，$x_n(n=1,2,\cdots)$ 是单调增加的. 其次由于 $p_0+\frac{1}{10}<x_n\leqslant9\left(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^n}\right)+p_0<1+p_0$，所以，叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 是有界的.

因而，根据单调而且有界的叙列的极限存在的定理，可知叙列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

78. $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$.

解 当 $n\leqslant10$ 时，虽然 $\{x_n\}$ 单调增加；但当 $n>10$ 时，由 $\frac{n+9}{2n-1}<1$ 知叙列 $\{x_n\}$ 单调减少. 注意有下界 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$. 因而，叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

79. $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

证 因 $x_{n+1}=x_n\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<x_n$，所以，叙列 $\{x_n\}$ 是单调

减少的.

又因 $0<x_n<1$,所以,叙列$\{x_n\}$是有界的. 因而$\{x_n\}$收敛.

80. $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

证 因 $x_{n+1}=x_n\cdot\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)>x_n$,所以,叙列$\{x_n\}$是单调增加的.

又因 $1+a<e^a$,所以,

$$0<x_n<e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{4}}\cdots e^{\frac{1}{2^n}}=e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}<e,$$

即叙列是有界的. 因而$\{x_n\}$收敛.

81. $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\cdots$,

$$x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}},\cdots.$$

证 叙列$\{x_n\}$显然是单调增加的.

其次,利用数学归纳法可以证明:$x_n<\sqrt{2}+1$. 事实上,对于 $n=1$ 是成立的. 假设 $x_k<\sqrt{2}+1$,则

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+\sqrt{2}+1}$$
$$<\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1,$$

因而,不等式对一切自然数均成立.

由此知叙列$\{x_n\}$是有界的. 因而$\{x_n\}$收敛.

利用哥西判别法,证明以下各叙列的收敛性:

82. $x_n=a_0+a_1q+\cdots+a_nq^n$,

其中 $|a_k|<M(k=0,1,2,\cdots)$且$|q|<1$.

证 $|x_m-x_n|=|a_{n+1}q^{n+1}+\cdots+a_mq^m|$

$$\leqslant |a_{n+1}| \cdot |q|^{n+1} + \cdots + |a_m| \cdot |q|^m$$

$$< M \cdot |q|^{n+1}(1+|q|+\cdots+|q|^{m-n-1})$$

$$< M \cdot |q|^{n+1} \cdot \frac{1}{1-|q|} \quad (m>n).$$

任给 $\varepsilon>0$，由于 $|q|^{n+1}\to 0(n\to\infty)$，故存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$|q|^{n+1} < \frac{(1-|q|)\varepsilon}{M}.$$

于是，当 $m>n>N$ 时，恒有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

由此可知，叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

83. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$.

证 $$|x_m - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin m}{2^m} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \quad (m>n).$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $N = \left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$，

则当 $m>n>N$ 时，必有 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，从而 $|x_m - x_n|<\varepsilon$，所以，叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

84. $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} - \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$.

证 $$|x_m - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m!}{m(m+1)} \right|$$

$$<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}$$

$$<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}\quad(m>n).$$

任给 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $m>n>N$ 时,必有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$,所以,叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

85. $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$.

证 $|x_m-x_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}$, $(m>n)$.

以下与 84 题证法步骤相同,故知叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

86. 若存在数 c,使得

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c\quad(n=2,3,\cdots),$$

则称叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 有有界变差.

证明凡有有界变差的叙列是收敛的.

举出一个收敛叙列而无有界变差的例子.

证 设 $y_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|$ $(n=2,3,\cdots)$,

则叙列 $\{y_n\}$ 单调增加且有界,所以它是收敛的.

根据哥西收敛准则,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在数 N,使

当 $m>n>N$ 时,$|y_m-y_n|<\varepsilon$,

即 $|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$.

而对于叙列 $\{x_n\}$ 有

$$|x_m-x_n|=|x_m-x_{m-1}+x_{m-1}-x_{m-2}+\cdots$$

$$+x_{n+1}-x_n|\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots$$
$$+|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon,$$

所以，叙列$\{x_n\}$是收敛的.

叙列：$1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},(-1)\frac{1}{n},\cdots,$它是以零为极限的收敛叙列. 但它不是有有界变差的. 事实上，

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+|x_4-x_3|+\cdots$$
$$+|x_{2n}-x_{2n-1}|>|x_2-x_1|+|x_4-x_3|+\cdots$$
$$+|x_{2n}-x_{2n-1}|$$
$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

而叙列 $\omega_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$是发散的*)，又是递增的，故$\omega_n\to+\infty$. 于是，

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|$$

不是有界的，因而，收敛叙列$\{x_n\}:1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\cdots$无有界变差.

*）详见 88 题的证明.

87. 试叙述"某叙列不满足哥西准则"的意义.

解 即存在某一个 $\varepsilon_0>0$，不论对于怎样的数 N，总有 $n_0>N,m_0>N$，使得

$$|x_{n_0}-x_{m_0}|\geqslant\varepsilon_0.$$

88. 利用哥西判别法，证明叙列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

的发散性.

证 取 $m=2n$，则

$$|x_m-x_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

所以，叙列 $\{x_n\}$ 发散．

89．证明若叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛，则它的任何子叙列 x_{p_n} 也收敛，且有同一极限：

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n}=\lim_{n\to\infty} x_n.$$

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在有正整数 N，使

$$当\ n>N\ 时，|x_n-a|<\varepsilon.$$

今因自然数叙列 $\{p_k\}$ 以 $+\infty$ 为其极限，所以，对于 N，存在有正整数 k_0，使

$$当\ k>k_0\ 时，p_k>N,$$

此时 $|x_{p_k}-a|<\varepsilon(k>k_0)$，所以，子叙列 $\{x_{p_k}\}$ 收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n}=\lim_{n\to\infty} x_n=a.$$

90．证明：若单调叙列的某一子叙列收敛，则此单调叙列本身是收敛的．

证 不失一般性，假设叙列 $\{x_n\}$ 单调增加，其一子叙列 $\{x_{p_n}\}$ 收敛于 a．则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使

$$当\ k>N\ 时，|x_{p_k}-a|<\varepsilon,$$

令 $N'=P_{N+1}$．设 $n>N'$，由于 $p_1<p_2<p_3<\cdots\to+\infty$，故必有 $p_k(k>N)$ 使 $p_k\leqslant n<p_{k+1}$．由上知

$$|x_{p_k}-a|<\varepsilon,\ |x_{p_{k+1}}-a|<\varepsilon.$$

而 $x_{p_k} \leqslant x_n \leqslant x_{p_{k-1}}$(因 x_n 递增),故必

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,即$\{x_n\}$是收敛的.

91. 证明:若

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则对于任给的$\varepsilon > 0$,存在有数$N$,使当$n > N$时,$|x_n - a| < \varepsilon$. 又因$||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$,故当$n > N$时,$||x_n| - a|| < \varepsilon$. 于是,

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = a|.$$

92. 设 $x_n \to a$,则极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

是什么?

解 按题意,应设 $x_n \neq 0 (n = 1,2,\cdots)$.

若 $a \neq 0$,则显然

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{a}{a} = 1.$$

若 $a = 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$可能不存在,例如,若$\{x_n\}$为:

$$1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^3},\cdots$$

则 $x_n \to 0$,但显然$\dfrac{x_{2m}}{x_{2m-1}} \to 1$,$\dfrac{x_{2m+1}}{x_{2m}} \to \dfrac{1}{2}$,故$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$不存在. 下面我们证明,若$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$存在,设为$b$,则必有$-1 \leqslant$

$b \leqslant 1$.

用反证法. 若 $|b| > 1$. 取 r, 使 $|b| > r > 1$. 利用91题结果, 知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |b|.$$

于是, 存在正整数 N, 使当 $n \geqslant N$ 时, 恒有 $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > r$. 从而, 当 $n > N$ 时,

$$|x_n| = |x_N| \cdot \left|\frac{x_{N+1}}{x_N}\right| \cdot \left|\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\right| \cdots \left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right| > |x_N| \cdot r^{n-N},$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, 此与 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 矛盾, 故必有 $-1 \leqslant b \leqslant 1$.

总结起来, 若 $a \neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$; 若 $a = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在也可能不存在, 当存在时, 它必属于 $[-1, 1]$.

93. 证明收敛的数列是有界的.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 要证 $\{x_n\}$ 有界. 对于正数 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 必有 $|x_n - a| < 1$, 从而 $|x_n| < |a| + 1 (n > N)$. 于是, 令

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |a| + 1\}.$$

则 $|x_n| \leqslant M (n = 1, 2, \cdots)$. 由此可知 $\{x_n\}$ 有界.

94. 证明收敛的数列或达到其上确界, 或达到其下确界, 或两者都达到. 举出这三类数列的例子.

证 (1) 对于各项恒为常数的数列, 显然上、下确界均达到.

(2) 对于不恒为常数的收敛数列,

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则或存在某$x_i>A$,或存在某$x_j<A$,或这种$x_i,x_j$都存在.作$A$的充分小的邻域使它不包含$x_i$或$x_j$,或$x_i,x_j$都不包含在此邻域内.由于$x_n\to A$,故在这三种情况的任一种下,这个邻域外部都只有$\{x_n\}$中的有限个元素.因此分别为必达到上确界、必达到下确界或上、下确界均必达到.在第一种情形下确界可能达到,也可能达不到;在第二种情形,上确界可能达到也可能达不到.

95. 证明趋近于$+\infty$的数列$x_n(n=1,2,\cdots)$必定达到其下确界.

证　由题设可知存在正整数N,使当$n>N$时恒有$x_N>x_1$,于是,显然,$x_1,x_2\cdots,x_N$中的最小者即为$\{x_n\}$的下确界.

求叙列$x_n(n=1,2,\cdots)$的最大项,设:

96. $x_n=\dfrac{n^2}{2^n}$.

解　当$n=3$时,$n^2>2^n$;当$n\neq 3$时,$n^2\leqslant 2^n$;

所以,最大项为$x_3=\dfrac{9}{8}$.

97. $x_n=\dfrac{\sqrt{n}}{100+n}$.

解　$x_n=\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{n}-\dfrac{10}{\sqrt[4]{n}}\right)^2+20}\leqslant\dfrac{1}{20}$,其中$x_{100}=\dfrac{1}{20}$,

所以,最大项为$x_{100}=\dfrac{1}{20}$.

98. $x_n=\dfrac{1000^n}{n!}$.

解　$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1000}{n+1}$.

当 $n+1<1000$ 时，$x_{n+1}>x_n$；

当 $n+1>1000$ 时，$x_{n+1}<x_n$.

所以，最大项为 $x_{999}=x_{1000}=\dfrac{1000^{1000}}{1000!}$.

求叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 的最小项，若：

99. $x_n=n^2-9n-100$.

解 若 $n^2-9n\geqslant 0$，则 $n\geqslant 9$；

若 $n^2-9n<0$，则 $0<n<9$.

所以，最小项从 x_1 到 x_8 中去寻找，比较之，得 x_n 的最小项为

$$x_4=x_5=-20-100=-120.$$

100. $x_n=n+\dfrac{100}{n}$.

解 $x_n=\left(\sqrt{n}-\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)^2+20\geqslant 20$，其中 $x_{10}=20$，

所以，最小项为 $x_{10}=20$.

求叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 的 $\inf\{x_n\}$，$\sup\{x_n\}$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ 及 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$，设：

101. $x_n=1-\dfrac{1}{n}$.

解 $\inf\{x_n\}=0$； $\sup\{x_n\}=1$；

$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=1$； $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

102. $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

解 $\inf\{x_n\}=-1$； $\sup\{x_n\}=\dfrac{3}{2}$；

$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=0$； $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$；

103. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

解 $x_1 = 1, x_2 = 1 - \frac{2}{3}, x_3 = 1, x_4 = 1 + \frac{4}{5}, \cdots$.

$\inf\{x_n\} = 0$; $\sup\{x_n\} = 2$;

$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 2$.

104. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

解 $x_{4k} = 1 - 2 + 3, x_{4k+1} = 1 + 2 + 3,$

$x_{4k+2} = 1 - 2 - 3, x_{4k+3} = 1 + 2 - 3 (k = 0, 1, 2, \cdots)$.

$\inf\{x_n\} = -4$; $\sup\{x_n\} = 6$;

$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -4$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 6$.

105. $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$.

解 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right), x_3 = \frac{1}{2},$

$x_4 = \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right), x_5 = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right), x_6 = \frac{5}{7},$

$x_7 = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right), x_8 = \frac{7}{9}\left(-\frac{1}{2}\right), x_9 = \frac{4}{5}, \cdots$.

$\inf\{x_n\} = -\frac{1}{2}$; $\sup\{x_n\} = 1$;

$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{2}$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$.

106. $x_n = (-1)^n n$.

解 $\inf\{x_n\} = -\infty$; $\sup\{x_n\} = +\infty$;

$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

107. $x_n = -n[2 + (-1)^n]$.

解 $\inf\{x_n\} = -\infty$; $\sup\{x_n\} = -1$;

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

108. $x_n = n(-1)^n$.

解 $\inf\{x_n\} = 0$; $\sup\{x_n\} = +\infty$;

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

109. $x_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

解 $x_1 = 1 + 1, x_2 = 1 + 0, x_3 = 1 - 3, x_4 = 1 + 0,$

$x_5 = 1 + 5, \cdots$.

$\inf\{x_n\} = -\infty$; $\sup\{x_n\} = +\infty$;

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

110. $x_n = \dfrac{1}{n - 10.2}$.

解 当 n 由 1 到 10 时，x_n 由负数往下降；

当 n 由 11 到 $+\infty$ 时，x_n 由正数往下降，所以，

$\inf\{x_n\} = x_{10} = -5$；$\sup\{x_n\} = x_{11} = 1.25$；

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

求$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$及$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. 设：

111. $x_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

解 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{1}{2}$；$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

112. $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$

解 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\left(e + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$；$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = e + 1$.

113. $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$.

解 $\varliminf_{n\to\infty} x_n = 0$; $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1$.

114. $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot (-1)^n}$.

解 $\varliminf_{n\to\infty} x_n = 1$; $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 2$(因$(2^{2k}+1)^{\frac{1}{2k}}$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right)^{\frac{1}{2k}} \to 2\Big).$$

115. $x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}$.

解 $\varliminf_{n\to\infty} x_n = 0$; $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1$.

求下列各叙列的聚点:

116. $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n},\cdots$.

解 聚点为 0 及 1.

117. $1,\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},\frac{1}{3},1+\frac{1}{3},\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\frac{1}{4},1+\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n},\cdots$,

$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots$.

解 聚点为

$$0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots.$$

它们分别为子叙列:

$\left\{\frac{1}{n}\right\},\left\{1+\frac{1}{n}\right\},\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right\},\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right\},\cdots$ 的极限.

118. $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\cdots$.

解 所述数列正好包含(0,1)中全部有理数,故对于闭

区间$[0,1]$上的每一点x，在其任意的ε邻域内均有此数列中无穷个数，因此x必可作为某子数列的极限，所以，x是所述数列的聚点，由此可知$[0,1]$中的任何点都是所述数列的聚点，显然，$[0,1]$外的点都不是所述数列的聚点.

119. $x_n = 3\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n$。

解　因为$2\cdot(-1)^n$为2或-2. 所以，聚点为5及1.

120. $x_n = \frac{1}{2}[(a+b)+(-1)^n(a-b)]$.

解　聚点为a及b.

121. 试举出以已知数

$$a_1, a_2, \cdots, a_p$$

作为聚点的数列的例子.

解　数列

$$a_1-\frac{1}{2}, a_2-\frac{1}{2}, \cdots, a_p-\frac{1}{2}, a_1-\frac{1}{3},$$
$$a_2-\frac{1}{3}, \cdots, a_p-\frac{1}{3}, \cdots, a_1-\frac{1}{n}, a_2-\frac{1}{n}, \cdots,$$
$$a_p-\frac{1}{n}, \cdots$$

显然以$a_1, a_2, \cdots, a_p$为聚点.

122. 试举出数列的例子，对此数列而言，已知数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

所有各项皆为其聚点，已知叙列还必有怎样的聚点？

解　例如，数列

$$a_1+\frac{1}{2}, a_2+\frac{1}{2}, a_1+\frac{1}{3}, a_2+\frac{1}{3}, a_3+\frac{1}{3},$$
$$a_1+\frac{1}{4}, a_2+\frac{1}{4}, a_3+\frac{1}{4}, a_4+\frac{1}{4}, \cdots,$$

$$a_1+\frac{1}{n},a_2+\frac{1}{n},a_3+\frac{1}{n},\cdots,a_n+\frac{1}{n},\cdots$$

就以 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$ 为其聚点.

另外,很明显,若 $\{x_n\}$ 为一数列,使已知数列 $\{a_n\}$ 的各项 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 皆为 $\{x_n\}$ 的聚点,则已知数列 $\{a_n\}$ 本身的聚点也必为数列 $\{x_n\}$ 的聚点.

123. 举出叙列的例子:

(а) 没有有限的聚点;

(б) 有唯一有限的聚点,但非收敛者;

(в) 有无限多的聚点;

(г) 以每一实数作为聚点.

解 (а) 叙列 $x_n=n(n=1,2,\cdots)$ 没有有限的聚点.

(б) 叙列:$1,-1,\frac{1}{2},-2,\frac{1}{3},-3,\cdots,\frac{1}{n},-n,\cdots$ 有唯一有限的聚点 0,但此叙列却不收敛.

(в)118 题的叙列即有无限多的聚点.

(г) 我们按下述"对角线法则"来构造一个叙列,使每一元素后面跟一个对应的负数,排列顺次如图 1·1.

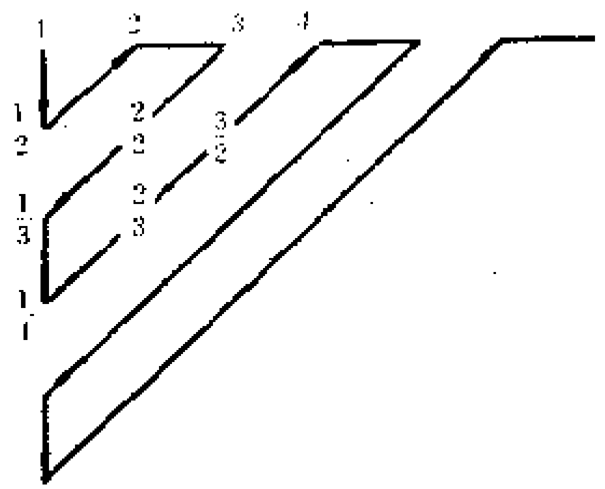


图 1.1

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2}, x_5 = 2,$$

$$x_6 = -2, x_7 = 3, x_8 = -3, x_9 = \frac{2}{2},$$

$$x_{10} = -\frac{2}{2}, x_{11} = \frac{1}{3}, x_{12} = -\frac{1}{3}, \cdots.$$

此叙列以每一实数作为其聚点，即聚点的集合为$(-\infty, +\infty)$.

124. 证明叙列 x_n 和 $y_n = x_n \cdot \sqrt[n]{n}$ $(n = 1,2,\cdots)$ 有相同的聚点.

证 因为 $\sqrt[n]{n} \to 1$，所以，叙列$\{x_n\}$的子叙列$\{x_{n_k}\}$与$\{y_n\}$的对应子叙列$\{x_{n_k} \cdot \sqrt[n_k]{n_k}\}$同时收敛，且具有相同的极限，此即叙列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$有相同的聚点.

125. 证明从有界的叙列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 中，永远可选出收敛的子叙列 $x_{p_n} (n = 1,2,\cdots)$.

证 因为叙列$\{x_n\}$有界，故可设一切项满足不等式

$$a \leqslant x_n \leqslant b,$$

其中 a, b 为有限的实数，将区间$[a,b]$二等分之，得区间$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$，$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$，其中必至少有一个包含所给叙列的无限多项，将它记成$[a_1, b_1]$(若两者均含无穷多项，则任取其一作为$[a_1, b_1]$). 再将区间$[a_1, b_1]$等分之，又可得区间$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$，它包含所给叙列的无限多项。依次类推，于是得一串区间：

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots,$$

其中每一$[a_n, b_n]$都包含所给叙列$\{x_n\}$中的无限多项，

且有
$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0(n \to \infty),$$
因此，根据区间套定理诸$[a_n, b_n]$具有唯一的公共点c，且
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$
现按下法选出$\{x_n\}$的一个子序列$\{x_{p_k}\}$：在包含于$[a_1, b_1]$内的诸x_n中任取一个作为x_{p_1}. 然后，在包含于$[a_2, b_2]$内且在x_{p_1}后面的诸x_n中任取一个作为x_{p_2}，然后，又在包含于$[a_3, b_3]$内且在x_{p_2}后面的诸x_n中任取一个作为x_{p_3}. 余类推(这是可能的，因为每个$[a_k, b_k]$中都包含有x_n无穷多项). 于是我们得出$\{x_n\}$的一子数列$\{x_{p_k}\}$，满足
$$a_k \leqslant x_{p_k} \leqslant b_k \quad (k = 1, 2, \cdots).$$
由此，知 $|x_{p_k} - c| \leqslant b_k - a_k (k = 1, 2, \cdots)$，
故 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{p_k} = c$. 从而$\{x_{p_k}\}$是$\{x_n\}$的一个收敛子数列. 证毕.

126. 证明：若叙列$x_n (n = 1, 2, \cdots)$无界，则存在子叙列$x_{p_n} (n = 1, 2, \cdots)$，使得
$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \infty.$$
证 因$x_n (n = 1, 2, \cdots)$无界，故存在某项x_{p_1}满足$|x_{p_1}| > 1$. 由于数列$x_n (n = p_1 + 1, p_1 + 2, \cdots)$也无界，故又存在某项$x_{p_2} (p_2 > p_1)$，使$|x_{p_2}| > 2$；又由于数列$x_n (n = p_2 + 1, p_2 + 2, \cdots)$无界，故又存在某项$x_{p_3} (p_3 > p_2)$，使$|x_{p_3}| > 3$. 余类推. 于是，我们得$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{p_k}\}$，满足

$$|x_{p_k}|>k(p=1,2,\cdots).$$

由此可知

$$\lim_{k\to\infty}x_{p_k}=\infty.$$

证毕.

127. 设叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛，而叙列 $y_n(n=1,2,\cdots)$ 发散，则能否断定关于叙列

(a) x_n+y_n；(б) x_ny_n

的收敛性？

举出适当的例子.

解 (a) $\{x_n+y_n\}$ 一定发散. 如果 $\{x_n+y_n\}$ 收敛，则由 $(x_n+y_n)-x_n=y_n$，知 $\{y_n\}$ 收敛，与题设矛盾.

(б) 叙列 $\{x_ny_n\}$ 可能收敛，也可能发散. 例如：

(1) 叙列 $x_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$ 收敛，

叙列 $y_n=n(n=1,2,\cdots)$ 发散，

而叙列 $x_ny_n=1(n=1,2,\cdots)$ 是收敛的.

(2) 叙列 $x_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$ 收敛，

叙列 $y_n=n^2(n=1,2,\cdots)$ 发散，

而叙列 $x_ny_n=n(n=1,2,\cdots)$ 却是发散的.

128. 设叙列 x_n 和 y_n 发散 $(n=1,2,\cdots)$. 可否断定叙列

(a) x_n+y_n； (б) x_ny_n.

也发散呢？

举出适当的例子.

解 不能. 例如，叙列

$$x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}\text{ 及 }y_n=\frac{1-(-1)^n}{2}(n=1,2,\cdots)$$

都发散，但叙列

$$x_n + y_n = 1 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

及

$$x_n y_n = 0 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

却都是收敛的，

129. 设：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

及 $y_n(n = 1,2,\cdots)$ 为任意叙列，能否断定

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0?$$

举出适当的例子.

解 不能. 例如，叙列

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0(n \to \infty)$$

及

$$y_n = n(n = 1,2,\cdots)$$

的乘积

$$x_n y_n = 1(n = 1,2,\cdots),$$

当 $n \to \infty$ 时趋于 1，不趋于 0.

130. 设：

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

是否由此可得出或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，或 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$?

解 不能. 例如，叙列

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \text{ 及 } y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} (n = 1,2,\cdots),$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$$

但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$及$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$均不存在.

当然，还可举例$x_n=\dfrac{1}{n^2}$，$y_n=n$，$(n=1,2,\cdots)$，则$x_ny_n\to0$，$x_n\to0$，而$\{y_n\}$极限不存在（当$n\to\infty$）. 注意，假若已知$x_ny_n\to0$，而又已知$\{x_n\}$，$\{y_n\}$中至少有一个叙列有极限的话，则：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$或$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$至少有一个是成立的.

131. 证明

(a) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$，

及

(б) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$.

举出在上面关系式中仅不等号成立的例子.

证 (a) 先证右端不等式. 根据定义，存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$使$x_{n_k}\to\alpha=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$. 对于序列$\{y_{n_k}\}$，必有子序列$y_{n_{k_i}}\to\beta=\varlimsup\limits_{k\to\infty}y_{n_k}$. 显然$\varlimsup\limits_{k\to\infty}y_{n_k}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$. 由于$x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to\alpha+\beta$，故$\alpha+\beta$是$\{x_n+y_n\}$的一个聚点.

由此可知

$$\alpha+\beta\geqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n).$$

故得

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\alpha+\beta\leqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

再证左端的不等式，根据定义，存在$\{x_n+y_n\}$的子序列$\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$使$x_{n_k}+y_{n_k}\to\alpha'=\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$.

对于序列$\{x_{n_k}\}$，存在子序列$\{x_{n_{k_i}}\}$使$x_{n_{k_i}}\to\beta'=\varliminf\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$，显然$\varliminf\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}})-x_{n_{k_i}}\to\alpha'-\beta'.$$

故 $\alpha'-\beta'$ 是 $\{y_n\}$ 的一个聚点，从而

$$\alpha'-\beta'\geqslant\varliminf_{n\to\infty}y_n,$$

由此可知

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\alpha'\geqslant\beta'+\varliminf_{n\to\infty}y_n\geqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varliminf_{n\to\infty}y_n.$$

(6) 先证右端不等式. 根据定义，存在 $\{x_n+y_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}+y_{n_k}\to r=\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)$. 对于序列 $\{x_{n_k}\}$，存在子序列 $x_{n_{k_i}}\to\tau=\varlimsup_{k\to\infty}x_{n_k}$. 显然 $\varlimsup_{k\to\infty}x_{n_k}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}})-x_{n_{k_i}}\to r-\tau,$$

故 $r-\tau$ 是 $\{y_n\}$ 的一个聚点，从而

$$r-\tau\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

由此可知

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=r\leqslant\tau+\varlimsup_{n\to\infty}y_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

再证左端的不等式. 根据定义，存在 $\{y_n\}$ 的一个子序列 $\{y_{n_k}\}$，使 $y_{n_k}\to r'=\varlimsup_{n\to\infty}y_n$. 对于序列 $\{x_{n_k}\}$，存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使 $x_{n_{k_i}}\to\tau'=\varliminf_{k\to\infty}x_{n_k}$. 显然 $\varliminf_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant\varliminf_{n\to\infty}x_n$. 由于

$$x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to r'+\tau',$$

故 $r'+\tau'$ 是 $\{x_n+y_n\}$ 的一个聚点，从而

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant r'+\tau'.$$

由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \geqslant r' + \tau' \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

证毕.

以下举不等号成立的例子.例如,令

$\{x_n\}$ 为:1,0,1,0,1,0,…

$\{y_n\}$ 为:0,2,0,2,0,2,….

则有不等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n = 0 < \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = 1$$
$$< \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = 2.$$

而对于数列

$\{x_n\}$ 为:0,2,0,2,0,2,…

$\{y_n\}$ 为:1,0,1,0,1,0,…,

则有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = 1 < \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = 2$$
$$< \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = 3.$$

132. 设 $x_n \geqslant 0$ 和 $y_n \geqslant 0 (n = 1,2,\cdots)$.

证明:

(a) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$,

及

(б) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$.

举出在这些关系式中仅不等号成立的例子.

证 (a)先证右端的不等式。根据定义,存在$\{x_n\}$的一个子序列$\{x_{n_k}\}$,使 $x_{n_k} \to \alpha = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \geqslant 0$;对于序列$\{y_{n_k}\}$,存在子序列$\{y_{n_{k_l}}\}$,使 $y_{n_{k_l}} \to \beta = \overline{\lim_{k\to\infty}} y_{n_k} \geqslant 0$. 显然$\overline{\lim_{k\to\infty}} y_{n_k} \leqslant$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$. 由于 $x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \to \alpha\beta$，故 $\alpha\beta$ 是序列 $\{x_n y_n\}$ 的一个聚点，因此

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \leqslant \alpha\beta$$

由此，再注意到 $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$，即得知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \leqslant \alpha\beta \leqslant \alpha(\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n) = (\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n) \cdot (\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n).$$

再证左端的不等式. 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0$，则此不等式显然成立，故设 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \beta^* > 0$. 于是，存在正整数 N_0，使当 $n > N_0$ 时，$x_n > 0$. 根据定义，存在 $\{x_n y_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k} y_{n_k}\}$ 使

$$x_{n_k} y_{n_k} \to \alpha' = \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) \geqslant 0.$$

对于序列 $\{x_{n_k}\}$，存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$，使

$$x_{n_{k_i}} \to \beta' = \underline{\lim_{k\to\infty}} x_{n_k}.$$

注意到 $\beta' = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_{n_k} \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \beta^* > 0$ 以及 $x_n > 0 (n > N_0)$，

知

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \to \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

故 $\frac{\alpha'}{\beta'}$ 是 $\{y_n\}$ 之一聚点，从而

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$

由此可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \alpha' \geqslant \beta'(\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n) \geqslant (\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n) \cdot (\underline{\lim_{n\to\infty}} y_n).$$

(6) 先证右端不等式，可设$\{y_n\}$有界(若$\{y_n\}$无界，则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=+\infty$，从而此不等式显然成立)。根据定义，存在$\{x_ny_n\}$的子序列$\{x_{n_k}y_{n_k}\}$使

$$x_{n_k}y_{n_k}\to\bar{\alpha}=\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)\geqslant 0.$$

对于$\{x_{n_k}\}$，存在子序列$\{x_{n_{k_i}}\}$使

$$x_{n_{k_i}}\to\bar{\beta}=\overline{\lim_{k\to\infty}}x_{n_k}\geqslant 0.$$

若$\bar{\beta}=0$，则由于$\{y_n\}$有界，知$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to 0$，从而$\bar{\alpha}=0$，此时所要证的不等式显然成立，故下设$\bar{\beta}>0$. 于是，当$i$充分大时($i>i_0$)，$x_{n_{k_i}}>0$，故得

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}})\cdot\frac{1}{x_{n_{k_i}}}\to\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

因此，$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$是$\{y_n\}$之一聚点，从而$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$；由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)\leqslant(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n).$$

再证左端的不等式. 根据定义，存在$\{y_n\}$的一子序列$\{y_{n_k}\}$，使$y_{n_k}\to r=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\geqslant 0$，对于$\{x_{n_k}\}$，存在子序列$\{x_{n_{k_i}}\}$使

$$x_{n_{k_i}}\to\tau=\underline{\lim_{k\to\infty}}x_{n_k}\geqslant 0.$$

显然，$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}x_{n_k}\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\geqslant 0$. 由于

$$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to\tau r,$$

故τr是$\{x_ny_n\}$之一聚点，从而

$$\tau r\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n),$$

由此可知

$$(\varliminf_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty} y_n)\leqslant r\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n).$$

证毕.

下面举不等号成立的例子,例如,令

$\{x_n\}$ 为:$\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\cdots$

$\{y_n\}$ 为:$2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},\cdots$

则有不等式

$$(\varliminf_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varliminf_{n\to\infty} y_n)=\frac{1}{8}<\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n)$$
$$=\frac{1}{2}<(\varliminf_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty} y_n)=1.$$

再令

$\{x_n\}$ 为:$2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},\cdots$

$\{y_n\}$ 为:$\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\cdots$

则有不等式

$$(\varliminf_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty} y_n)=\frac{1}{2}<\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n)$$
$$=1<(\varlimsup_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty} y_n)=4.$$

133. 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,则对任何的叙列 $y_n(n=1,2,\cdots)$,有

(a) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

及

(6) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n(x_n\geqslant 0)$.

证 (a) 由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,故

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\varliminf_{n\to\infty} x_n=\varlimsup_{n\to\infty} x_n,$$

从而,利用 131 题的结果可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$$

$$= \underline{\lim_{n\to\infty}}x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}y_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n),$$

故得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty}x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

(6) 分三种情形：(i) 设 $y_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$. 则利用 132 题的结果可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n) \leqslant (\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)$$

$$= (\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n)$$

$$= (\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n),$$

故得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n) = (\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n).$$

(ii) 设 $y_n \leqslant 0(n=1,2,\cdots)$. 则 $-y_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，于是，仍利用 132 题的结果可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_ny_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

$$= \underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\lim_{n\to\infty}x_n$$

$$= \underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_ny_n),$$

故得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_ny_n) = \lim_{n\to\infty}x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n);$$

但是根据上、下极限的定义，显然有等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_ny_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

(iii) 设$\{y_n\}$中有无穷多项是非负的，设这些项构成的子序列为$\{y_{n_k}\}$($y_{n_k} \geqslant 0, k = 1,2,\cdots$)(如果$\{y_n\}$中只有有限项是非负的，则从某一项开始有 $y_n < 0$，这时应用(ii) 的结果即知所要证的等式成立). 于是，注意到 $x_n \geqslant 0$，显然有(利用(i) 已证的结果)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \overline{\lim_{k\to\infty}}(x_{n_k} y_{n_k})$$

$$= \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} y_{n_k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

证毕.

134. 证明：若对于某非负*) 叙列 x_n($x_n \geqslant 0, n = 1,2,\cdots$)，任何叙列 y_n($n = 1,2,\cdots$) 都使下二等式中至少有一成立：

(a) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

或

(б) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$,

则叙列 x_n 是收敛的.

证 取$\{x_n\}$的子叙列$\{x_{n_k}\}$，使

$$x_{n_k} \to \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

取

$$y_n = \begin{cases} -x_n, 当 n \neq n_k 时, \\ A, 当 n = n_k 时, \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots),$$

其中 A 为任取的正常数，对此$\{y_n\}$若(a) 成立，则由(注意到 $x_n \geqslant 0$)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)+A,\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=A,$$

知

$$(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)+A=(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)+A,$$

由此可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

故$\{x_n\}$收敛.

若(σ)成立,则由(同样,注意到 $x_n\geqslant 0$)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=A\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

知

$$A\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=A\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

由此可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

故$\{x_n\}$也是收敛的.证毕.

*) 编者注:原著中将 $x_n\geqslant 0$ 的假定加在条件(6)后,似不妥,因为叙列 x_n 应该是预先给定的.

135. 证明:若 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=1,$$

则叙列 x_n 是收敛的.

证 由假定知

$$0<\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n<+\infty,0<\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}<+\infty.^{(*)}$$

由于(利用132题的结果)

$$1=\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot\frac{1}{x_n})\leqslant(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)\cdot(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n})$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n \cdot \frac{1}{x_n}) = 1,$$

故

$$(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n) \cdot (\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n}) = 1,$$

从而

$$(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n) \cdot (\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n}) = (\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n) \cdot (\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n}).$$

由此，再注意到（＊）式，即知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a \quad (0 < a < +\infty).$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在有限，因此$\{x_n\}$收敛，证毕.

136. 证明：若叙列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 有界，且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

则此叙列的聚点密布于下极限和上极限

$$l = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \text{ 和 } L = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

之间，即是说间隔$[l,L]$中的任意一个数都是已知叙列的聚点.

证 根据定义，l 与 L 都是$\{x_n\}$的聚点，故我们只要证明 l 与 L 之间的任何数 $a(l < a < L)$ 都是$\{x_n\}$的聚点. 先证：对于任意给定的$\varepsilon > 0$及任意给定的正整数N，必有正整数 $n^* > N$ 存在，使 $|x_{n^*} - a| < \varepsilon$.

由假定，必有正整数 N'，存在，使当 $n > N'$ 时，恒有 $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. 令 $N_0 = \max\{N, N'\}$，则于序列 $x_n (n = N_0 + 1, N_0 + 2, \cdots)$ 中必至少有两项$x_{n'}$和$x_{n''}$存在，使 $x_{n'} < a$，$x_{n''} > a$（因为否则的话，例如，无小于 a 的项，则必$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \geqslant a$，此与 $l < a$ 矛盾），不妨设 $n' < n''$，令

满足 $n' \leqslant n \leqslant n''$ 且使 $x_n < a$ 的正整数 n 中之最大者为 n^*. 显然 $n^* \leqslant n'' - 1$, 且 $x_{n^*} < a, x_{n^*+1} > a$. 故 $n^* > N$, $n^* > N'$ 并且

$$|x_{n^*} - a| < x_{n^*+1} - x_{n^*} < \varepsilon.$$

现取 $\varepsilon_1 = 1, N_1 = 1$, 则存在 $x_{n_1}(n_1 > 1$, 使 $|x_{n_1} - a| < 1$; 再取 $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}, N_2 = n_1$, 则存在 $x_{n_2}(n_2 > n_1)$ 使 $|x_{n_2} - a| < \dfrac{1}{2}$; 又取 $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{3}, N_3 = n_2$, 存在则 $x_{n_3}(n_3 > n_2)$ 使 $|x_{n_3} - a| < \dfrac{1}{3}$; 这样一直继续下去, 则得 $\{x_n\}$ 的一个子数列 $\{x_{n_k}\}$, 满足

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

故 $x_{n_k} \to a$, 即 a 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点, 证毕.

137. 设数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 满足条件

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n (m, n = 1, 2, \cdots)$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$ 存在.

证 证法一:

由于

$$x_n \leqslant x_{n-1} + x_1 \leqslant x_{n-2} + x_1 + x_1 \leqslant \cdots \leqslant nx_1,$$

故 $0 \leqslant \dfrac{x_n}{n} \leqslant x_1$, 从而数列 $\left\{\dfrac{x_n}{n}\right\}$ 有界, 令 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = a$, 则 $0 \leqslant a \leqslant x_1$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > 1$ 使 $\dfrac{x_N}{N} < a + \varepsilon$. 任何正整数 $n > N$ 都可表为 $n = qN + r$ 的形式, 其中 q 为正整数, r 为小于 N 的非负整数 $(0 \leqslant r < N)$.

我们有

$$x_n = x_{qN+r} \leqslant x_{(q-1)N} + x_N + x_r \leqslant x_{(q-2)N} + x_N + \\ + x_N + x_r \leqslant \cdots \leqslant qx_N + x_r \leqslant qx_N + rx_1 \\ \leqslant qx_N + Nx_1,$$

从而

$$\frac{x_n}{n} \leqslant \frac{qx_N}{n} + \frac{Nx_1}{n} \leqslant \frac{x_N}{N} + \frac{Nx_1}{n} < a + \varepsilon + \frac{Nx_1}{n}.$$

由此可知

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \leqslant a + \varepsilon,$$

再根据 $\varepsilon > 0$ 的任意性，即得

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \leqslant a,$$

故

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{n},$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在有限.

证法二：

用反证法. 假定$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ 不存在，则序列$\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$至少有两个聚点 a 与 b，不妨设 $a < b$，由于(证法一中已证)

$$0 \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant x_1 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

故 $0 \leqslant a < b \leqslant x_1$. 根据聚点定义，存在$\{x_n\}$的两个子序列$\{x_{n_i}\}$与$\{x_{m_j}\}$，使

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_{n_i}}{n_i} = a, \quad \lim_{j\to\infty} \frac{x_{m_j}}{m_j} = b.$$

任给 $\epsilon < 0$，必存在正整数 $i_0 > 1$，使

$$\frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} < a + \epsilon.$$

显然，当 j 充分大时($j > j_0$)，必 $m_j > n_{i_0}$，此时仿证法一，有不等式($[x]$ 表 x 的整数部分)

$$x_{m_j} \leqslant \left[\frac{m_j}{n_{i_0}}\right]x_{n_{i_0}} + n_{i_0}x_1 \leqslant \frac{m_j}{n_{i_0}}x_{n_{i_0}} + n_{i_0}x_1,$$

故($j > j_0$ 时)

$$\frac{x_{m_j}}{m_j} \leqslant \frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} + \frac{n_{i_0}x_1}{m_j} < a + \epsilon + \frac{n_{i_0}x_1}{m_j},$$

由此可知

$$b = \lim_{j\to\infty}\frac{x_{m_j}}{m_j} \leqslant a + \epsilon.$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性，即得 $b \leqslant a$，此与 $a < b$ 矛盾，证毕.

138. 证明：若叙列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$ 收敛，则算术平均值的叙列

$$\zeta_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad (n = 1,2,\cdots)$$

也收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty}x_n.$$

反之，则结论不真，举例说明之.

证　令 $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，则

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \cdots + x_n}{n - N}$$
$$\cdot\left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设收敛于 a，则对于任给的 $\epsilon > 0$ 存在序

号 N，使当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，即 $x_{N+1},x_{N+2},\cdots$ 均 $\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$。由此推得 $\dfrac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}$ 也含在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之内，即

$$\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}=a+\alpha,$$

式中 $|\alpha|<\varepsilon$.

这样，$\dfrac{s_n}{n}=\dfrac{s_N}{n}+(a+\alpha)\left(1-\dfrac{N}{n}\right)$. 由此得

$$\left|\frac{s_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{|s_N|}{n}+|\alpha|+(|a|+|\alpha|)\frac{N}{n}.$$

今取 $N'>N$，使当 $n>N'$ 时，恒有

$$\frac{|s_N|}{n}<\varepsilon,\quad \frac{N}{n}<\frac{\varepsilon}{|a|+\varepsilon}.$$

于是，当 $n>N'$ 时，恒有 $\left|\dfrac{s_n}{n}-a\right|<3\varepsilon$.

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=a,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

但反之不然，例如叙列 $x_n=(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 是发散的，但是叙列

$$\zeta_n=\begin{cases}0,\text{若 } n \text{ 为偶数},\\ -\dfrac{1}{n},\text{若 } n \text{ 为奇数},\end{cases}$$

却是收敛的.

139. 证明：若

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,故对于任给的$M>0$,存在有序号$N$,使当$n>N$时,$x_n>3M$.此时,仿138题之证,有

$$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{s_n-s_N}{n-N}\left(1-\frac{N}{n}\right)>\frac{s_N}{n}+3M\left(1-\frac{N}{n}\right).$$

又因$\frac{s_N}{n}\to 0,1-\frac{N}{n}\to 1(n\to\infty)$,故可取正整数$N'>N$,使当$n>N'$时,恒有

$$\frac{|s_N|}{n}<\frac{M}{2},\quad 1-\frac{N}{n}>\frac{1}{2}.$$

于是,当$n>N'$时恒有$\frac{s_n}{n}>M$,由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

140. 证明:若叙列$x_n(n=1,2,\cdots)$收敛,且$x_n>0$,

则 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.因$x_n>0(n=1,2,\cdots)$,故$a\geqslant 0$.先设$a>0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$,于是,利用138题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)=\ln a.$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)}$$
$$=e^{\ln a}=a=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

若$a=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln x_n)=+\infty$.利用139题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)=+\infty,$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)}$$
$$=0=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证毕.

141. 证明:若 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证 令 $y_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}(n=1,2,\cdots)$,则 $y_n>0$. 由假定 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在,设为 a. 利用 140 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}=a.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}\sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1}\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}\left[(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}$$
$$=1\cdot a=a=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

142. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

证 设数列 $x_n=\frac{n^n}{n!}(n=1,2,\cdots)$ 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

所以,利用 141 题的结果,即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=e.$$

143. 证明：若

(a) $y_{n+1}>y_n (n=1,2,\cdots)$，

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ 存在，

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

证 假定 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$. 由此，并注意到 $y_n\to+\infty$，知对于任给的 $\varepsilon>0$，存在有序号 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}\text{（且 } y_n>0\text{）.}$$

于是分数（当 $n>N$ 时）

$$\frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\frac{x_{N+3}-x_{N+2}}{y_{N+3}-y_{N+2}},\cdots,$$

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}},\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

都包含在 $(a-\frac{\varepsilon}{2},a+\frac{\varepsilon}{2})$ 之内，因为 $y_{n+1}>y_n$，所以，这些分数的分母都是正数，于是得

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}$$

$$<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1}),$$

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2})<x_{N+3}-x_{N+2}$$

$$<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2}),$$

………………………

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n$$

$$<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1}-y_n),$$

相加之，得

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1}-y_{n+1})<x_{n+1}-x_{N+1}$$

$$<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1}-y_{N+1}),$$

即 $\quad a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}<a+\frac{\varepsilon}{2},$

所以，当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另外，我们有(当 $n>N$ 时)

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}+\left(1-\frac{y_{N+1}}{y_n}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{x_n-x_{N+1}}{y_n-y_{N+1}}-a\right),$$

故

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\leqslant\left|\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

现取正整数 $N'>N$，使当 $n>N'$ 时，恒有

$$\frac{|x_{N+1}-ay_{N-1}|}{y_n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是，当 $n>N'$ 时，恒有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon.$$

由此可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$

注. 本题中，若将条件(в)换为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=+\infty(\text{或}-\infty)$$

则结论仍成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

详见 Г.М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一章 § 2.

144. 求(а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}(a>1)$；

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}$.

解 (а) 设 $x_n=n^2, y_n=a^n(a>1)$

则 $y_{n+1}>y_n, y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^2-n^2}{a^{n+1}-a^n}=\frac{2n+1}{a^n(a-1)}.$$

再设 $x'_n=2n+1, y'_n=a^n$，

则 $y'_{n+1}>y'_n, y'_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x'_{n+1}-x'_n}{y'_{n+1}-y'_n}=\frac{2}{a^n(a-1)}\to0,$$

因而利用 143 题的结果得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{a^n}=0,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=0$$

继续利用 143 题的结果，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0.$$

(б) 设 $x_n=\lg n, y_n=n$，

则 $y_{n+1}>y_n, y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 0,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=0.$$

注 143题的结果属于O. Stolz，当 $y_n=n$ 时，早已被A. L. Cauchy 所证明，此结果常用于确定$\frac{“\infty”}{\infty}$型的待定式$\frac{x_n}{y_n}$的极限，144 题即是一例. 应用此结果，也可证明 138 题及 139 题的结果(此结果属于哥西 Cauchy). 事实上，令

$$x'_n=x_1+x_2+\cdots+x_n, y'_n=n,$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\zeta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x'_n}{y'_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x'_{n+1}-x'_n}{y'_{n+1}-y'_n}=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

145. 证明：若 p 为自然数，则

(а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$；

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$；

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}=\frac{2^p}{p+1}$.

证 (а)令 $x_n=1^p+2^p+\cdots+n^p, y_n=n^{p+1}$，

则 $y_{n+1}>y_n, y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p+\cdots}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{p+1+o\left(\frac{1}{n}\right)}\to\frac{1}{p+1},$$

式中$\lim\limits_{n\to\infty}o\left(\frac{1}{n}\right)=0$ 为无穷小，以下不再说明，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$.

(б)令 $x_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}$,

$y_n=(p+1)n^p$,

则 $y_{n+1}>y_n$, $y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(p+1)(n+1)^p[n^{p+1}-(n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p-n^p]}$$

$$=\frac{\frac{p(p+1)}{2}n^{p-1}+\cdots}{p(p+1)n^{p-1}+\cdots}.$$

当 $n\to\infty$时，$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\to\frac{1}{2}$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

(в)令 $x_n=1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p$, $y_n=n^{p+1}$,

则 $y_{n+1}>y_n$, $y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\frac{(2n+1)^p}{(p+1)n^p+\cdots}$$

$$=\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^p}{p+1+o\left(\frac{1}{n}\right)}\to\frac{2^p}{p+1},$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}$$

$$=\frac{2^p}{p+1}.$$

146. 证明：叙列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,\cdots$$

收敛.

因此有公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

式中 $C=0.577216\cdots$ 称为**尤拉常数**，且当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$.

证 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ *).

故 $\qquad \ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$

令 $n=1,2,3,\cdots n$ 得出

$$\ln 2-\ln 1<1,$$

$$\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},$$

$$\ln 4-\ln 3<\frac{1}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

相加之得

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

于是，

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)$$

$$>\frac{1}{n+1}>0,$$

即$\{x_n\}$是一个有下界的叙列，其次，

$$x_n - x_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n$$
$$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1},$$

因为$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{**)}$，所以 $x_n - x_{n+1} > 0$，这就是说，$\{x_n\}$又是一个单调下降的数列．因而$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，用 C 表示之，即

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right),$$

它的近似值为 0.577216．或表成

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0.$

*)及 * *)利用 75 题(a)的结果．

147. 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

解 因为

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n, \tag{1}$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n} = C + \ln 2n + \varepsilon_{2n}, \tag{2}$$

其中 C 为尤拉常数，$\varepsilon_n \to 0$，$\varepsilon_{2n} \to 0 (n\to\infty)$．

(2)式减(1)式得

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} = \ln 2n - \ln n + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n)$$
$$= \ln 2 + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) \to \ln 2 (n\to\infty),$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

148. 数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$是由下列各式

$$x_1=a, x_2=b, x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}(n=3,4,\cdots)$$

所确定. 求

$$\lim_{n\to\infty}x_n.$$

解　由于

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n+x_{n-1}}{2}-x_n=\frac{x_{n-1}-x_n}{2}$$

$$=\cdots=\frac{x_2-x_1}{(-2)^{n-1}}=\frac{b-a}{(-2)^{n-1}}$$

及

$$x_{n+1}=\sum_{m=1}^{n}(x_{m+1}-x_m)+x_1$$

$$=(b-c)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(-2)^{m-1}}+a,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{b-a}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+a=\frac{a+2b}{3}.$$

149. 设 $a>0$ 和 $x_n(n=1,2,\cdots)$为由以下各式

$$x_0>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)(n=0,1,2,\cdots)$$

所确定的数列. 求证

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}.$$

证　由 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}}\right)^2+\sqrt{a}\geqslant\sqrt{a}$

$(n=0,1,2,\cdots)$，

则　$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}-x_n\right)\leqslant 0.$

知$\{x_n\}$为单调下降的有界数列，必有极限存在。设其极限为 l，则 $l\geqslant\sqrt{a}>0$，对于等式

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

两端取极限，即得

$$l=\frac{1}{2}\left(l+\frac{a}{l}\right),$$

解之得

$$l=\sqrt{a}\text{（负值不合适）},$$

故证得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}.$$

150. 证明由下列各式

$$x_1=a,y_1=b,x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},$$

确定的叙列 x_n 和 $y_n(n=1,2,\cdots)$有公共的极限

$$\mu(a,b)=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$$

（数 a 和 b 的算术—几何平均数）.

证　分两种情形：

1)a 与 b 中至少有一个为零，例如，设 $a=0$. 则显然有 $x_n=0(n=1,2,\cdots)$，$y_{n+1}=\frac{y_n}{2}$，从而，递推得

$$y_n=\frac{b}{2^{n-1}}(n=1,2,\cdots).$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2)设 $a\neq 0, b\neq 0$. 这时，必须 $a>0, b>0$. 否则，若 $ab<0$，则 $x_2=ab$ 没有意义；若 $a<0, b<0$，则 $x_2=\sqrt{ab}>0$，$y_2=\frac{a+b}{2}<0$，从而 $x_3=\sqrt{x_2y_2}$ 没有意义. 因此，必须 $a>0, b>0$. 不妨假定 $a\leqslant b$. 由于两正数的等比中项不超过它们的等差中项，并且都界于原来两数之间，故有

$$a\leqslant x_2\leqslant y_2\leqslant b,$$

由此又有

$$a\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant y_3\leqslant y_2\leqslant b.$$

应用数学归纳法可知一般有

$$a\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant y_n\leqslant b \quad (n=2,3,\cdots).$$

故 $\{x_n\}$ 为单调增大的有界数列，$\{y_n\}$ 为单调减小的有界数列，因此它们的极限都存在，令

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} y_n = \beta.$$

在等式

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$$

两端取极限，得

$$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

故 $\alpha=\beta$，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

证毕.

§ 3. 函数的概念

1°函数的概念　若对于集合 $X=\{x\}$ 中的每一个 x，有一个确定的实数 $y\in Y=\{y\}$ 与之对应，则变量 y 称为变量 x 在已知变域 X 的单值函数 f，并记为 $y=f(x)$.

集合 X 名为函数 $f(x)$ 的定义域或存在域；Y 称为这个函数的值域，在最简单的情形下，集合 X 或为开区间 (a, b)：$a<x<b$，或为半开区间 $(a,b]$：$a<x\leqslant b$ 或 $[a,b)$：$a\leqslant x<b$，或为闭区间（线段 $[a,b]$：$a\leqslant x\leqslant b$，其中 a 和 b 为某实数或符号 $-\infty$ 和 $+\infty$.

若对于 X 中的每一个值 x 有若干个值 $y=f(x)$ 与之对应，则 y 称为 x 的多值函数.

2°反函数　若把 x 了解为满足方程式

$$f(x)=y$$

（式中 y 为属于函数 $f(x)$ 的值域 Y 中之一固定数值）的任何数值，则这个对应关系确定出在集合 Y 上的某函数

$$x=f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数 $f(x)$ 的反函数，这个函数一般地说来是多值的。若函数 $y=f(x)$ 是严格单调的，即当 $x_2>x_1$ 时，$f(x_2)>f(x_1)$[或相应地 $f(x_2)<f(x_1)$]，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 为单值而且严格的单调函数.

求下列函数的存在域：

151. $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

解　当 $1+x\neq 0$，即 $x\neq -1$ 时，函数 y 才有意义，所以，它的存在域为 $(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$.

152. $y=\sqrt{3x-x^3}$.

解　存在域为满足不等式

$$3x-3x^3\geqslant 0$$

的实数 x 的集合，解之，得存在域为$(-\infty,-\sqrt{3}]$，$[0,\sqrt{3}]$.

153. $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

解 当$\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$ 时，y 值确定.

解之，得存在域为满足

$$-1\leqslant x<1$$

的数 x 的集合.

154. (a)$y=\log(x^2-4)$，(6)$y=\log(x+2)+\log(x-2)$.

解 (a)当 $x^2-4>0$ 时，y 值确定. 解之，得存在域为$(-\infty,-2)$，$(2,+\infty)$.

(6)函数 y 由两个函数组成，其中第一个函数的存在域为$(-2,+\infty)$，而第二个函数的存在域为$(2,+\infty)$，于是，函数 y 的存在域为它们的公共部分，即$(2,+\infty)$.

155. $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

解 当 $\sin\sqrt{x}\geqslant 0$ 时，y 值才为确定的实数. 解之，得

$$2k\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2k+1)\pi \quad (k=0,1,2,\cdots).$$

存在域为满足不等式

$$4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2(k=0,1,2,\cdots)$$

的数 x 的集合.

156. $y=\sqrt{\cos x^2}$.

解 当 $\cos x^2\geqslant 0$ 时，y 值才为确定的实数，即只要 x 满足

$$0\leqslant x^2\leqslant\frac{\pi}{2}\text{及}(4k-1)\frac{\pi}{2}\leqslant x^2\leqslant(4k+1)\frac{\pi}{2}$$
$$(k=1,2,\cdots).$$

解之，得存在域为满足不等式

$$|x|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{及}\sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$(k=1,2,\cdots)$$

的数 x 的集合.

157. $y=\log\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解 当 $\sin\frac{\pi}{x}>0$ 时，y 值确定，即只要

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

及

$$-(2k+2)\pi<\frac{\pi}{x}<-(2k+1)\pi.$$

所以，存在域为满足不等式

$$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}, \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

及

$$-\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}$$

的数 x 的集合.

158. $y=\frac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$.

解 当 $x\geqslant0$ 及 $\sin\pi x\neq0$ 时，y 值确定，解之，得存在域为满足关系式

$$x>0, x\neq n(n=1,2,\cdots)$$

的数 x 的集合。

159. $y=\arc\sin\frac{2x}{1+x}$.

解 当$\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1$时，$y$值确定。解之，得

$$-1\leqslant\frac{2x}{1+x}\leqslant 1,$$

$$-1\leqslant 2-\frac{2}{1+x}\leqslant 1,$$

$$-3\leqslant-\frac{2}{1+x}\leqslant-1,$$

$$\frac{2}{3}\leqslant 1+x\leqslant 2.$$

最后得存在域为满足不等式

$$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$$

的数x的集合.

160. $y=\arccos(2\sin x)$.

解 当$|2\sin x|\leqslant 1$时，y值确定.解之，得存在域为满足不等式

$$|x-kx|\leqslant\frac{\pi}{6}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的数x的集合.

161. $y=\lg[\cos(\lg x)]$.

解 当$\cos(\lg x)>0$时，y值确定.解之，得

$$\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi<\lg x<\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

从而存在域为满足不等式

$$10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}<x<10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的数x的集合。

162. $y=(x-|x|\sqrt{-\sin^2\pi x}$.

解 由于$\sin^2\pi x\geqslant 0$，故仅当$\sin\pi x=0$时$\sqrt{-\sin^2\pi x}$才有

意义，从而函数 y 才有意义. 解之，得存在域为

$$x=k \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

163. $y=\operatorname{ctg}\pi x+\arccos(2^x)$.

解 当 $\sin\pi x\neq0$ 时，第一项有意义，即 $x\neq k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。

当 $0\leqslant2^x\leqslant1$ 时，第二项有意义，即 $x\leqslant0$. 由此得存在域为满足关系式

$$x<0,x\neq-n \quad (n=1,2,\cdots)$$

的数 x 的集合。

164. $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$.

解 当 $-1\leqslant1-x\leqslant1$，即 $0\leqslant x\leqslant2$ 时，第一个函数有意义；

当 $\lg x>0$，即 $x>1$ 时，第二个函数有意义.

由此得存在域为满足不等式

$$1<x\leqslant2$$

的数 x 的集合。

165.⁺ $y=(2x)!$.

解 当 $2x=n(n=0,1,\cdots)$时，y 值确定，所以，存在域为集合：

$$0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\cdots,\frac{n}{2},\cdots.$$

求下列函数的存在域和函数值域：

166. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

解 当 $2+x-x^2\geqslant0$ 时，y 值确定。解之，得存在域为满足不等式

$$-1\leqslant x\leqslant2$$

的数 x 的集合. 又因

$$y=\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant\frac{3}{2},$$

所以，函数值域为满足不等式

$$0\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$$

的数 y 的集合。

167. $y=\lg(1-2\cos x)$.

解 当 $1-2\cos x>0$ 时，y 值确定，解之，得存在域为满足不等式

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}\quad(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

的数 x 的集合 A. 因为

$$\max_{x\in A}(1-2\cos x)=1-(-2)=3,$$

$$\inf_{x\in A}(1-2\cos x)=0,$$

所以，函数值域为满足不等式

$$-\infty<y\leqslant\lg 3$$

的数 y 的集合.

168. $y=\text{arc cos}\,\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant1$ 时，y 值确 定，而对于 $-\infty<x<+\infty$ 来说，始终有 $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant1$，所以，存在域为全体实数所组成的集合，而函数值域为闭区间 $[o,\pi]$.

169. $y=\text{arc sin}\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

解 当$-1\leqslant\lg\frac{x}{10}\leqslant 1$时，即当$\frac{1}{10}\leqslant\frac{x}{10}\leqslant 10$，或$1\leqslant x\leqslant 100$时，$y$值确定，且在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上变化，所以，存在域为闭区间$[1,100]$，函数值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

170. $y=(-1)^x$.

解 存在域为数x:$x=\frac{p}{2q+1}$(p,q为整数)的集合，而函数值域为:$y=(-1)^p$，即由$-1,1$两数组成的集合.

171. 在底为$AC=b$和高为$BD=h$的三角形ABC中(图1·2)内接一个高为$NM=x$的矩形$KLMN$.把矩形$KLMN$的周长P及其面积S表为x之函数.

作函数$P=P(x)$及$S=S(x)$的图形.

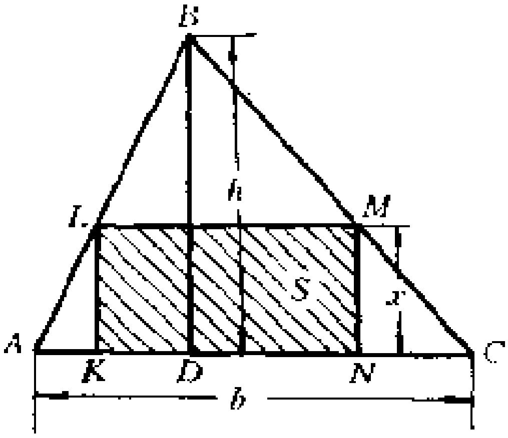


图1.2

解 因为$\frac{LM}{b}=\frac{h-x}{h}$，

所以，

$$LM=b\left(1-\frac{x}{h}\right).$$

周长 $P=2LM+2x$，即

$$P=P(x)=2\left(1-\frac{b}{h}\right)x+2b,$$

式中$0<x<h$.

当$b<h$时，如图1·3中直线段AB所示(不包含A,B两点)。

当$b>h$时，如图1·3中直线段AC所示(不包含A,C两点).其中$OA=2b$,B和C的坐标为h和$2h$.

矩形面积

$$S = LM \cdot x = bx \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)(0 < x < h).$$

如图 1・4 所示，它是一段不包含 O 点及 B 点的抛物线弧$\overset{\frown}{OAB}$。

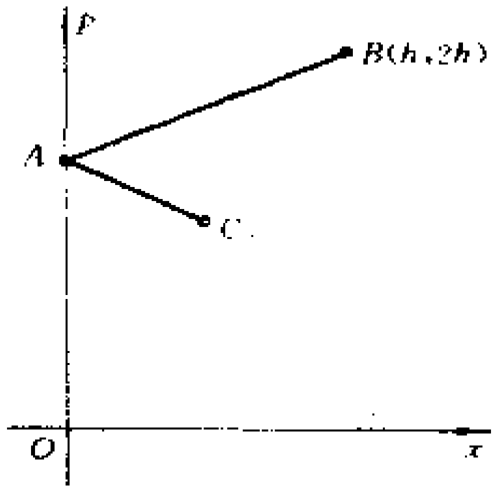


图 1.3

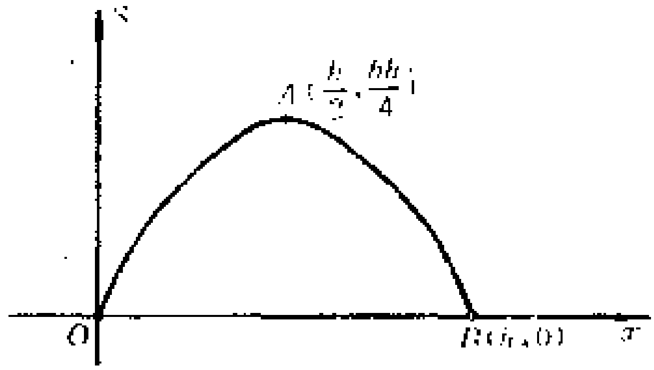


图 1.4

172. 在三角形 ABC 中，边 $AB=6$ 厘米，边 $AC=8$ 厘米，角 $BAC=x$. 把边 $BC=a$ 和面积 $ABC=S$ 表为变量 x 的函数. 作函数 $a=a(x)$ 及 $S=S(x)$的图形.

解 利用余弦定理得三角形的边

$$a = \sqrt{6^2+8^2-2 \cdot 6 \cdot 8\cos x} = \sqrt{100-96\cos x} \quad (0 < x < \pi),$$

如图 1・5 所示（系一不包含 A 点及 B 点的曲线弧$\overset{\frown}{AB}$）. 而三角形的面积

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\sin x = 24\sin x (0 < x < \pi).$$

如图 1・6 所示（两轴单位取得不同，系一不包含 O 点及 A 点的弧$\overset{\frown}{OBA}$）。

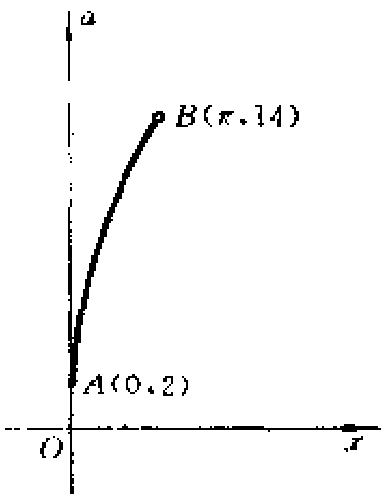


图 1.5

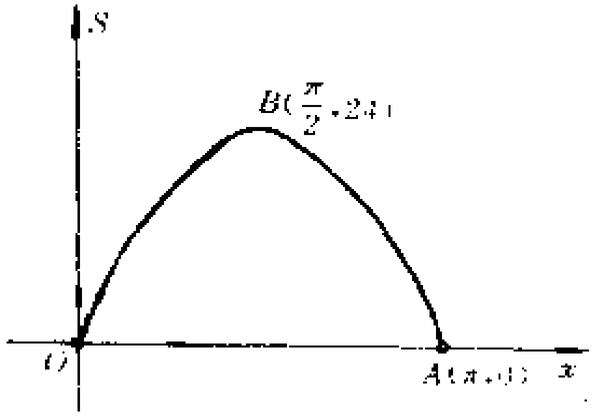


图 1.6

173. 在等腰梯形 $ABCD$ 中(图 1・7)，底为 $AD=a$，$BC=b(a>b)$，高为 $HB=h$，引直线 $MN\parallel BH$，MN 与顶点 A 相距 $AM=x$，把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表为变量 x 的函数. 作函数 $S=S(x)$ 的图形.

解 $AH=\frac{1}{2}(a-b)$，分三种情况讨论：

(1)当 $0\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{2}$ 时，即 MN 线在 $\triangle ABH$ 内，此时

$$\frac{MN}{h}=\frac{x}{\frac{a-b}{2}},\ MN=\frac{2hx}{a-b}.$$

于是，

$$S=\frac{1}{2}MN\cdot x=\frac{hx^2}{a-b},$$

如图 1・8 中弧$\overset{\frown}{OA}$(系抛物线段).

(2)当 $\frac{a-b}{2}<x<\frac{a-b}{2}+b=\frac{a+b}{2}$ 时，面积

$$S=\frac{a-b}{2}\cdot\frac{h}{2}+h\left(x-\frac{a-b}{2}\right)=h\left(x-\frac{a-b}{4}\right),$$

如图 1・8 中不含 A 点及 B 点的直线段 AB.

(3)当$\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a$时，面积

$$S=\frac{h(a+b)}{2}-\frac{h}{a-b}\cdot(a-x)^2=h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right],$$

如图 1・8 中抛物线段$\overset{\frown}{BC}$.

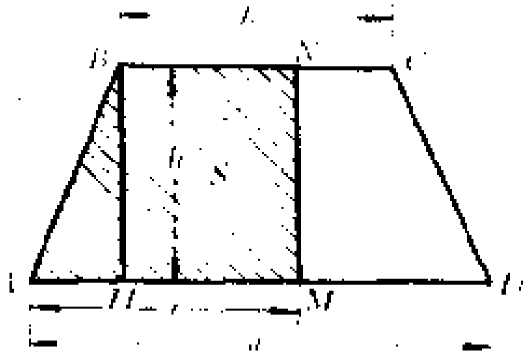


图 1.7

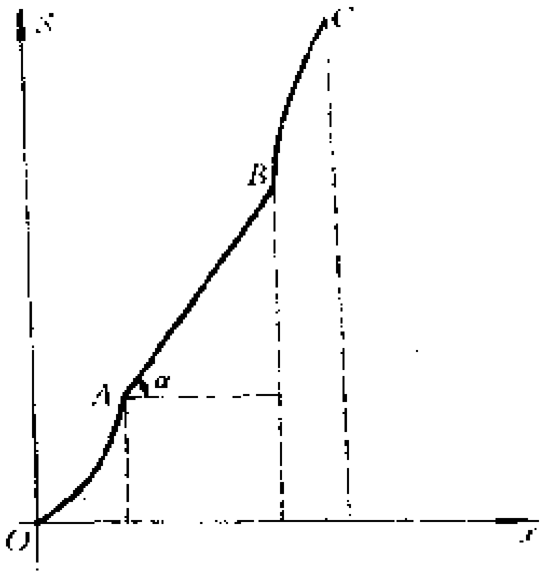


图 1.8

图 1・8 中各点的位置如下：

$$A\left(\frac{a-b}{2},\frac{h(a-b)}{4}\right),B\left(\frac{a+b}{2},\frac{h(a+3b)}{4}\right),$$

$$C\left(a,\frac{h(a+b)}{2}\right),$$

又 $\operatorname{tg}\alpha=h$.

174. 在 Ox 轴上的闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内有等于 2 克的质量均匀地分布着，而在此轴上的两点 $x=2$ 和 $x=3$ 有集中的质量各 1 克。

设 $m(x)$ 是介于区间$(-\infty,x)$的质量的值，求函数 $m=m(x)(-\infty<x<+\infty)$的解析表示式. 并作这个函

数的图形。

解 当 $-\infty<x\leqslant 0$ 时，$m(x)=0$；

当 $0<x\leqslant 1$ 时，因为

$1:x=2:m(x)$，

于是，

$$m(x)=2x;$$

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$m(x)=2$；

当 $2<x\leqslant 3$ 时，$m(x)=3$；

当 $3<x<+\infty$ 时，$m(x)=4$.

如图 1・9 所示.

175. 函数 $y=\operatorname{sgn}x$，用下列方法来定义：

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, \text{若 } x>0; \\ 0, \text{若 } x=0; \\ -1, \text{若 } x<0.\end{cases}$$

作这个函数的图形. 证明

$$|x|=x\operatorname{sgn}x.$$

解 函数 $\operatorname{sgn}x$ 的图形如图 1・10 所示.

因为

当 $x<0$ 时，

$|x|=-x=x\operatorname{sgn}x$；

当 $x=0$ 时，

$|x|=0=x\operatorname{sgn}x$；

当 $x>0$ 时，

$|x|=x=x\operatorname{sgn}x$.

所以，

$$|x|=x\operatorname{sgn}x.$$

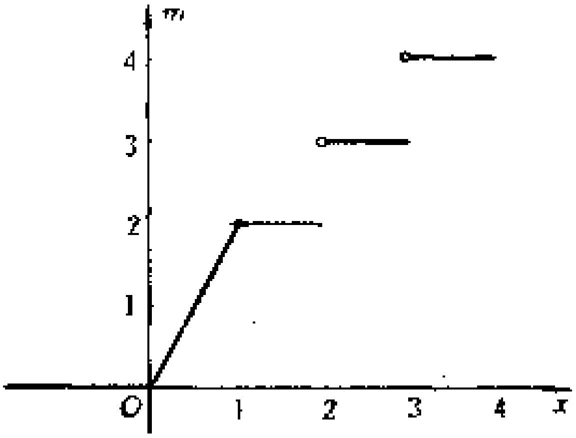


图 1.9

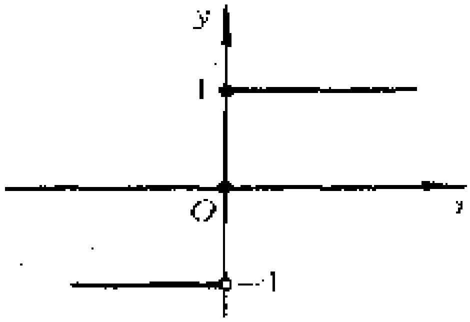


图 1.10

176. 函数 $y=[x]$（数 x 的整数部分）用下法定义：若 $x=n+r$，式中 n 为整数且 $0\leqslant r<1$，则

$$[x]=n.$$

作这个函数的图形.

解 当 $x\in[n,n+1]$时（n 为整数）$y=n$，如图 1・11 所示。

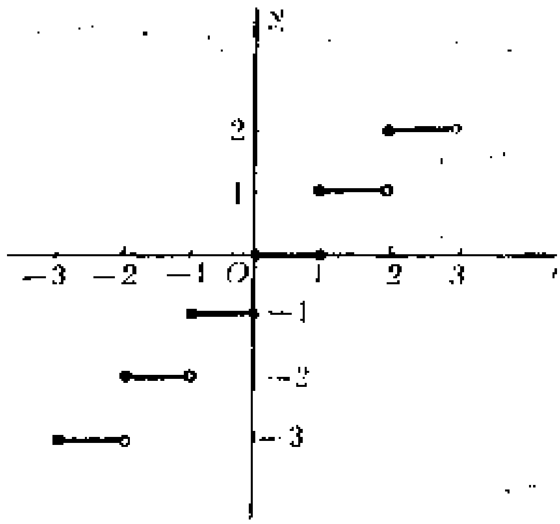


图 1.11

177. 设：

$$y=\pi(x) \quad (x\geqslant 0),$$

表示不超过数 x 的素数的数目，对于自变数 $0\leqslant x\leqslant 20$ 的值，作这个函数的图形。

解 按题设可知：

当 $0\leqslant x<2$ 时，$\pi(x)=0$；

当 $2\leqslant x<3$ 时，$\pi(x)=1$；

当 $3\leqslant x<5$ 时，$\pi(x)=2$；

当 $5\leqslant x<7$ 时，$\pi(x)=3$；

当 $7\leqslant x<11$ 时，$\pi(x)=4$；

当 $11\leqslant x<13$ 时，$\pi(x)=5$；

当 $13\leqslant x<17$ 时，$\pi(x)=6$；

当 $17\leqslant x<19$ 时，$\pi(x)=7$；

当 $19\leqslant x\leqslant 20$ 时，$\pi(x)=8$（如图 1・12 所示）。

函数 $y=f(x)$ 在怎样的集合 E_y 上映出集合 E_x，若：

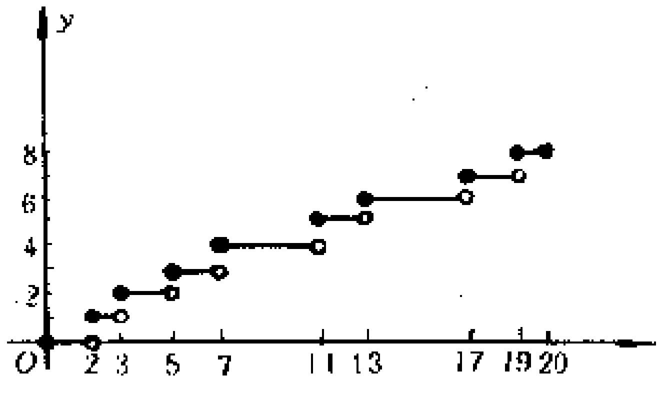


图 1.12

178. $y=x^2, E_x=\{1\leqslant x\leqslant 2\}$.

解 $E_y\{1\leqslant y\leqslant 4\}$.

179. $y=\lg x. E_x=\{10<x<1000\}$.

解 $E_y=\{1<y<3\}$.

180. $y=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x, E_x=\{-\infty<x<+\infty\}$.

解 $E_y=\{0<y<1\}$.

181. $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}, E_x=\{0<|x|\leqslant 1\}$.

解 $E_y\{1<|y|<+\infty\}$.

182. $y=|x|, E_x=\{1\leqslant|x|\leqslant 2\}$.

解 $E_y=\{1\leqslant y\leqslant 2\}$.

变量 x 跑过区间 $0<x<1$，则变量 y 跑过怎样的集合，若

183. $y=a+(b-a)x$.

解 变量 x 从 0 变至 1 时，y 从 a 变至 b. 于是，变量 y 的变化区间为 $a<y<b$(当 $a<b$)或 $b<y<a$(当 $b<a$).

184. $y=\frac{1}{1-x}$.

解 当 x 从 0 变至 1 时，y 从 1 变至正无穷大. 于是，y 的变化区间为 $1<y<+\infty$.

185. $y=\frac{x}{2x-1}$.

解 $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}$.

当 x 从 0 变至$\frac{1}{2}$，y 从 0 变至负无穷大；当 x 从$\frac{1}{2}$变至 1 时，y 从正无穷大变至 1. 于是，y 的变化区间为 $-\infty<y<0, 1<y<+\infty$.

186. $y=\sqrt{x-x^2}$.

解 $y=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$.

当 $x=\frac{1}{2}$时，$y=\frac{1}{2}$(最大值)；由于 x 趋于 0 时，y 趋于 0，而 $y>0$，从而 $y=0$ 是变量 y 的下确界。于是，y 的

变化区间为 $0<y\leqslant\frac{1}{2}$.

187. $y=\mathrm{ctg}\pi x$.

解 当 x 从 0 变至 1 时，变量 y 从 $+\infty$ 变至 $-\infty$. 于是，变量 y 的变化区间为 $-\infty<y<+\infty$.

188. $y=x+[2x]$.

解 当 x 从 0 变至 $\frac{1}{2}$ 时，y 从 0 变至 $\frac{1}{2}$；当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变至 1 时，y 从 $\frac{3}{2}$ 变至 2。于是，y 的变化区间为 $0<y<\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}\leqslant y<2$.

189. 设：

$$f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x,$$

求 $f(0),f(1),f(2),f(3),f(4)$.

解 因为 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，

所以，

$$f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0,$$

$$f(4)=24.$$

190. 设：

$$f(x)=\lg x^2,$$

求 $f(-1),f(-0.001),f(100)$.

解 $f(-1)=\lg 1=0$；

$$f(-0.001)=\lg 0.000001=-6;$$

$$f(100)=\lg 10000=4.$$

191. 设：

$$f(x)=1+[x],$$

求 $f(0.9),f(0.99),f(0.999),f(1)$.

解 $f(0.9)=f(0.99)=f(0.999)=1$,

$f(1)=2$

192. 设:

$$f(x)=\begin{cases}1+x, 当 -\infty<x\leqslant 0;\\ 2^x, 当 0<x<+\infty。\end{cases}$$

求 $f(-2)$,$f(-1)$,$f(0)$,$f(1)$,$f(2)$.

解 $f(-2)=1-2=-1$, $f(-1)=1-1=0$,

$f(0)=1+0=1$, $f(1)=2^1=2$,

$f(2)=2^2=4$

193. 设:

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$$

求 $f(0)$,$f(-x)$,$f(x+1)$,$f(x)+1$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$,$\frac{1}{f(x)}$.

解 $f(0)=1$,

$$f(-x)=\frac{1+x}{1-x},$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{x+2},$$

$$f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}.$$

194. 设:

(a) $f(x)=x-x^3$;(б) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$;

(в) $f(x)=(x+|x|)(1-x)$.

求使以下各式满足的 x 值：

(1) $f(x)=0$；(2) $f(x)>0$；(3) $f(x)<0$.

解 (a)(1) $x-x^3=0$，所以，$x=0,1$ 及 -1。

(2) $x-x^3>0$，即 $x(1-x)(1+x)>0$，

所以，$-\infty<x<-1$ 和 $0<x<1$.

(3) $x(1-x)(1+x)<0$，所以，$-1<x<0$ 和 $1<x<+\infty$。

(б)(1) $\sin\frac{\pi}{x}=0$，则 $\frac{\pi}{x}=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，所以，$x=\frac{1}{k}\quad(k=\pm1,\pm2,\cdots)$.

(2) $\sin\frac{\pi}{x}>0$，则 $2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$ 和 $-(2k+2)\pi<\frac{\pi}{x}<-(2k+1)\pi$，所以

$$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k} \text{ 和 } -\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

(3) $\sin\frac{\pi}{x}<0$，则 $(2k+1)\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+2)\pi$ 和 $-(2k+1)\pi<\frac{\pi}{x}<-2k\pi\ (k=0,1,2,\cdots)$，

所以，$\frac{1}{2k+2}<x<\frac{1}{2k+1}$ 和 $-\frac{1}{2k}<x<-\frac{1}{2k+1}\ (k=0,1,2,\cdots)$，

(в)(1) $(x+|x|)(1-x)=0$，则 $x\leqslant0$ 和 $x=1$.

(2) 因为 $x+|x|\geqslant0$，所以 $1-x>0$，即 $x<1$.

而由 $f(x)>0$，得 $x+|x|>0$，即 $x>0$.

总之，当 $0<x<1$ 时，$(x+|x|)(1-x)>0$.

(3) $(x+|x|)(1-x)<0$。

首先，$x>0$，否则 $x+|x|=0$.

其次，应有 $1-x<0$，所以 $x>1$，此即所求之解。

195. 设：

(a) $f(x)=ax+b$；(б) $f(x)=x^2$；(в) $f(x)=a^x$.

求 $\varphi(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

解 (a) $\varphi(x)=\dfrac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}=a$；

(б) $\varphi(x)=\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x+h$；

(в) $\varphi(x)=\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\cdot\dfrac{a^h-1}{h}$.

196. 设：

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

证明 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$.

证 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$

$=a(x+3)^2+b(x+3)+c-3[a(x+2)^2$

$+b(x+2)+c]+3[a(x+1)^2+b(x+1)+c]$

$-[ax^2+bx+c]=ax^2+6ax+9a+bx+3b+c$

$-3ax^2-12ax-12a-3bx-6b-3c+3ax^2$

$+6ax+3a+3bx+3b+3c-ax^2-bx-c$

$=0$,

于是，

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$$

197. 若 $f(0)=-2$，$f(3)=5$，求线性整函数：

$$f(x)=ax+b.$$

$f(1)$及$f(2)$等于什么(线性补插法)?

解 因为$f(0)=b=-2$及$f(3)=3a+b=5$,

所以,

$$a=\frac{7}{3},b=-2.$$

于是,所求的线性整函数为

$$f(x)=\frac{7}{3}x-2,$$

且 $f(1)=\frac{1}{3},f(2)=\frac{8}{3}.$

198. 若$f(-2)=0,f(0)=1,f(1)=5$.求二次有理整函数:

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

$f(-1)$及$f(0.5)$等于什么(二次补插法)?

解 因为$f(-2)=4a-2b+c=0$,

$$f(0)=c=1,f(1)=a+b+c=5,$$

所以,$a=\frac{7}{6},b=\frac{17}{6},c=1.$

于是,所求的二次有理整函数为

$$f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1,$$

且 $f(-1)=-\frac{2}{3},f(0.5)=\frac{65}{24}=2\frac{17}{24}.$

199. 设$f(-1)=0,f(0)=2,f(1)=-3,f(2)=5$.求三次有理整函数:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

解 因为$f(-1)=-a+b-c+d=0$,

$$f(0)=d=2.$$

$$f(1)=a+b+c+d=-3.$$

$$f(2)=8a+4b+2c+d=5,$$

所以，$a=\frac{10}{3}$，$b=-\frac{7}{2}$，$c=-\frac{29}{6}$，$d=2$.

于是，所求的三次有理整函数为

$$f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{29}{6}x+2.$$

200. 设 $f(0)=15$，$f(2)=30$，$f(4)=90$，求形状为

$$f(x)=a+bc^x$$

的函数.

解 因为 $f(0)=a+b=15$，

$$f(2)=a+bc^2=30,$$

$$f(4)=a+bc^4=90,$$

所以，$a=10$，$b=5$，$c=2$（-2 不适合）.

于是，所求的函数为

$$f(x)=10+5\cdot 2^x.$$

201. 证明：对于线性函数

$$f(x)=ax+b,$$

若自变量的诸值 $x=x_n(n=1,2,\cdots)$组成一等差级数，则对应的函数值 $y_n=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$也组成一等差级数.

证 设叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$为

$$x_1, x_1+d, x_1+2d, x_1+3d, \cdots,$$
$$x_1+(n-1)d, \cdots$$

其中 d 为公差。

于是，

$$\begin{aligned}y_n-y_{n-1}&=(ax_n+b)-(ax_{n-1}+b)\\&=\{a[x_1+(n-1)d]+b\}-\\&\quad\{a[x_1+(n-2)d]+b\}=ad,\end{aligned}$$

由于 ad 为一常数，所以，叙列 $y_n=f(x_n)$ 也组成等差级数.

202. 证明：对于指数函数

$$f(x)=a^x\ (a>0),$$

若自变数 $x=x_n(n=1,2,\cdots)$ 的值组成一等差级数，则对应的函数值 $y_n=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$ 组成一等比级数.

证 因为 $x_n-x_{n-1}=d$，所以

$$y_n:y_{n-1}=a^{x_n}:a^{x_{n-1}}=a^{x_n-x_{n-1}}=a^d,$$

即函数值 $y_n=f(x_n)$ 组成一等比级数。

203. 设当 $0<u<1$ 函数 $f(u)$ 有定义，求下列函数的定义域：

(a) $f(\sin x)^+$；(б) $f(\ln x)$；(в)$^+$ $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$.

解 (a)因为 $0<\sin x<1$，所以，

$2k\pi<x<\pi+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 且

$x\neq\dfrac{4k+1}{2}\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(б)因为 $0<\ln x<1$，所以，$1<x<e$；

(в)因为 $0<\dfrac{[x]}{x}<1$，

所以，$x>1$ 且 $x\neq k(k=2,3,4,\cdots)$.

204. 设：

$$f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})\ (a>0).$$

证明：$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$.

证 $f(x+y)+f(x-y)$

$$=\frac{1}{2}(a^{x+y}+a^{-x-y})+\frac{1}{2}(a^{x-y}+a^{-x+y})$$

$$=\frac{1}{2}(a^x\cdot a^y+a^{-x}\cdot a^{-y})+\frac{1}{2}(a^x\cdot a^{-y}+a^{-x}\cdot a^y)$$

$$=\frac{1}{2}a^x(a^y+a^{-y})+\frac{1}{2}a^{-x}(a^{-y}+a^y)$$

$$=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y})$$

$$=2f(x)f(y),$$

于是，

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

205. 设：

$$f(x)+f(y)=f(z).$$

求出 z，若：

(а) $f(x)=ax$；　(б) $f(x)=\frac{1}{x}$；

(в) $f(x)=\operatorname{arctg}x\ (|x|<1)$；(г) $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

解　(а) $f(x)+f(y)=ax+ay=a(x+y)$,

$$f(z)=az,$$

由 $f(x)+f(y)=f(z)$ 得 $z=x+y$.

(б) 由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ 得 $z=\frac{xy}{x+y}$.

(в) 由 $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}z$ 得

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{arctg}z$$

所以，$z=\frac{x+y}{1-xy}$；

(г) 由 $\lg\frac{1+x}{1-x}+\lg\frac{1+y}{1-y}=\lg\frac{1+z}{1-z}$ 得

$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=\frac{1+z}{1-z},$$

所以，$z=\frac{x+y}{1+xy}$.

求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$ 及 $\psi[\varphi(x)]$，设：

206. $\varphi(x)=x^2$ 及 $\psi(x)=2^x$.

解 $\varphi[\varphi(x)]=(x^2)^2=x^4$；$\varphi[\psi(x)]=(2^x)^2=2^{2x}$；

$\psi[\psi(x)]=2^{(2^x)}$；　$\psi[\varphi(x)]=2^{(x^2)}$.

207. $\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $\psi(x)=\dfrac{1}{x}$。

解 $\varphi[\varphi(x)]=\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}x)=\operatorname{sgn}x$；

$$\psi[\psi(x)]=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x\ (x\neq0)；$$

$$\varphi[\psi(x)]=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right)=\operatorname{sgn}x\quad(x\neq0)；$$

$$\psi[\varphi(x)]=\frac{1}{\operatorname{sgn}x}=\operatorname{sgn}x\quad(x\neq0).$$

208. $\varphi(x)=\begin{cases}0,当\ x\leqslant0,\\ x,当\ x>0.\end{cases}$ 及 $\psi(x)=\begin{cases}0,当\ x\leqslant0,\\ -x^2,当\ x>0.\end{cases}$

解 $\varphi[\varphi(x)]=\varphi(x)$；$\psi[\psi(x)]=0$（因为$-x^2\leqslant0$）；

$\varphi[\psi(x)]=0$；$\psi[\varphi(x)]=\psi(x)$.

209. 设：

$$f(x)=\frac{1}{1-x},$$

求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解
$$f[f(x)]=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x}；$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}=x.$$

210. 设：

$$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}.$$

若 $$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\text{，求 } f_n(x).$$

解 当 $n=2$ 时，$f_2(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$.

设对于 $n=k$ 时，有

$$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$f_{k+1}(x)=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

从而由数学归纳法知，对于任何自然数 n，有

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

211. 设：

$$f(x+1)=x^2-3x+2,$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f(x+1)=(x+1)^2-5(x+1)+6$，于是，

$$f(x)=x^2-5x+6.$$

212. 设：

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2},$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，于是，

$$f(x)=x^2-2.$$

213. 设：

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x>0),$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{1}{x}}$,于是,

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

证明下列各函数在所示间隔内是单调增函数:

214. $f(x)=x_2\quad(0\leqslant x<+\infty)$.

证 当 $x_2>x_1\geqslant 0$ 时,

$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2$

$=(x_2-x_1)(x_2+x_2)>0$,

于是 $f(x)=x^2$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 内是单调增函数.

215. $f(x)=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

证 当 $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,

因为 $-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$ 及 $0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2}$,

所以,$\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$ 及 $\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$.

又因 $f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1$

$=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$,

所以,$f(x)=\sin x$ 在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内是单调增函数.

216. $f(x)=\operatorname{tg}x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

证　$f(x_2)-f(x_1)=\mathrm{tg}x_2-\mathrm{tg}x_1=\dfrac{\sin x_2}{\cos x_2}-\dfrac{\sin x_1}{\cos x_1}$

$$=\frac{\sin x_2\cos x_1-\cos x_2\sin x_1}{\cos x_1\cos x_2}=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cdot\cos x_2},$$

当 $-\dfrac{\pi}{2}<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\cos x_1>0$，$\cos x_2>0$ 及 $\sin(x_2-x_1)>0$，从而可知

$$f(x_2)-f(x_1)>0,$$

所以，$f(x)=\mathrm{tg}x$ 在 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 内是单调增函数.

217. $f(x)=2x+\sin x(-\infty<x<+\infty)$.

证　$f(x_2)-f(x_1)=2(x_2-x_1)+\sin x_2-\sin x_1$，

因为　$|\sin x_2-\sin x_1|$

$$=2\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\cdot\left|\sin\frac{x_2-x_1}{1}\right|\leqslant 2\cdot\left|\frac{x_2-x_1}{2}\right|=|x_2-x_1|,$$

所以当 $x_2<x_1$ 时，有

$$-(x_2-x_1)\leqslant\sin x_2-\sin x_1\leqslant x_2-x_1,$$

从而

$$2(x_2-x_1)+\sin x_2-\sin x_1>2(x_2-x_1)$$
$$-(x_2-x_1)=x_2-x_1>0,$$

即 $f(x_2)-f(x_1)>0$，于是，$f(x)=2x+\sin x$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内是单调增函数.

证明下列各函数在所示间隔内是单调减函数：

218. $f(x)=x^2\quad(-\infty<x\leqslant 0)$.

证　$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0$

$(x_1<x_2<0)$，

于是，$f(x)=x^2$ 在 $-\infty<x\leqslant 0$ 内是单调减函数.

219. $f(x)=\cos x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$.

证 $f(x_2)-f(x_1)=\cos x_2-\cos x_1$

$$=-2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2},$$

当 $0<x_1<x_2<\pi$ 时，

$$0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi \text{ 及 } 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2},$$

于是，$\sin\frac{x_1+x_2}{2}>0$，$\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$，从而

$$f(x_2)-f(x_1)<0.$$

即 $f(x)=\cos x$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 内是单调减函数.

220. $f(x)=\operatorname{ctg}x\quad(0<x<\pi)$.

证 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{\cos x_2}{\sin x_2}-\dfrac{\cos x_1}{\sin x_1}$

$$=\frac{\cos x_2\sin x_1-\cos x_1\sin x_2}{\sin x_1\sin x_2}=\frac{\sin(x_1-x_2)}{\sin x_1\cdot\sin x_2}<0$$

(当 $0<x_1<x_2<\pi$ 时)，

于是，$f(x)=\operatorname{ctg}x$ 在 $0<x<\pi$ 内是单调减函数.

221. 研究下列函数的单调性：

(а) $f(x)=ax+b$；　(б) $f(x)=ax^2+bx+c$；

(в) $f(x)=x^3$；　(г) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$；

(д) $f(x)=a^x(a>0)$.

解 (а) 对于 $x_1<x_2$，有 $f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1)$. 当 $a>0$ 时，它大于零；当 $a<0$ 时，它小于零. 所以，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 是增函数；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 是减函数.

(б) $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

(1) 当 $a>0$ 时，图形呈凹形，顶点在$\left(-\frac{b}{2a},\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$，于是，在 $-\infty<x<-\frac{b}{2a}$ 内，函数单调下降，在 $-\frac{b}{2a}<x<+\infty$，函数单调上升.

(2) 当 $a<0$ 时，图形呈凸状. 于是，在 $-\infty<x<-\frac{b}{2a}$ 内增加，而在 $-\frac{b}{2a}<x<+\infty$ 内减小.

(в)$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3$

$+(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)>0\ (x_2>x_1)$，于是 $f(x)=x^3$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内单调增加.

(г)$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-a\frac{d}{c}}{cx+d}$，其中 $c\neq0$，若 $c=0$，则同(а)一样讨论. 下面不妨就 $c>0$ 讨论其增减性.

(1) 当 $b>a\frac{d}{c}$ 时，若 x 值单调增加，则 $f(x)$ 值减小. 所以，$f(x)$ 在$\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$及$\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$内减小.

(2) 当 $b<\frac{ad}{c}$ 时，若 x 值单调增加，则 $f(x)$ 值也增加. 所以，$f(x)$ 在$\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$及$\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$内增加.

(д)$f(x_2)-f(x_1)=a^{x_2}-a^{x_1}$. 若 $x_2>x_1$，则

当 $0<a<1$ 时，$f(x_2)-f(x_1)<0$，此时 $f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 内减小.

当 $a>1$ 时，$f(x_2)-f(x_1)>0$，此时，$f(x)$ 在 $-\infty$

$<x<+\infty$ 内增加.

222. 不等式能否逐项取对数?

解 不一定可以,当底大于 1 时才可以. 因为对于对数函数当底大于 1 时为单调增函数. 若底介于 0 与 1 之间,则为单调减函数,所以,此时就不能逐项取对数.

223. 设 $\varphi(x),\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数. 证明:若

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x), \tag{1}$$

则
$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant \psi[\psi(x)]. \tag{2}$$

证 设 x_0 为三个函数公共域内的任一点,则

$$\varphi(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant \psi(x_0).$$

由(1) 以及函数 $f(x)$ 的单调增性知

$$f[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)],$$
$$\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[\varphi(x_0)];$$

从而

$$\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)].$$

同理,可证

$$f[f(x_0)]\leqslant \psi[\psi(x_0)],$$

由 x_0 的任意性,于是(2) 式得证.

求反函数 $x=\varphi(y)$ 和它的存在域,若:

224. $y=2x+3\ (-\infty<x<+\infty)$.

解 $x=\dfrac{y-3}{2},-\infty<y<+\infty$.

225. $y=x^2$. (a)$(-\infty<x\leqslant 0)$;(б)$(0\leqslant x<+\infty)$.

解 (a)$x=-\sqrt{y},\quad 0\leqslant y<+\infty$;

(б)$x=\sqrt{y},\quad 0\leqslant y<+\infty$.

226. $y=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$.

解 由于 $y+xy=1-x$,解出 x 得反函数

$$x=\frac{1-y}{1+y},\quad y\neq-1.$$

227. $y=\sqrt{1-x^2}$. (a)$(-1\leqslant x\leqslant 0)$;(б)$(0\leqslant x\leqslant 1)$.

解 (a)$x=-\sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1$;

(б)$x=\sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1$.

228. $y=\operatorname{sh}x$,式中 $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $2y=e^x-e^{-x}$,即

$$(e^x)^2-2ye^x-1=0,$$

解出 e^x 两端再取对数,即得

$$x=\operatorname{arsh}y=\ln(y+\sqrt{1+y^2}),\ -\infty<y<+\infty.$$

229. $y=\operatorname{th}x$,式中 $\operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{(e^x)^2-1}{(e^x)^2+1}$,即

$$e^{2x}=\frac{1+y}{1-y},$$

两端取对数,并注意到$\frac{1+y}{1-y}>0$ 即 $-1<y<1$,于是

$$x=\operatorname{arth}y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},\ -1<y<1.$$

230. $y=\begin{cases}x,\text{若 } -\infty<x<1;\\ x^2,\text{若 } 1\leqslant x\leqslant 4;\\ 2^x,\text{若 } 4<x<+\infty.\end{cases}$

解

$$x=\begin{cases}y,\text{若 } -\infty<y<1;\\ \sqrt{y},\text{若 } 1\leqslant y\leqslant 16;\\ \log_2 y,\text{若 } 16<y<+\infty.\end{cases}$$

231. 函数 $f(x)$ 定义于对称区间 $(-l,l)$ 中，且若

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**，若

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

确定下列各已知函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数：

(а) $f(x)=3x-x^3$;

(б) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$;

(в) $f(x)=a^x+a^{-x}(a>0)$; (г) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$;

(д) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (а) $f(-x)=-3x+x^3=-f(x)$，故为奇函数.

(б) $f(-x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x)$，

故为偶函数.

(в) $f(-x)=a^{-x}+a^x=f(x)$，故为偶函数.

(г) $f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$，

故为奇函数.

$$\begin{aligned}(\text{д})f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x_2})=-f(x),\end{aligned}$$

故为奇函数.

232. 证明定义于对称区间 $(-l,l)$ 内的任何函数 $f(x)$ 可以表示为偶函数与奇函数之和的形式.

证 因为

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

而$\frac{f(x)+f(-x)}{2}$为偶函数，$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$为奇函数，于是本题得证.

233. 若存在有数 $T>0$(函数的周期 —— 在广义的意义上)使对于一切被考虑的自变量 x 满足等式

$$f(x+nT)=f(x)\ (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

则函数 $f(x)$ 称为**周期函数**.

说明下列各已知函数中哪些是周期函数，并求它们的最小周期. 设：

(а) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$;

(б) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$;

(в) $f(x)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; (г) $f(x)=\sin^2 x$;

(д) $f(x)=\sin x^2$; (е) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}x}$;

(ж) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$; (з) $f(x)=\sin x+\sin(x\sqrt{2})$.

解 对于(а)，由于

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)=A\cos\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)+B\sin\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)$$
$$=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x=f(x),$$

故为周期函数，最小周期为 $T=\frac{2\pi}{\lambda}(\lambda>0)$. 同理可证：(а)、(в)、(г) 和 (е) 也是周期函数，最小周期分别为 2π、6π、π 和 π. 对于(д)，若周期为 a，即 $\sin(x+a)^2=\sin x^2$. 令 $x=0$ 即得 $a=\pm\sqrt{m\pi}$(m 为某正整数)，代入，又令 x

$=\sqrt{2m\pi}$，易得 $\sin(2\sqrt{2}m\pi=0$. 但 $2\sqrt{2}m$ 显然不是整数，得到矛盾. 于是，$\sin x^2$ 不是周期函数. 同理，(ж) 和 (з) 也不是周期函数.

234. 证明：对于迪里黑里函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

任何有理数皆为其周期.

证 设 l 为任一有理数，则当 x 为有理数时，$x+l$ 也为有理数. 若 x 为无理数，则 $x+l$ 也为无理数，所以

$$\chi(x+l)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

即 $\chi(x+l)=\chi(x)$，l 为周期.

235. 证明定义于公共的集合上且周期是可公度的二个周期函数之和及其乘积也是周期函数.

证 设 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 为定义在集合 A 上的周期函数，T_1 及 T_2 分别为它们的周期. 又设 T 为 T_1 及 T_2 的公约数，即

$$T_1=Tk_1, T_2=Tk_2,$$

其中 k_1,k_2 为正整数. 于是

$$f_1(x+k_2T_1)=f_1(x), f_2(x+k_1T_2)=f_2(x).$$

设

$$F_1(x)=f_1(x)+f_2(x), F_2(x)=f_1(x)f_2(x),$$

可以证明：k_1k_2T 分别是 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 的周期. 事实上，我们有

$$F_1(x+k_1k_2T)=f_1(x+k_1k_2T)$$
$$+f_2(x+k_1k_2T)$$

$$= f_1(x) + f_2(x) = F_1(x).$$

$$F_2(x + k_1k_2T) = f_1(x + k_1k_2T)f_2(x + k_1k_2T)$$

$$= f_1(x)f_2(x) = F_2(x).$$

从而本题得证.

236. 证明：若对于函数 $f(x)(-\infty < x < +\infty)$ 有等式

$$f(x+T) = kf(x)$$

（式中 k 和 T 为正的常数）成立，则

$$f(x) = a^x\varphi(x)$$

（式中 a 为大于零的常数，而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数）.

证 由假定 $k>0, T>0$，令 $a = k^{\frac{1}{T}} > 0$，则 $a^T = k$. 于是有

$$f(x+T) = a^T f(x).$$

今定义函数 $\varphi(x)$ 如下：

$$\varphi(x) = a^{-x}f(x).$$

易知 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 事实上，

$$\varphi(x+T) = a^{-(x+T)}f(x+T) = a^{-x}a^{-T}a^Tf(x)$$

$$= a^{-x}f(x) = \varphi(x).$$

于是

$$f(x) = a^x\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 证毕.

§4. 函数的图形表示法

1° 要作函数 $y = f(x)$ 的图形可用下法来进行：(1) 确定函数的存在域 $X = \{x\}$；(2) 从 X 中选出充分密集的自变数值 x_1, x_2，

$\cdots, x_n$ 并作出函数

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

的对应数值表;(3) 在坐标平面 Oxy 上绘出一系列的点 $M_i(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 并用线把它们连接起来,此连线的性质就是可认为是许多中间点的位置.

2° 为了得到函数的正确图形,应当研究这个函数的一般性质.

首先必须:(1) 解方程式 $f(x) = 0$,求出函数图形与 Ox 轴的交点(函数值为零的点);(2) 确定使函数为正或为负时自变数的变域;(3) 尽可能地说明函数单调(增或减)的区间;(4) 研究当自变数无限趋近于函数存在域的境界点时函数的情况.

这一节里要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质,如幂函数、指数函数、三角函数等.

利用这些性质,不用作大量的计算工作,立即可以画出许多函数的略图,其他的图形有时就是这些最简单图形的组合(和或乘积等等).

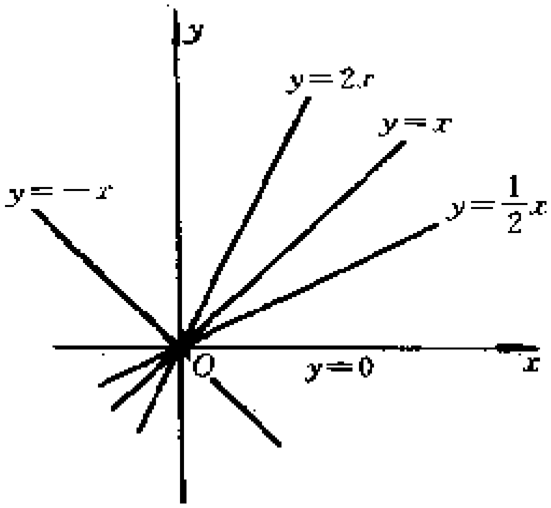


图 1.13

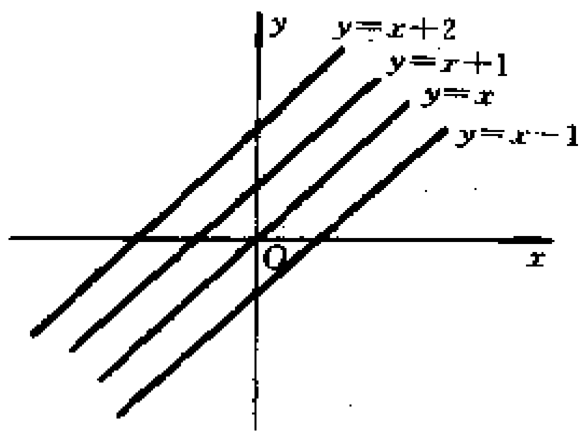


图 1.14

237. 作出线性齐次函数

$$y = ax$$

当 $a = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, -1$ 时的图形.

解 如图 1.13 所示.

238. 作出线性函数

$$y = x + b$$

当 $b = 0, 1, 2, -1$ 时的图形.

解 如图 1·14 所示。

239. 作出线性函数的图形：

(а) $y = 2x + 3$;

(б) $y = 2 - 0.1x$; (в) $y = -\frac{x}{2} - 1$.

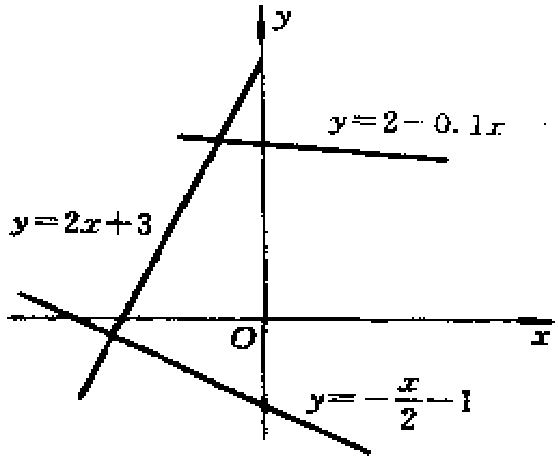


图 1.15

解 如图 1.15 所示.

240. 铁的线性膨胀系数 $a = 1.2 \times 10^{-6}$. 在适当的尺度下作出函数

$$l = f(T)$$

$$(-40^\circ \leqslant T \leqslant 100^\circ)$$

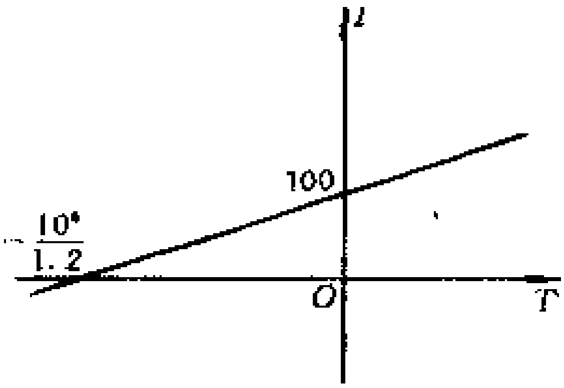


图 1.16

的图形，其中 T 表温度（以度计），l 表当温度为 T 时铁棒的长. 设当 $T = 0^\circ$ 时，$l = 100$ 厘米.

解 铁棒的长与温度的关系为

$$l = l_0(1 + aT).$$

当 $T = 0$ 时，$l = 100$，代入上式得 $l_0 = 100$.

于是，$l = 100(1 + 1.2 \times 10^{-6}T)$，

如图 1.16 所示(两轴单位不同).

241. 二质点在数轴上运动,第一质点在时间 $t=0$ 的时刻在原点左方 20 米处,其速度为 $v_1=10$ 米/秒;第二质点当 $t=0$ 时在原点 O 之右方 30 米处,其速度为 $v_2=-20$ 米/秒;作出此二点运动方程的图形并求它们相遇的时刻和位置.

解 二质点运动的位移 s 与时间 t 的关系分别为

$$s=10t-20,$$

$$s=-20t+30,$$

如图 1.17 所示. 解上述方程,得

$$t=1\frac{2}{3}(\text{秒}),s=-3\frac{1}{3}(\text{米}),$$

即在运动开始后 $1\frac{2}{3}$ 秒,在 Ot 轴之下方 $3\frac{1}{3}$ 米处相遇. 如图中 P 点所示.

242. 作出二次有理整函数的图形(抛物线):

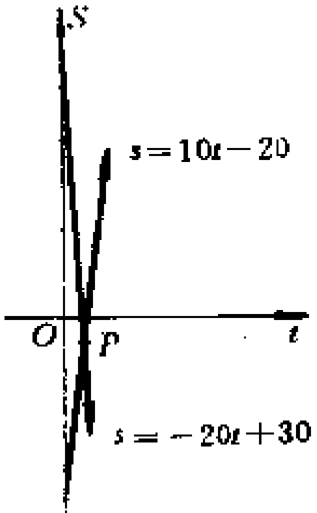


图 1.17

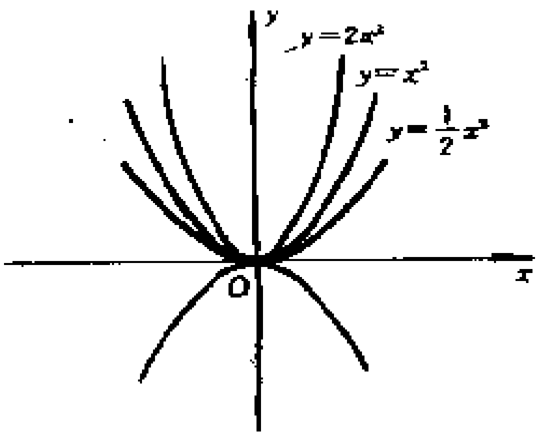


图 1.18

(a) $y=ax^2$, 当 $a=1,\frac{1}{2},2,-1$;

(б) $y=(x-x_0)^2$, 当 $x_0=0,1,2,-1$;

(в) $= x^2 + c$，当 $c = 0, 1, 2, -1$.

解 (а) 如图 1.18 所示.

(б) 如图 1.19 所示.

(в) 如图 1.20 所示.

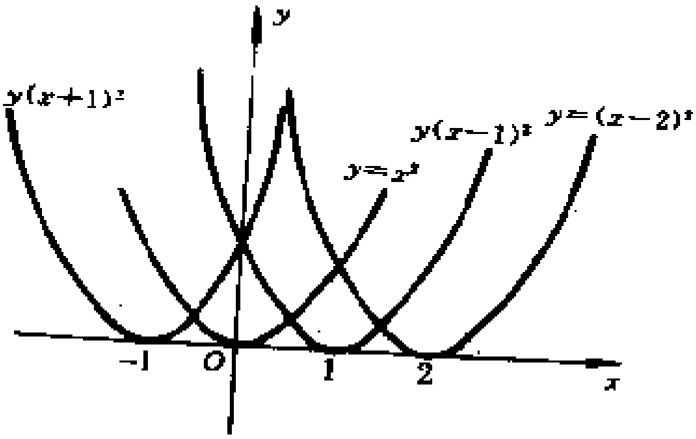


图 1.19

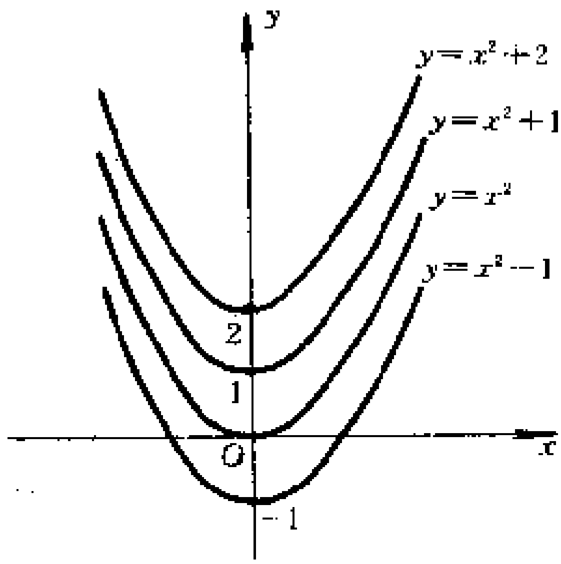


图 1.20

243. 把二次三项式

$$y = ax^2 + bx + c$$

化为下面的形状

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2,$$

作出它的图形，研究例子：

(а)$y = 8x - 2x^2$；　(б)$y = x^2 + 3x + 2$；

(в)$y = - x^2 + 2x - 1$；　(г)$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

解　利用配方法得

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = y_0 + a(x - x_0)^2,$$

其中

$$x_0 = - \frac{b}{2a},\quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

如图 1.21 所示.

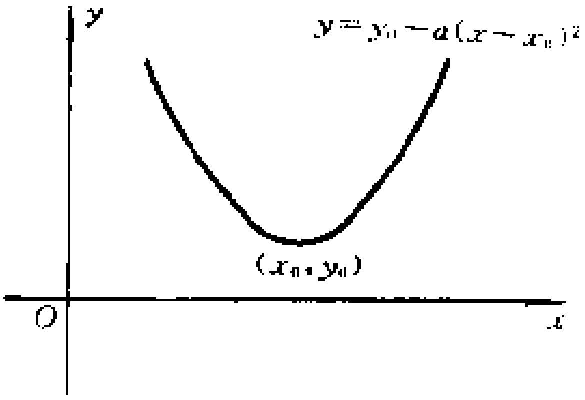


图　1.21

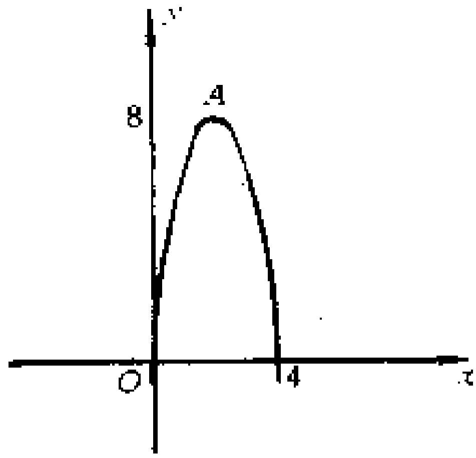


图　1.22

(а)$y = 8x - 2x^2 = 8 - 2(x - 2)^2$,

$$x_0 = 2,\quad y_0 = 8,\quad a = - 2,$$

如图 1.22 所示，顶点 $A(2,8)$.

(б)$y = x^2 - 3x + 2$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

$$x_0 = \frac{3}{2}, y_0 = - \frac{1}{4}, a = 1,$$

如图 1.23 所示．顶点 $B\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)$．

$$(в)\ y=-x^2+2x-1=-(x-1)^2,$$

$$x_0=1,\quad y_0=0,\quad a=-1,$$

如图 1.24 所示．顶点 $C(1,0)$．

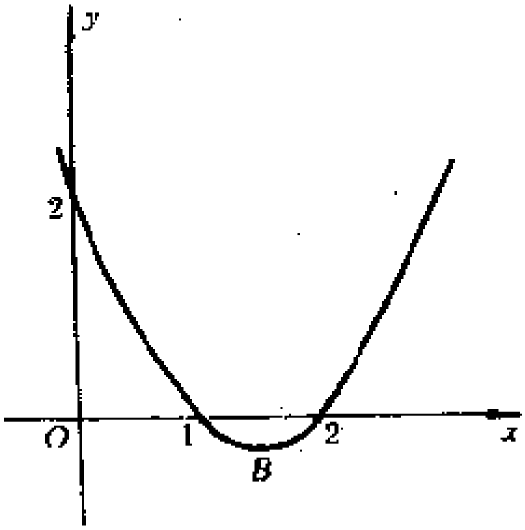


图 1.23

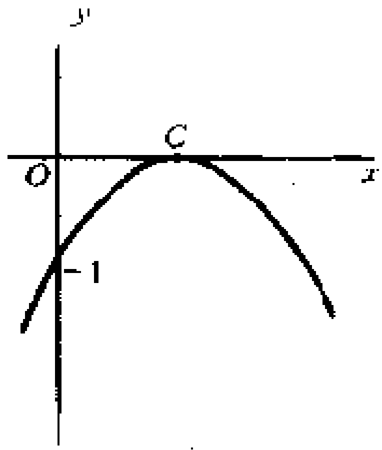


图 1.24

$$(г)\ y=\frac{1}{2}x^2+x+1=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2},$$

$$x_0=-1,\quad y_0=\frac{1}{2},\quad a=\frac{1}{2},$$

如图 1.25 所示．顶点 $D\left(-1,\frac{1}{2}\right)$．

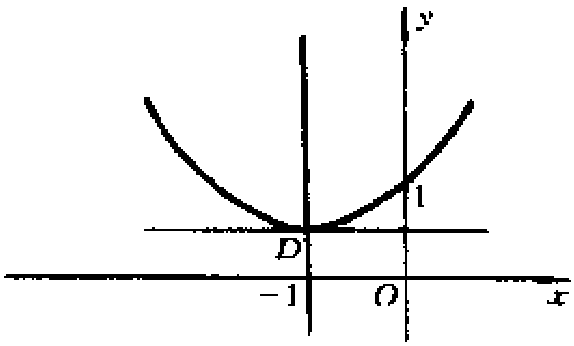


图 1.25

244. 质点以初速度 $v_0 = 600$ 米／每秒沿与水平面成角 $\alpha = 45°$ 的方向射出. 作出运动轨道的图形，并求最大的升高及飞行的射程(假定 $g \approx 10$ 米／秒^2，空气的阻力不计).

解　运动轨道方程为

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

以 $v_0 = 600, g = 10, \alpha = 45°$ 代入得

$$y = x - \frac{x^2}{36000},$$

即

$$y = -\frac{1}{36000}(x - 18000)^2 + 9000.$$

当 $x = 18000$ 时，y 值最大，最大升高为 9000 米；

当 $x = 36000$ 时，$y = 0$，即飞行射程为 36000 米. 如图 1.26 所示.

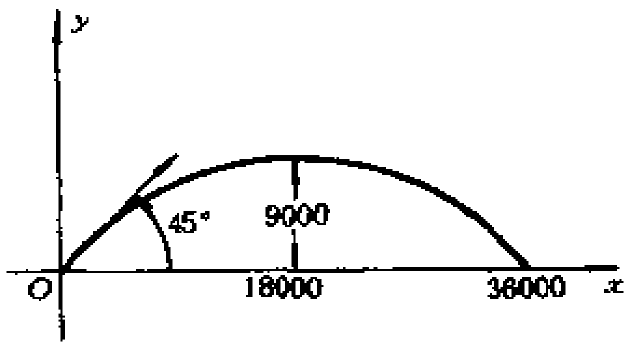


图 1.26

作出高于二次的有理整函数的图形：

245. $y = x^3 + 1$.

解　如图 1.27 所示.

246. $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

解 当 $x=\pm 1, -2$ 时，$y=0$；

当 $x<-2$，$-1<x<1$ 时，$y>0$；

当 $-2<x<-1$ 及 $x>1$ 时，$y<0$.

当 $x<-2$ 及 $x>1$ 时，曲线下降；当 $-1<x<1$ 时，曲线由上升到下降；当 $-2<x<-1$ 时，曲线由下降到上升. 如图 1.28 所示.

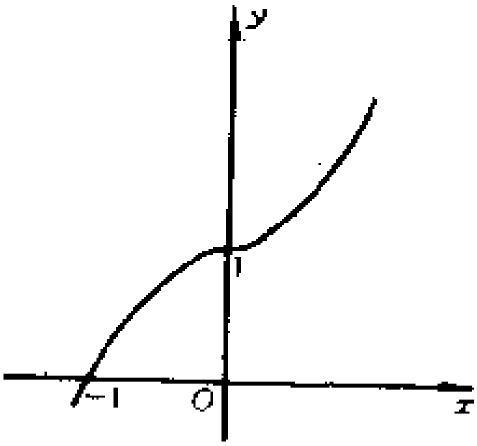


图 1.27

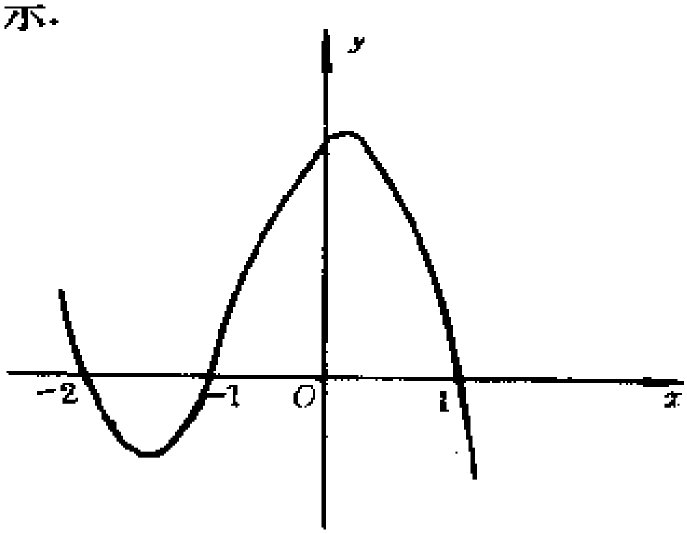


图 1.28

247. $y=x^2-x^4$.

解 $y=x^2(1-x)(1+x)=\dfrac{1}{4}-\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

图形关于 Oy 轴对称，与两坐标轴的交点为

$(-1,0)$，$(1,0)$，$(0,0)$，

且在 $(0,0)$ 点与 Ox 轴相切.

当 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y=\dfrac{1}{4}$，此时 $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{4}\right)$ 及 $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{4}\right)$ 均为图形上的最高点.

当 $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，曲线上升；

当 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<+\infty$ 时，曲线下降. 如图 1.29 所示.

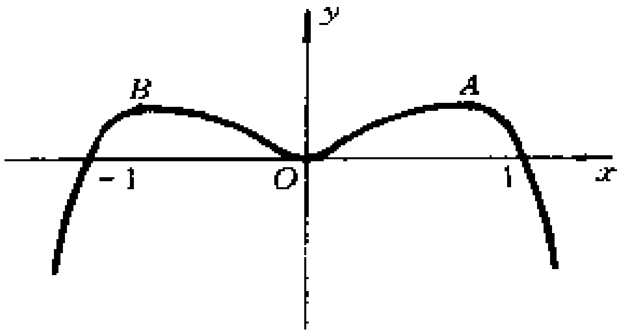


图 1.29

248. $y = x(a-x)^2(a+x)^3$

$(a > 0)$.

解　当 $x = 0, a, -a$ 时，$y = 0$. $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$ 为切点.

当 $x > 0$ 及 $x < -a$ 时，$y > 0$；

当 $-a < x < 0$ 时，$y < 0$. 如图 1.30 所示.

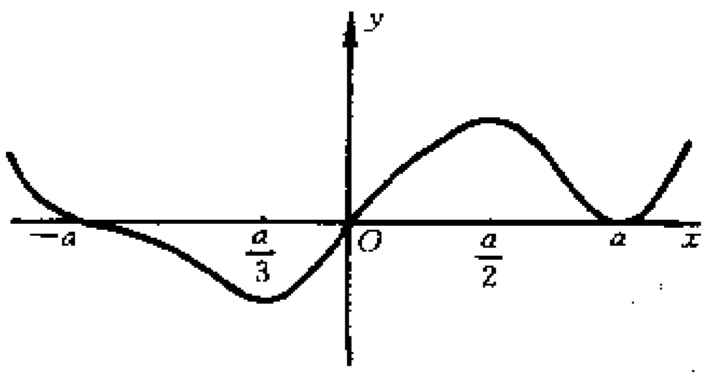


图 1.30

作出线性分式函数的图形（双曲线）：

249. $y = \dfrac{1}{x}$.

解　如图 1.31 所示.

250. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 $y=-1+\dfrac{2}{1+x}$,

图形的对称中心为 $(-1,-1)$,如图 1.32 所示.

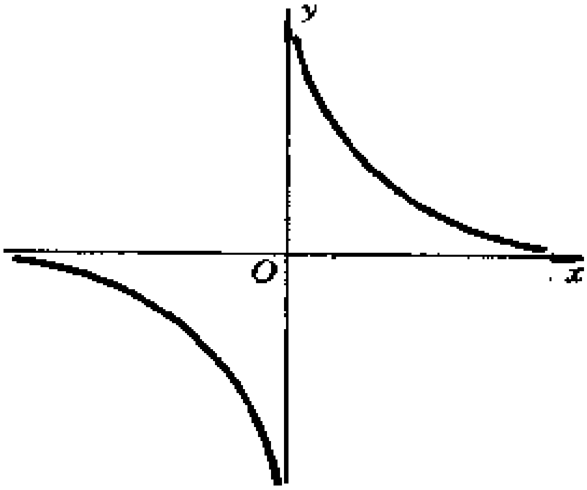


图 1.31

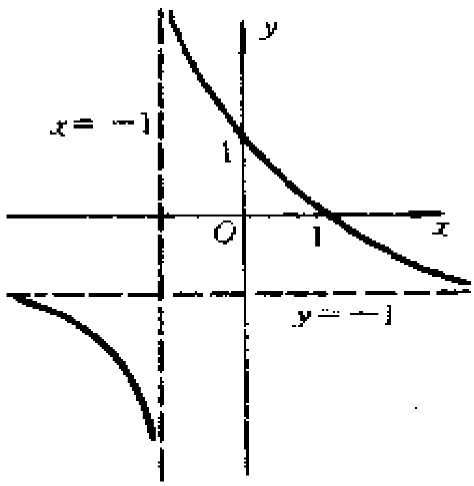


图 1.32

251. 把线性分式函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

$(ad-bc\neq 0, c\neq 0)$.

化为下面的形式

$$y=y_0+\frac{m}{x-x_0}.$$

再作它的图形.

研究例子

$$y=\frac{3x+2}{2x-3}.$$

解 $$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x-\left(-\dfrac{d}{c}\right)}=y_0+\frac{m}{x-x_0},$$

其中

$$x_0 = -\frac{d}{c}, \quad y_0 = \frac{a}{c}, \quad m = \frac{bc - ad}{c^2},$$

如图 1.33 所示.

对于 $y = \dfrac{3x + 2}{2x - 3}$,有

$x_0 = y_0 = \dfrac{3}{2}$,如图 1.34 所示.

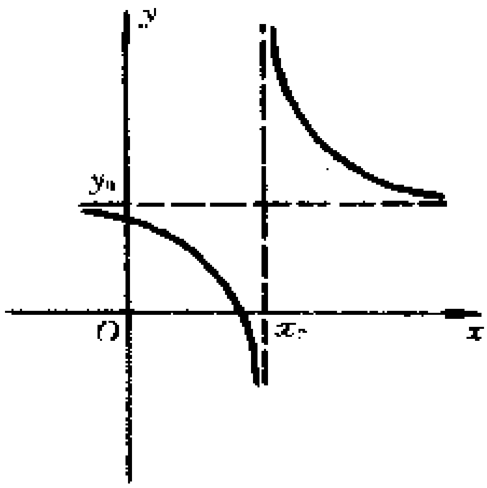


图 1.33

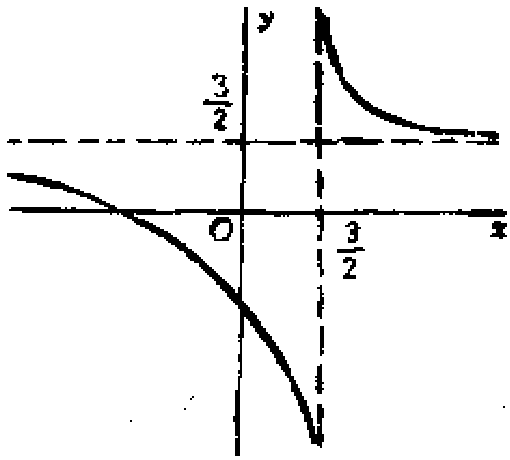


图 1.34

252. 气体当压力 $p_0 = 1$ 大气压时占有体积 $v_0 = 12$ 立方米. 设气体的温度保持不变作出气体体积 v 随压力变化而变化的图形(波义耳 — 马瑞阿特定律).

解 当温度 $T = k$(常数)时,气体体积 v 与压力 p 成反比,即

$$pv = C$$

其中 C 为常数.

当 $p_0 = 1$ 时,$v_0 = 12$,故 $C = 12$,从而 $pv = 12$,如图 1.35 所示.

作下列有理分式函数的图形:

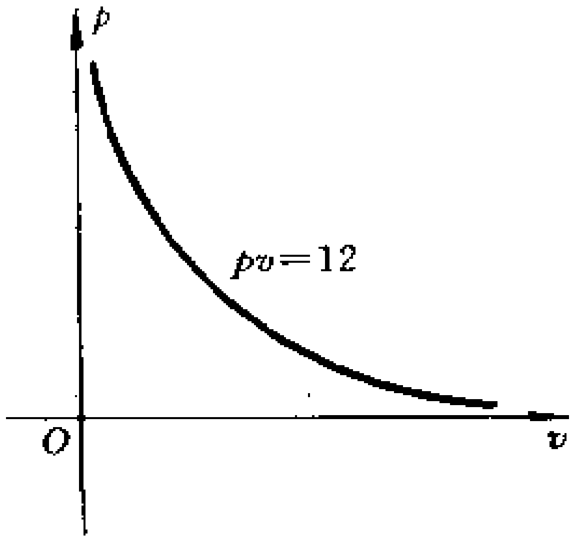


图 1.35

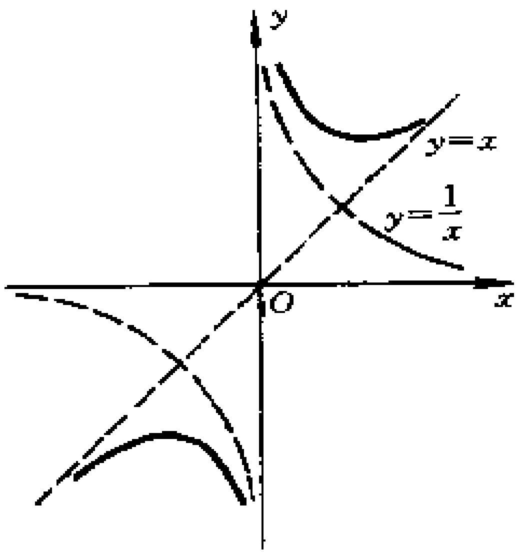


图 1.36

253. $y = x + \frac{1}{x}$(双曲线).

解 将 $y = x$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 的图形叠加即得,如图 1.36 中黑粗线所示.

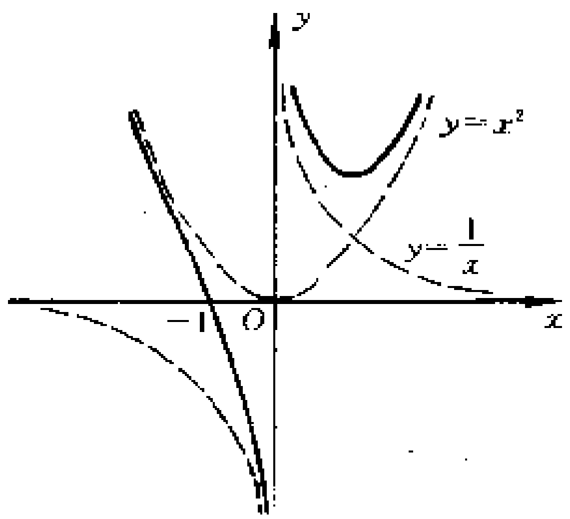


图 1.37

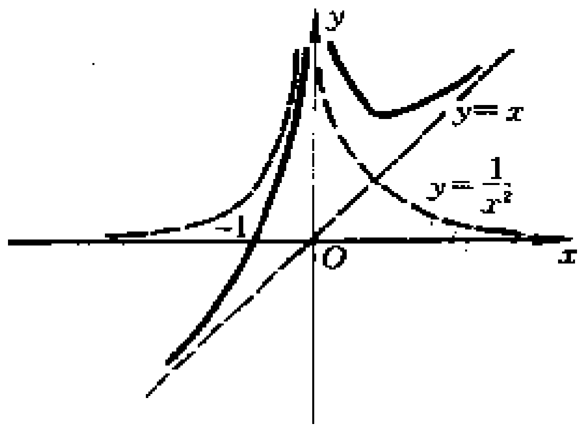


图 1.38

254. $y = x^2 + \frac{1}{x}$(牛顿三次曲线).

解 将 $y = x^2$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 的图形叠加即得，如图 1.37 中黑粗线所示.

255. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

解 如图 1.38 中黑粗线所示.

256. $y = \frac{1}{1 + x^2}$(箕舌线).

解 图形对称于 Oy 轴，位于 Ox 轴上方，最高点为(0，1). 当 x 的绝对值无限增大时，y 值无限变小. 如图 1.39 所示.

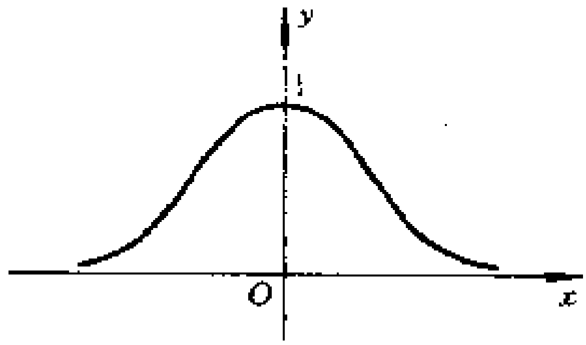


图 1.39

257. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$(牛顿蛇形线).

解 以 $-x$ 换 x，y 值的绝对值不变但改变符号，故图形对称于原点.

又因 $\left|\frac{2x}{1 + x^2}\right| \leqslant 1$，故 $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

当 $0 < x < 1$ 时，$y > 0$，曲线上升；当 $1 < x < +\infty$ 时，$y > 0$，曲线下降.

图形以 Ox 轴为渐近线，如图 1.40 所示.

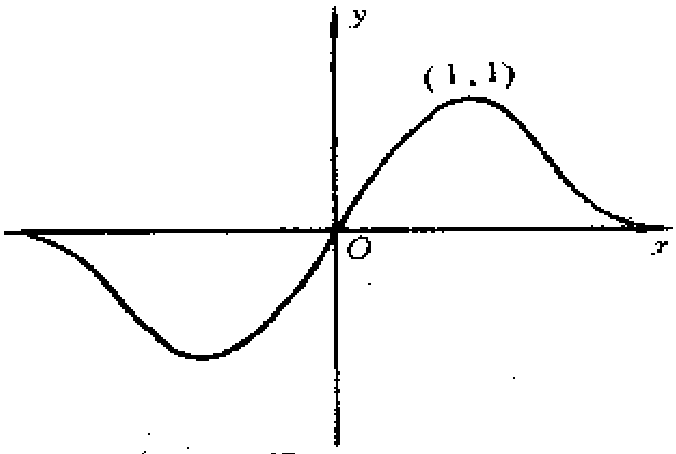


图 1.40

258. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

解　图形关于 Oy 轴对称，且经过点(0,1).

当 $0<x<1$ 及 $x>1$ 时，曲线上升，但当 $x=\pm 1$ 时，y 无意义. $x=\pm 1$ 为曲线的渐近线. 如图 1.41 所示.

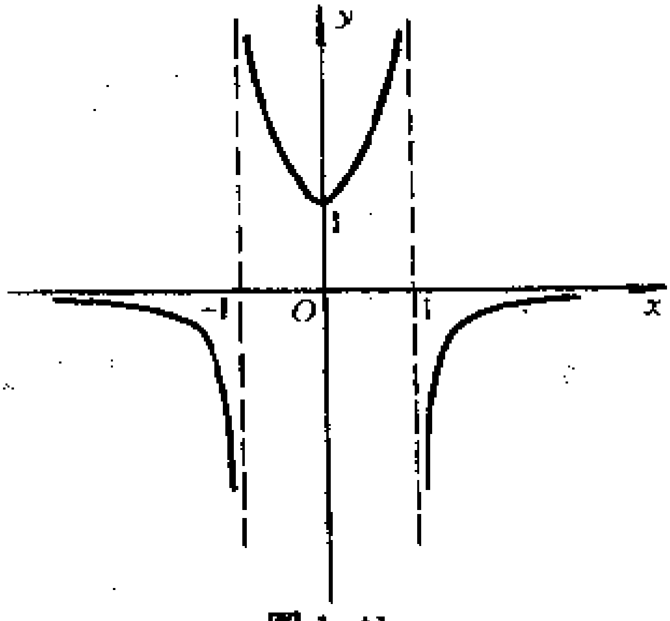


图 1.41

259. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

解　图形关于原点对称，且经过原点. $x=\pm 1$ 为渐近

线. 在(0,1)及$(1,+\infty)$内曲线上升. 如图 1.42 所示.

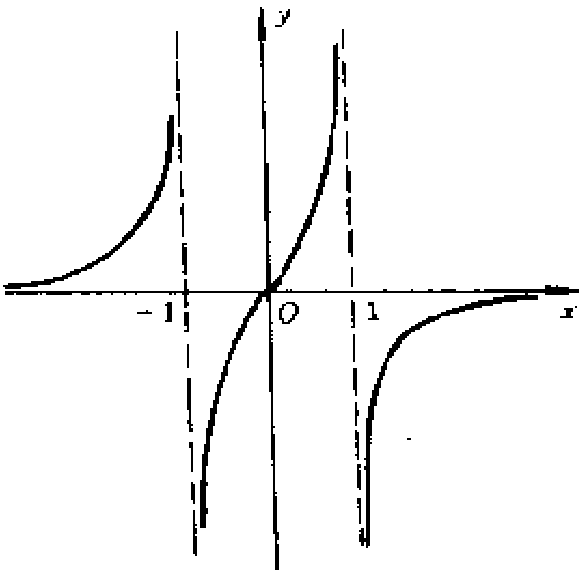


图 1.42

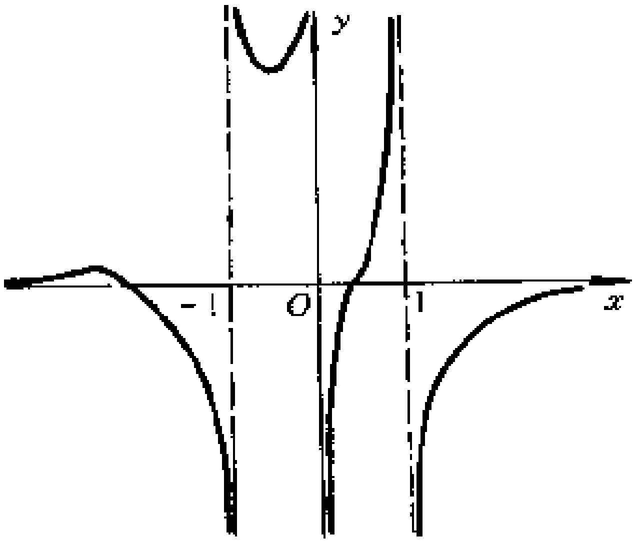


图 1.43

260. $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}$.

解 将$y=\dfrac{1}{1+x}$,$y=-\dfrac{2}{x}$及$y=\dfrac{1}{1-x}$的图形叠加即得,渐近线:$x=-1$,$x=0$,$x=1$及$y=0$,如图 1.43 所示.

261. $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{1-x}$.

解 图形关于Oy轴对称,渐近线:$x=-1$,$x=1$,$x=0$及$y=0$. 如图 1.44 所示.

262. $y=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

解 $y=\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}=1-\dfrac{2x}{x^2+x-2}$.

将$y=1$及$y=-\dfrac{2x}{(x+2)(x-1)}$的图形叠加即得. 如图 1.45 所示.

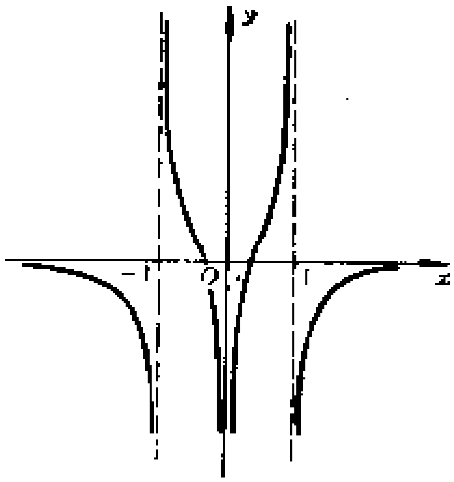


图 1.44

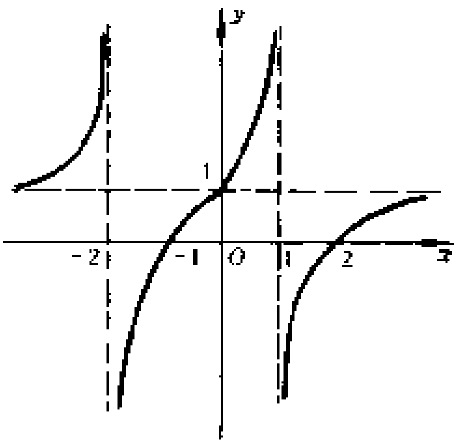


图 1.45

263. 把函数

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}(a_1\neq 0)$$

化为下面的形状

$$y=kx+m+\frac{n}{x-x_0},$$

然后作出它的略图. 研究例子

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}$$

解 $$y=\frac{a}{a_1}x+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}+\frac{\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)}{x-\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}$$

$$=kx+m+\frac{n}{x-x_0}$$

其中 $k=\frac{a}{a_1},m=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}$,

$$x_0=-\frac{b_1}{a_1},$$

$$n=\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1).$$

如图 1.46 中黑粗线所示.

对于 $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x+1}$

$$=x-5+\frac{8}{x+1},$$

如图 1.47 中黑粗线所示.

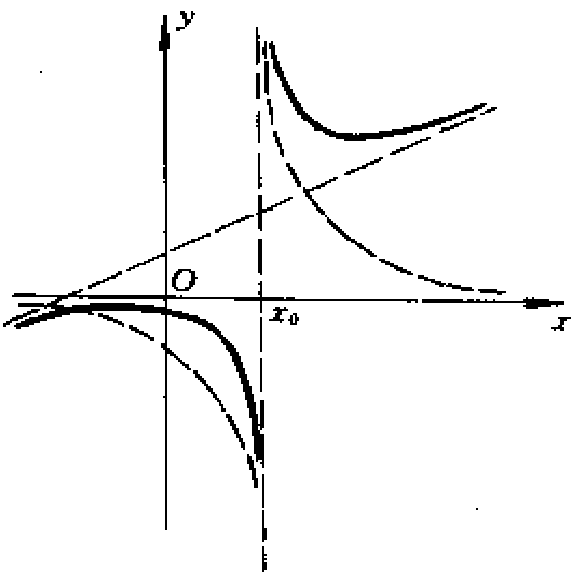
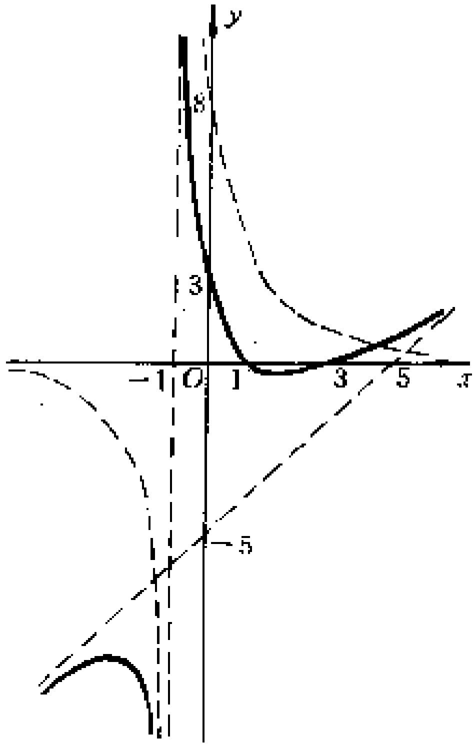


图 1.46



1.47

264. 一质点与引力中心相距 x. 设当 $x=1$ 米时引力 $F=10$ 千克，作出质点的引力 F 的绝对值的图形(牛顿定律).

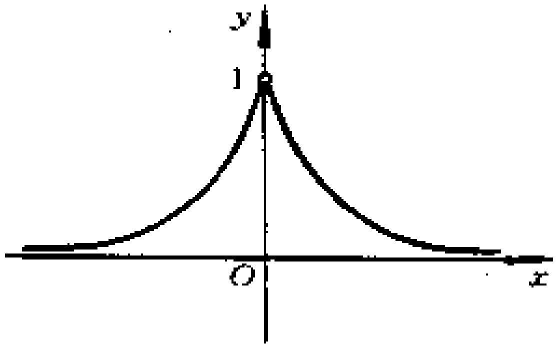


图 1.48

解 由万有引力定律知

$$F=\frac{k}{x^2},$$

其中 k 为常数.

当 $x=1$ 时,$F=10$,从而 $k=10$,于是,

$$F=\frac{10}{x^2},$$

如图 1.48 所示.

265. 根据梵德耳瓦斯定律(Закон Ван-дер-Вадъса),当温度不变时,真实气体的体积 v 和它的压力 p 以关系式

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=c$$

相连系.

设 $a=2$,$b=0.1$ 及 $c=10$,作出函数 $p=p(v)$ 的图形.

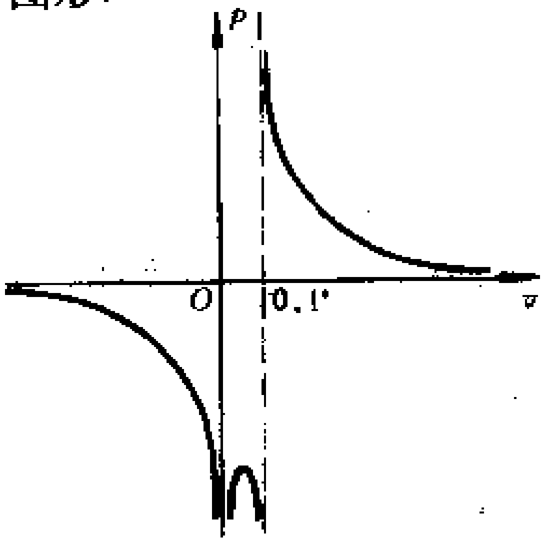


图 1.49

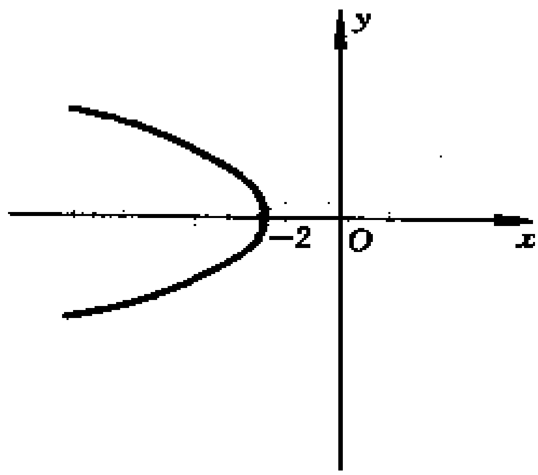


图 1.50

解 由于

$$p=\frac{10}{v-0.1}-\frac{2}{v^2},$$

将 $p=\frac{10}{v-0.1}$ 及 $p=\frac{2}{v^2}$ 的图形叠加即得. 如图 1.49 所示.

作下列无理函数的图形:

266. $y=\pm\sqrt{-x-2}$(抛物线).

解 $y^2=-(x+2)$,如图 1.50 所示.

267. $y=\pm x\sqrt{x}$(半立方抛物线).

解 $y^2=x^3$,如图 1.51 所示.

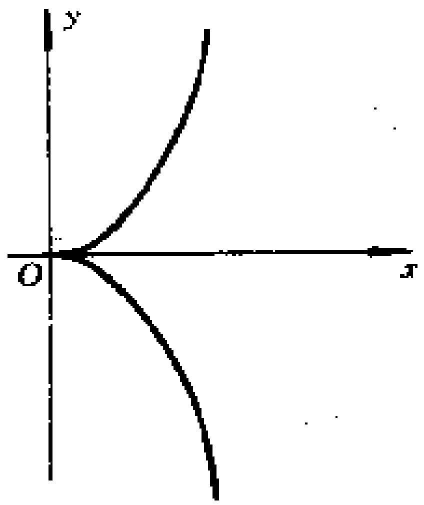


图 1.51

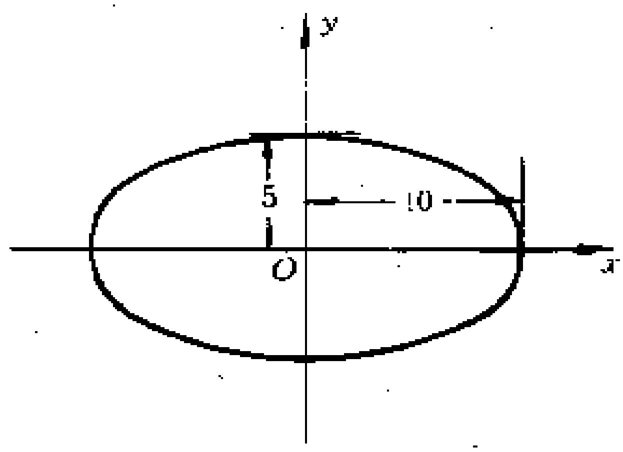


图 1.52

268. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$(椭圆).

解 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$,如图 1.52 所示.

269. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$(双曲线).

解 $x^2-y^2=1$,如图 1.53 所示.

270. $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

解 $y^2=\frac{1-x}{1+x}$,$x=-1+\frac{2}{1+y^2}$,

将 $x=-1$ 及 $x=\dfrac{2}{1+y^2}$ 的图形叠加即得，如图 1.54 所示$(-1<x\leqslant+1)$.

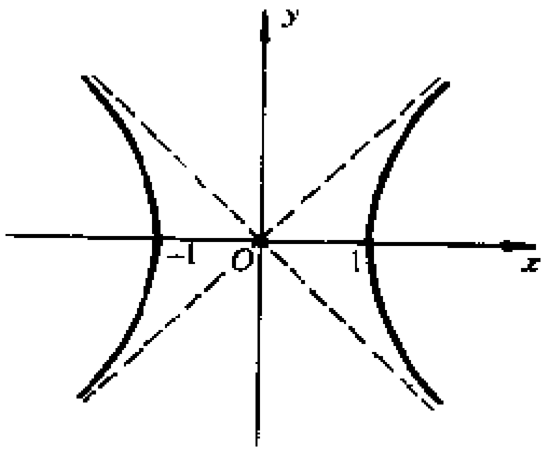


图 1.53

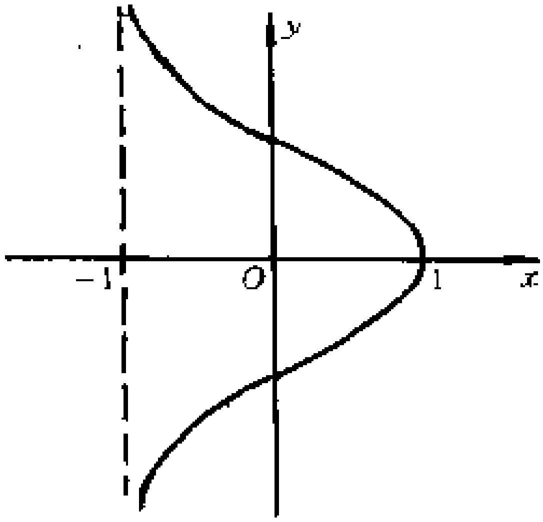


图 1.54

271. $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

解 当 $x=0,\pm 10$ 时，$y=0$.

将 $y=x$ 和 $y=\sqrt{100-x^2}$ 的图形上点的纵坐标相乘，即可描出图形. 如图 1.55 所示.

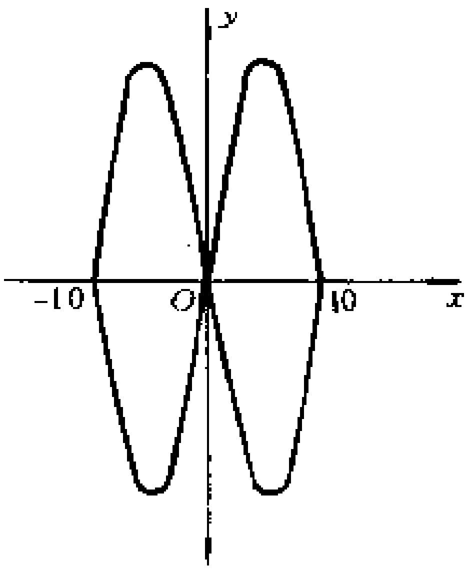


图 1.55

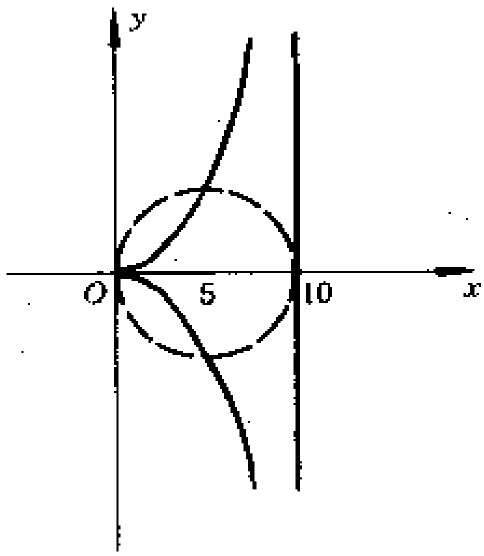


图 1.56

272. $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x}{10-x}}$(蔓叶线).

解 $y^2(10-x) = x^3$,如图 1.56 所示.

273. $y = \pm \sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

解 $y = \pm \sqrt{16-(x^2-5)^2}$.如图 1.57 所示.

274. 作幂函数

$$y = x^n$$

当:(a)$n = 1,3,5$;(6)$n = 2,4,6$ 时的图形.

解 如图 1.58 所示.

275. 作幂函数

$$y = x^n$$

当:(a)$n = -1, -3$;(6)$n = -2, -4$ 时的图形.

解 如图 1.59 所示.

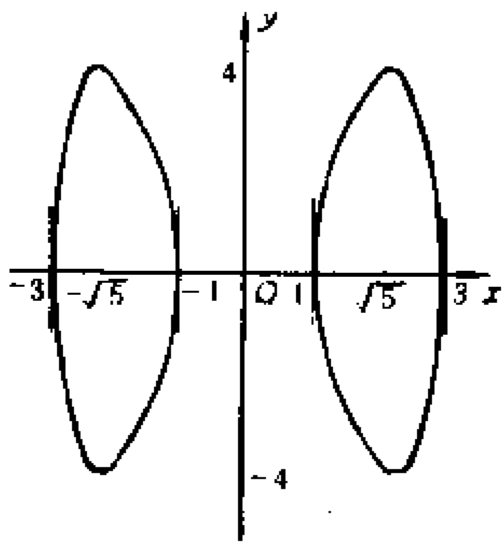


图 1.57

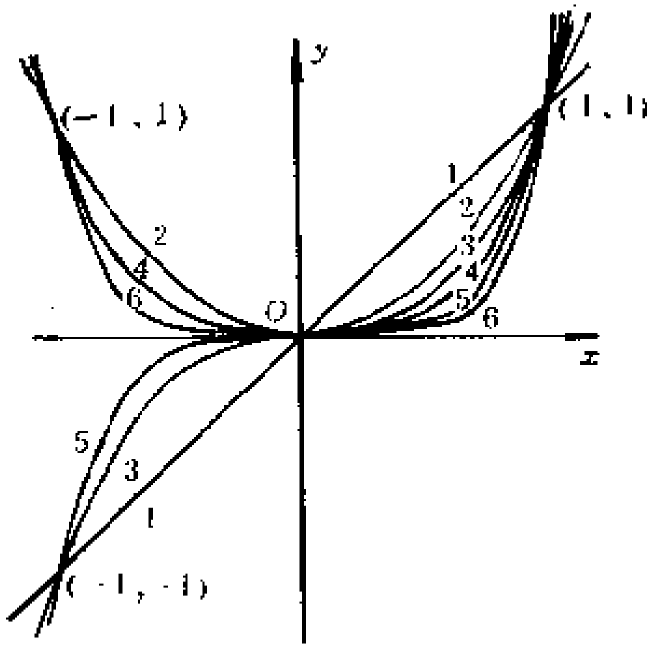


图 1.58

1. $y = \dfrac{1}{x}$, 2. $y = \dfrac{1}{x^2}$, 3. $y = \dfrac{1}{x^3}$, 4. $y = \dfrac{1}{x^4}$.

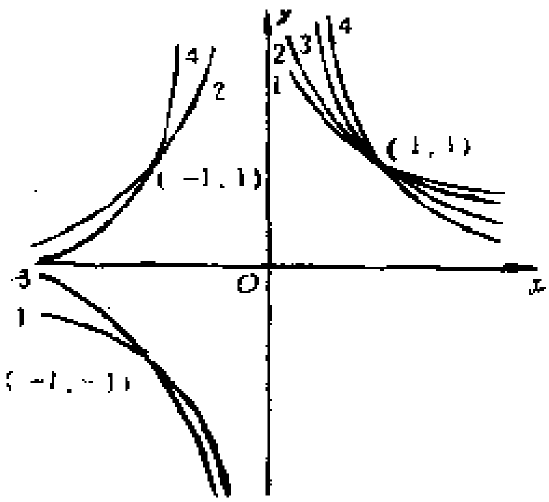


图 1.59

276. 作根式

$$y = \sqrt[m]{x}$$

当：(a)$m = 2,4$；

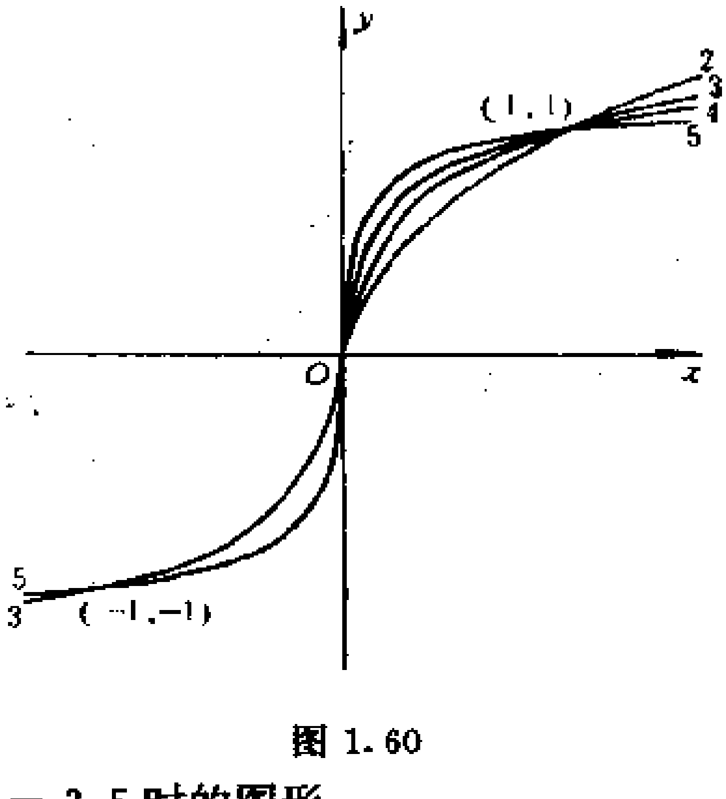


图 1.60

(b)$m = 3,5$ 时的图形.

解　如图 1.60 所示.

277. 设：

(а) $m = 2, k = 1$;　　　(б) $m = 2, k = 3$;

(в) $m = 3, k = 1$;　　　(г) $m = 3, k = 2$;

(д) $m = 3, k = 4$;　　　(е) $m = 4, k = 2$;

(ж) $m = 4, k = 3$.

作根式的图形

$$y = \sqrt[m]{x^k}$$

解　将所给数据代入 $y = \sqrt[m]{x^k}$，可知：

(а) 即 $y = \sqrt{x}$ 的图形，见图 1.60.

(б) $y = x\sqrt{x}$，如图 1.61 所示：1；

(в) 即 $y = \sqrt[3]{x}$ 的图形，见图 1.60；

(г) $y = \sqrt[3]{x^2}$，如图 1.61 所示：2；

(д) $y = x\sqrt[3]{x}$，如图 1.61 所示：3；

(е) 即 $y = \sqrt{|x|}$ 的图形；

(ж) $y = \sqrt[4]{x^3}$，如图 1.61 所示：4.

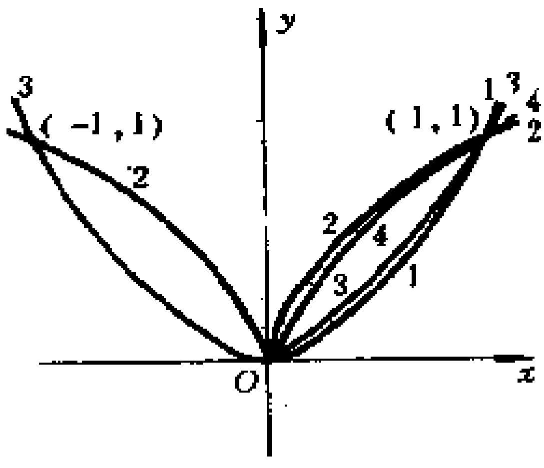


图 1.61

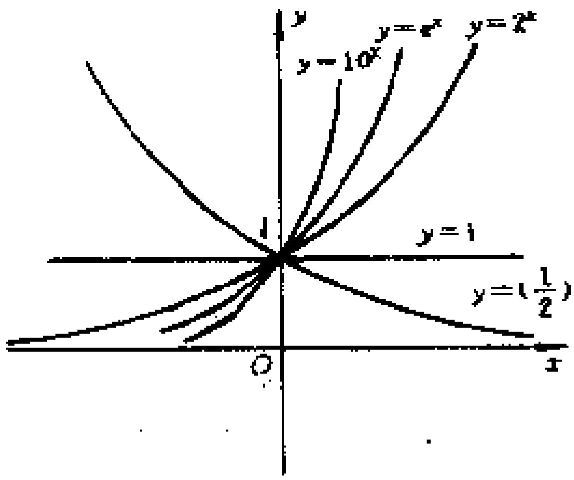


图 1.62

278. 作指数函数

$$y = a^x$$

当 $a=\frac{1}{2},1,2,e,10$ 时的图形.

解 如图 1.62 所示.

279. 作复合指数函数

$$y=e^{y_1}$$

的图形,设:

(а) $y_1=x^2$;(б) $y_1=-x^2$;(в) $y_1=\frac{1}{x}$;

(г) $y_1=\frac{1}{x^2}$;(д) $y_1=-\frac{1}{x^2}$; (е) $y_1=\frac{2x}{1-x^2}$.

解 (а) 如图 1.63 所示;(б) 如图 1.64 所示;

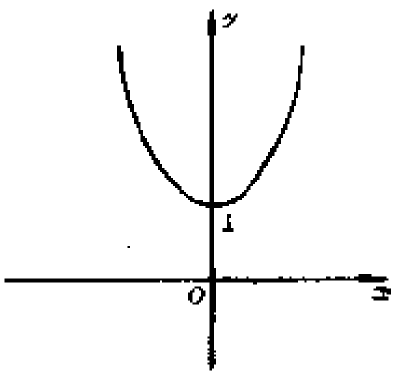


图 1.63

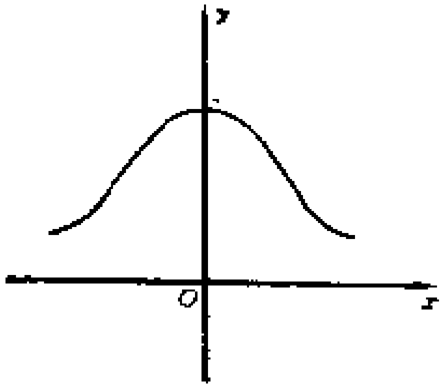


图 1.64

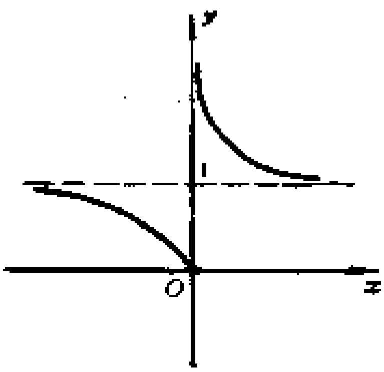


图 1.65

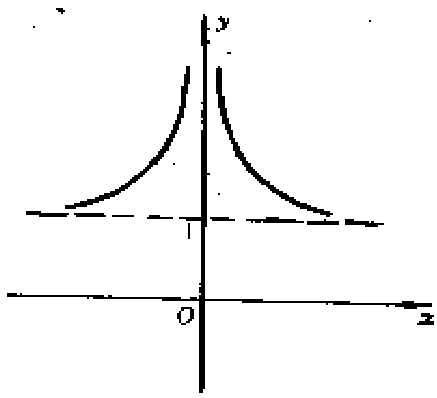


图 1.66

(в) 如图 1.65 所示;(г) 如图 1.66 所示;

(д) 如图 1.67 所示；(е) 如图 1.68 所示.

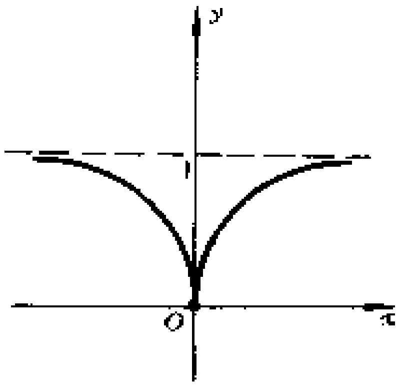


图 1.67

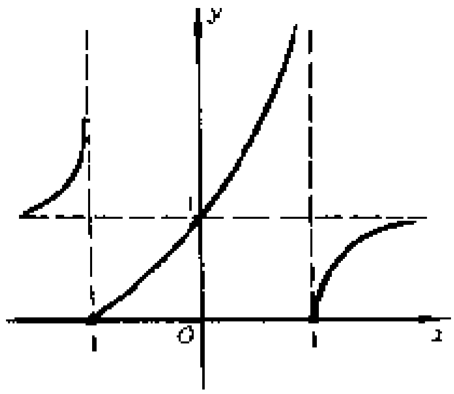


图 1.68

280. 作对数函数 $y = \log_a x$ 当 $a = \dfrac{1}{2}, 2, e, 10$ 时的图形.

解 如图 1.69 所示.

281. 作下列函数的图形：

(а) $y = \ln(-x)$；(б) $y = -\ln x$.

解 如图 1.70 所示.

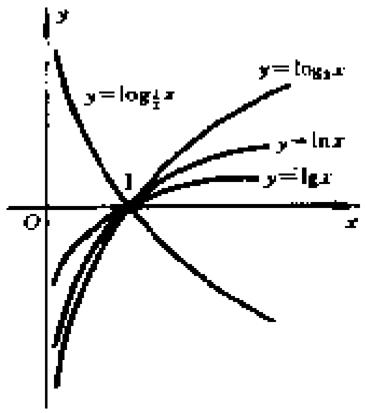


图 1.69

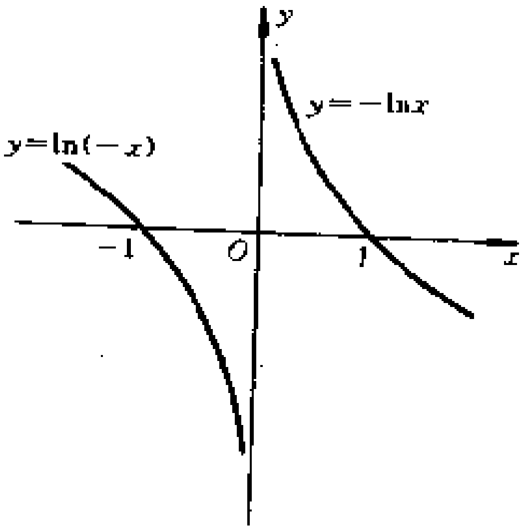


图 1.70

282. 设：

(а) $y_1 = 1 + x^2$；(б) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$；

(в) $y_1 = \dfrac{1-x}{1+x}$；(г) $y_1 = \dfrac{1}{x^2}$；(д) $y_1 = 1 + e^x$.

作出对数复合函数 $y = \ln y_1$ 的图形.

解 (a) 如图 1.71 所示；

(б) 存在域：$x > 3$ 或 $x < 1$.

$y = \ln|x-1| + 2\ln|x-2| + 3\ln|x-3|$，将此三个函数的图形叠加即得，如图 1.72 所示；

(в) $y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$，将 $y = \ln(1-x)$ 及 $y = -\ln(1+x)$ 的图形叠加即得，如图 1.73 所示（$-e < x < 1$）；

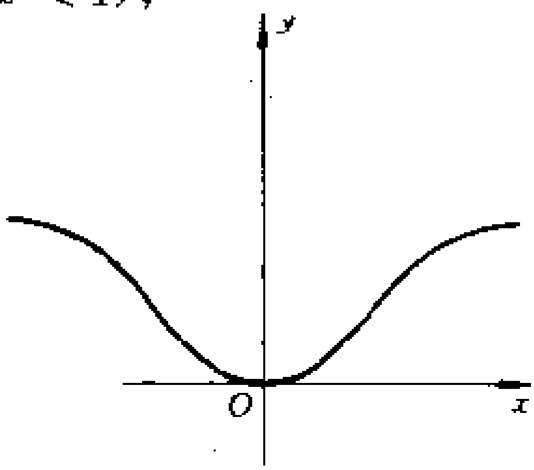


图 1.71

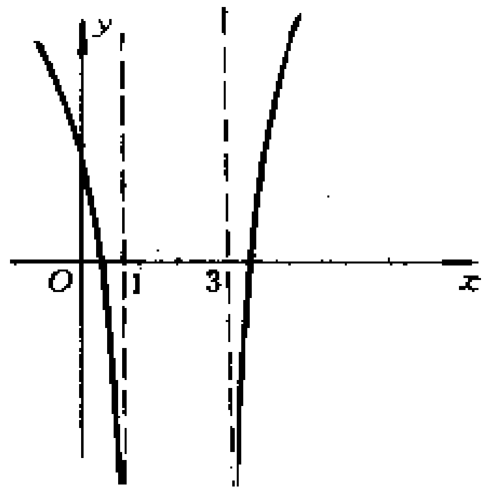


图 1.72

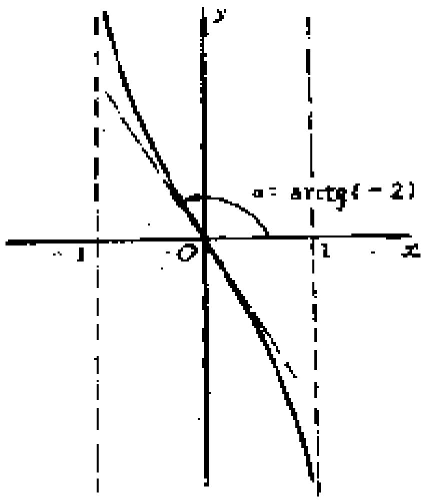


图 1.73

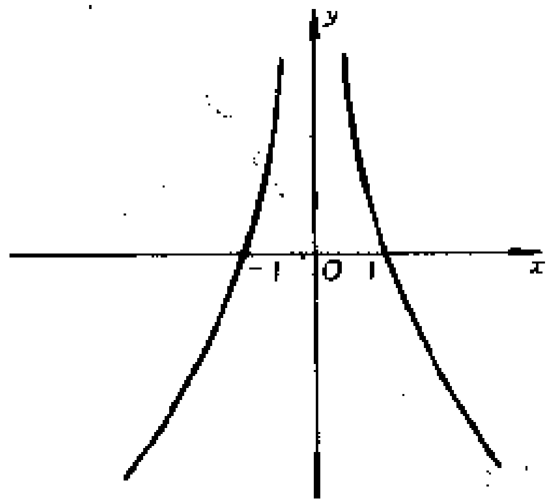


图 1.74

(г) $y = \ln\dfrac{1}{x^2}$，如图 1.74 所示，图形关于 Oy 轴对称；

(ⅱ) 如图 1.75 所示.

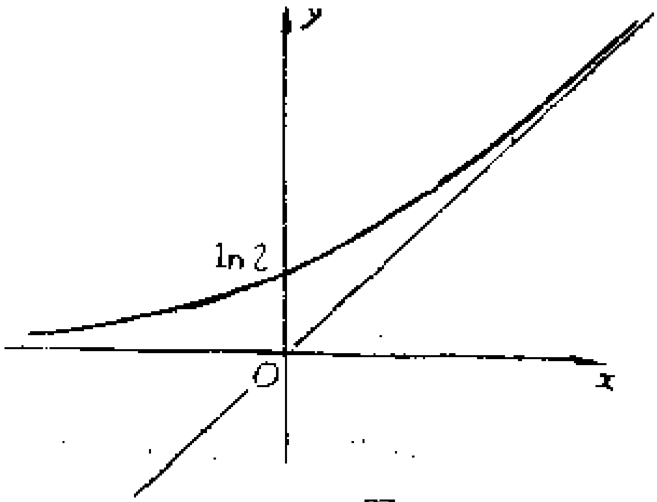


图 1.75

283. 作函数

$$y = \log_x 2$$

的图形

解 如图 1.76 所示.

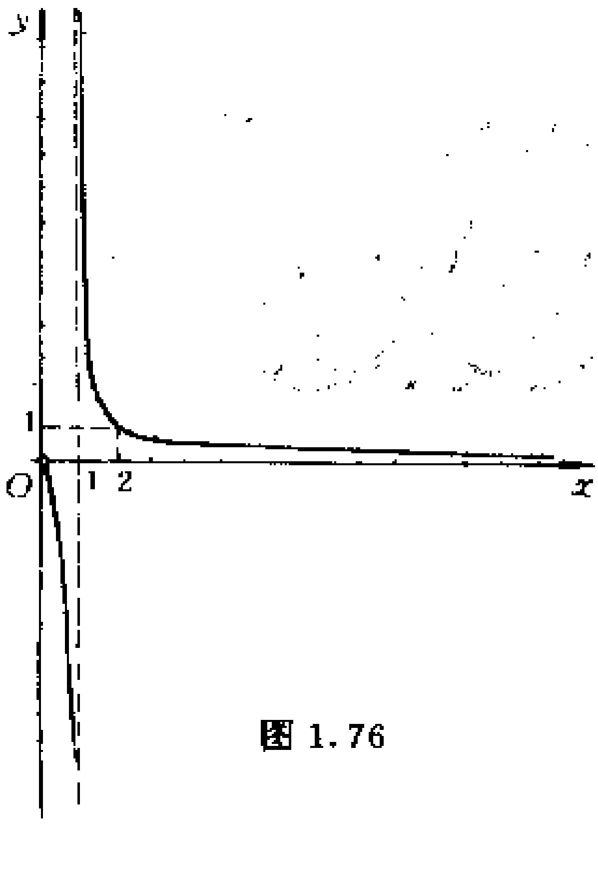


图 1.76

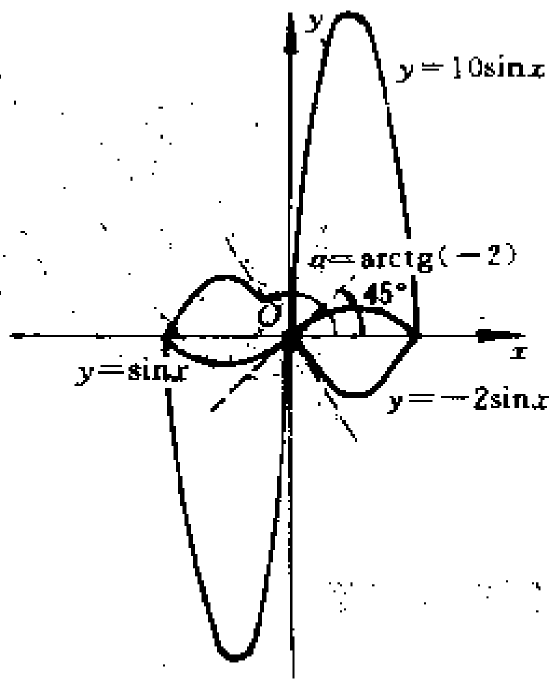


图 1.77

284. 作函数

$$y = A\sin x$$

当 $A = 1, 10, -2$ 时的图形.

解 如图 1.77 所示.

285. 作函数

$$y = \sin(x - x_0)$$

当 $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 时的图形.

解 只要将 $y = \sin x$ 的图形向右平移距离 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 即得,如图 1.78 所示.

1. $y = \sin x$; 2. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; 4. $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$;

5. $y = \sin(x - \pi)$.

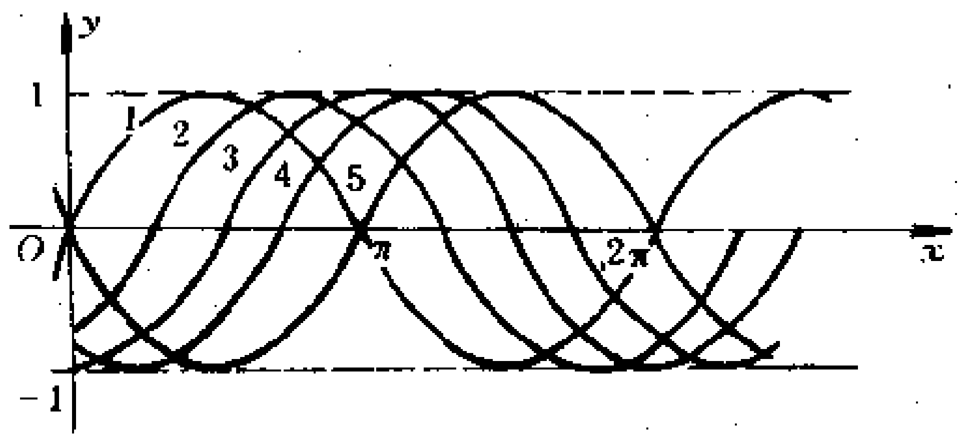


图 1.78

286. 作函数

$$y = \sin nx$$

的图形. 设 $n = 1,2,3,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$.

解 如图 1.79 所示.

1. $y = \sin x$; 2. $y = \sin 2x$;

3. $y = \sin 3x$; 4. $y = \sin\frac{1}{2}x$;

5. $y = \sin\frac{1}{3}x$.

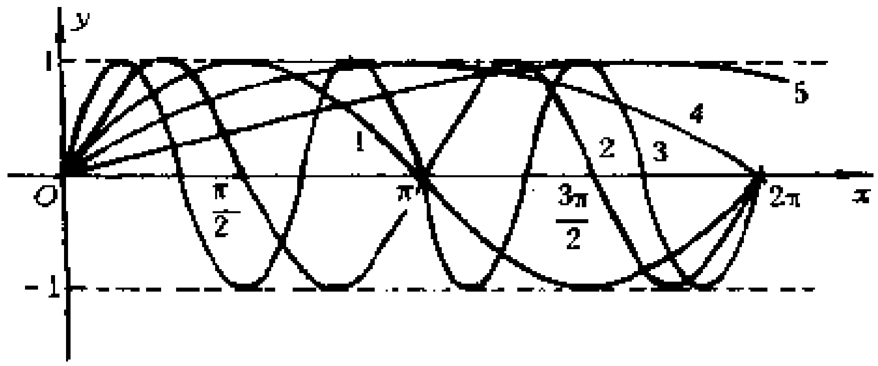


图 1.79

287. 把函数

$$y = a\cos x + b\sin x$$

化为下面的形状

$$y = A\sin(x - x_0),$$

再作它的图形.

研究例子

$$y = 6\cos x + 8\sin x.$$

解 $y = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$,

由于

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1, \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1 \text{ 及}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

故可令

$$\sin x_0=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos x_0=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{1}$$

于是

$$y=A\sin(x-x_0) \tag{2}$$

其中

$A=\sqrt{a^2+b^2}\quad (a^2+b^2\neq 0)$，$x_0$ 适合(1)式.

(2)式图形是这样作的：先把正弦曲线 $y=\sin x$ 沿 Ox 轴平移距离 $|x_0|$(或 $x_0>0$ 时，则向右移；若 $x_0<0$ 时向左移)，然后再从纵轴"伸长"A 倍(当 $A<1$ 时为压缩 $\frac{1}{A}$ 倍).

对于例子

$y=6\cos x+8\sin x$，

$A=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\sin x_0=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}$，

$\cos x_0=-\frac{4}{5}$，

$x_0=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$，

如图 1.80 所示.

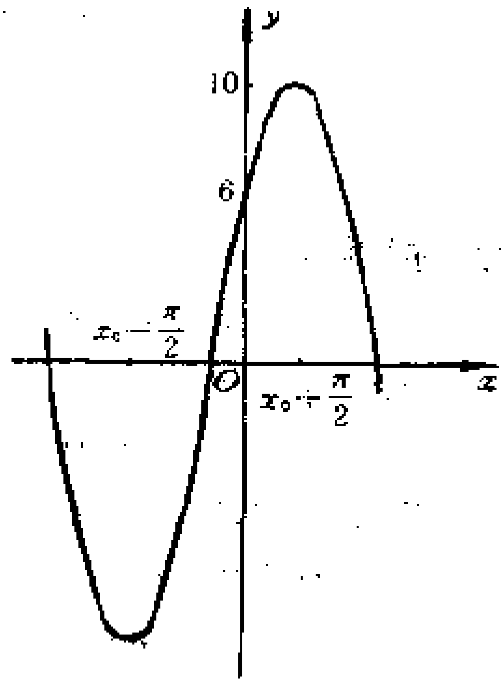


图 1·80

作下列三角函数的图形：

288. $y=\cos x$.

解 如图 1.81 所示.

289. $y=\operatorname{tg} x$.

解 如图 1.82 所示.

290. $y = \mathrm{ctg}x$.

解　如图 1.83 所示.

291. $y = \sec x$.

解　如图 1.84 所示.

292. $y = \csc x$.

解　如图 1.85 所示.

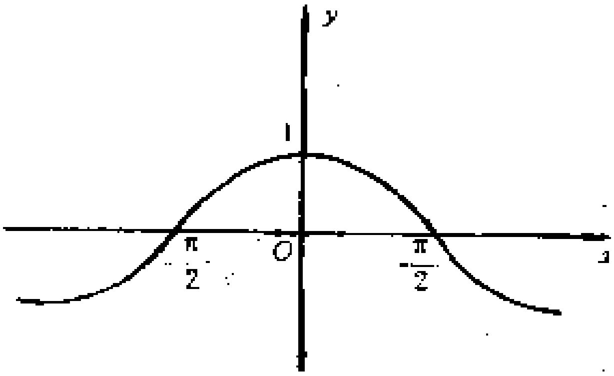


图 1・81

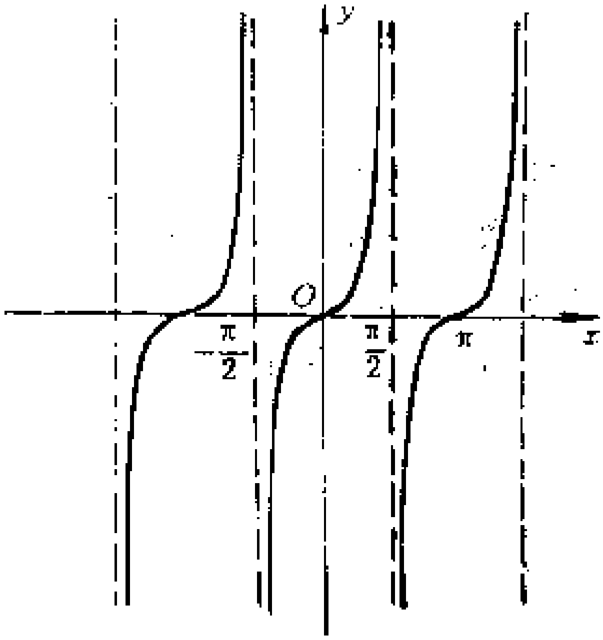


图 1・82

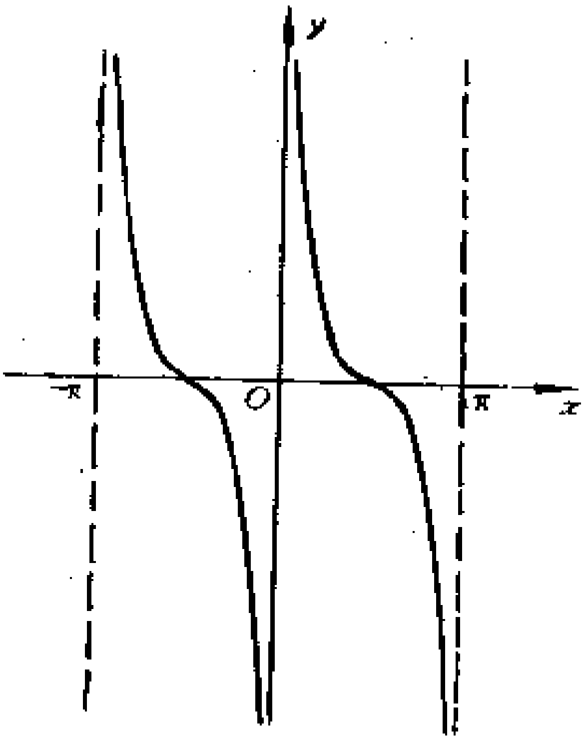


图 1・83

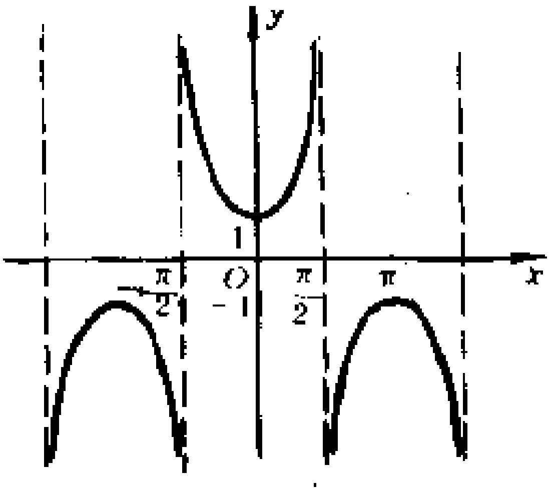


图　1·84

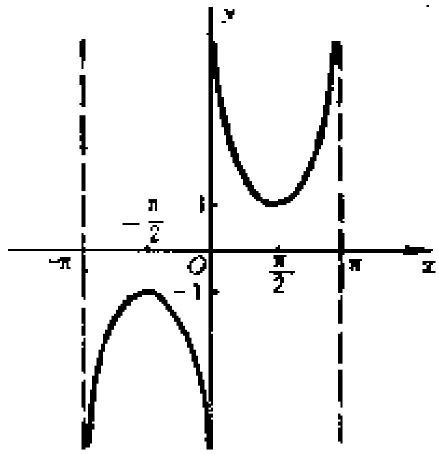


图　1·85

293. $y=\sin^2 x$.

解　如图 1.86 所示.

294. $y=\sin^3 x$.

解　如图 1.87 所示.

295. $y=\operatorname{ctg}^2 x$

解　如图 1.88 所示.

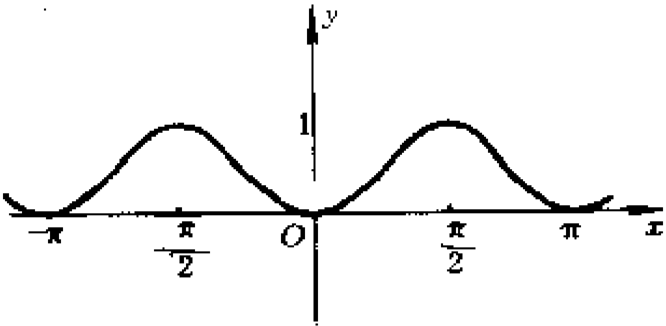


图　1·86

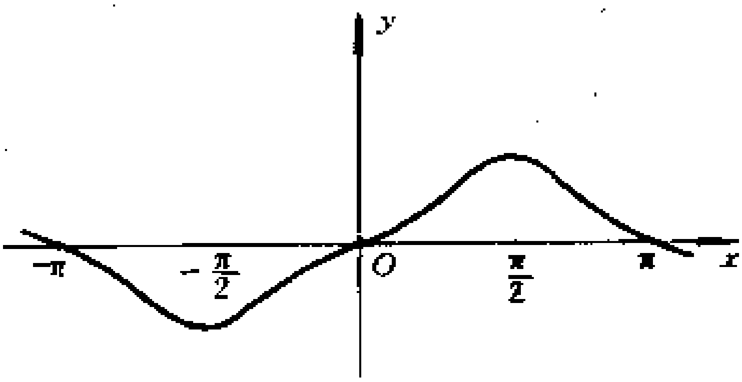


图1　1·87

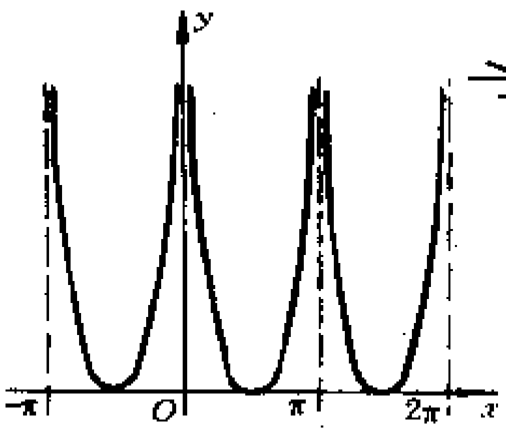


图　1·88

296. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 周期为 π. 将 $y = \frac{1}{2}\cos 2x$ 及 $y = -\frac{1}{2}\cos 4x$ 的图形叠加即得. 如图 1.89 所示.

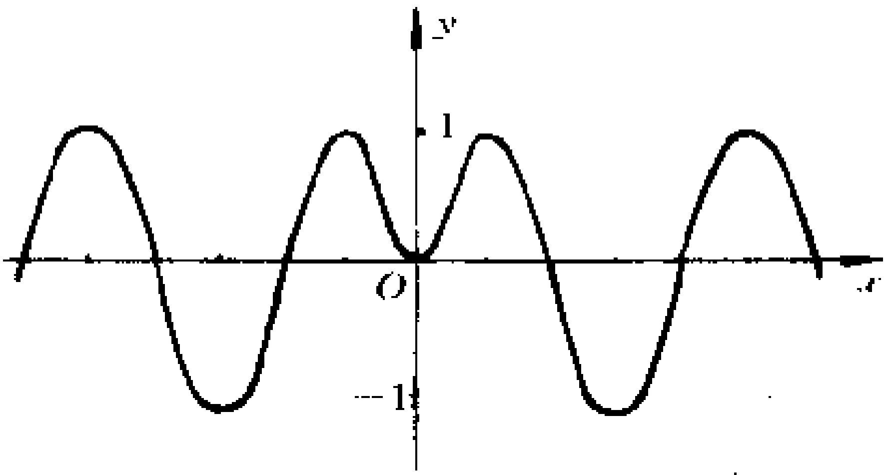


图 1・89

297. $y = \pm\sqrt{\cos x}$.

解 图形关于 Ox 轴及 Oy 轴均对称，是以 2π 为周期的周期函数，如图 1.90 所示.

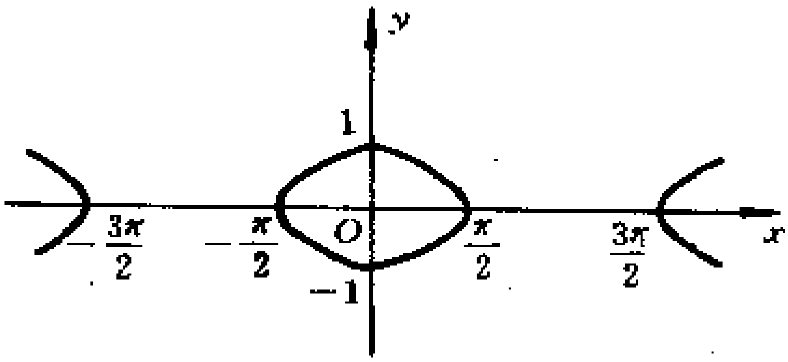


图 1・90

作下列函数的图形：

298. $y = \sin x^2$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 因为

$$f(\sqrt{\pi}) = f(\sqrt{2\pi}) = \cdots = f(\sqrt{n\pi}) = 0.$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}) = 0$，所以曲线和横轴的相邻交点的相互距离所成的叙列的极限为零.

由不等式$\sin x^2 < x^2$，我们知道这条曲线位于抛物线$y = x^2$的下方. 如图 1.91 所示.

299. $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

解 $-1 \leqslant y \leqslant 1$. $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$，$y = 0$ 为渐近线.

当 x 由 $+\infty$ 减小到$\dfrac{2}{\pi}$时，则$\dfrac{1}{x}$由 0 增大到$\dfrac{\pi}{2}$，而 y 由 0 增到 1；但当 x 由$\dfrac{2}{\pi}$减小到$\dfrac{2}{3\pi}$，则$\dfrac{1}{x}$由$\dfrac{\pi}{2}$增大到$\dfrac{3\pi}{2}$，而 y 由 1 减小到 -1、当 $x = \dfrac{1}{\pi}$ 时，$y = 0$ 等. 因为 y 是奇 函数，故图形关于原点对称. 当 x 无限接近 0 时，函数在 -1 与 1 之间摆动，并且凝聚于 0 点，而在点 $x = 0$ 处，函数 y 没有 定义. 如图 1.92 所示.

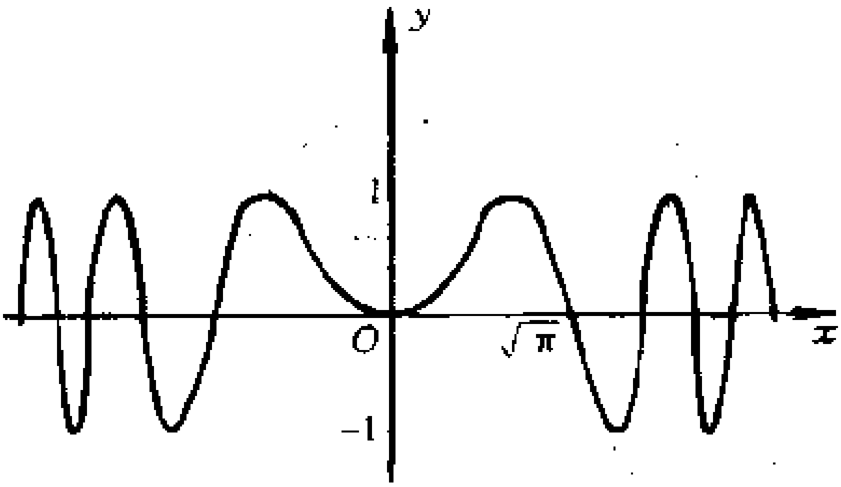


图 1·91

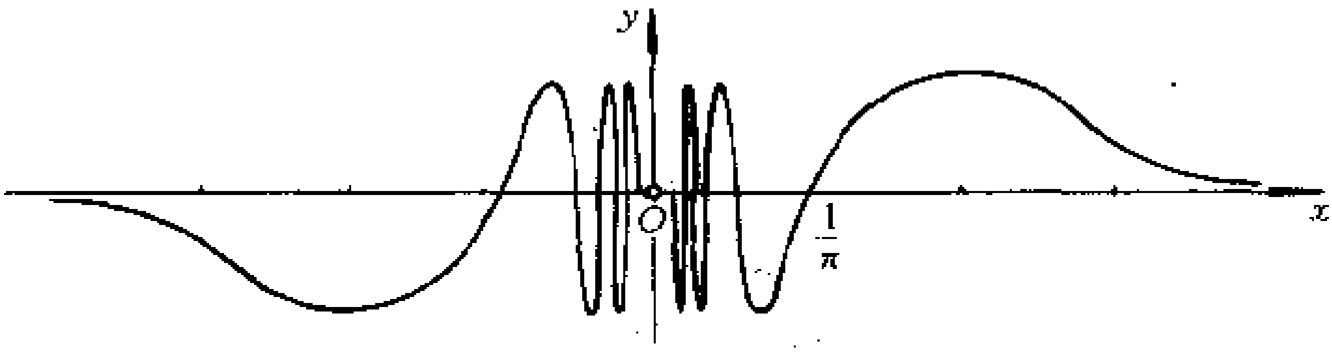


图 1・92

300. $y = x\cos\frac{\pi}{x}$.

解 $-x \leqslant y \leqslant x$. $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$.

当 $x = \frac{2}{2k+1}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$y = 0$.

当 $x > 2$ 时，y 单调增加，因为 y 是奇函数，故图形关于原点对称. 而在点 $x = 0$，函数 y 没有定义.

当 x 无限接近 0 时，函数作无限次衰减摆动，并凝聚于 O 点. 如图 1.93 所示.

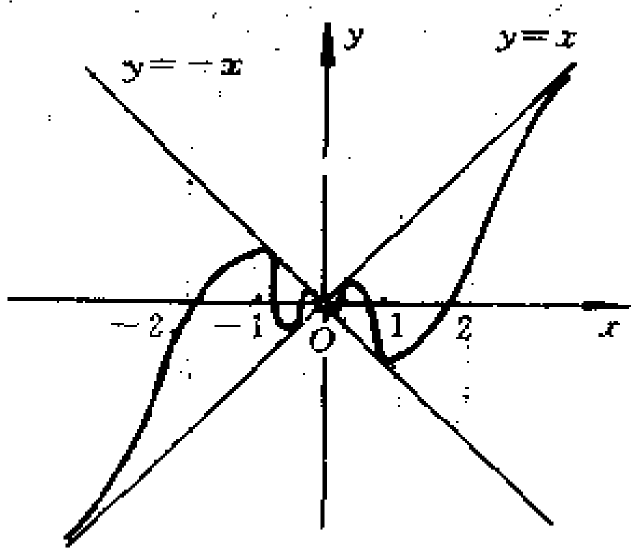


图 1・93

301. $y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$.

解 当 $x=\frac{1}{k}(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时，$y=0$.

当 $x\to\frac{2}{2k+1}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时，$y\to\infty$.

当 $x>2$ 时，$y>0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$y\to 0$.

因为 y 为奇函数，故图形关于原点对称.

当 $x\to 0$ 时，图形凝聚于 O 点，而在点 $x=\frac{2}{2k+1}$ 及 0，函数 y 是没有定义的.

如图 1.94 所示.

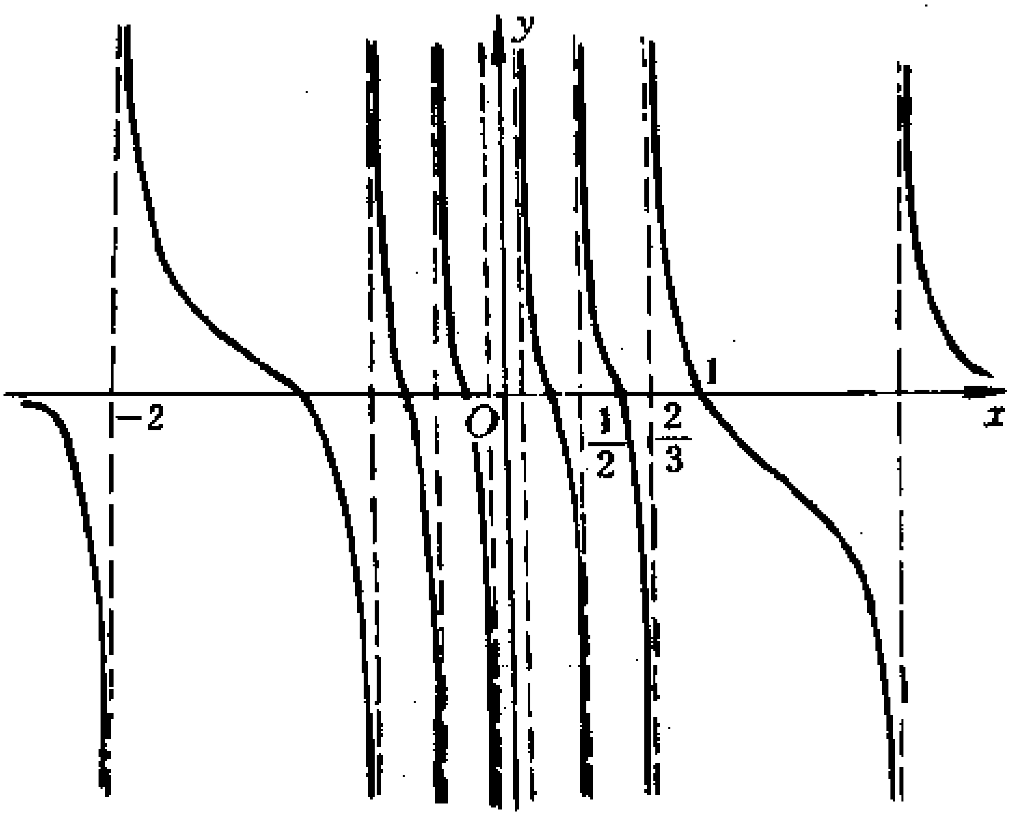


图 1.94

302. $y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$.

解 先作 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 的图形. 因为 y 为偶函数, 故图形关于 Oy 轴对称.

当 $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时, $y=\pm x$.

当 $x=\frac{1}{k\pi}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时, $y=0$.

当 $x>\frac{2}{\pi}$ 时, y 单调增加, 且有

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1^{*)}$$

如图 1.95 所示(在点 $x=0$ 无定义).

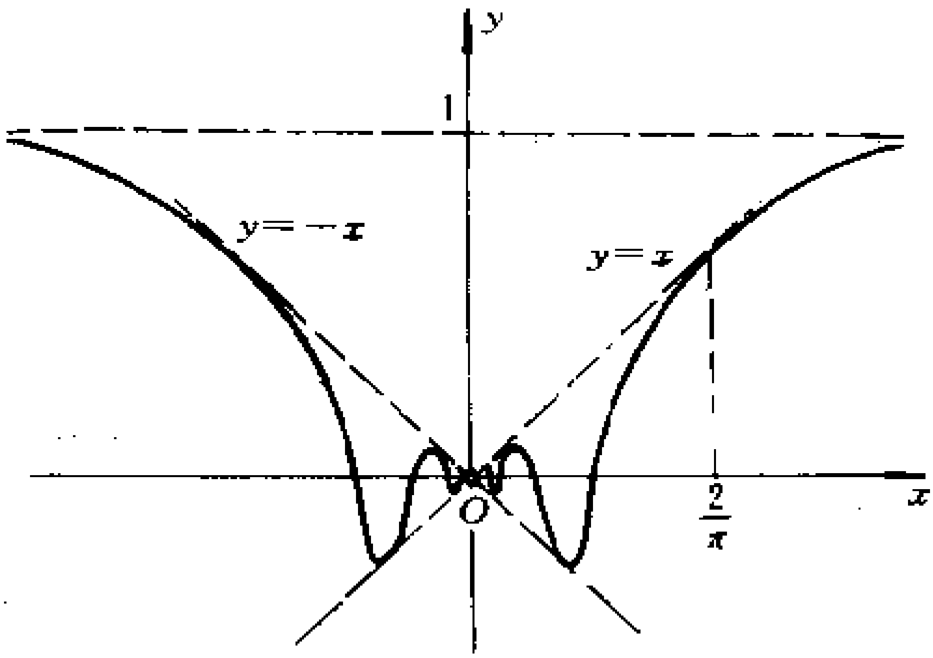


图 1.95

其次, 再将函数 $y=2x$ 及 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 的图形"叠加", 即得

$$y = x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$$

的图形. 如图 1.96 所示.

*) 此结果参看本章 §5.

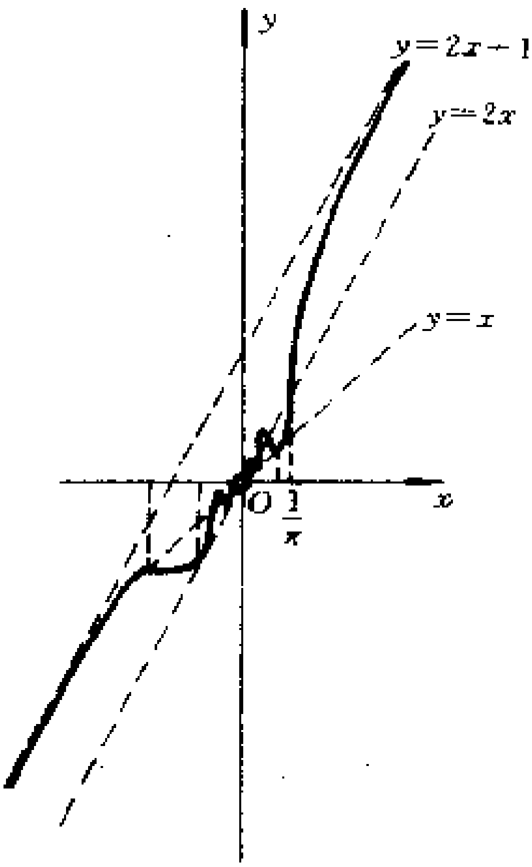


图 1.96

303. $y = \pm\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x}$.

解 图形关于原点及 Oy 轴, Ox 轴均对称. 由于

$$-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \quad (|x| \leqslant 1),$$

故图形位于圆 $x^2+y^2=1$ 内.

将函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=\sin\frac{\pi}{x}$ 的纵坐标对应相乘, 即可描出所求的图形.

如图 1·97 所示.

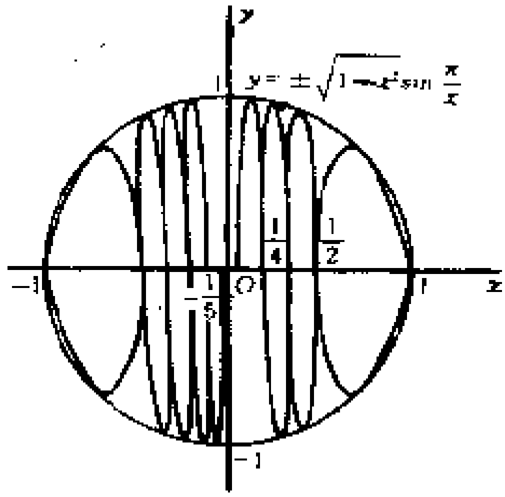


图 1·97

304. $y = \frac{\sin x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$. $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$. 由于 $|y| \leqslant \frac{1}{|x|}$, 故图形在 $y=-\frac{1}{x}$ 及 $y=\frac{1}{x}$ 之间. 又图形关于 Oy 轴对称. 当 $x=k\pi$ 时, $y=$

$0(k=\pm 1, \pm 2, \cdots)$.

如图 1・98 所示.

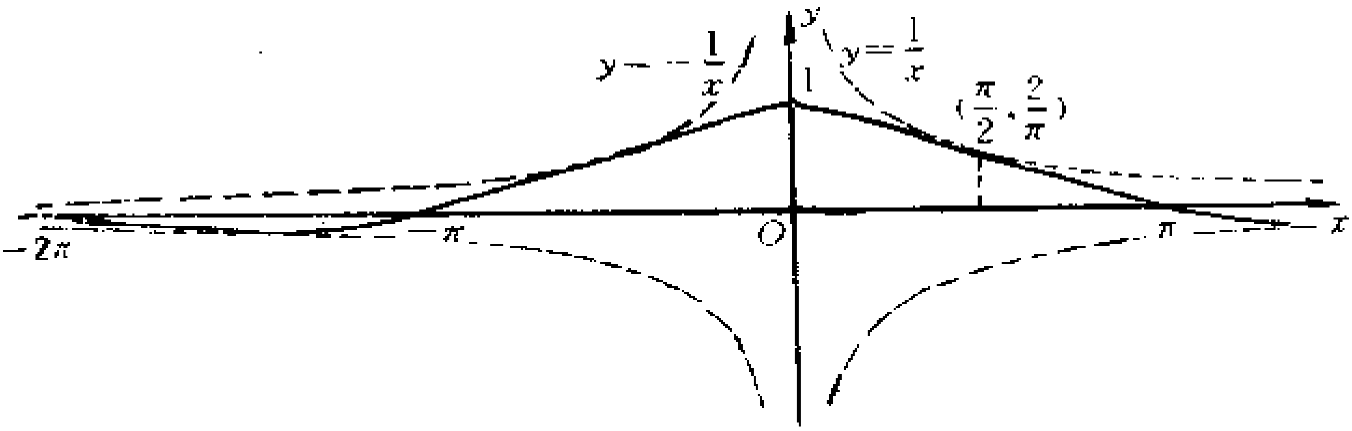


图 1・98

305. $y=e^x\cos x$.

解 由于 $-e^x \leqslant y \leqslant e^x$,故图形在 $y=e^x$ 及 $y=e^{-x}$ 之间.

当 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时,$y=0$. 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$,但 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\cos x$ 却不存在.

如图 1.99 所示.

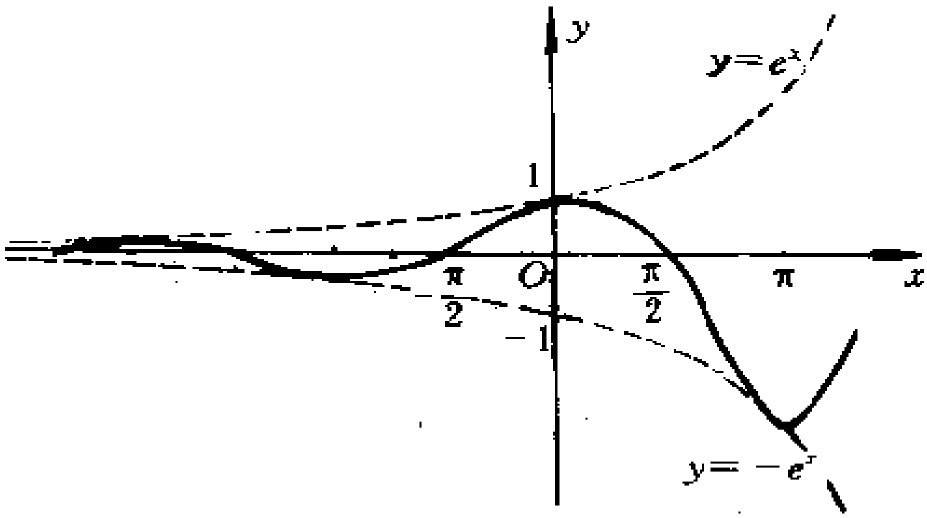


图 1.99

306. $y=\pm 2^{-x}\sqrt{\sin\pi x}$.

解 当 $2k\leqslant x\leqslant(2k+1)(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$ 时，y 值才确定. 当 $k=2k+\frac{1}{2}$ 时，$y=\pm 2^{-x}$.

图形关于 Ox 轴对称. $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$，而 $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ 不存在.

如图 1・100 所示.

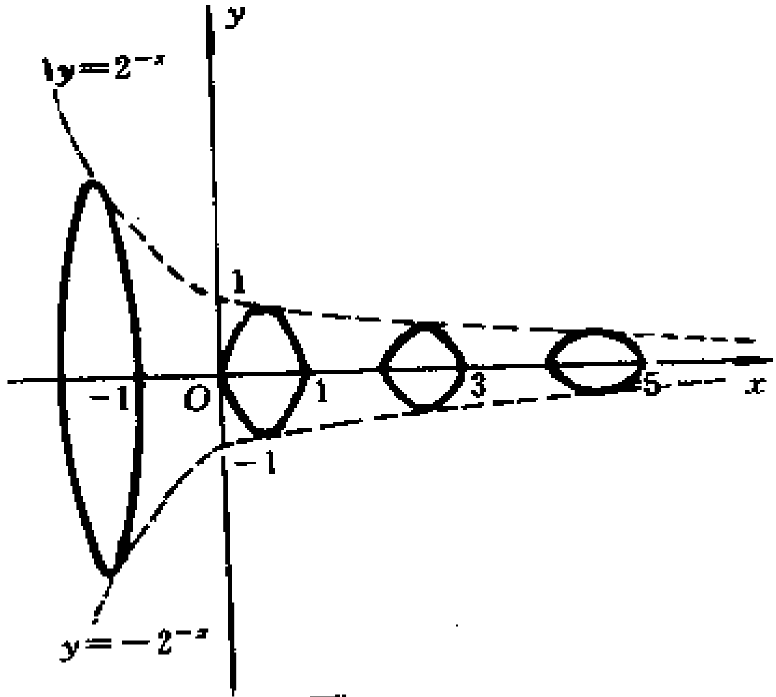


图 1・100

307. $y=\frac{\cos x}{1+x^2}$.

解 $-\frac{1}{1+x^2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{1+x^2}$,

图形在 $y=-\frac{1}{1+x^2}$ 及 $=\frac{1}{1+x^2}$ 之间，且关于 Oy 轴对称.

$\lim\limits_{x\to\infty} y=0$, $\lim\limits_{x\to 0} y=1$.

如图 1・101 所示.

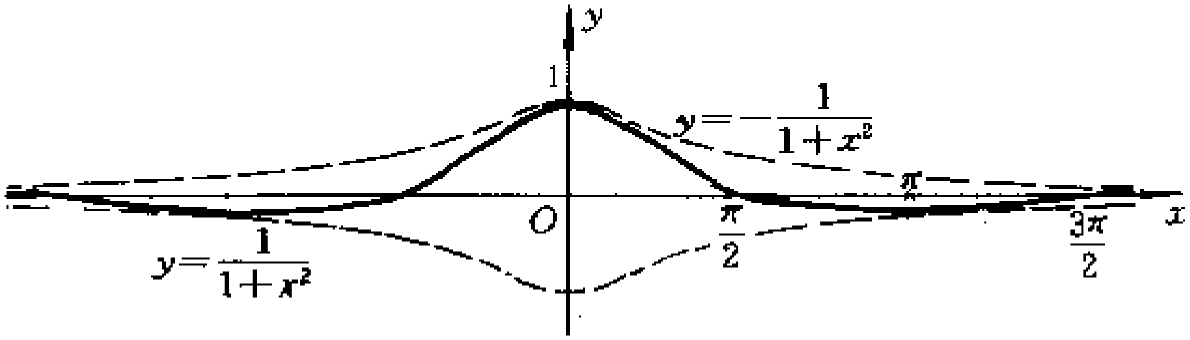


图 1·101

308. $y=\ln(\cos x)$.

解 存在域是使 $\cos x>0$ 的开区间

$$\left((4k-1)\frac{\pi}{2},(4k+1)\frac{\pi}{2}\right)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的全体. 函数 y 是以 2π 为周期的周期函数. 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 内, y 单调增加, 且 $y<0$. 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内, y 单调减小, $y<0$. 最大值是 $y=\ln\cos0=0$.

又 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}y=-\infty$. 如图 1·102 所示.

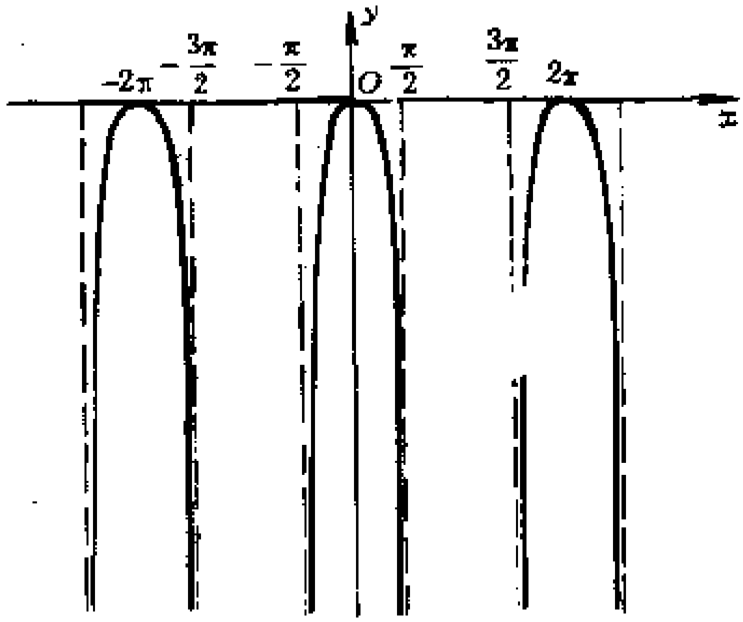


图 1·102

309. $y=\cos(\ln x)$.

解 存在域为数 $x>0$ 的全体.

当 $x=e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时，$y=0$.

当 $x=e^{2k\pi}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时，$y=1$；

而当 $x=e^{(2k+1)\pi}$ 时，$y=-1$.

图形始终在直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间摆动，而且越靠近原点时，摆动越密.

如图 1.103 所示.(两轴所取的单位不一致).

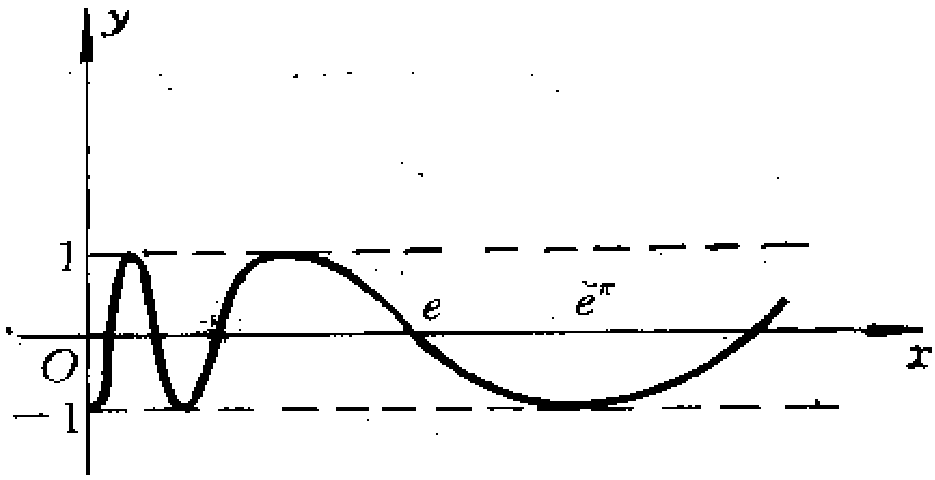


图 1·103

310. $y=e^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $y>0$.

函数 y 是以 2π 为周期的周期函数.

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，y 单调减少；

当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，y 单调增加. 又有

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to\pi-0}y=+\infty.$$

$y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$ 为区间$(0,\pi)$内，函数 y 的最小值.

同理，x 由 π 到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，y 由 0 增到 $\frac{1}{e}$；而 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 到 2π 时，y 由 $\frac{1}{e}$ 减到 0. $\lim\limits_{x\to\pi+0} y = \lim\limits_{x\to 2\pi-0} y = 0$.

如图 1·104 所示.

作下列反三角函数的图形：

311. $y = \arcsin x$.

解 如图 1.105 所示的 AB 段曲线.

312. $y = \arccos x$.

解 如图 1.106 所示的 AB 段曲线.

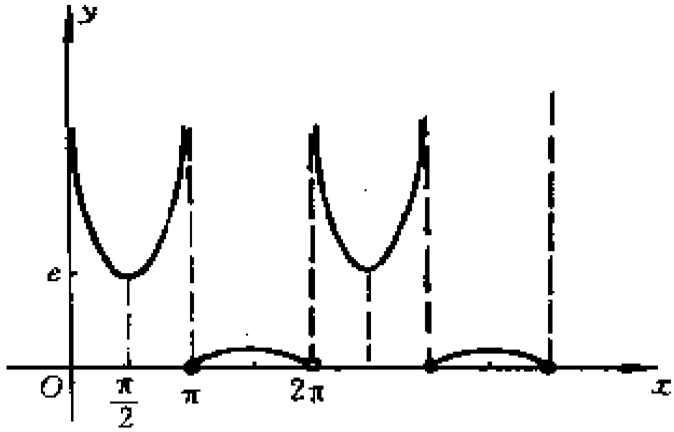


图 1·104

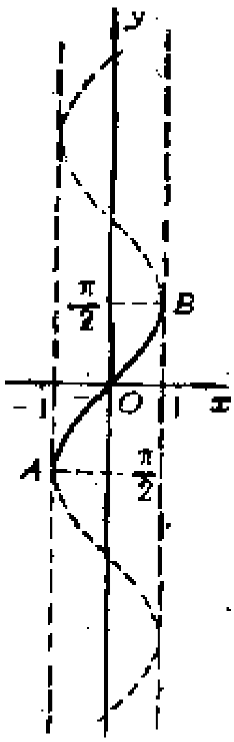


图 1·105

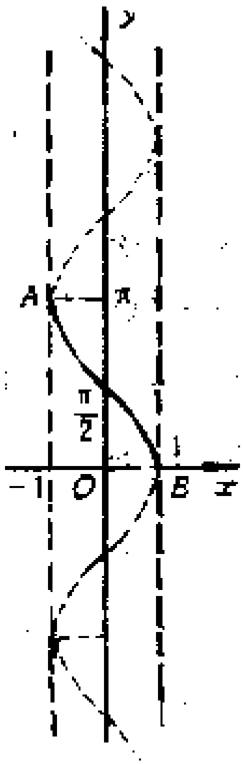


图 1·106

313. $y = \operatorname{arctg} x$.

解 如图 1.107 所示的 AB 段曲线.

314. $y = \operatorname{arcctg} x$.

解 如图 1.108 所示的 AB 段曲线.

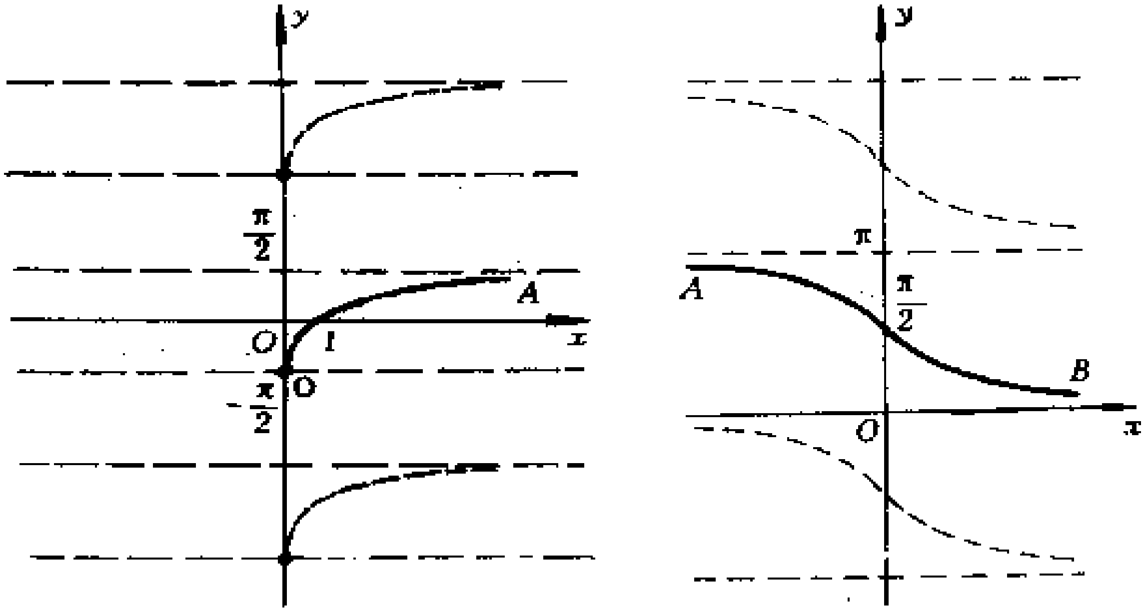


图 1 · 107　　　　图 1 · 108

315. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

解 图形关于原点对称.

存在域是区间$(-\infty, -1)$和$(1, +\infty)$.

当 $1 \leqslant x < +\infty$ 时，由于$\frac{1}{x}$单调减少，所以，y 也是减函数，且有

$$\lim_{x \to 1+0} y = \frac{\pi}{2} = y|_{x=1}, \lim_{x \to +\infty} y = 0.$$

如图 1 · 109 所示.

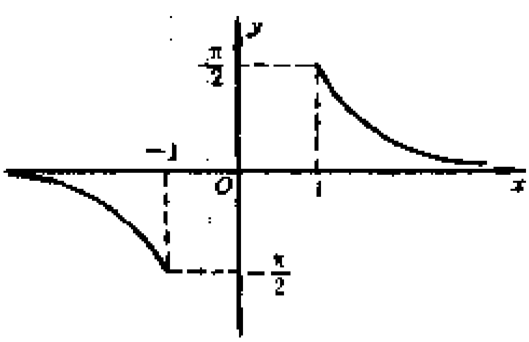


图 1 · 109

316. $y=\arccos\frac{1}{x}$.

解 存在域是区间$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$.

当$1\leqslant x<+\infty$时,由于$\frac{1}{x}$单调减少,所以,y是增函数,且有

$$\lim_{x\to 1+0}y=0,\quad \lim_{x\to+\infty}y=\frac{\pi}{2}.$$

同理,当$-\infty<x\leqslant-1$时,y单调增加;且有

$$\lim_{x\to-1-0}y=\pi,\quad \lim_{x\to-\infty}y=\frac{\pi}{2}.$$

如图1·110所示.

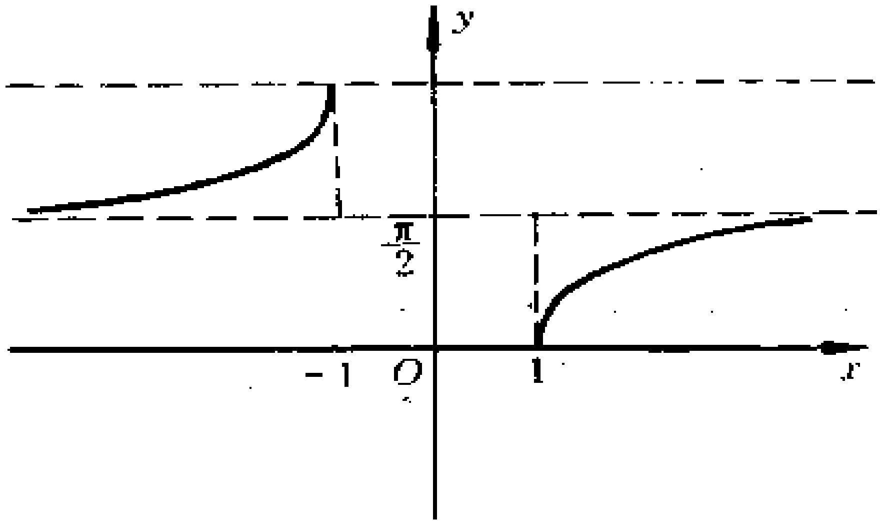


图 1·110

317. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

解 图形关于原点对称.

当$x>0$时,由于$\frac{1}{x}$单调减少,所以,y是减函数,且有

$$\lim_{x\to+0}y=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}y=0.$$

如图1·111所示.

318. $y=\arcsin(\sin x)$.

解 $\sin y=\sin x,-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

因此，当 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y=x$；

当$\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$时，$y=\pi-x$；

当$\dfrac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{2}$时，$y=x-2\pi$.

一般地，

当 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$y=x-2k\pi$；

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

而当$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$时，$y=(\pi-x)+2k\pi$.

如图 1·112 所示.

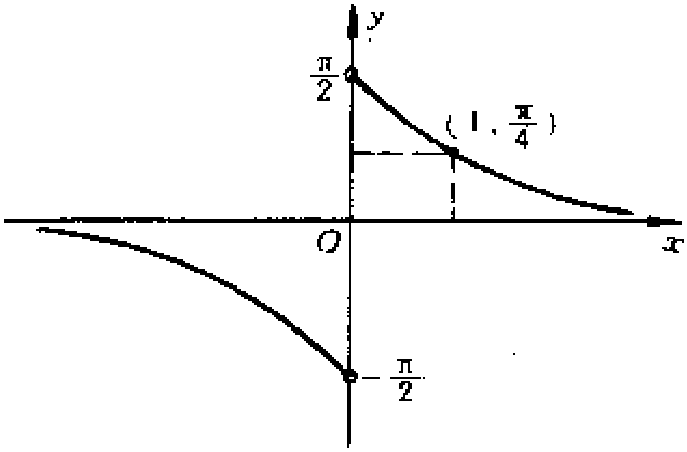


图 1·111

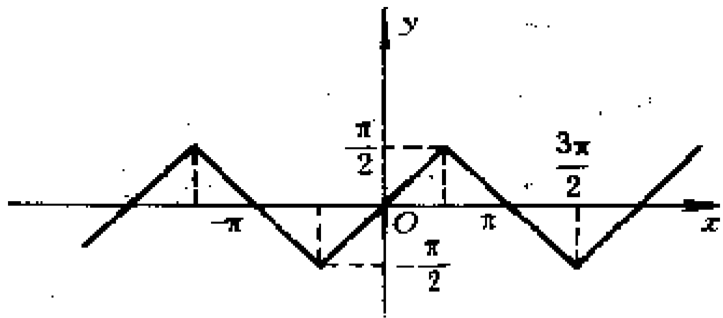


图 1·112

319. $y=\arcsin(\cos x)$.

解 $\sin y=\cos x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

因此,当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时, $y=\frac{\pi}{2}+x$;

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$y=\frac{\pi}{2}-x$.

一般地,

当$(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi$ 时,$y=\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2,\cdots)$;

而当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 时,$y=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$.

如图 1·113 所示.

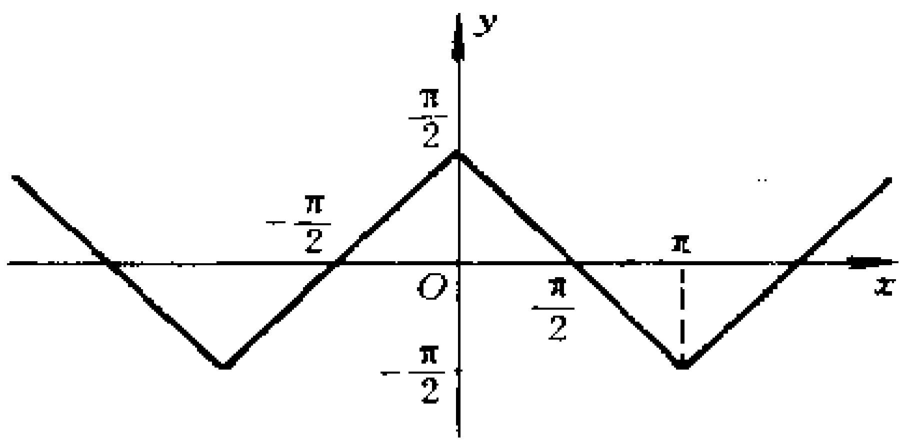


图 1·113

320. $y=\arccos(\cos x)$.

解 $\cos y=\cos x, 0\leqslant y\leqslant\pi$.

因此,当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$y=x$;

当 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时,$y=2\pi-x$;

当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时,$y=-x$.

一般地，

当$(2k-1)\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi$时，$y=-x+2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$；

而当$2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$时，$y=x-2k\pi$.

如图1·114所示.

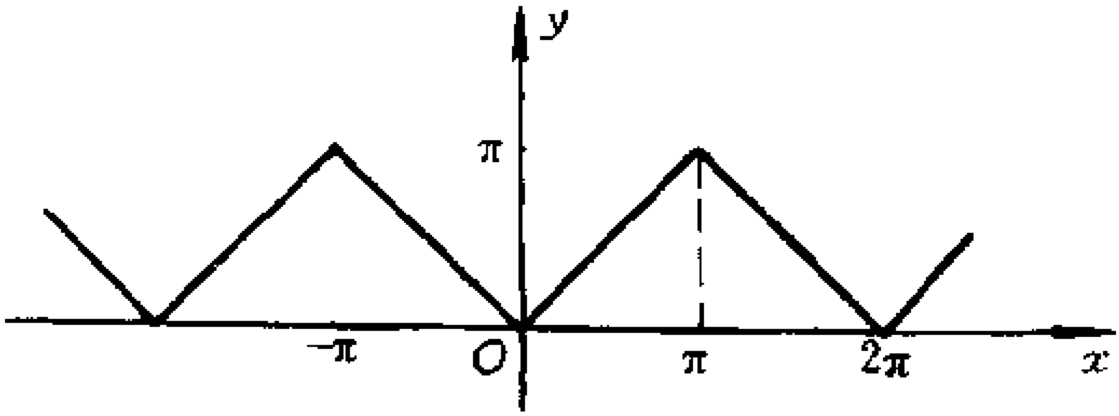


图 1·114

321. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$.

解 $\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}x$，$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

因此，当$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$时，$y=x$；

当$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$时，$y=x-\pi$；

当$-\frac{3\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{2}$时，$y=\pi+x$.

一般地，

当$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$时，$y=x-k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

如图1·115所示.

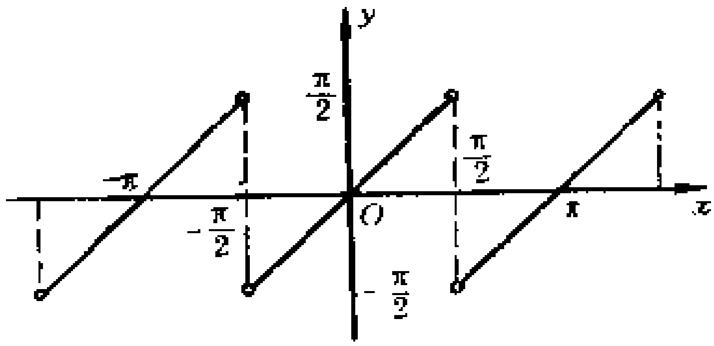


图 1·115

322. $y=\arcsin(2\sin x)$.

解 $\sin y=2\sin x,\ -\frac{2}{\pi}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

存在域为区间：

$$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right],\left[\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right],\cdots$$

的全体. 即$\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right](k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

的全体.

利用复合函数作图法得其图形，如图 1.116 所示，它关于原点对称.

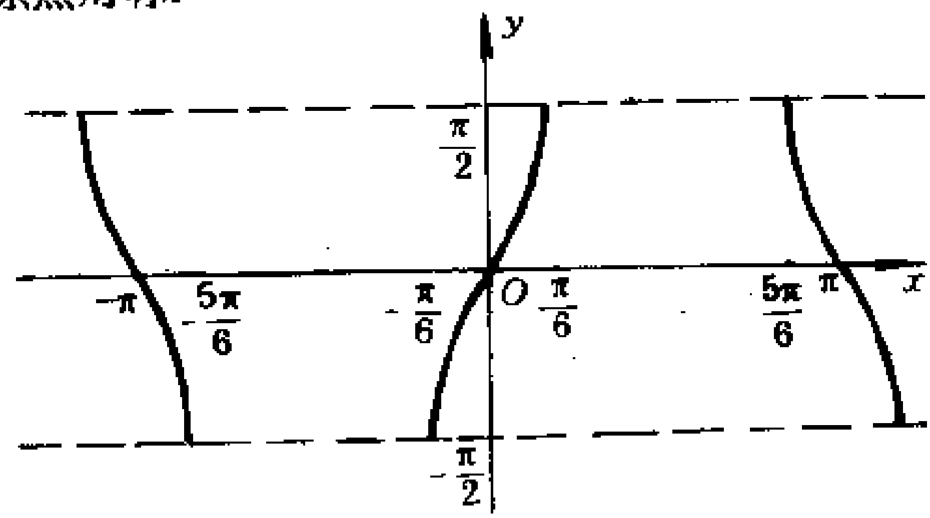


图 1·116

323. 设

(а) $y_1 = 1 - \frac{x}{2}$;　(б) $y_1 = \frac{2x}{1+x^2}$;

(в) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$;　(г) $y_1 = e^x$.

作函数

$$y = \arcsin y_1$$

的图形.

解　(a) 存在域为满足不等式

$$0 \leqslant x \leqslant 4$$

的数 x 的集合. 当 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时, y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0; 而当 $2 \leqslant x \leqslant 4$ 时, y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$. 如图 1·117 所示.

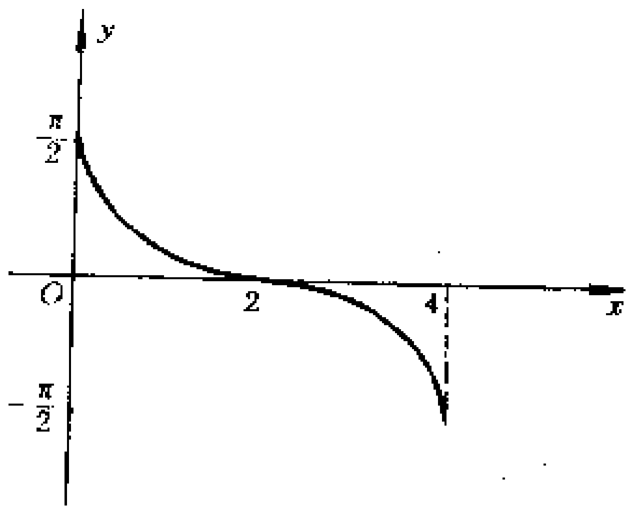


图　1·117

(б) 图形关于原点对称. 存在域为全体实数. 当 x 由 0 增到 1 时, 由于 $\frac{2x}{1+x^2}$ 为增函数, 故 y 由 0 增到的 $\frac{\pi}{2}$. 而当

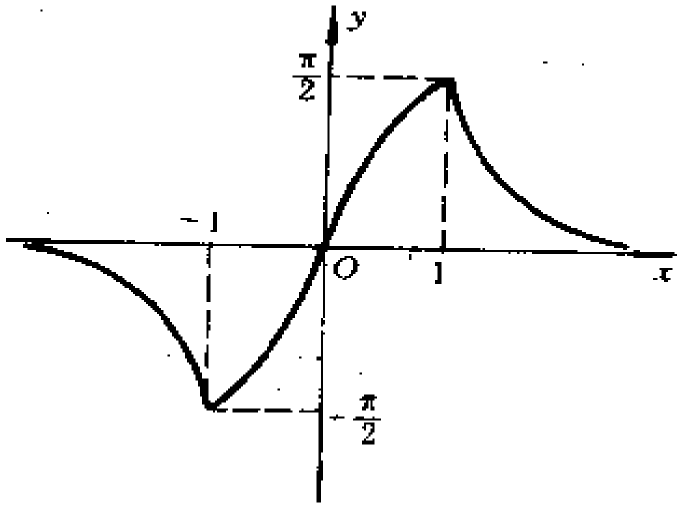


图　1·118

$x > 1$ 时, $\frac{2x}{1+x^2}$ 为减函数, 故 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} y$

$= 0$. 如图 1·118 所示.

(в) 要 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \leqslant 1$，只要 $x \geqslant 0$，故存在域为 $x \geqslant 0$ 的数 x 的集合. 当 x 由 0 增到 1 时，$\frac{1-x}{1+x}$ 由 1 减少到 0，而 y 则由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0；而当 x 由 1 增到 $+\infty$ 时，$\frac{1-x}{1+x}$ 由 0 减少到 -1，而 y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \frac{\pi}{2}$，如图 1·119 所示.

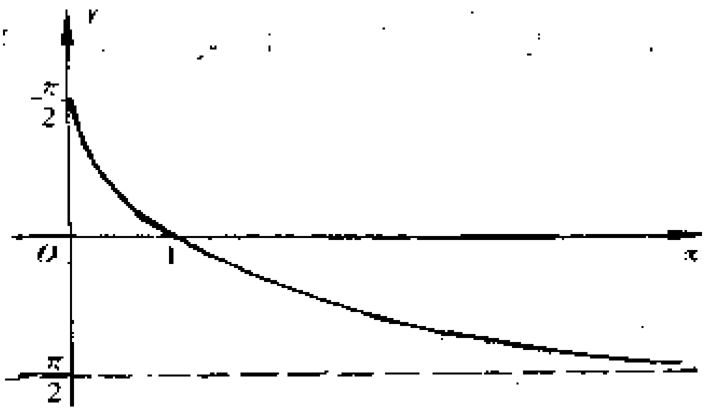


图 1·119

(г) 存在域为 $-\infty < x \leqslant 0$ 的数 x 的集合. 当 x 由 $-\infty$ 增到 0 时，e^x 由 0 增到 1，而 y 则由 0 增到 $\frac{\pi}{2}$. 如图 1·120 所示.

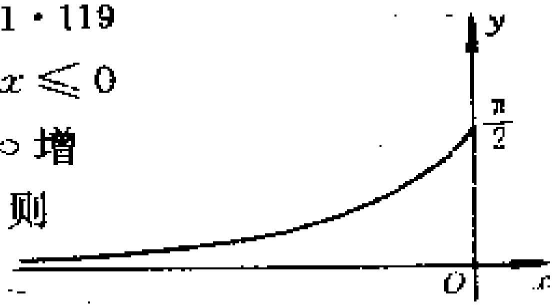


图 1·120

324. 设

(a) $y_1 = x^2$；(б) $y_1 = \frac{1}{x^2}$；

(в) $y_1 = \ln x$；(г) $y_1 = \dfrac{1}{\sin x}$.

作函数

$$y = \operatorname{arctg} y_1$$

的图形.

解 (а) 如图 1·121 所示的 AB 曲线.

(б) 如图 1·122 所示.

(в) 如图 1·123 所示的 OA 曲线.

(г) 以 2π 为周期. 当 x 由 0 增到 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{1}{\sin x}$ 由 $+\infty$ 减到 1，而 y 则由 $\dfrac{\pi}{2}$ 减到 $\dfrac{\pi}{4}$. 余类推，如图 1·124 所示.

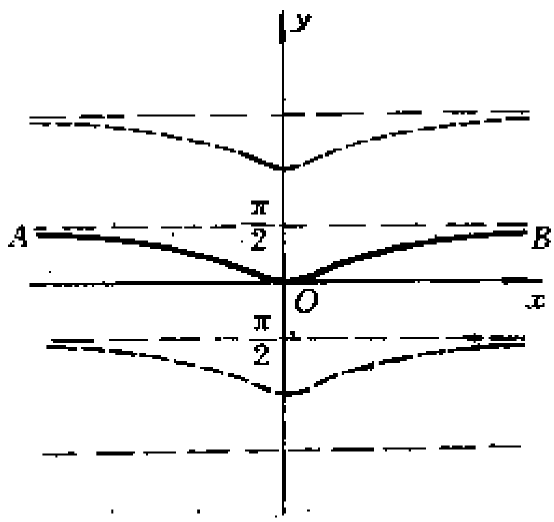


图 1·121

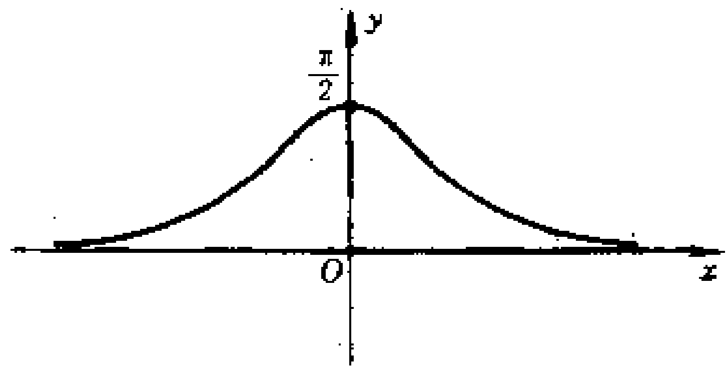


图 1·122

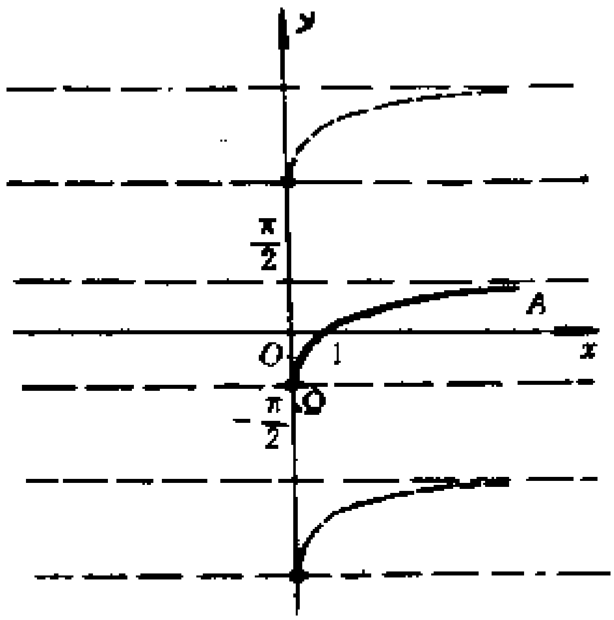


图　1·123

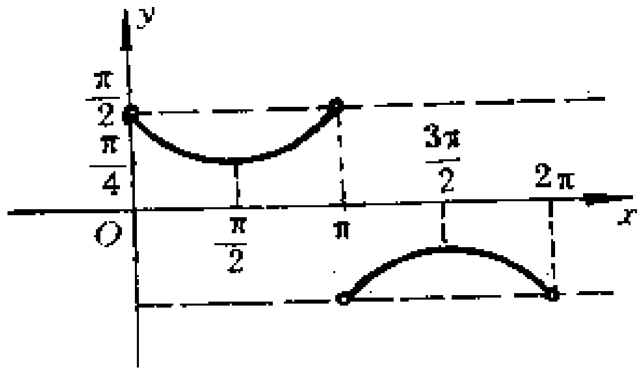


图　1·124

325. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作下列各函数的图形

(a) $y=-f(x)$;

(б) $y=f(-x)$;

(в) $y=-f(-x)$.

解　(a) 函数 $y=-f(x)$ 的图形和函数 $y=f(x)$ 的图形关于 Ox 轴对称．如图 1·125 所示．

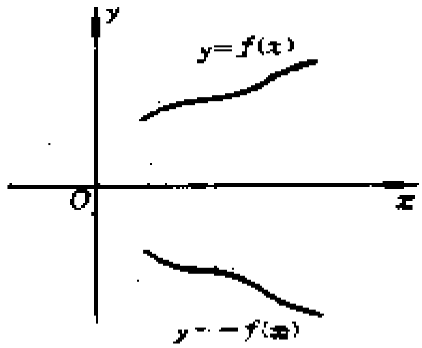


图　1·125

(б) 函数 $y=f(-x)$ 的图形和函数 $y=f(x)$ 的图形关于 Oy 轴对称．如图 1·126 所示．

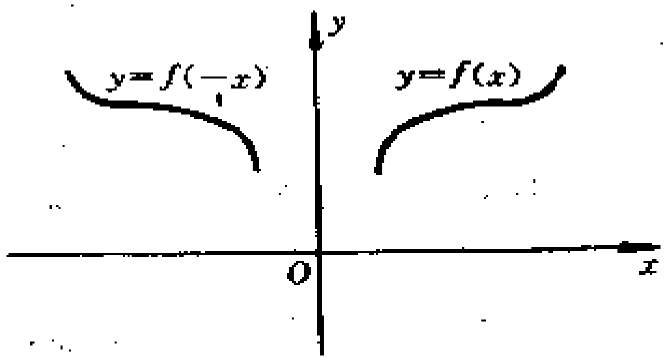


图　1·126

(в) 函数 $y=-f(-x)$ 的图形和函数 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称. 如图 1·127 所示.

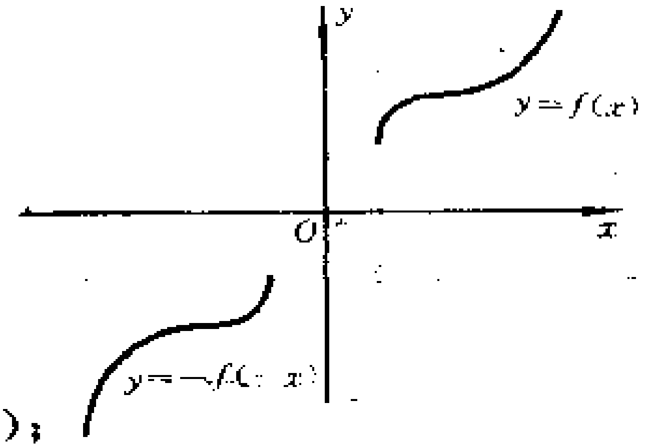


图 1·127

326. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作下列各函数的图形：

(а) $y=f(x-x_0)$；

(б) $y=y_0+f(x-x_0)$；

(в) $y=f(2x)$；

(г) $y=f(kx+b)$ $(k\neq 0)$

解 (а) 函数 $y=f(x-x_0)$ 的图形可由 $y=f(x)$ 的图形平移距离 $|x_0|$ 得出.

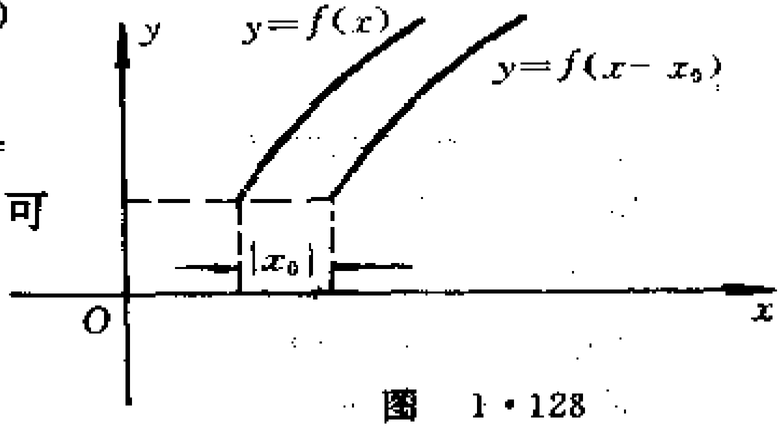


图 1·128

当 $x_0>0$ 时，向右平移；

当 $x_0<0$ 时，向左平移.

如图 1·128 所示.

(б) 函数 $y=y_0+f(x-x_0)$ 的图形可由 $y=f(x)$ 的图形先平移距离 $|x_0|$，再上下平移距离 $|y_0|$ 得出，其中

当 $y_0>0$ 时，向上平移；

当 $y_0<0$ 时，向下平移.

事实上，只要先将坐标原点平移到点 (x_0, y_0). 坐标轴的

方向均不变，再在新坐标系中作 $y' = f(x')$ 的图形，其中 $y' = y - y_0, x' = x - x_0$.

图形如图 1・129 所示.

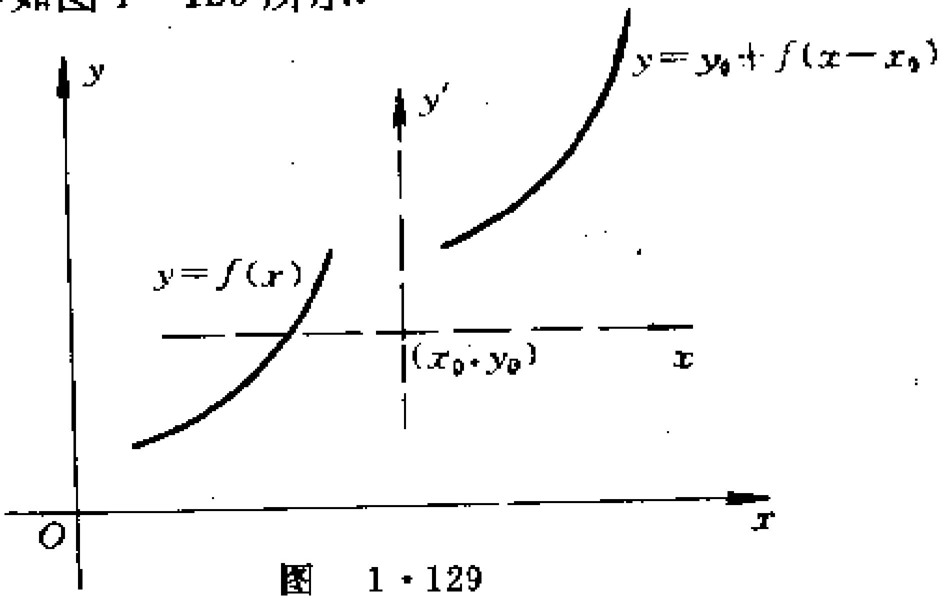


图 1・129

(в) $y = f(2x)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形沿 Ox 轴方向缩小二倍得出.

图形如图 1・130 所示.

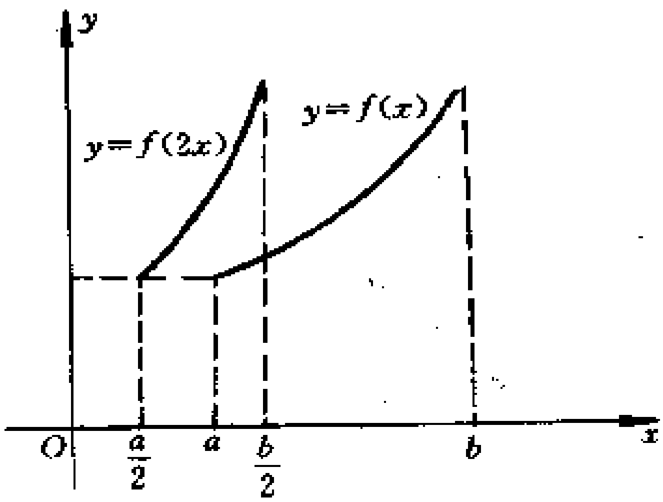


图 1・130

(г) $y = f(kx + b)$

的图形可由 $y=f(x)$ 的图形先沿 Ox 轴方向"压缩"k 倍($0<k<1$ 时,理解为"放大").然后再将所得图形平移距离 $|b|$.

图形如图 1.131 所示.

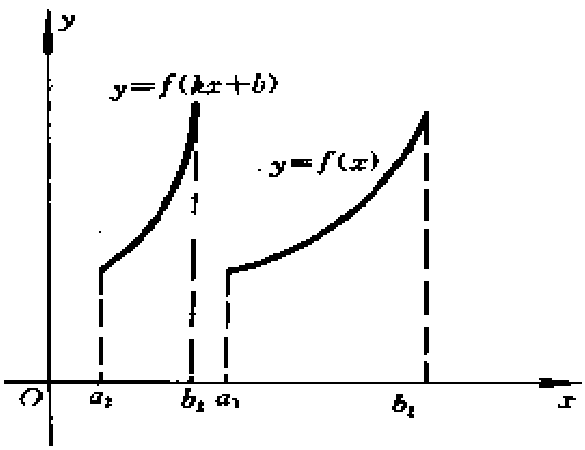


图 1·131

327. 作函数的图形

(а)$y=2+\sqrt{1-x}$;(б)$y=1-e^{-x}$;

(в)$y=\ln(1+x)$.(г)$y=-\dfrac{\pi}{2}\arcsin(1+x)$;

(д)$y=3+2\cos 3x$.

解 (а) 如图 1·132 所示.

(б) 如图 1·133 所示.

(в) 如图 1·134 所示.

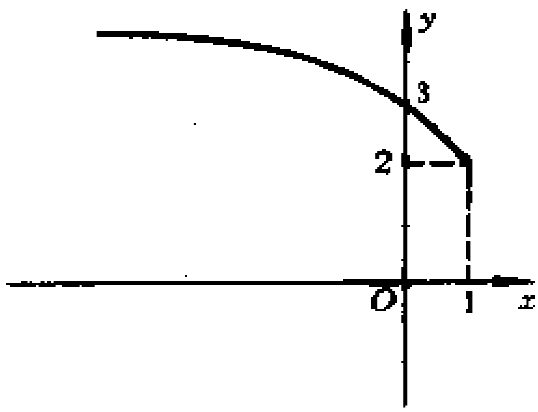


图 1·132

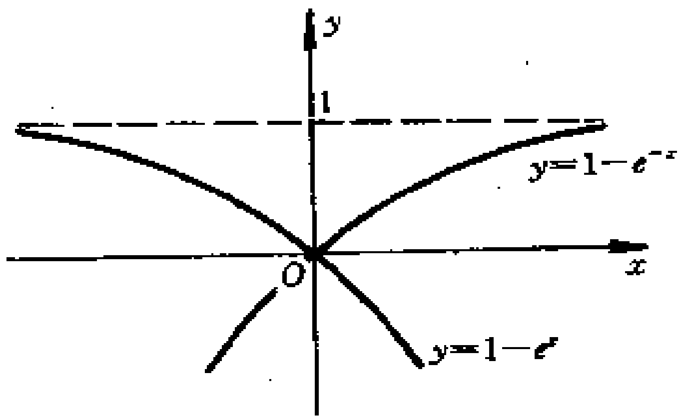


图 1·133

(г) 如图 1·135 所示的 AB 曲线.

(д) 如图 1·136 所示.

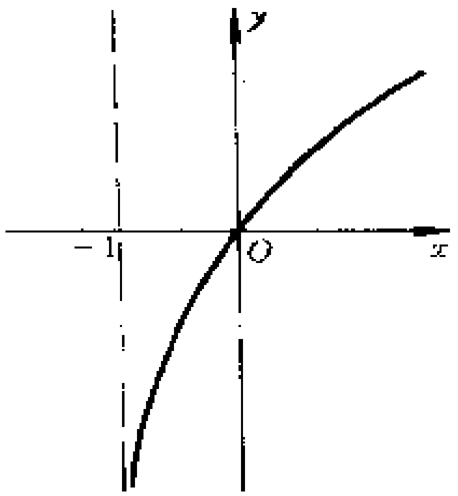


图 1·134

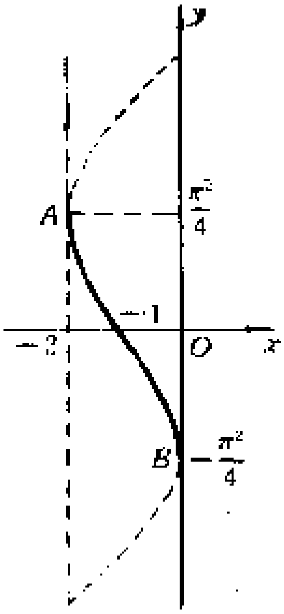


图 1·135

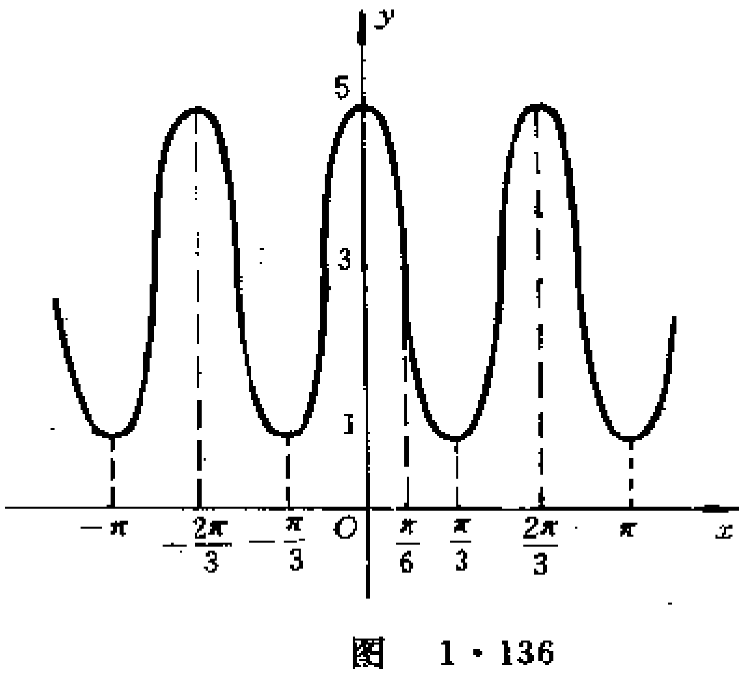


图 1·136

328. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作下列函数的图形：

(а) $y=|f(x)|$；(б) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$；

(в)$y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$.

解 (a) 当 $f(x)\geqslant 0$ 时，$y=f(x)$；

当 $f(x)<0$ 时，$y=-f(x)$；

如图 1·137 黑粗线所示.

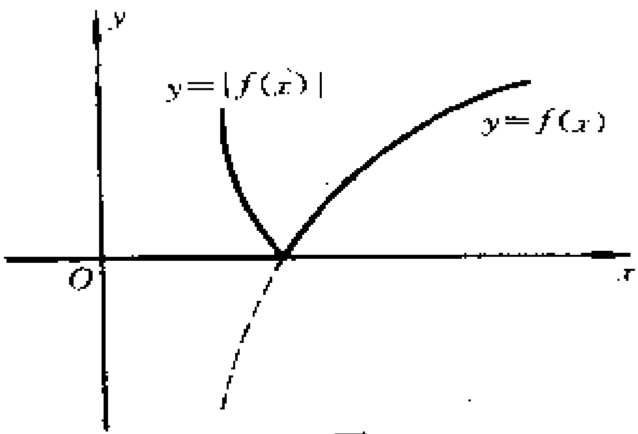


图 1·137

(б) 当 $f(x)\geqslant 0$ 时，$y=f(x)$；

当 $f(x)<0$ 时，$y=0$.

如图 1·138 黑粗线所示.

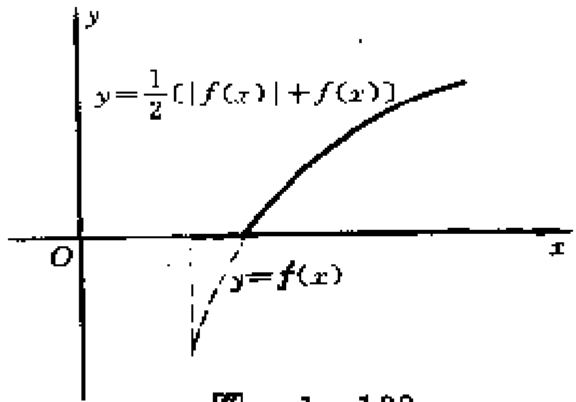


图 1·138

(в) 当 $f(x)\geqslant 0$ 时，$y=0$；

当 $f(x)<0$ 时，$y=-f(x)$.

如图 1·139 黑粗线所示.

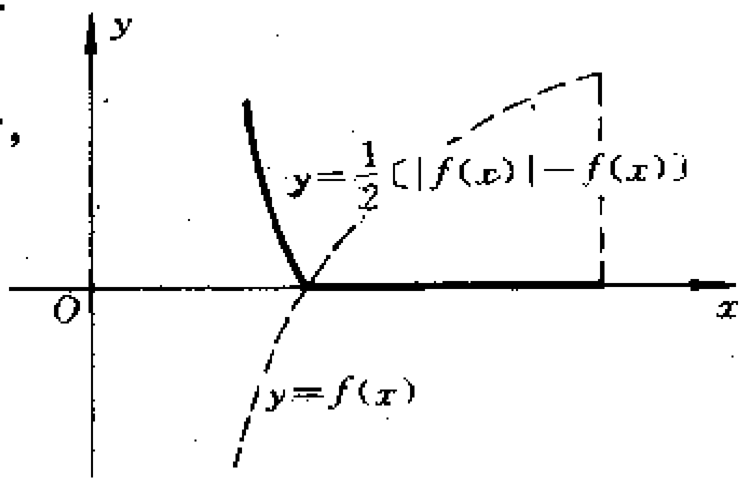


图 1·139

329. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作下列函数的图形：

(a)$y=f^2(x)$；(б)$y=\sqrt{f(x)}$；

(в)$y=\ln f(x)$；(г)$y=f[f(x)]$；

(д)$y = \operatorname{sng} f(x)$; (е)$y = [f(x)]$.

解 (а) 以 $y = 1$ 为图形的分界线.

如图 1·140 所示. 1：$y = f(x)$；2：$y = f^2(x)$.

(б) 当 $f(x) > 1$ 时，$\sqrt{f(x)} < f(x)$；而当 $0 \leqslant f(x) < 1$ 时，$\sqrt{f(x)} \geqslant f(x)$.

如图 1·141 所示. 1：$y = f(x)$；2：$y = \sqrt{f(x)}$.

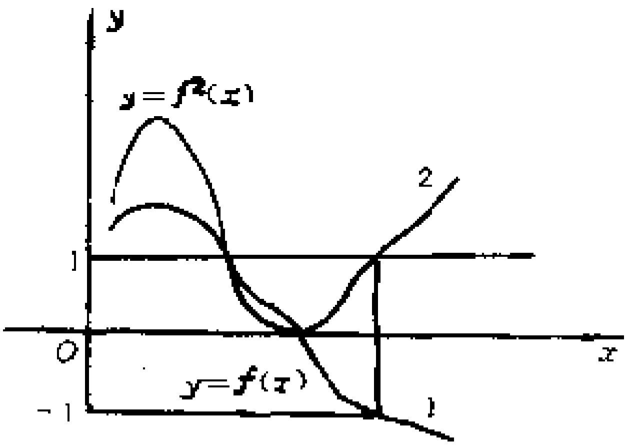


图 1·140

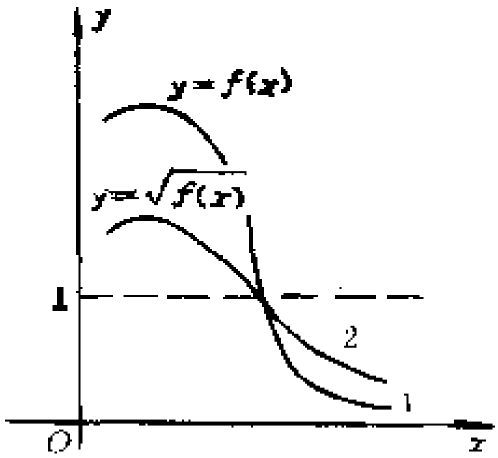


图 1·141

(в) 当 $f(x) \geqslant 1$ 时，$\ln f(x) < f(x)$；而当 $0 < f(x) < 1$ 时，$\ln f(x) < f(x)$，故 $y = \ln f(x)$ 的图形始终在 $y = f(x)$ 之下.

如图 1·142 所示.

(г) 若 $f(x)$ 的存在域为 $[a, b]$，则仅当 $f(x)$ 之值在 a 与 b 之间，才能使 $f[f(x)]$ 有意义. 其详细作图法见 330 题(в).

如图 1·143 所示. 1：$y = f(x)$；2：$y = f[f(x)]$.

(д) 当 $f(x) > 0$ 时，$y = 1$；当 $f(x) = 0$ 时. $y = 0$；当 $f(x) < 0$ 时，$y = -1$.

如图 1·144 所示.

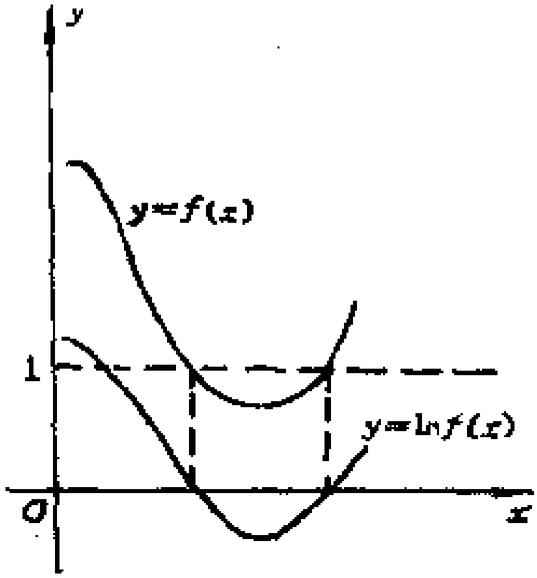


图 1·142

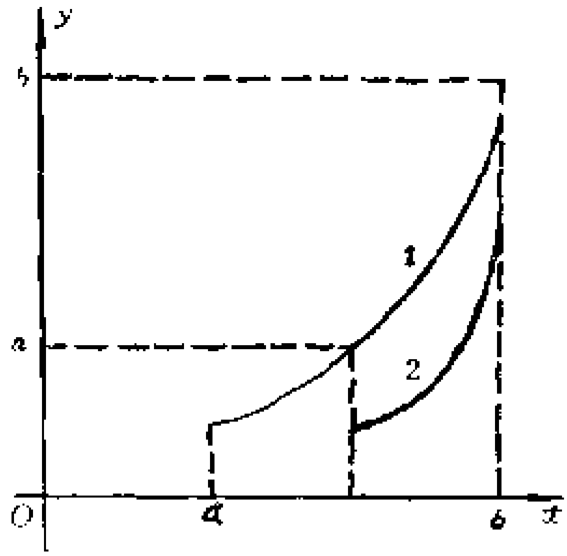


图 1·143

(e) 当 $n \leqslant f(x) < n+1$ 时，$y=n$（n 为自然数）。如图 1·145 所示.

其中图 1·144 及 1.145 均为黑粗线所示的图形.

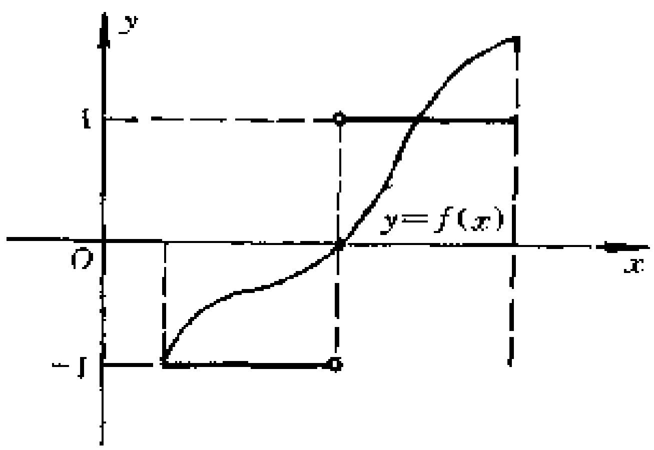


图 1·144

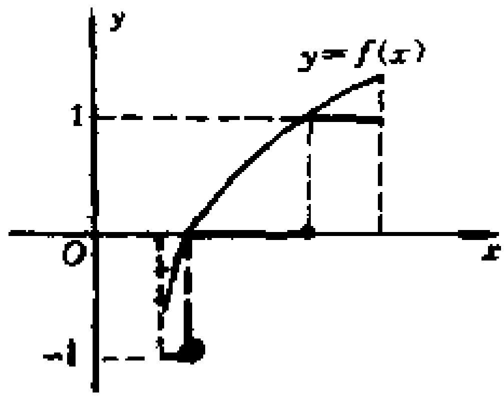


图 1·145

330. 已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图形，作下列函数的图形：

(a) $y=f(x)+g(x)$；(б) $y=f(x)g(x)$；

(в) $y=f[g(x)]$.

解 (a)利用图形相加法即得.如图 1.146 所示.

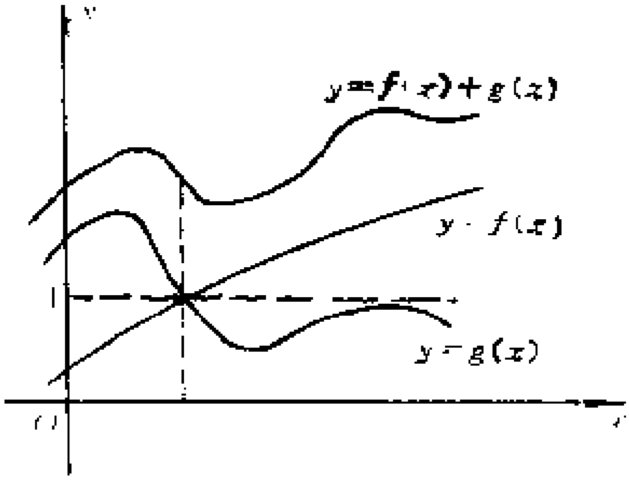


图 1.146

(б)利用图形相乘法即得.

如图 1.147 所示.

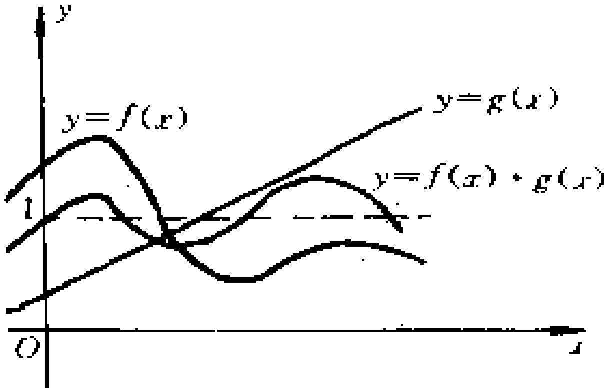


图 1.147

(в)如图 1.148 所示.设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点.通过 P 点引铅直线.它和 $y=g(x)$的图形相交得 Q 点(当然假定值 PQ 在 $f(x)$的存在域内).$PQ=g(x)$.过 Q 点引水平线,它与 $y=x$ 交于 R 点,过 R 作铅直线与 Ox 轴及 $y=f(x)$分别交于 T 点及 S 点,则 $OT=TR=PQ=g(x)$,因而 $TS=f[g(x)]$.最后,把 S 点向通过 P 点的铅直线投影得 M 点,此即函数 $y=f[g(x)]$图形上的一点.至于该图形上的其它点,同法求得.但要注意,函数 $y=f[g(x)]$的存在域是满足不等式

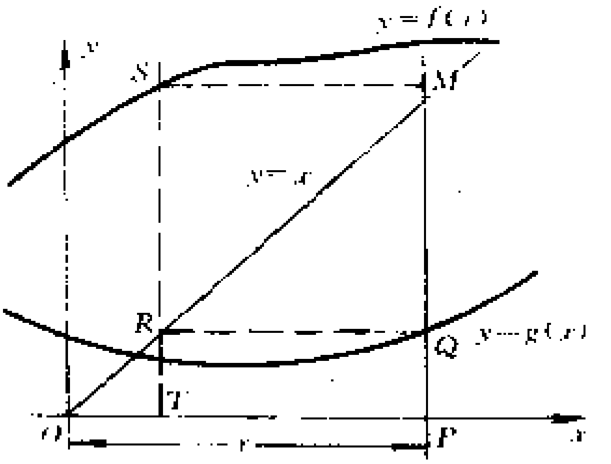


图 1.148

$$a \leqslant g(x) \leqslant b$$

的数 x 的集合，式中 $[a,b]$ 是 $f(x)$ 的存在域.

利用图形的相加法，作下列函数的图形：

331. $y=1+x+e^x$.

解 如图 1.149 所示.

332. $y=(x+1)^{-2}+(x-1)^{-2}$

解 图形关于 Oy 轴对称.

如图 1.150 所示.

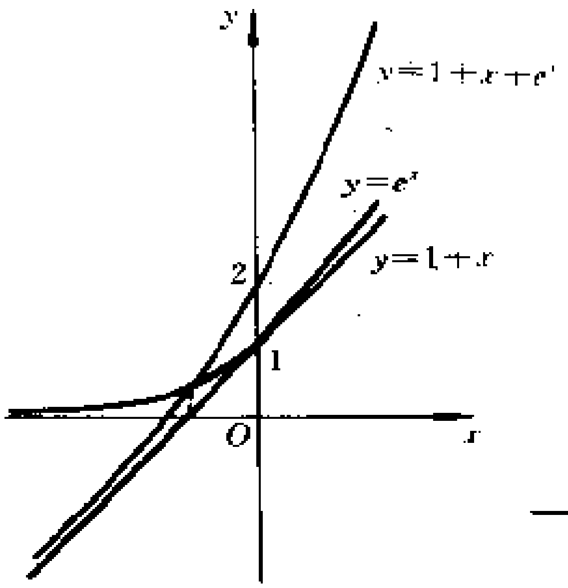


图 1.149

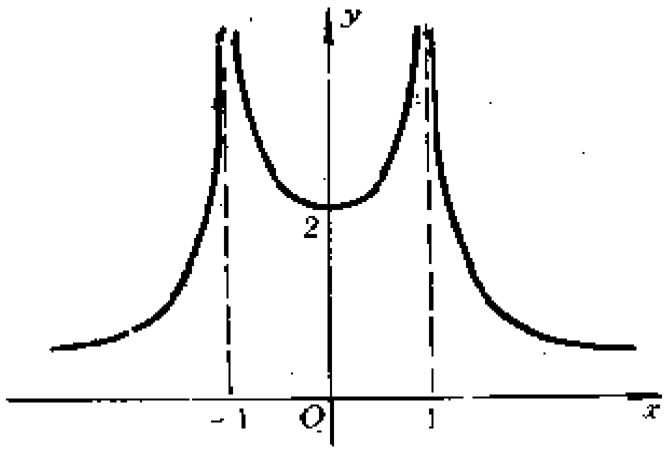


图 1.150

333. $y=x+\sin x$.

解 如图 1.151 所示.

$$P_1Q_1=P_2Q_2=\cdots=1.$$

334. $y=x+\operatorname{arctg} x$.

解 如图 1.152 所示，图中仅画了主值的一支，一般地，在平行线 $y=x+(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ 及 $y=x+(2k-1)\dfrac{\pi}{2}$ 之间 $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$，有类似的一支.

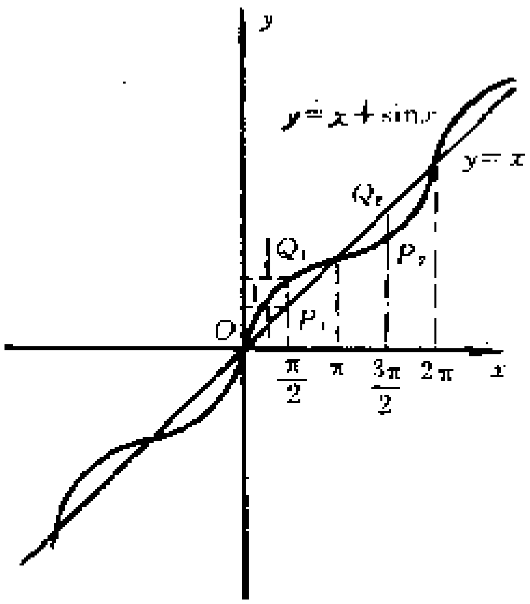


图 1.151

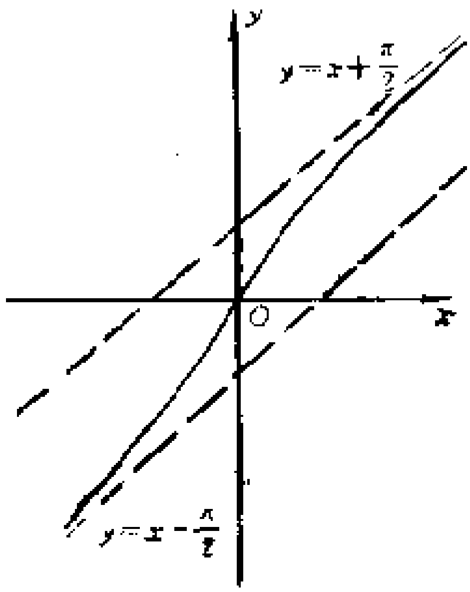


图 1.152

335. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称，且关于直线 $x=k\pi$ 对称．周期为 2π．如图 1.153 所示．

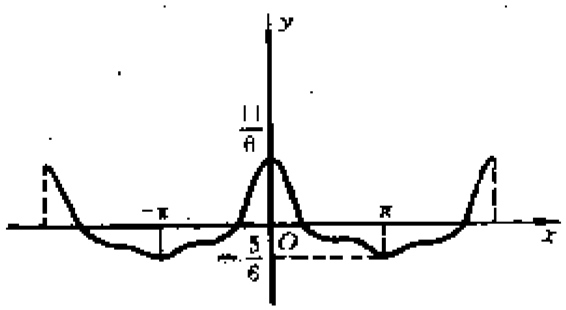


图 1.153

336. $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$.

解 图形关于原点对称，周期为 2π，且有 $f(x+\pi)=-f(x)$，故在 $[0,2\pi]$ 内图形关于直线 $x=\pi$ 反对称*．因此，我们只需做出 $[0,\pi]$ 内的图形即可．

如图 1.154 所示.

*）即关于点 π 对称，也称之为以 π 为周期的反周期函数.

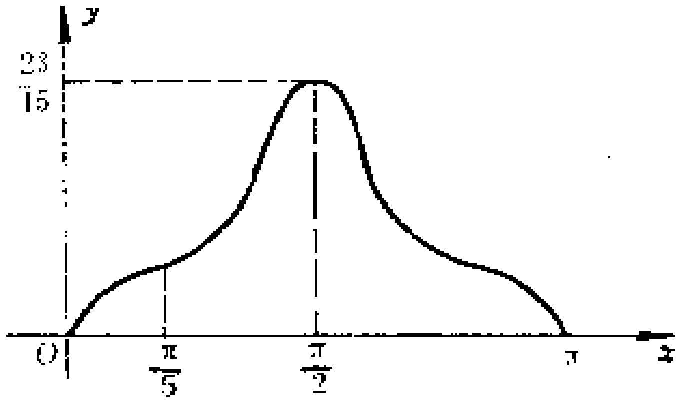


图 1.154

337. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 周期为 $\frac{\pi}{2}$.

如图 1.155 所示.

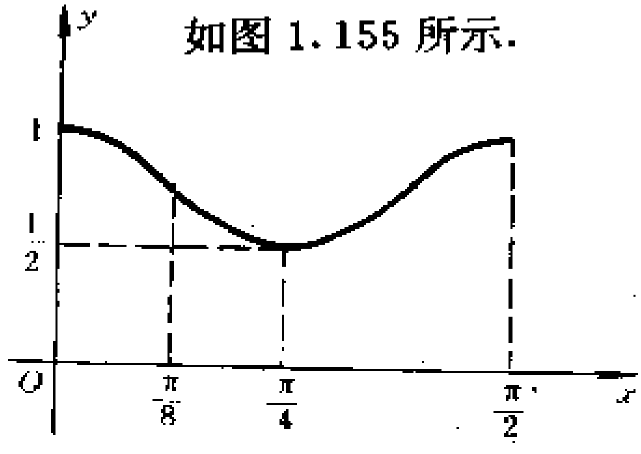


图 1.155

338. $y=|1-x|+|1+x|$.

解 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=2$；

当 $x<-1$ 时，$y=-2x$；

当 $x>1$ 时，$y=2x$.

如图 1.156 所示.

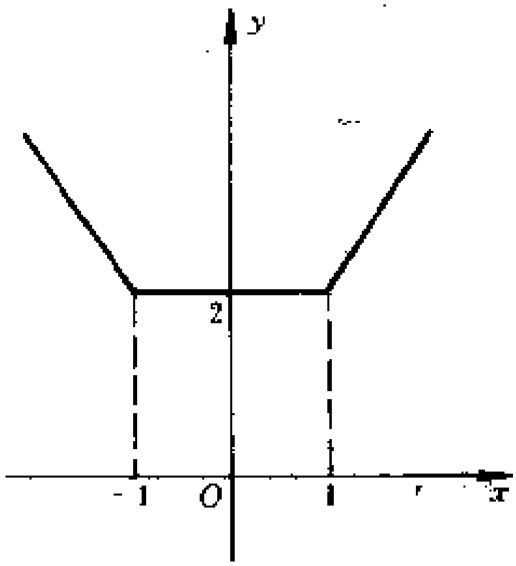


图 1.156

339. $y=|1-x|-|1+x|$.

解 当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$y=-2x$；

当 $x<-1$ 时，$y=2$；

当 $x>1$ 时，$y=-2$.

如图 1.157 所示.

340. 作双曲线函数的图形：

(а) $y=\mathrm{ch}x$，式中 $\mathrm{ch}x=\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$；

(б) $y=\mathrm{sh}x$；式中 $\mathrm{sh}x=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$；

(в) $y=\mathrm{th}x$；式中 $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$.

解 如图 1.158 所示.

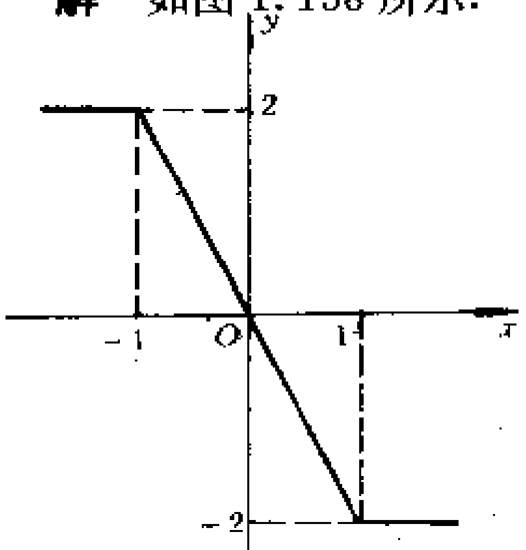


图 1.157

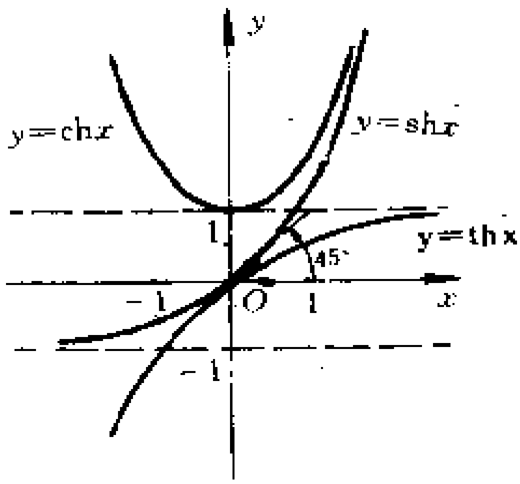


图 1.158

利用图形的相乘法，作下列函数的图形：

341. $y=x\sin x$.

解 当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$.

图形关于 Oy 轴对称.

当 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$y=x$；

又当 $x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时，$y=-x$.

如图 1.159 所示.

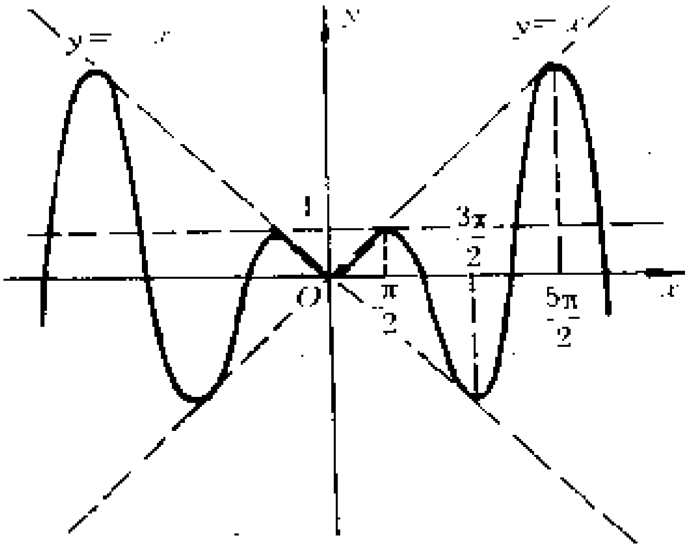


图 1.159

342. $y=x\cos x$.

解 图形关于原点对称.

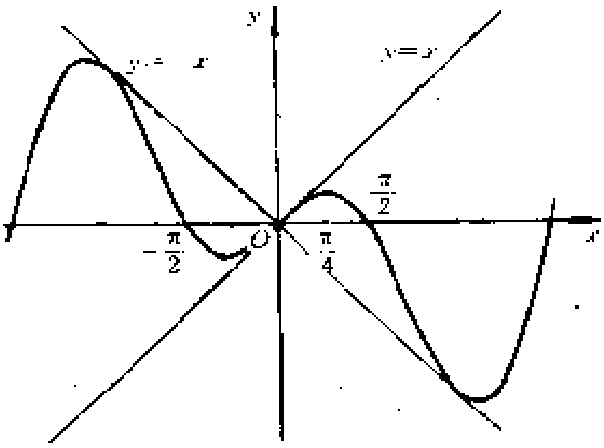


图 1.160

当 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,$y=0$;

当 $x=2k\pi$ 时,$y=x$;当 $x=(2k+1)\pi$ 时, $y=-x$.

如图 1.160 所示.

343. $y=x^2\sin^2x$.

解 只要将图形 $y=x\sin x$ 作出后，再按 329 题(a)的作法画出．如图 1.161 所示．

其实，我们也可由下列几点画出该函数的图形：

$0\leqslant y\leqslant x^2$；

当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$；

当 $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$时，$y=x^2$．

图形关于 Oy 轴对称．

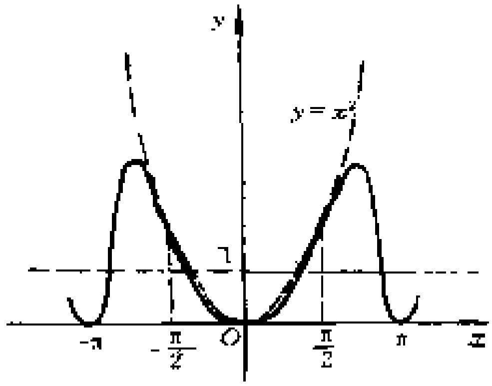


图 1.161

344. $y=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$．

解 图形关于原点对称．

当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$；

当 $x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ 时，$y=-\dfrac{1}{1+x^2}$；

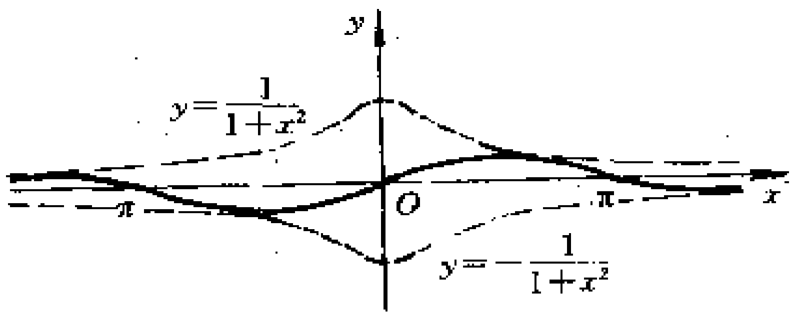


图 1.162

当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$y=\frac{1}{1+x^2}$，

当 $x\to\infty$ 时，$y\to 0$.

如图 1.162 所示.

345. $y=e^{-x^2}\cos 2x$.

解 因 $-e^{-x^2}\leqslant y\leqslant e^{-x^2}$，故图形在图形 $y=e^{-x^2}$ 及 $y=-e^{-x^2}$ 之间.

如图 1.163 所示.

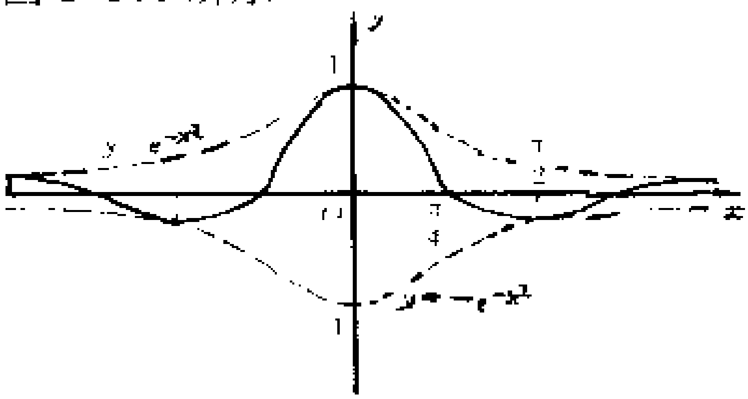


图 1.163

346. $y=x\operatorname{sgn}(\sin x)$.

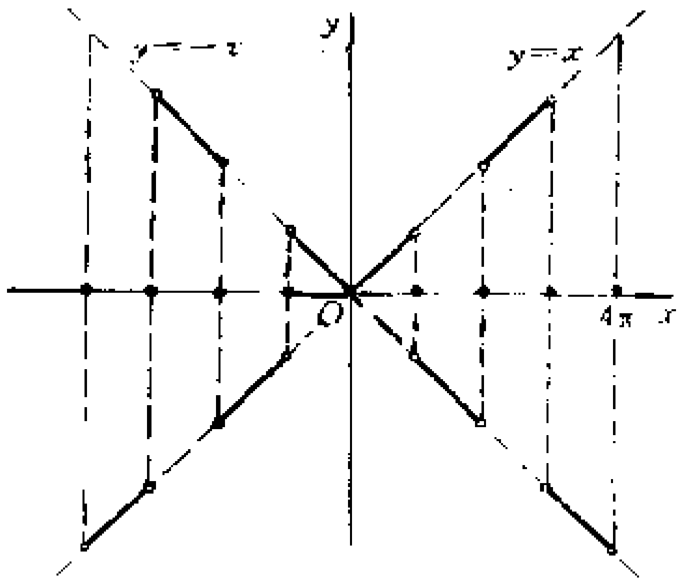


图 1.164

解 图形关于 Oy 轴对称.

当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$；

当 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ 时，$y=x$；

当$(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$ 时，$y=-x$.

如图 1.164 所示.

347. $y=[x]\cdot|\sin\pi x|$.

解 当 $x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$.

当 $n<x<n+1$(n 为自然数)时，$y=n|\sin\pi x|$.

如图 1.165 所示.

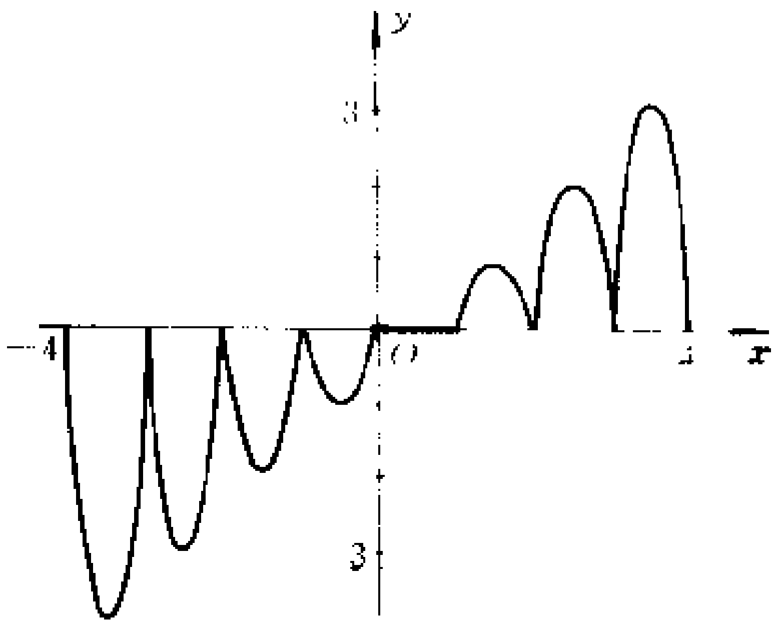


图 1.165

348. $y=\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$.

解 图形关于原点对称. 周期为 π.

当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$；

当 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ 时，$y=\cos x$；

当$(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$ 时，$y=-\cos x$.

如图 1.166 所示.

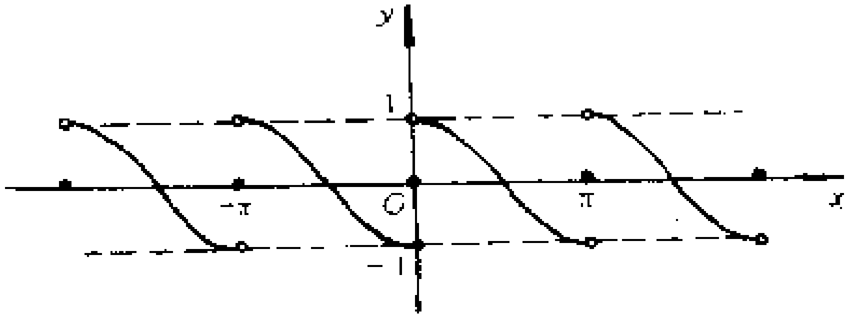


图 1.166

349. 设

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|,若|x|\leqslant 1;\\0,若|x|>1.\end{cases}$$

作函数

$$y=f(x)f(a-x)$$

当 (а) $a=0$，(б) $a=1$，(в) $a=2$ 时的图形.

解 (а) $y=f(x)f(-x)$.

因为 $f(x)$为偶函数，所以，$y=f^2(x)$.

由函数 $f(x)$的定义易得

$$y=\begin{cases}(1+x)^2,若-1\leqslant x<0,\\(1-x)^2,若 0\leqslant x\leqslant 1,\\0,若|x|>1.\end{cases}$$

如图 1.167 所示.

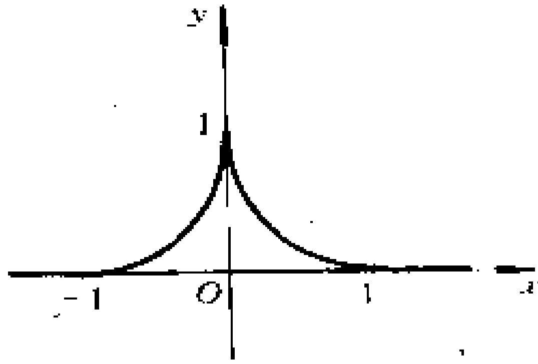


图 1.167

(б) $y=f(x)\cdot f(1-x)$.

由函数 $f(x)$的定义易得

$$y=\begin{cases}0, 若\ x\leqslant 0, \\ x-x^2, 若\ 0<x<1, \\ 0, 若\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

如图 1.168 所示.

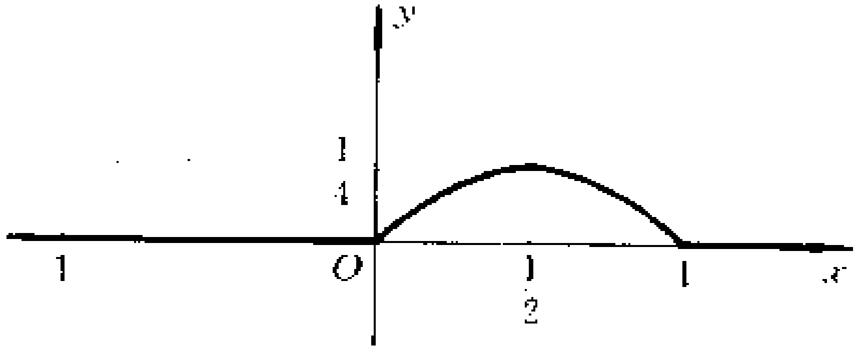


图 1.168

(в) $y=f(x)f(2-x)$.

由函数 $f(x)$ 的定义易得

$$y=0.$$

如图 1.169 所示.

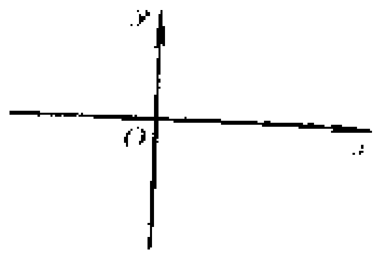


图 1.169

350. 作函数 $y=x+\sqrt{x}\ \mathrm{sgn}\,(\sin\pi x)$ 的图形.

解 当 $2k<x<2k+1\,(k=0,1,2,\cdots)$ 时，

$$\sin\pi x>0,$$

$\mathrm{sgn}(\sin\pi x)=1$,

因而，$y=x+\sqrt{x}$.

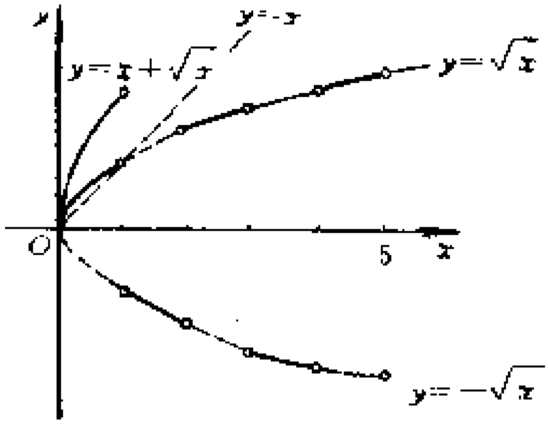


图 1.170

而当 $2k+1<x<2k+2$ 时，

$y=x-\sqrt{x}$.

图 1.170 中系函数

$y=\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$

的图形(黑粗线所示).

其中在 $y=x$ 上的一支系 $y=\sqrt{x}+x$ 的一段.

至于函数

$y=x+\sqrt{x}\cdot\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$的图形如图 1.171 所示.

作函数

$$y=\frac{1}{f(x)}$$

的图形,设:

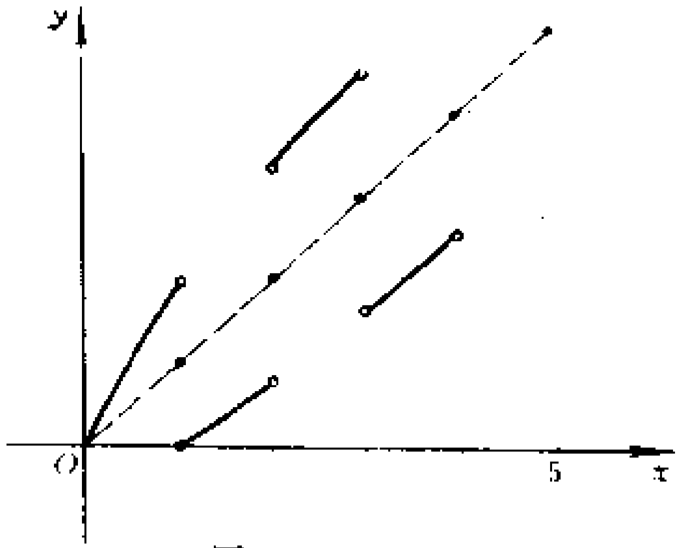


图 1.171

351. $f(x)=x^2(1-x^2)$.

解 $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{1-x^2}$.

利用图形的相加法,将函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$及 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$的图形相加即得.如图 1.172 所示.

352. $f(x)=x(1-x)^2$.

解 $y=\frac{1}{x(1-x)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}$.

当 $x>0$ 时，$y>0$；

当 $x<0$ 时，$y<0$.

利用图形的相加法即得，如图 1.173 所示.

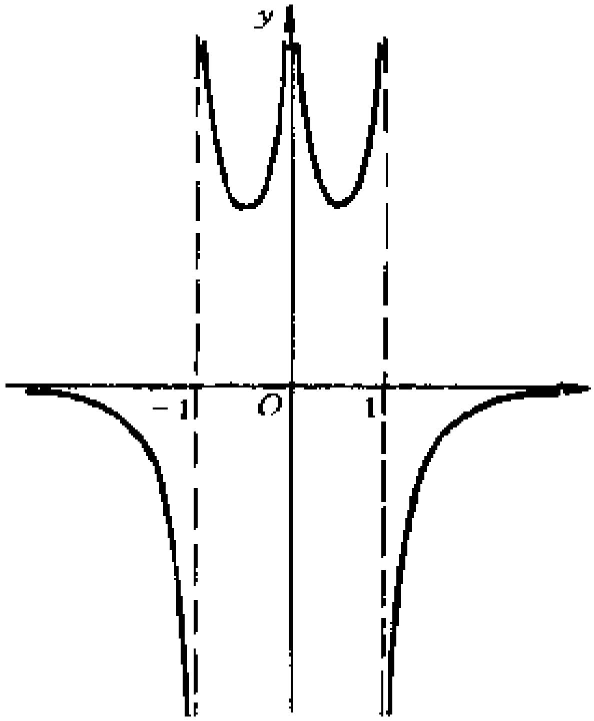


图 1.172

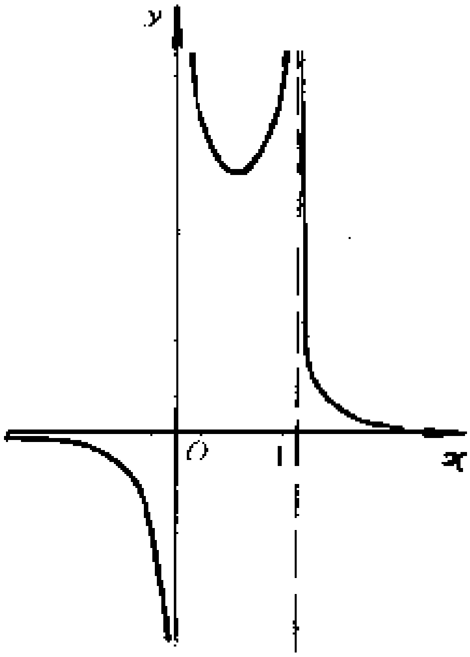


图 1.173

353. $f(x)=\sin^2x$.

解 $y=\frac{1}{\sin^2x}$ 是一周期为 π 的周期函数.

图形关于 Oy 轴对称. 如图 1.174 所示.

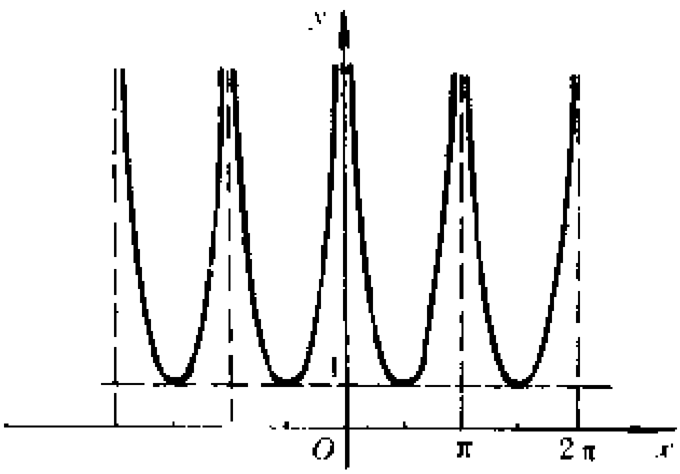


图 1.174

354. $f(x)=\ln x$.

解 $y=\frac{1}{\ln x}$.

当 $0<x<1$ 时，y 由 0 下降到 $-\infty$；

当 $1<x<+\infty$ 时，y 由 $+\infty$ 下降到 0. 如图 1.175 所示.

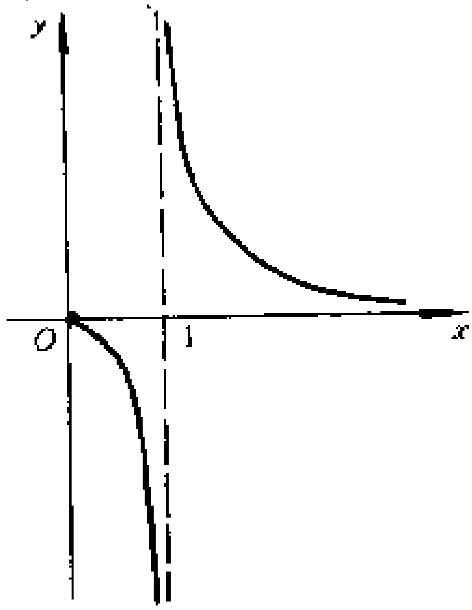


图 1.175

355. $f(x)=e^{x}\sin x$.

解 $y=e^{-x}\csc x$.

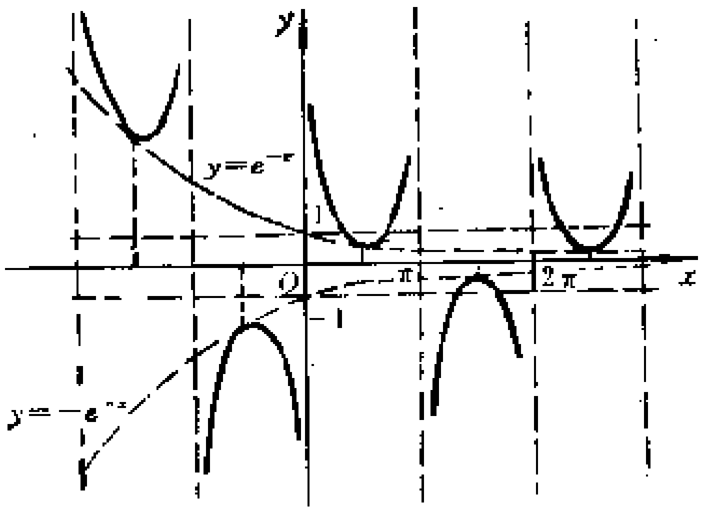


图 1.176

因为 $|\csc x|\geqslant 1$，所以

$$|y|\geqslant e^{-x}.$$

利用图形的相乘法即得. 如图 1.176 所示.

356. 设:

$$f(u)=\begin{cases}-1, 若 -\infty<u<-1;\\ u, 若 -1\leqslant u\leqslant 1;\\ 1, 若 1<u<+\infty.\end{cases}$$

作复合函数

$$y=f(u)$$

的图形, 其中 $u=2\sin x$.

解 如图 1.177 所示.

当 $|x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{6}$ 时,

$y=2\sin x$; 当 $\frac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\frac{5\pi}{6}$, $y=(-1)^k(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

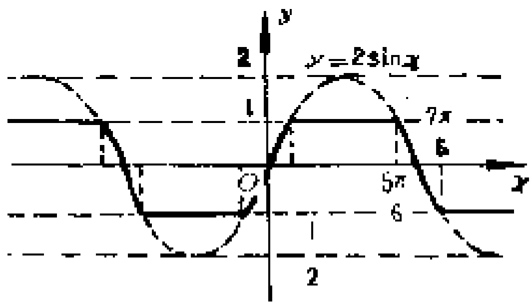


图 1.177

357. 设

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+|x|) 和$$

$$\psi(x)=\begin{cases}x, 若 x<0;\\ x^2, 若 x\geqslant 0.\end{cases}$$

作下列函数的图形:

(a) $y=\varphi[\varphi(x)]$; (б) $y=\varphi[\psi(x)]$;

(в) $y=\psi[\varphi(x)]$; (г) $y=\psi[\psi(x)]$.

解 (a) $\varphi(x)=\begin{cases}x, 若 x\geqslant 0;\\ 0, 若 x<0.\end{cases}$

$\varphi[\varphi(x)]=\varphi(x)$. 如图 1.178 所示.

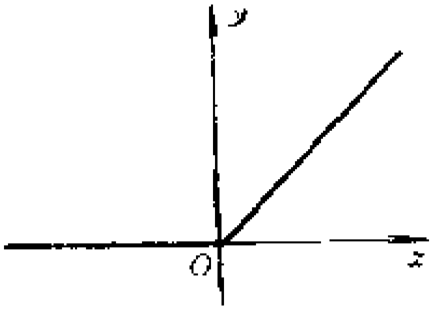


图 1.178

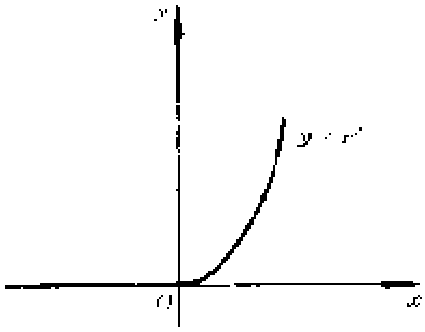


图 1.179

(б)$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}x^2, 若\ x\geqslant 0;\\ 0, 若\ x<0.\end{cases}$

如图 1.179 所示.

(в)$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}x^2, 若\ x\geqslant 0;\\ 0, 若\ x<0.\end{cases}$

如图 1.179 所示.

(г)$\psi[\psi(x)]=\begin{cases}x^4, 若\ x\geqslant 0;\\ x, 若\ x<0.\end{cases}$

如图 1.180 所示.

358. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, 若\ |x|\leqslant 1;\\ 0, 若\ |x|>1.\end{cases}$$

及

$$\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, 若\ |x|\leqslant 2;\\ 2, 若\ |x|>2.\end{cases}$$

作函数:

(а)$y=\varphi[\varphi(x)]$;

(б)$y=\varphi[\psi(x)]$;

(в)$=\psi[(\varphi(x)]$;

(г)$y=\psi[\psi(x)]$的图形.

解 (а)$\varphi[\varphi(x)]=1$.

如图 1.181 所示.

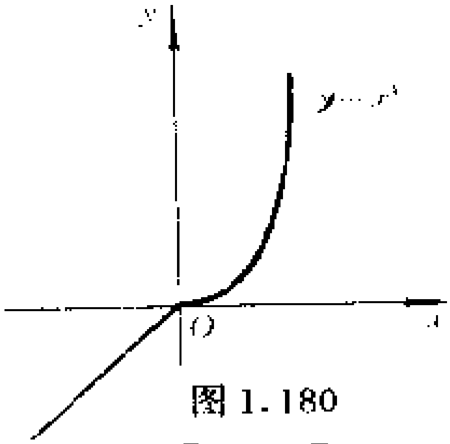


图 1.180

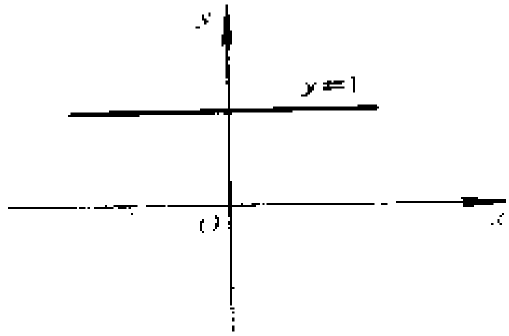


图 1.181

(6) $\varphi[\psi(x)]=\varphi[\psi(-x)]$，故图形关于 Oy 轴对称.

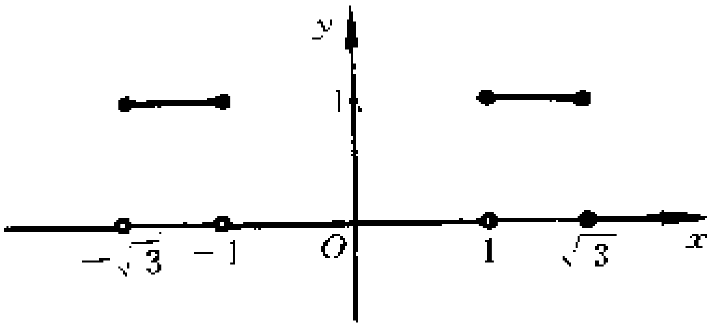


图 1.182

当 $0\leqslant x<1$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于

$$1<2-x^2\leqslant 2,$$

所以，$\varphi[\psi(x)]=0$.

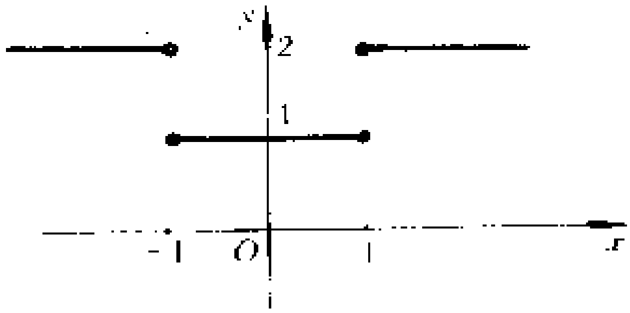


图 1.183

当 $1\leqslant x\leqslant \sqrt{3}$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于

$$-1\leqslant 2-x^2\leqslant 1,$$

所以，$\varphi[\psi(x)]=1$.

当 $\sqrt{3}<x\leqslant 2$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于

$$-2\leqslant 2-x^2<-1,$$

所以，$\varphi[\psi(x)]=0$.

当 $x>2$ 时，$\psi(x)=2$，所以，$\varphi[\psi(x)]=0$. 如图 1.182 所示.

(в) $\varphi[\psi(x)] = \begin{cases} 1, 若 |x| \leqslant 1; \\ 2, 若 |x| > 1. \end{cases}$

如图 1.183 所示.

(г) $\psi[\psi(x)] = \begin{cases} 2-(2-x^2)^2, 若 |x| \leqslant 2; \\ -2, 若 |x| > 2. \end{cases}$

如图 1.184 所示.

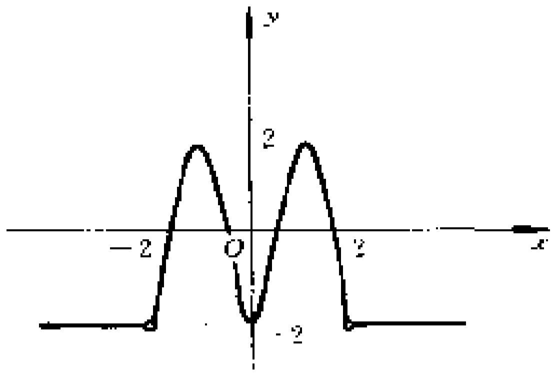


图 1.184

359. 由函数 $f(x)$ 定义于正数域 $x>0$ 内，把 $f(x)$ 延拓到负数域 $x<0$ 内，使所得的函数为：(1)偶函数；(2)奇函数. 设

(а) $f(x)=1-x$；　(б) $f(x)=2x-x^2$；

(в) $f(x)=\sqrt{x}$；　(г) $f(x)=\sin x$；

(д) $f(x)=e^x$；　(е) $f(x)=\ln x$.

作出对应的函数的图形.

解　(а)(1)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=1+x$，则 $f(x)$ 在整个数轴上为偶函数.

(2)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=-(1+x)$，则 $f(x)$ 在整个数轴上为奇函数.

如图 1.185 所示.

(б)(1)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=-2x-x^2$ 即行；

(2)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=2x+x^2$ 即行.

如图 1.186 所示.

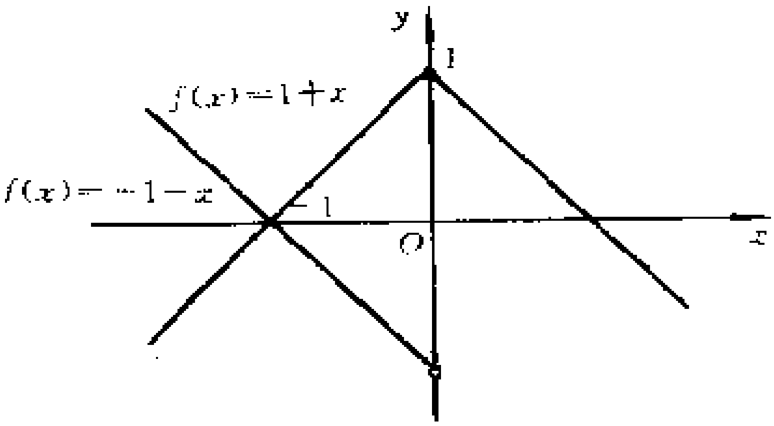


图 1.185

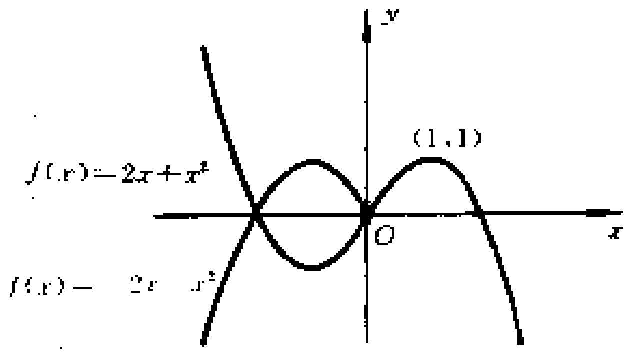


图 1.186

(в)(1)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=\sqrt{-x}$即行；

(2)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=-\sqrt{-x}$即行.

如图 1.187 所示.

(г)(1)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=-\sin x=|\sin x|$即行；

(2)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=\sin x$ 即行.

如图 1.188 所示.

(д)(1)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=e^{-x}$即行；

(2)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=-e^{-x}$即行.

(e)(1)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=\ln(-x)$即行；

(2)当 $x<0$ 时，定义 $f(x)=-\ln(-x)$即行.

如图 1.190 所示.

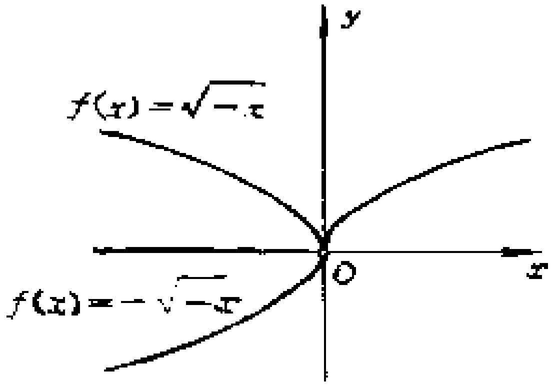


图 1.187

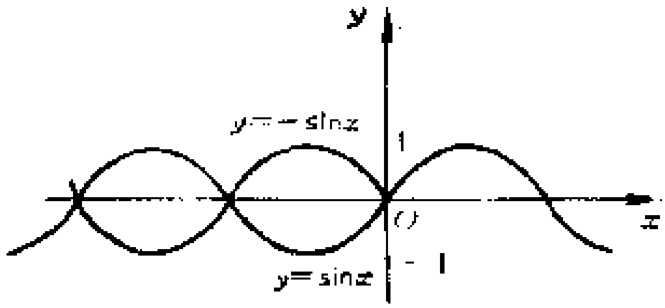


图 1.188

如图 1.189 所示.

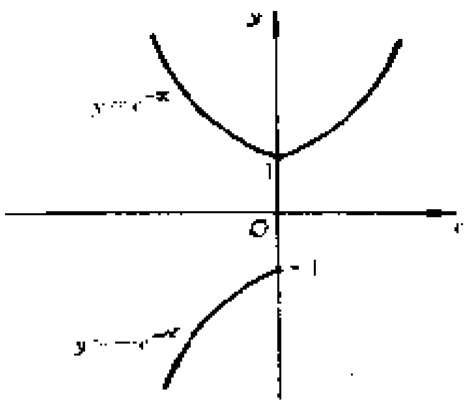


图 1.189

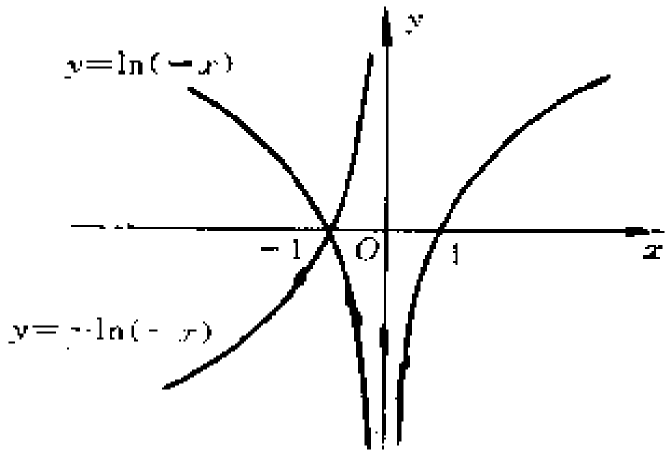


图 1.190

360. 确定下列函数的图形对于什么垂直轴对称：

(a) $y=ax^2+bx+c$；　(б) $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}$；

(в) $y=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}$　$(0<a<b)$；

(г) $y=a+b\cos x$.

解　(a) $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. 它关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称. (б) 显然图形对于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称.

(в)显然图形对于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称.

(г)对于直线 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 对称.

361. 确定下列函数的图形的对称中心：

(а) $y=ax+b$； (б) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$；

(в) $y=ax^3+bx^2+cx+d$；

(г) $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$；

(д) $y=1+\sqrt[3]{x-2}$.

解 (а)显然对称中心为(x_0,ax_0+b)，x_0 任意.

(б)设对称中心为(x_0,y_0)，则对充分大的 x，有 y 使 $y+y_0=\frac{c(x+x_0)+b}{c(x+x_0)+d}$，$-y+y_0=\frac{a(-x+x_0)+b}{c(-x+x_0)+d}$，由此易得 $x_0=-\frac{d}{c}$，$y_0=\frac{a}{c}$.

(в)用类似于(б)的方法，可得对称中心为(x_0,y)，其中 $x_0=-\frac{b}{3a}$，$y_0=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$.

(г)类似于(б)，可得对称中心为(2,0).

(д)类似于(б)，可得对称中心为(2,1).

362. 作周期函数的图形：

(а) $y=|\sin x|$； (б) $y=\operatorname{sgn}\cos x$；

(в) $y=f(x)$，其中 $f(x)=A\frac{x}{l}\left(2-\frac{x}{l}\right)$，假设 $0\leqslant x\leqslant 2l$ 和 $f(x+2l)\equiv f(x)$；

(г) $y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$；

(д) $y=(x)$，此处(x)为从数 x 至与它最近的整数间的距离.

解 (a) 如图 1.191 所示,周期 π.

(б)如图 1.192 所示,周期 2π.

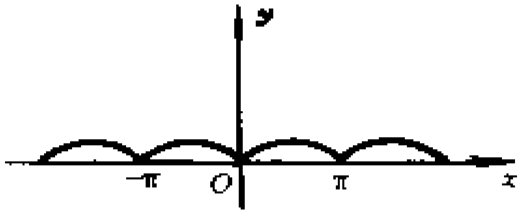


图 1.191

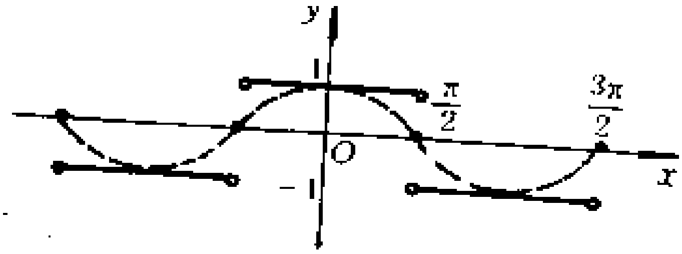


图 1.192

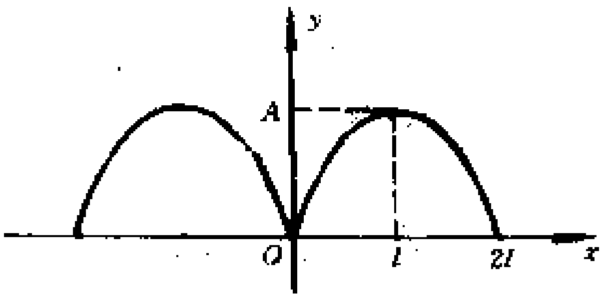


图 1.193

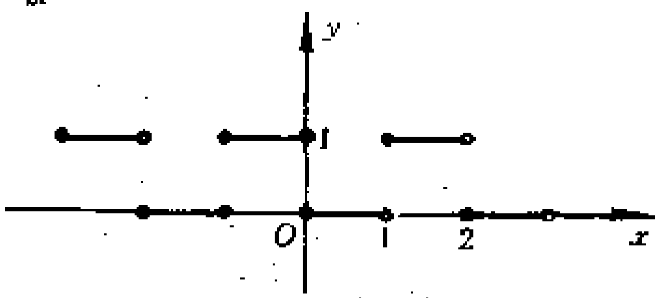


图 1.194

(в)当 $0 \leqslant x \leqslant 2l$ 时,

由 $f(x)$的定义易得

$$f(x+2kl)=f(x) \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

故知所给函数为以 $2l$ 为周期的周期函数,它在$[0,2l]$内的图形为一抛物线,顶点为(l,A). 如图 1.193 所示.

(г)周期为 2*),如图 1.194 所示.

*）原本该题为 $y=|x|-2\left[\frac{x}{2}\right]$，当 $x\geqslant0$ 时，它是以 2 为周期函数.

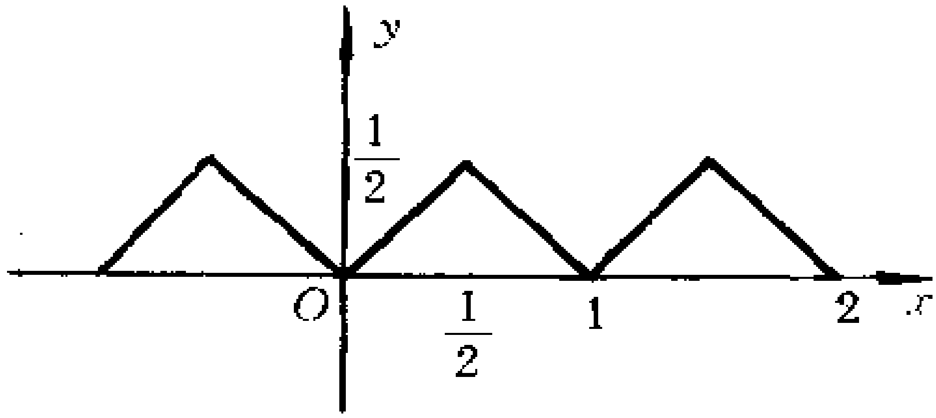


图 1.195

(д)周期为 1，如图 1.195 所示.

363. 证明：若函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形对于二垂直轴 $x=a$ 和 $x=b(b>a)$ 对称，则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证　设 x 为任一实数，则按假设有

$f(a+x)=f(a-x)$ 及 $f(b+x)=f(b-x)$.

在 $f(a+x)=f(a-x)$ 中将 x 换成 $x+(b-a)$，则得

$f(x+b)=f(a-x-b+a)=f(2a-b-x)$；

而　$f(x+b)=f(b-x)$，所以

$f(b-x)=f(2a-b-x)$.

将 $b-x$ 换成 x，则得 $f(x)=f(2a-2b+x)$.

再将 x 换成 $2(b-a)+x$，即得

$f(x+2(b-a))=f(x)$，

即 $f(x)$ 为一以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数. 如图 1.196 所示.

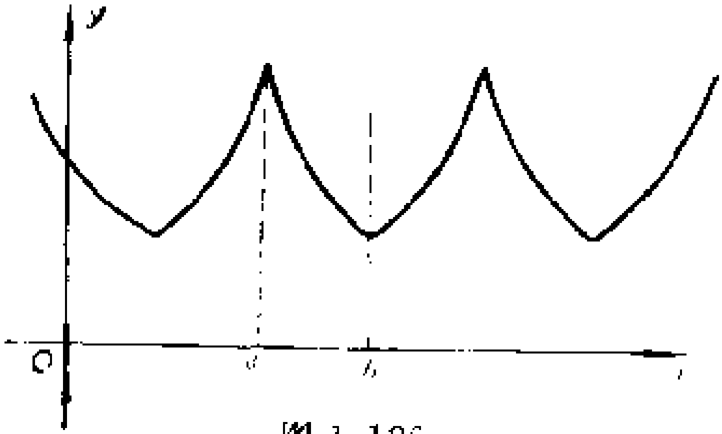


图 1.196

364. 证明：若函数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图形对于两点 $A(a,y_0)$ 和 $B(b,y_1)$ $(b>a)$ 对称，则函数 $f(x)$ 是线性函数与周期函数的和. 特别是，若 $y_0=y_1$，则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证　设 x 是任一实数，按假设有：

$$f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x), \tag{1}$$

$$f(b+x)-y_1=y_1-f(b-x). \tag{2}$$

在(1)中，将 x 换成 $x+(b-a)$ 则得

$$f(b+x)-y_0=y_0-f(2a-b-x) \tag{3}$$

将(3)代入(2)得

$$2y_1-f(b-x)=2y_0-f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x)=2(y_1-y_0)+f(2a-b-x) \tag{4}$$

在(4)中，将 $b-x$ 换成 x，则得

$$f(x)=2(y_1-y_0)+f(2a-2b+x) \tag{5}$$

再在(5)中将 x 换成 $2(b-a)+x$，则得

$$f(x)=2(y_0-y_1)+f[2(b-a)+x].$$

令

$$f(x)=-\frac{y_0-y_1}{b-a}x+\varphi(x) \tag{6}$$

下面证明 $\varphi(x)$ 一定是周期函数. 事实上,我们有

$$f[x+2(b-a)]=-\frac{y_0-y_1}{b-a}[x+2(b-a)]$$
$$+\varphi(x+2(b-a)],$$
$$f(x)-f[x+2(b-a)]=2(y_0-y_1)+\varphi(x)$$
$$-\varphi[x+2(b-a)].$$

因此由(5)式可得

$$\varphi(x)=\varphi[x+2(b-a)]. \tag{7}$$

由(6)式和(7)式可知,$f(x)$ 是一个线性函数与一个周期函数的和.

若 $y_0=y_1$,则由(6)式和(7)式可知,$f(x)$ 是一个周期函数.

365. 证明:若函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于点 $A(a,y_0)$ 及直线 $x=b(b\neq a)$ 对称,则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证 设 x 为任一实数,按假设则有

$$f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x), \tag{1}$$
$$f(b+x)=f(b-x).$$

在(1)中,将 x 换成 $x+(b-a)$,则得

$$f(b+x)=2y_0-f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x)=2y_0-f(2a-b-x). \tag{2}$$

在(2)中,将 $b-x$ 换成 x,则得

$$f(x)=2y_0-f(2a-2b+x). \tag{3}$$

在(3)中,将 x 换成 $2b-2a+x$,则得

$$f(2b-2a+x)=2y_0-f(x). \tag{4}$$

由(3)(4)得 $f(2a-2b+x)=f(2b-2a+x)$,再将 x 换成 $2b-2a+x$,即得

$$f(x)=f(4(b-a)+x).$$

此即证明 $f(x)$ 为一以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数.

366. 设 $f(x+1)=2f(x)$ 及当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=x(1-x)$,作函数

$$y=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的图形.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,图形为一抛物线,顶点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,只要将纵标放大 2 倍,余类推.

如图 1.197 所示.

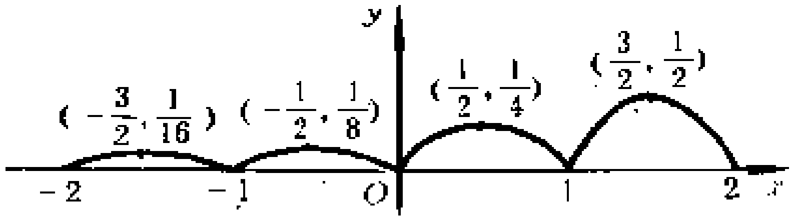


图 1.197

当 $x=\frac{2n+1}{2}$ 时,$y=\frac{2^n}{4}=2^{n-2}$,因而当 $n\to+\infty$ 时,$y\to+\infty$;当 $n\to-\infty$ 时,$y\to 0$.

367. 设 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$;且当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$f(x)=0$.作函数

$$y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$$

的图形.

解 由题设知

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$f(x)=0$;

当 $\pi<x\leqslant 2\pi$ 时,设 $0<x_1\leqslant\pi$,则有

$$f(x)=f(x_1+\pi)=f(x_1)+\sin x_1=\sin x_1;$$

当 $2\pi<x\leqslant 3\pi$ 时，设 $\pi<x_2\leqslant 2\pi$，则有

$$f(x)=f(x_2+\pi)=f(x_2)+\sin x_2=0;$$

余类推. 周期为 2π. 如图 1.198 所示.

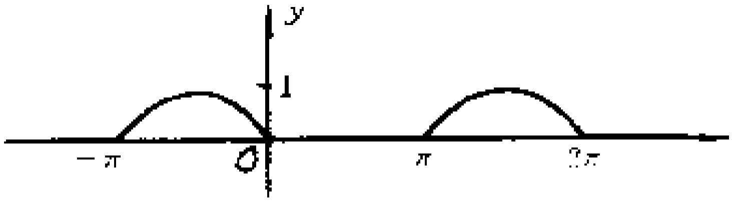


图 1.198

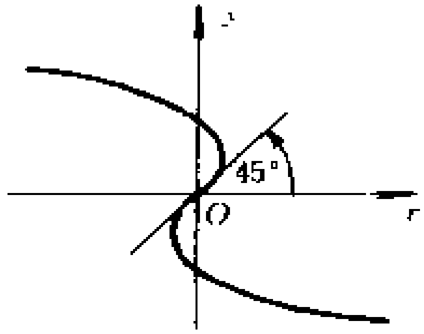


图 1.199

368. 作函数 $y=y(x)$ 的图形，设：

(a) $x=y-y^3$；　(б) $x=\dfrac{1-y}{1+y^2}$；

(в) $x=y-\ln y$；　(г) $x^2=\sin y$.

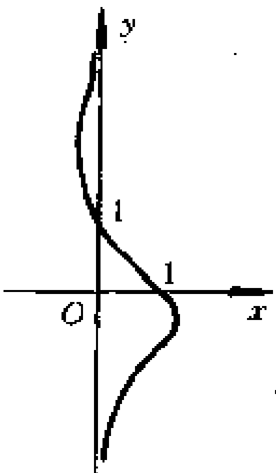


图 1.200

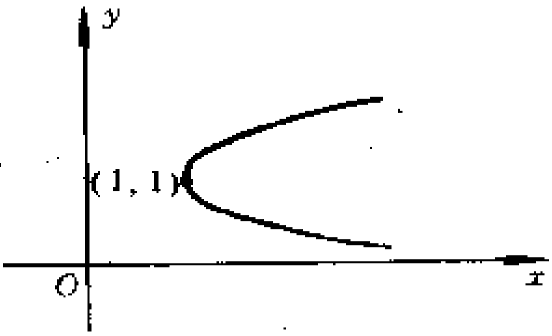


图 1.201

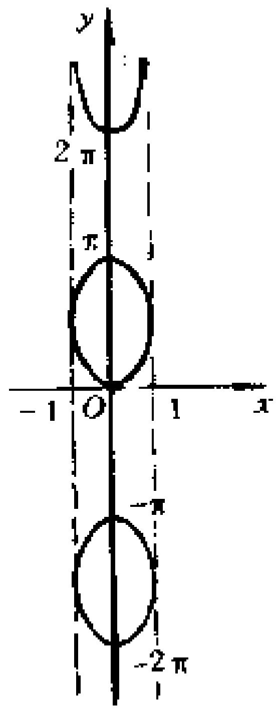


图 1.202

解　(a) 如图 1.199 所示.

(б) 如图 1.200 所示.

(в)如图 1.201 所示.

(г)如图 1.202 所示.

369. 作出下列用参数表示的各函数的图形，设：

(a)$x=1-t, y=1-t^2$;

(б)$x=t+\frac{1}{t}, y=t+\frac{1}{t^2}$;

(в)$x=10\cos t, y=\sin t$（椭圆）；

(г)$x=\mathrm{ch}t, y=\mathrm{sh}t$（双曲线）；

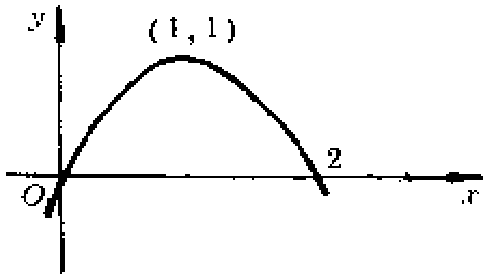


图 1.203

(д)$x=5\cos^2 t, y=3\sin^2 t$;

(e)$x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$（摆线）；

(ж)$x=\sqrt[t+1]{t}, y=\sqrt[t]{t+1}\ (t>0)$.

解 (a)$y-1=-(x-1)^2$. 如图 1.203 所示.

(б)如图 1.204 所示.

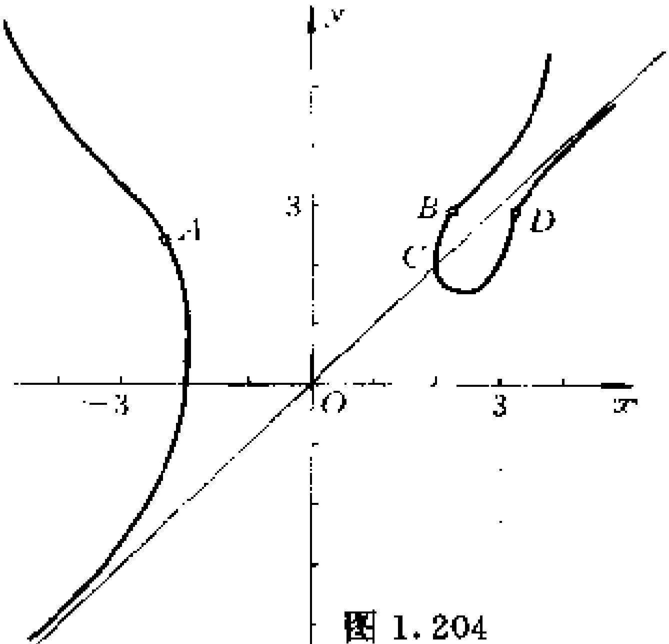


图 1.204

(в)$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$. 如图 1.205 所示.

(г)$x^2-y^2=1$. 如图 1.206 所示.

(д)$\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=1$，如图 1.207 所示.

(е)如图 1.208 所示.

(ж)如图 1.209 所示.

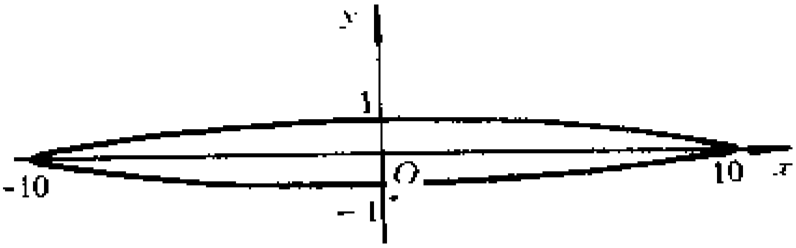


图 1.205

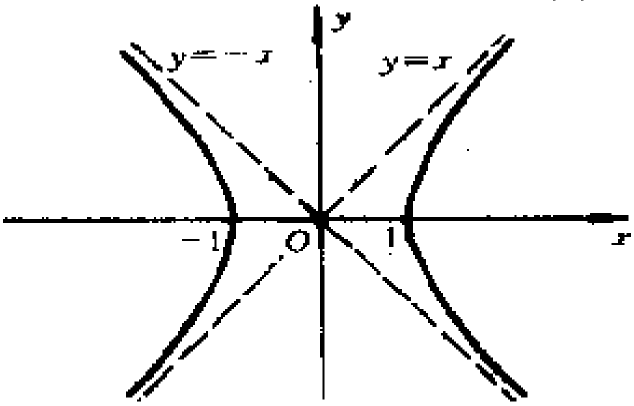


图 1.206

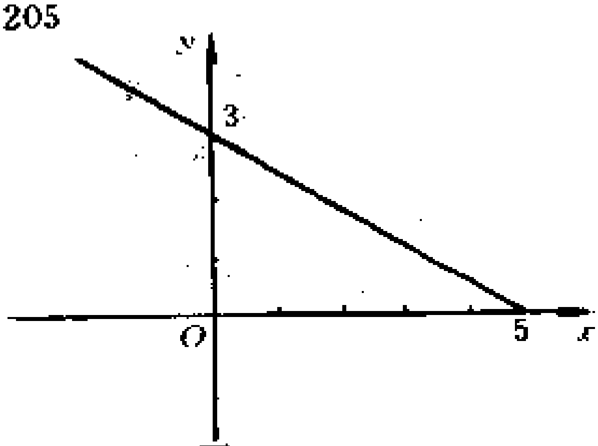


图 1.207

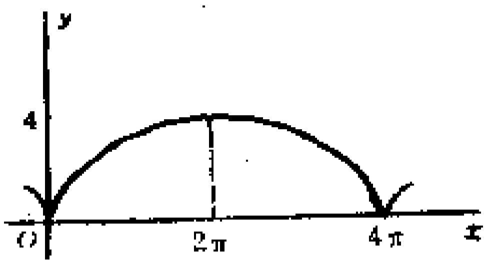


图 1.208

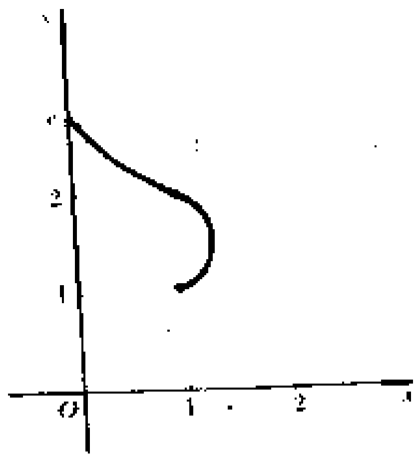


图 1.209

370. 作下列隐函数的图形：

(а) $x^2 - xy + y^2 = 1$（椭圆）；

(б) $x^3 + y^3xy = 0$（笛卡尔叶形线）；

(в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$（抛物线）；

(г) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$（内摆线）；

(д) $\sin x = \sin y$；

(е) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$；

(ж) $x^y = y^x (x > 0, y > 0)$；

(з) $x - |x| = y - |y|$.

解 (а) 将坐标轴按正向绕原点旋转 45°，得新坐标系 $Ox'y'$，则由旋转公式得

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = \frac{x' + y'}{2}.$$

代入原式得

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{\frac{2}{3}} = 1.$$

如图 1.210 所示.

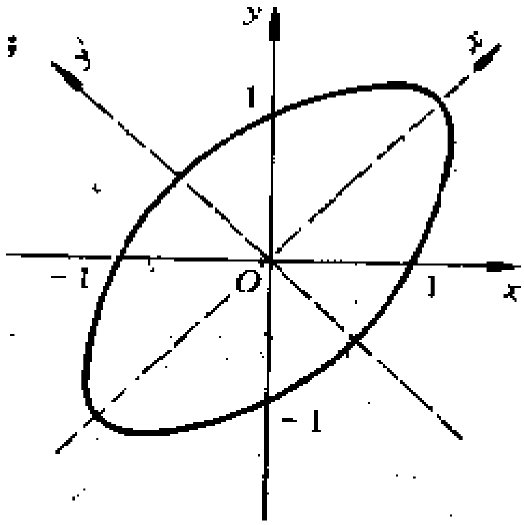


图 1.210

(б) 渐近线为 $x + y + 1 = 0$.

如图 1.211 所示.

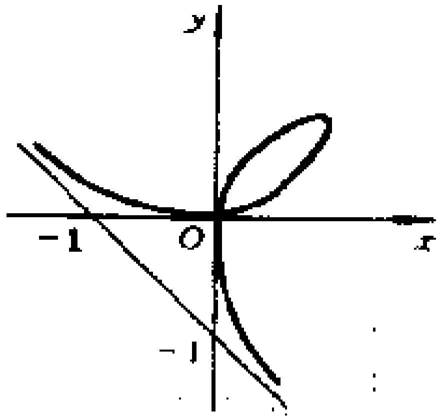


图 1.211

(в) 如图 1.212 所示.

(г) 如图 1.213 所示.

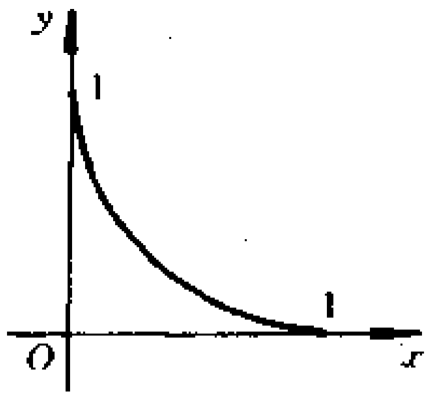


图 1.212

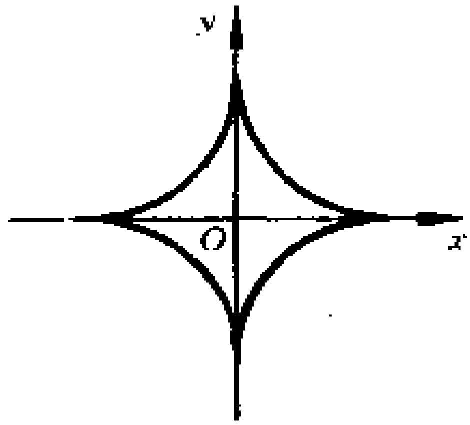


图 1.213

(д)$y = x + 2k\pi$ 或 $y = (2k + 1)\pi - x$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 如图 1.214 所示.

(e)$y = x^2 + 2k$ 或 $y = 2k - x^2 (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

如图 1.215 所示.

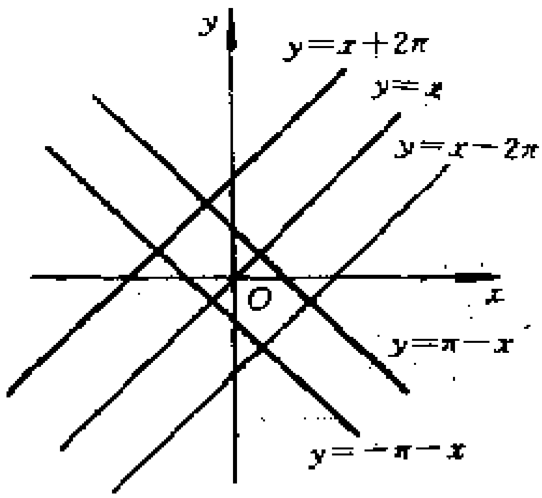


图 1.214

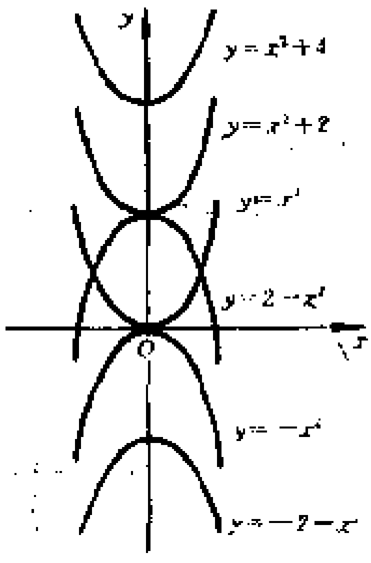


图 1.215

(ж) 如图 1.216 所示. 参看 1544 题的作图法.

(e) 如图 1.217 所示. 图形包括第一象限阴影部分(连同边界):$x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 以及第三象限的黑粗线部分:y

$= x, x < 0, y < 0.$

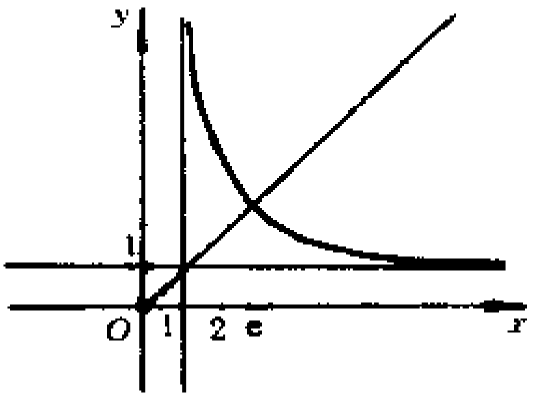


图 1.216

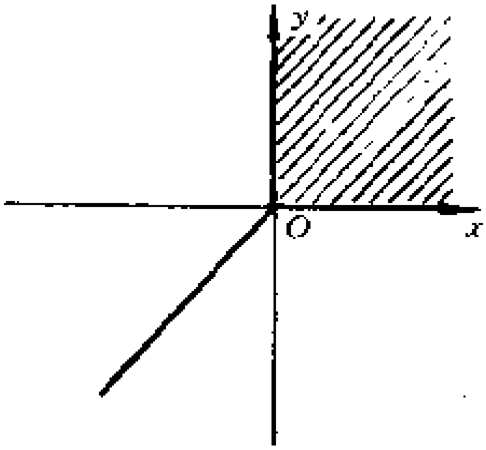


图 1.217

371. 在极坐标(r),φ系中作出函数 $r = r(\varphi)$ 的图形.

设：

(а)$r = \varphi$(阿基米得螺线)；(б)$r = \frac{\pi}{\varphi}$(双曲螺线)；

(в)$r = \frac{\varphi}{\varphi + 1}(0 \leqslant \varphi < +\infty)$；

(г)$r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$(对数螺线)；

(д)$r = 2(1 + \cos\varphi)$(心脏形线)；

(е)$r = 10\sin 3\varphi$(三瓣玫瑰线)；

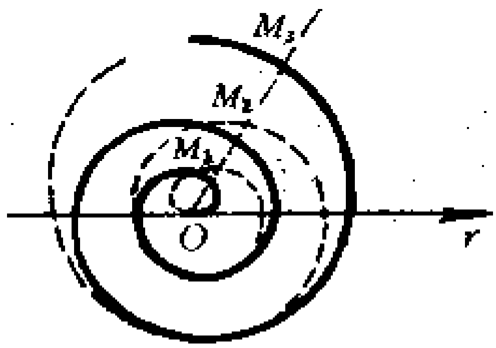


图 1.218

(ж)$r^2 = 36\cos 2\varphi$(贝努里双纽线)；

(з)$\varphi = \frac{r}{r-1}(r > 1)$；(и)$\varphi = 2\pi\sin r$.

解 (а) 如图 1.218 所示. $M_1M_2 = M_2M_3 = \cdots = 2\pi$.

(б) 如图 1.219 所示.

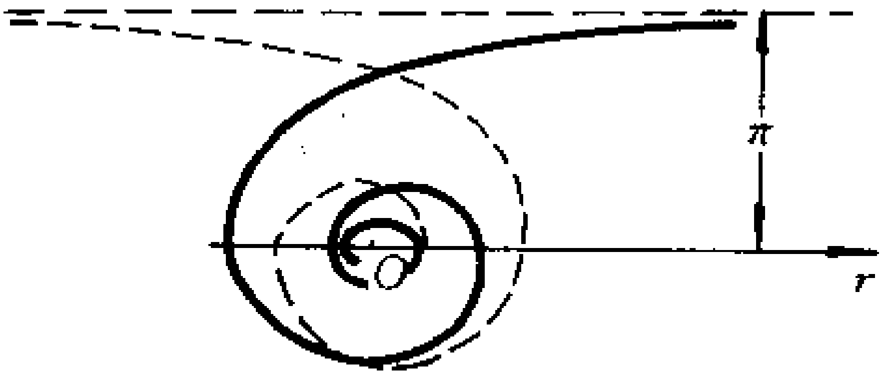


图 1.219

(в) 如图 1.220 所示.

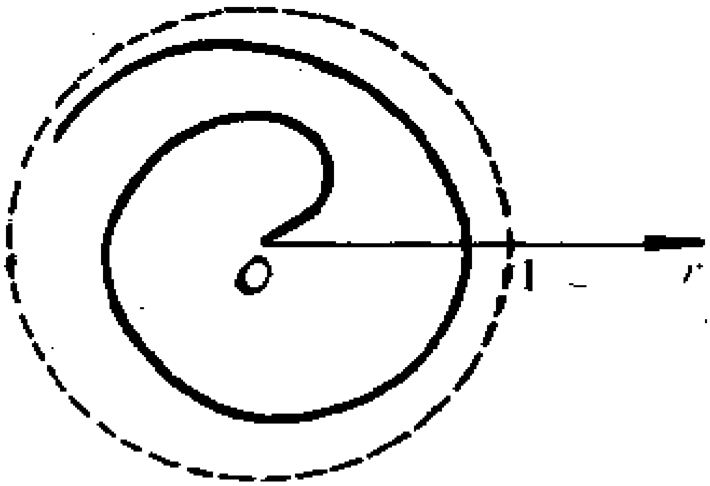


图 1.220

(г) 如图 1.221 所示.

(д) 如图 1.222 所示.

(е) 如图 1.223 所示.

(ж) 如图 1.224 所示.

(з) 如图 1.225 所示.

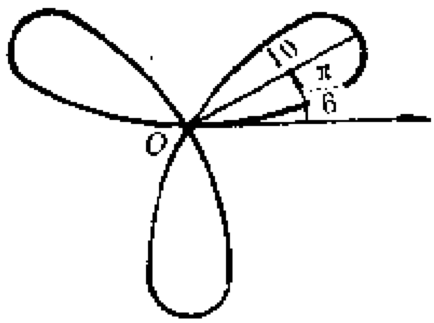


图 1.223

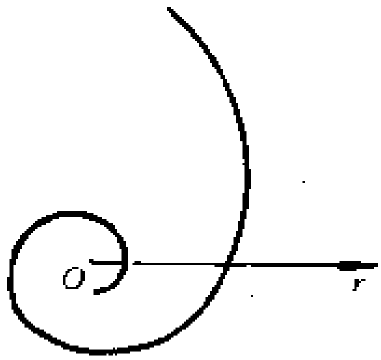


图 1.221

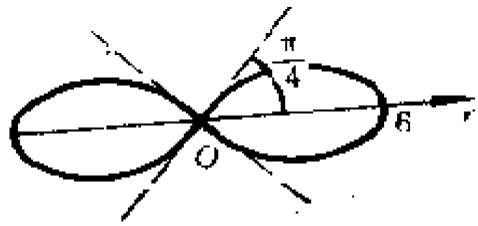


图 1.224

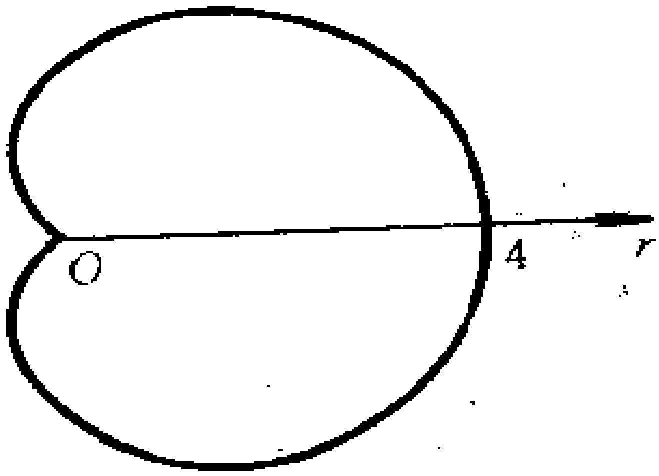


图 1.222

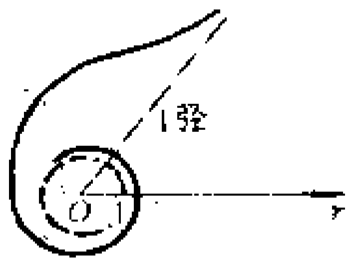


图 1.225

(и) 如图 1.226 所示.

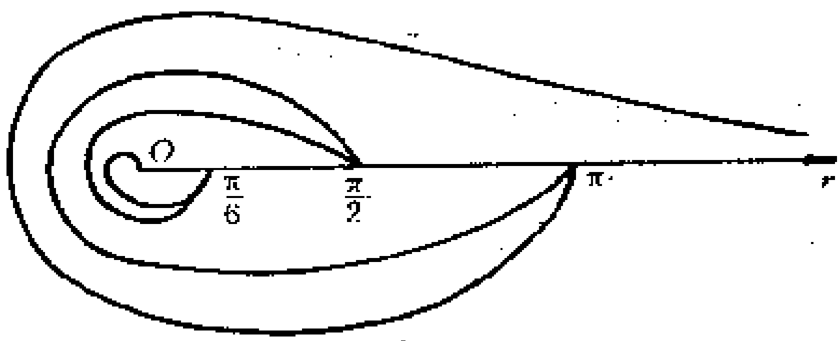


图 1.226

372. 作函数 $y = x^3 - 3x + 1$ 的图

形，以求方程式

$$x^3-3x+1=0$$

的近似解.

解 如图 1.227 所示.

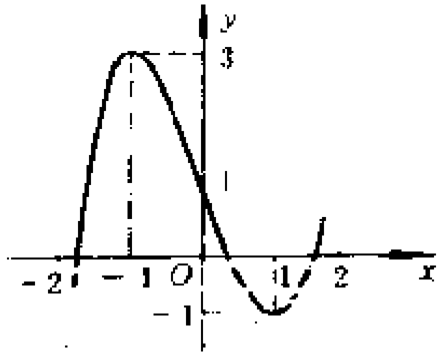


图 1.227

因 $y|_{x=0}=1>0$,

$y|_{x=0.4}=-0.136$,

所以，在 0 与 0.4 之间有一实根，约为 0.35.

同法可求得其它二根为 1.53 及 -1.88.

用图解法解下列方程式：

373. $x^3-4x-1=0$.

解 作函数 $y=x^3$ 及 $y=4x+1$ 的图形，它们的交点的横坐标即所求之根(图 1.228).

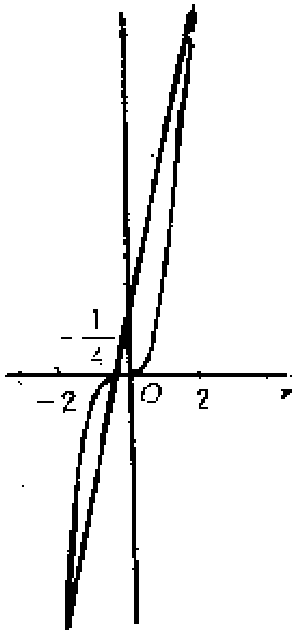


图 1.228

在图示的根 x_0 邻近研究函数 $f(x)=x^3-4x-1$，若 $f(x_0-\delta)\cdot f(x_0+\delta)<0$，则根 x_0 界于 $x_0-\delta$ 及 $x_0+\delta$ 之间，其中 δ 为很小的某个正数. 下列各题同.

经判别，根的近似解为

-1.86; -0.25; 2.11.

374. $x^4-4x+1=0$.

解 作函数 $y=x^4$ 及 $y=4x-1$ 的图形. 如图 1.229 所示.

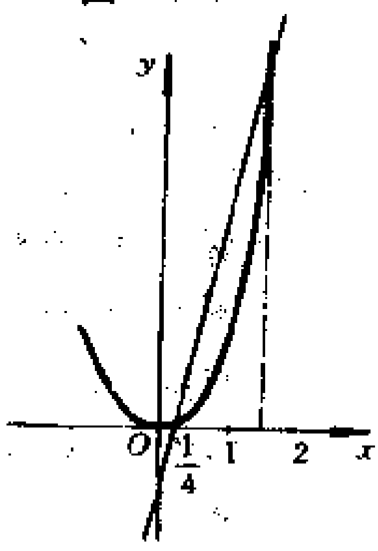


图 1.229

交点的横坐标即所求之根，其近

似 值为 0.25；1.49.

375. $x = 2^{-x}$.

解 作函数 $y = 2^{-x}$ 及 $y = x$ 的图形，如图 1.230 所示. 交点的横坐标为 0.64，此即所求之根的近似值.

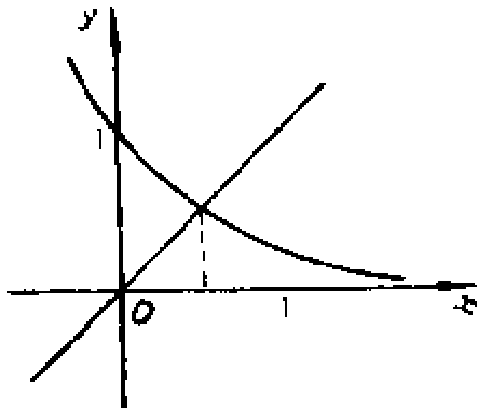


图 1.230

376. $\lg x = 0.1x$.

解 作函数 $y = \lg x$ 及 $y = 0.1x$ 的图形，如图 1.231 所示.

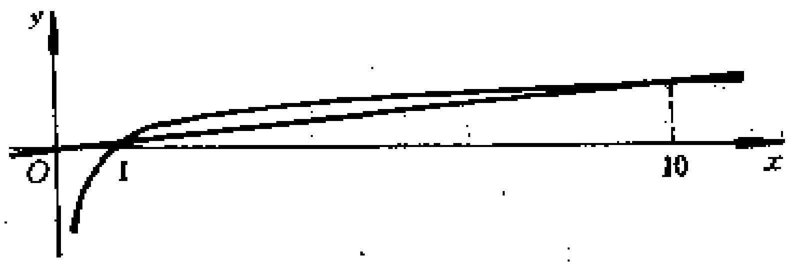


图 1.231

交点的横坐标为 1.37 及 10，此即所求之根，前者为近似值，后者为精确值.

377. $10^x = x^2$.

解 作函数 $y = 10^x$ 及 $y = x^2$ 的图形，如图 1.232 所示. 交点的横坐标为 -0.54，此即所求之根的近似值.

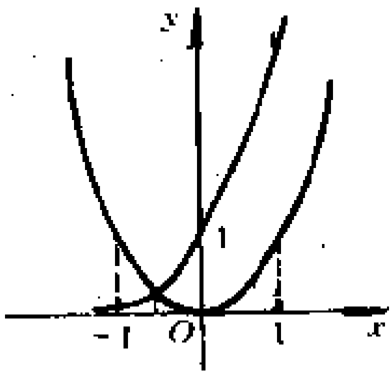


图 1.232

378. $\operatorname{tg} x = x (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$

解 作函数

$$y = \mathrm{tg}x \text{ 及 } y = x$$

的图形，如图 1.233 所示.

交点的横坐标为 0 及 4.49，此即所求之根，前者为精确值，后者为近似值.

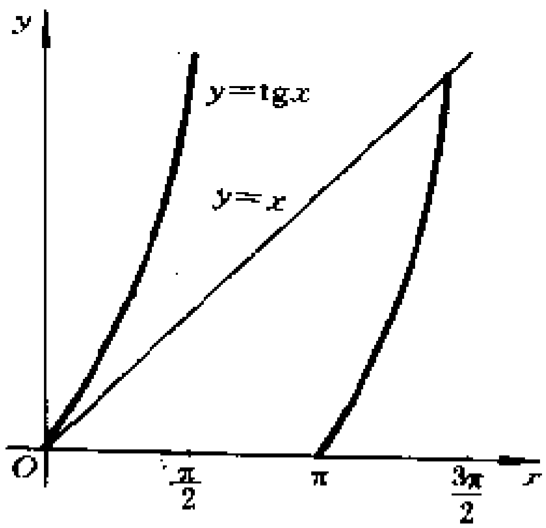


图 1.233

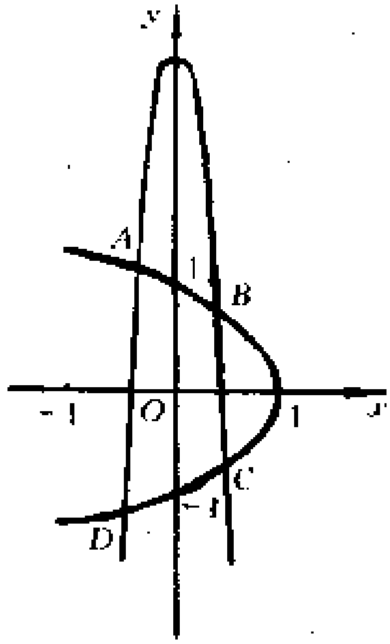


图 1.234

用图解法以解下列方程组：

379. $x + y^2 = 1, 16x^2 + y = 4.$

解 作函数

$$y^2 = 1 - x \text{ 及 } -y + 4 = 16x^2$$

的图表，如图 1.234 所示.

交点为点 A，B，C 及 D，它们的一对坐标即所求之解（近似值）：

$x_1 = -0.42, y_1 = 1.19$（A 点）

$x_2 = 0.45, y_2 = 0.74$（B 点）

$x_3 = 0.54,\ y_3 = -0.68$（C 点）；

$x_4 = -0.57, y_4 = 1.25$（D 点）.

380. $x^2+y^2=100, y=10(x^2-x-2)$.

解 作函数

$$x^2+y^2=100$$

及 $\quad y=10(x^2-x-2)$

的图形，如图 1.235 所示. 交点为点 A,B,C 及 D，它们的一对坐标即所求之解(近似值)：

$x_1=-1.30$；

$y_1=9.92$(A 点)；

$x_2=2.30$，

$y_2=9.73$(B 点)；

$x_3=1.62$，

$y_3=-9.87$(C 点)；

$x_4=-0.62, y_4=-9.98$(D 点).

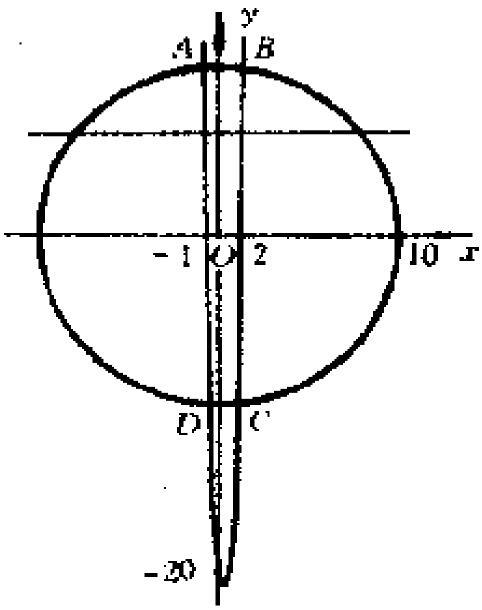


图 1.235

§ 5. 函数的极限

1° 函数的有界性　设存在有某两数 m 和 M，使得

$$当\ x\in(a,b)\ 时, m<f(x)<M,$$

则称函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上为有界的.

数 $m_0=\inf\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上的下确界，而数 $M_0=\sup\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a,b) 上的上确界.

差 M_0-m_0 称为函数在区间 (a,b) 上的振幅.

2° 函数在某一点的极限　符号

$$\lim_{x\to a}f(x)=A$$

表示对于任一个数 $\varepsilon > 0$，都存在有数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对于满足条件式 $0 < |x-a| < \delta$，并使 $f(x)$ 有意义的一切 x，有下列不等式成立：

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

函数的极限(1)存在的必要而且充分的条件是：对于每一个叙列 $x_n \to a(n = 1,2,\cdots)$，下面的等式都成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

有两个著名的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

哥西判别法．函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在，当而且仅当，对于每一个 $\varepsilon > 0$，都能找得着 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得，只要是

$$0 < |x' - a| < \delta \text{ 和 } 0 < |x'' - a| < \delta,$$

就有 $$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

式中 x' 和 x'' 是属于函数 $f(x)$ 的定义域内的．

3° 单侧的极限　若

当 $0 < a - x < \delta(\varepsilon)$ 时，有 $|A' - f(x)| < \varepsilon$，

则称数 A' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的左极限：

$$A' = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0).$$

同样，若 当 $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$ 时，有 $|A'' - f(x)| < \varepsilon$，则称数 A'' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的右极限：

$$A'' = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0).$$

函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的必要而且充分的条件为：

$$f(a-0) = f(a+0).$$

4° 无穷极限　符号

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$，只要是

$0 < |x-a| < \delta(E)$，则有 $|f(x)| > E$.

5° 子列极限　若对于某叙列 $x_n \to a$ 有等式

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B,$$

则称数(或符号 ∞)B 为函数 $f(x)$ 在 a 点的子列极限(有穷的或无穷的).

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) \text{ 和 } \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$$

来表示,分别称为函数 $f(x)$ 在 a 点的下极限和上极限.

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$$

为函数 $f(x)$ 在 a 点有极限(有穷的或无穷的)的必要而且充分的条件.

381. 函数 $f(x)$ 由下面的条件所定义:

若 $$x = \frac{m}{n}, \text{则 } f(x) = n,$$

式中 m 和 n 为互质的整数,且 $n > 0$;

若 x 为无理数,则

$$f(x) = 0.$$

证明此函数在每一点 x 为有穷的,但并非有界的(即在这点的任何邻域中是无界的).

证　任给 $x_0 > 0$,当 x_0 固定时,$f(x_0)$ 值确定. 由于有理数在数轴上处处稠密,故在 x_0 的任何邻域$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内总有无限多个有理数. 下面证明对于任给的 $\delta > 0$,函数 $f(x)$ 在区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内是无界的. 若不然,存在 $M > 0$,使当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时,

$$|f(x)| \leqslant M.$$

于是,在$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的有理数只能表示成

$$\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \cdots, \frac{k}{[M]},$$

其中 k 是与分母互质的整数,$[M]$ 为 M 的整数部分. 由

于这些有理数都在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中，故有

$$(x_0-\delta)[M] < k < (x_0+\delta)[M],$$

上式表明在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中的有理数仅为有限个，这与有理数在数轴上的处处稠密性相矛盾.

于是，本题所定义的函数$f(x)$在每一点x(有穷)的任何邻域中是无界的.

382. 若函数$f(x)$在：(a) 开区间，(6) 闭区间内的每一点确定而有界，则此函数在这给定的区间内或对应的闭区间内是否为有界的？

举出适当的例子.

解 (a) 一般地说，不一定. 例如，函数$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内每一点确定而有界，但它在$(0,1)$内无界.

(6) 是有界的. 事实上，若$f(x)$在$[a,b]$无界，则存在$x_n \in [a,b]$使$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$. 取子列$x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$. 显然，$f(x)$在$x_0$无界(即在$x_0$的任何邻域中无界)，矛盾.

383. 证明函数$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$

在间隔$-\infty < x < +\infty$中是有界的.

证 当$|x| \leqslant 1$时，$|f(x)| < \frac{1+1}{1}=2$.

当$|x|>1$时，$|f(x)| < \frac{1+x^2}{1+x^4} < 1$.

因而，当$-\infty < x < +\infty$时，$|f(x)|<2$. 即函数$f(x)$是有界的.

384. 证明函数

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的，但当 $x\to 0$ 时不成为无穷大.

证　当 $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ 时，$f(x)=0$；而当 $x=\frac{1}{k\pi}$ 时，$f(x)=(-1)^k k\pi$. 于是当 $k\to\infty$ 时，点 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ 及 $\frac{1}{k\pi}$ 均在点 $x=0$ 的任何邻域内. 由于 $|(-1)^k\cdot k\pi|\to+\infty(k\to+\infty)$，故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的. 然而当 $k\to\infty$ 时，$f(x)$ 不断地与 Ox 轴相交，即 $f(x)=0$（这样的数 x 的集合是无限的）. 因而，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 又不成为无穷大.

385. 研究函数 $f(x)=\ln x\cdot\sin^2\frac{\pi}{x}$ 在区间 $0<x<\varepsilon$ 内的有界性.

解　上方有界，它小于 $|\ln\varepsilon|$. 下方无界.

386. 证明函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

在域 $0\leqslant x<+\infty$ 内有下确界 $m_0=0$ 和上确界 $M_0=1$.

证　$1>f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)$ 单调上升趋近于 1，所以，

$$m_0=0,M_0=1.$$

387. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且单调上升，则在此闭区间内函数的下确界和上确界等于什么？

解　$m_0=f(a)$，$M_0=f(b)$，其中 m_0 及 M_0 代表下确界及上确界，以下各题均采用此符号.

求函数的下确界和上确界：

388. $f(x)=x^2$ 在 $(-2,5)$ 内.

解 $m_0 = 0, M_0 = 25.$

389. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在$(-\infty, +\infty)$内.

解 $m_0 = 0, M_0 = 1.$

390. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 在$(0, +\infty)$内.

解 由于$f(x)$在$(0,1)$内为增函数,而在$(1, +\infty)$内为减函数,且$f(1)$存在,所以,

$$m_0 = 0, M_0 = f(1) = 1.$$

391. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在$(0, +\infty)$内.

解 由 $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ 知 $m_0 = f(1) = 2, M_0 = +\infty.$

392. $f(x) = \sin x$ 在$(0, +\infty)$内.

解 $m_0 = -1, M_0 = 1.$

393. $f(x) = \sin x + \cos x$ 在$[0, 2\pi]$内.

解 由 $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 知 $m_0 = -\sqrt{2}, M_0 = \sqrt{2}.$

394. $f(x) = 2^x$ 在$(-1, 2)$内.

解 $m_0 = f(-1) = \frac{1}{2}; M_0 = f(2) = 4.$

395. $f(x) = [x]$:(a) 在$(0,2)$内,(б) 在$[0,2]$内.

解 (a)$m_0 = 0, M_0 = 1$;

(б)$m_0 = 0, M_0 = 2.$

396. $f(x) = x - [x]$ 在$[0,1]$内.

解 $m_0 = 1, M_0 = 1.$

397. 求函数 $f(x) = x^2$ 在下列区 间内的振幅:

(a)$(1,3)$;　　　(б)$(1.9, 2.1)$;

(в)(1.99,2.01)　　(г)(1.999,2.001).

解　(а) 振幅以 ω 表示之. $\omega = M_0 - m_0$

因为 $m_0 = 1, M_0 = 9$,所以

$$\omega = 8.$$

(б)$m_0 = (1.9)^2, M_0 = (2.1)^2$,

$$\omega = (2.1)^2 - (1.9)^2 = 0.8.$$

(в)$\omega = (2.01)^2 - (1.99)^2 = 0.08.$

(г)$\omega = (2.001)^2 - (1.999)^2 = 0.008.$

398. 求函数

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

在下列区间内的振幅:

(а)$(-1, +1)$; (б)$(-0.1, 0.1)$;

(в)$(-0.01, 0.01)$; (г)$(-0.001, 0.001)$.

解　(а)$\omega = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$;

(б)$\omega = \pi$;

(в)$\omega = \pi$;

(г)$\omega = \pi$.

399. 设 $m[f]$ 和 $M[f]$ 分别为函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的下确界和上确界。

证明若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为定义于 (a,b) 内的函数,则

$$m[f_1 + f_2] \geqslant m[f_1] + m[f_2]$$

及

$$M[f_1 + f_2] \leqslant M[f_1] + M[f_2].$$

举出函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的例子,使它们在最后的二关

系中是：(a) 等式的情形，(б) 不等式的情形.

证　因为

$$m[f_1]\leqslant f_1\leqslant M[f_1]$$

及

$$m[f_2]\leqslant f_2\leqslant M[f_2],$$

所以，

$$m[f_1]+m[f_2]\leqslant f_1+f_2,$$

从而有

$$m[f_1]+m[f_2]\leqslant m[f_1+f_2].$$

又因

$$f_1+f_2\leqslant M[f_1]+M[f_2],$$

所以，

$$M[f_1+f_2]\leqslant M[f_1]+M[f_2].$$

(a) 当 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 在 (a,b) 内具有相同的单调性，且 m 及 M 均为有限时，取等式.

(б) $f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=-x^2$ 在区间 $(-1,1)$ 内

$$m[f_1]=0, M[f_1]=1;$$

$$m[f_2]=-1. M[f_2]=0.$$

又因为 $f_1+f_2=0$，所以

$$m[f_1+f_2]=M[f_1+f_2]=0.$$

此时

$$m[f_1+f_2]>m[f_1]+m[f_2],$$

$$M[f_1+f_2]<M[f_1]+M[f_2].$$

取不等式的符号.

400. 设函数 $f(x)$ 定义于域 $[a,+\infty)$ 内，并且在每一个闭区

间$[a,b]$上是有界的.假定

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}f(\xi)$$

及

$$M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}f(\xi).$$

作函数 $y=m(x)$ 和 $y=M(x)$ 的图形,设

(a) $f(x)=\sin x$, (6) $f(x)=\cos x$.

解 (a) 如图 1.236 所示. (6) 如图 1.236 所示

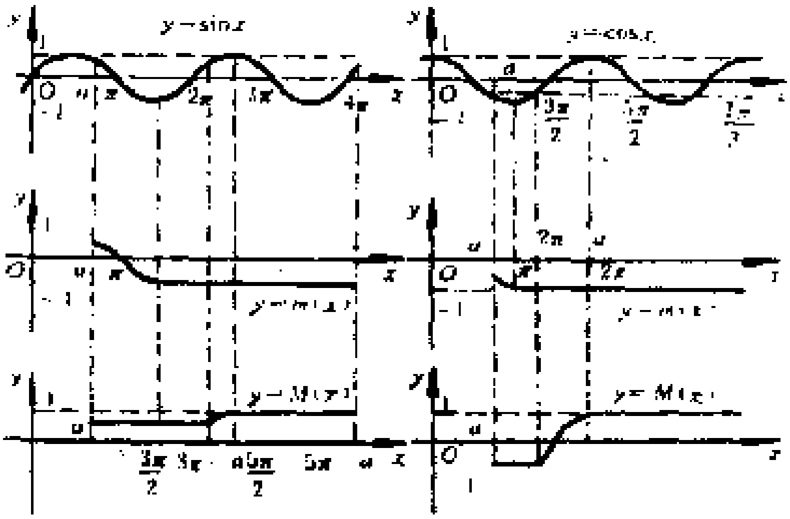


图 1.236

401. 利用《$\varepsilon-\delta$》论证法,证明

$$\lim_{x\to2}x^2=4.$$

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
δ					

证 $|x^2-4|=|x-2||x+2|$.

先限制 $|x-2|<1$,即 $1<x<3$,则

$|x^2-4|=|x-2||x+2|<5|x-2|$,

取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{5}\}$. 于是,当 $0<|x-2|<\delta$ 时,

$$|x^2-4|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to2}x^2=4.$$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
δ	0.02	0.002	0.0002	0.00002	…

402. 以《$E-\delta$》的说法,证明

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty.$$

填下表:

E	10	100	1000	10000	…
δ					…

证　任给 $E>0$,

要使 $\frac{1}{|1-x|^2}>E$,

只要 $0<|x-1|<\frac{1}{\sqrt{E}}$,

又只要 $0<|x-1|<\frac{1}{E}(E>1)$,

取 $\delta=\min\left\{1,\frac{1}{E}\right\}$,

则当 $0<|x-1|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right|>E,$$

所以
$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty.$$

E	10	100	1000	10000	…
δ	0.1	0.01	0.001	0.0001	…

403. 利用不等式表示下列各式：

(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$；　　(б) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$；

(в) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

举出适当的例子.

解　(a) 对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在数 $\delta > 0$，使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即
$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

例如，$f(x) = x + 1$，$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

(б) 对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在数 $\delta > 0$，使当 $0 < a - x < \delta$ 时，

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b.$$

例如，

$$若\ f(x) = \begin{cases} x + 1, 当\ x \leqslant 1; \\ 2, 当\ x > 1, \end{cases}$$

则
$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 2$$

(в) 对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在数 $\delta > 0$，使当 $0 < x - a < \delta$ 时

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b.$$

例如本题(б)之例，即有

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = 2.$$

利用不等式表示下列各式，并举出适当的例子：

404. (a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$； (б) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$；

(в) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$.

解(a) 任给 $\varepsilon > 0$，存在数 $N > 0$，使当 $|x| > N$ 时，

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

(б) 任给 $\varepsilon > 0$，存在数 $N > 0$，使当 $x < -N$ 时，

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

(в) 任给 $\varepsilon > 0$，存在数 $N > 0$，使当 $x > N$ 时，

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

例如，对于函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$，即有

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

405. (a) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$； (б) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$；

(в) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$； (г) $\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$；

(д) $\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$； (е) $\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty$；

(ж) $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$； (з) $\lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty$；

(и) $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$.

解 (a) 任给 $E > 0$，存在数 $\delta > 0$，使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，

$$|f(x)| > E,$$

此即 $$\lim_{x\to a}f(x)=b.$$

例如，$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，即有
$$\lim_{x\to 1}f(x)=\infty.$$

(б) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<|x-a|<\delta$ 时，
$$f(x)<-E,$$
此即 $$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty.$$

例如，$f(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$，即有
$$\lim_{x\to 1}f(x)=-\infty.$$

(в) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<|x-a|<\delta$ 时，
$$f(x)>E.$$
此即 $$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty.$$

例如，$f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$，即有
$$\lim_{x\to 1}f(x)=+\infty.$$

(г) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<a-x<\delta$ 时，
$$|f(x)|>E.$$
此即 $$\lim_{x\to a-0}f(x)=\infty.$$

例如，$f(x)=\dfrac{(-1)^{[\frac{1}{1-x}]}}{1-x}$，即有
$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\infty.$$

(д) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<a-x<\delta$ 时，
$$f(x)<-E,$$
此即 $$\lim_{x\to a-0}f(x)=-\infty.$$

例如，$f(x)=\frac{1}{x-1}$，即有

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=-\infty.$$

(e) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<a-x<\delta$ 时，

$$f(x)>E,$$

此即
$$\lim_{x\to a-0} f(x)=+\infty.$$

例如，$f(x)=\frac{1}{1-x}$，即有

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=+\infty.$$

(ж) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<x-a<\delta$ 时，

$$|f(x)|>E.$$

此即
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty.$$

例如，$f(x)=\frac{(-1)^{\left[\frac{1}{x-1}\right]}}{x-1}$，即有

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\infty.$$

(з) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<x-a<\delta$ 时，

$$f(x)<-E,$$

此即
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=-\infty.$$

例如，$f(x)=\frac{1}{1-x}$，即有

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=-\infty.$$

(и) 任给 $E>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<x-a<\delta$ 时，

$$f(x)>E,$$

此即
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=+\infty.$$

例如，$f(x)=\frac{1}{x-1}$，即有

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty.$$

406. (а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;

(в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; (г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$;

(д) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; (е) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$;

(ж) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$; (з) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

(и) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

解 (а) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,

$$|f(x)|>E,$$

此即 $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

例如,$f(x)=x^3$,则有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(б) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,

$$f(x)<-E,$$

此即 $$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

例如,$f(x)=-x^2$,即有

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

(в) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,

$$f(x)>E,$$

此即 $$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$

例如,$f(x)=x^2$,即有

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$

(г) 任给 $E>0$,存在数 $N>0$,使当 $x<-N$ 时,

$$|f(x)|>E,$$

此即 $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

例如，$f(x)=(-1)^{[x^2]}x$，即有

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty.$$

(д) 任给 $E>0$，存在数 $N>0$，使当 $x<-N$ 时，

$$f(x)<-E,$$

此即
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

例如，$f(x)=x$，即有

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

(е) 任给 $E>0$，存在数 $N>0$，使当 $x<-N$ 时，

$$f(x)>E,$$

此即
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$$

例如，$f(x)=-x$，即有

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty.$$

(ж) 任给 $E>0$，存在数 $N>0$，使当 $x>N$ 时，

$$|f(x)|>E,$$

此即
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty.$$

例如，$f(x)=(-1)^{[x]}x^2$，即有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty.$$

(з) 任给 $E>0$，存在数 $N>0$，使当 $x>N$ 时，

$$f(x)<-E,$$

此即
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty.$$

例如，$f(x)=-x$，即有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty.$$

(и) 任给 $E>0$，存在数 $N>0$，使当 $x>N$ 时，

$$f(x)>E,$$

此即 $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

例如，$f(x)=x$，即有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

407. 命 $y=f(x)$．利用不等式表示下列各情况：

(а) 当 $x\to a$ 时，$y\to b-0$；

(б) 当 $x\to a-0$ 时，$y\to b-0$；

(в) 当 $x\to a+0$ 时，$y\to b-0$；

(г) 当 $x\to a$ 时，$y\to b+0$；

(д) 当 $x\to a-0$ 时，$y\to b+0$；

(е) 当 $x\to a+0$ 时，$y\to b+0$；

(ж) 当 $x\to\infty$ 时，$y\to b-0$；

(з) 当 $x\to-\infty$ 时，$y\to b-0$；

(и) 当 $x\to+\infty$ 时，$y\to b-0$；

(к) 当 $x\to+\infty$ 时 $y\to b+0$；

(л) 当 $x\to-\infty$ 时，$y\to b+0$；

(м) 当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+0$.

举出适当的例子.

解 (а) 任给 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使当 $0<|x-a|<\delta$ 时，

$$0<b-y<\varepsilon,$$

此即 $$\lim_{x\to a} f(x)=b-0;$$

或

$$\text{当 } x\to a \text{ 时，}\quad y\to b-0.$$

例如，$y=-|x|$，即有

$$\text{当 } x\to 0 \text{ 时，}\quad y\to 0-0.$$

(б) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,

$$0<b-y<\varepsilon,$$

此即 $$\lim_{x\to a-0} f(x)=b-0.$$

例如,$y=x$,即有

当 $x\to 0-0$ 时, $y\to 0-0$.

(в) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,

$$0<b-y<\varepsilon,$$

此即,当 $x\to a+0$ 时,$y\to b-0$.

例如,$y=-x$,即有

当 $x\to 0+0$ 时, $y\to 0-0$.

(г) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<|a-x|<\delta$ 时,

$$0<y-b<\varepsilon,$$

此即,当 $x\to a$ 时,$y\to b+0$.

例如,$y=|x|$,即有

当 $x\to 0$ 时,$y\to 0+0$.

(д) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,

$$0<y-b<\varepsilon,$$

此即,当 $x\to a-0$ 时,$y\to b+0$.

例如,$y=-x$,即有

当 $x\to 0-0$ 时,$y\to 0+0$.

(е) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,

$$0<y-b<\varepsilon,$$

此即,当 $x\to a+0$ 时,$y\to b+0$.

例如,$y=x$,即有

当 $x\to 0+0$ 时,$y\to 0+0$.

(ж) 任给 $\varepsilon>0$,存在数 $N>0$,使当 $|x|>N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即,当 $x \to \infty$ 时,$y \to b - 0$.

例如,$y = -\dfrac{1}{|x|}$,即有

$$\text{当 } x \to \infty \text{ 时}, y \to 0 - 0.$$

(э) 任给 $\varepsilon > 0$,存在数 $N > 0$,使当 $x < -N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即,当 $x \to -\infty$ 时,$y \to b - 0$.

例如,$y = \dfrac{1}{x}$,即有

$$\text{当 } x \to -\infty \text{ 时}, y \to 0 - 0.$$

(и) 任给 $\varepsilon > 0$,存在数 $N > 0$,使当 $x > N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即,当 $x \to +\infty$ 时,$y \to b - 0$.

例如,$y = -\dfrac{1}{x}$,即有

$$\text{当 } x \to +\infty, y \to 0 - 0.$$

(к) 任给 $\varepsilon > 0$,存在数 $N > 0$,使当 $|x| > N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即,当 $x \to \infty$ 时,$y \to b + 0$.

例如,$y = \dfrac{1}{|x|}$,即有

$$\text{当 } x \to \infty \text{ 时}, y \to 0 + 0.$$

(л) 任给 $\varepsilon > 0$,存在数 $N > 0$,使当 $x < -N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即,当 $x \to -\infty$ 时,$y \to b + 0$.

例如,$y = -\dfrac{1}{x}$,即有

$$\text{当 } x \to -\infty \text{ 时}, y \to 0 + 0.$$

(M) 任给 $\varepsilon > 0$，存在数 $N > 0$，使当 $x > N$ 时，

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即，当 $x \to +\infty$ 时，$y \to b + 0$.

例如，$y = \dfrac{1}{x}$，即有

$$\text{当 } x \to +\infty \text{ 时}, y \to 0 + 0.$$

408. 设

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

式中 $a_i(i = 0,1,\cdots,n)$ 为实数.

证明 $\lim\limits_{x\to\infty}|p(x)| = +\infty$.

证 不妨设 $a_0 \neq 0$，则

$$|p(x)| \geqslant |a_0| \cdot |x^n| \cdot \left|1 - \left(\frac{|a_1|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|} + \frac{|a_2|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^n}\right)\right|,$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{|x|^i} = 0(i = 1,2,\cdots,n)$，故存在 $E_1 > 0$，使当 $|x| > E_1$ 时，恒有

$$\left|1 - \left(\frac{|a_1|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|} + \frac{|a_2|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^n}\right)\right| > \frac{1}{2},$$

从而有

$$|p(x)| > \frac{1}{2}|a_0| \cdot |x|^n.$$

任给 $M > 0$，设

$$E_2 = \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}.$$

取

$$E = \max(E_1, E_2),$$

则当 $|x| > E$ 时，恒有

$$|p(x)| > M,$$

故

$$\lim_{x\to\infty} |p(x)| = +\infty.$$

409. 设：

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 a^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots b_m},$$

式中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

证明：

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & 若 n > m; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & 若 n = m; \\ 0, & 若 n < m. \end{cases}$$

证　分子分母同除以 x^m，得

$$R(x) = \frac{a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} + \cdots + a_n x^{-m}}{b_0 + b_1 x^{-1} + \cdots + b_m x^{-m}}.$$

当 $n > m$ 时，分子趋于无穷，分母趋于 b_0，

所以，

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \infty.$$

当 $n = m$ 时，分子趋于 a_0，分母趋于 b_0，所以，

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \frac{a_0}{b_0}.$$

当 $n < m$ 时，分子趋于 0，分母趋于 b_0，所以，

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = 0.$$

410. 设：

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式，且

$$P(a)=Q(a)=0.$$

下式有什么可能的值

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}?$$

解 若 a 仅为 $P(x)=0$ 及 $Q(x)=0$ 的一重根，则极限

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

为一确定值(不等于零).

若 a 为 $P(x)=0$ 的 n 重根，而为 $Q(x)=0$ 的 m 重根，则当 $n>m$(n,m 均大于 1)时，此极限为 0；当 $n<m$ 时，此极限为 ∞；当 $n=m$ 时，此极限为一不等于零的值.

总之，极限

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

为零，或为 ∞，或为不等于零的值.

求下列各式之值：

411. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；(б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

解 (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{-1}{-1}=1.$

(б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}.$$

(в) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

412. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

解 $(1+x)(1+2x)(1+3x)=1+6x+11x^2+6x^3$，

于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(6+11x+6x^2)=6.$$

413. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2}{x^2+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{x^3+1}$$

$$=10.$$

414. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$（$m$ 与 n 为自然数）.

解 $$\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$$

$$=\frac{\left[1+nmx+\frac{1}{2!}n(n-1)m^2x^2+\cdots+m^nx^n\right]}{x^2}$$

$$+\frac{-\left[1+mnx+\frac{1}{2!}m(m-1)n^2x^2+\cdots+n^mx^m\right]}{x^2}$$

$$= \frac{n}{2}(n-1)m^2 - \frac{m}{2}(m-1)n^2 + o(x)^{*)}$$

$$= \frac{1}{2}mn(n-m) + o(x).$$

于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} = \frac{1}{2}mn(n-m).$$

*)$o(x)$ 表示当 $x\to 0$ 时的无穷小量.

415. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

解 分子的最高次方为 5 次，分母的最高次方也为 5 次，因而当 $x\to\infty$ 时，此分式的极限为分子与分母的最高次方系数之比，于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} = \frac{1}{5^5}.$$

416. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

解 分子与分母的最高次方相同，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

417. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

解 分子的最高次方为

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

它与分母的最高次方相同，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

418. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

解 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-2}{x-5}=-\dfrac{1}{2}.$

419. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}.$

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{1}{2}.$

420. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1}$ *) .

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=1.$

*）原书 419 题与 420 题相同.

421. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}.$

解 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+2)^2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}.$

422. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}.$

解 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-1}{x^4-x^3+x^2-x-1}=\dfrac{1}{3}$.

423. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

解 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}$

$=\dfrac{3^{20}}{6^{10}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$.

424. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

解 $x+x^2+\cdots+x^n-n$

$=(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)$

$=(x-1)[1+(x+1)+\cdots$

$+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]$

$=(x-1)[n+(n-1)x+(n-2)x^2$

$+\cdots+x^{n-1}]$.

于是,

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$

$=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

425. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ （m 和 n 为自然数）.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}$$

$$=\frac{m}{n}.$$

426. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ （n 表自然数）.

解 设 $x=a+y$，则当 $x\to a$ 时，$y\to 0$.

代入，得

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(a+y)^n-a^n-na^{n-1}y}{y^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{n}{2}(n-1)a^{n-2}+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)a^{n-3}y\right.$$

$$\left.+\cdots+y^{n-2}\right]$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.$$

427. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ （n 表自然数）.

解 设 $x=1+y$，则当 $x\to 1$ 时，$y\to 0$. 代入，得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{n+1}-(n+1)(1+y)+n}{y^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)y+\cdots+y^{n-1}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}.$$

428. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$（$m$ 和 n 为自然数）.

解 当 $m=n$ 时，此极限显然为零.

当 $m\neq n$ 时，不失一般性，假设 $m<n$，且

$$m+l=n.$$

此时

$$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}$$

$$=\frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1})-n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

$$=\frac{-l-lx-\cdots-lx^{m-1}+mx^m+mx^{m+1}+\cdots+mx^{m+l-1}}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l+1})}$$

$$=-\frac{mx^{m+l-2}+2mx^{m+l-3}+\cdots+mlx^{m-1}}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}$$

$$-\frac{+l(m-1)x^{m-2}+l(m-2)x^{m-3}+\cdots+l}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})},$$

于是，

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$$

$$=-\frac{m[1+2+\cdots+(l-1)]+l[m+(m-1)+\cdots+1]}{mn}$$

$$=-\frac{\frac{ml(l-1)}{2}+\frac{ml(m+l)}{2}}{mn}=-\frac{ml(m+l)}{2mn}$$

$$=\frac{m-n}{2}.$$

当 $m=n$ 时，上述结果就等于零. 即上述结果对 $m=n$ 的情况仍然适用.

总之，不论 m 及 n 为任何的自然数，均有

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}.$$

429. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{(n-1)x+\frac{a}{n}[1+2+\cdots+(n-1)]\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\left(x+\frac{a}{2}\right)$

$=x+\frac{a}{2}$.

430. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots\right.$

$\left.+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{(n-1)x^2+\frac{2ax}{n}[1+2+\cdots+(n-1)]\right.$

$\left.+\frac{a^2}{n^2}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{(n-1)x^2+\frac{n-1}{1}ax+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}a^2\right\}$

$=x^2+ax+\frac{a^2}{3}$.

431. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}$.

解 $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$,

$2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

于是,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2(n+1)}=1$

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4n^3}-\frac{n}{4}\right)^{*)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n}=\frac{1}{2}.$$

*）利用 3 题及 1 题的结果.

433. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$.

解 令

$$1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3=x_n,$$

$$[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2=y_n,$$

则 $y_{n+1}>y_n$，且 $y_n\to+\infty$，由于

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y}$$

$$=\frac{(3n+1)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n+1)]^2-[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$$

$$=\frac{(3n+1)^3}{\left[\dfrac{(1+n)(3n+2)}{2}+\dfrac{n(3n-1)}{2}\right](3n+1)}\to 3$$

$(n\to\infty)$.

利用 143 题的结果即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}=3.$$

434. 把由抛物线 $y=b(\frac{x}{a})^2$，Ox 轴及直线 $x=a$ 所围成的曲边三角形 OAM（图 1.237）的面积，当作以 $\frac{a}{n}$ 为底的各内接矩形面积之和当 $n\to\infty$ 的极限值，求此面积.

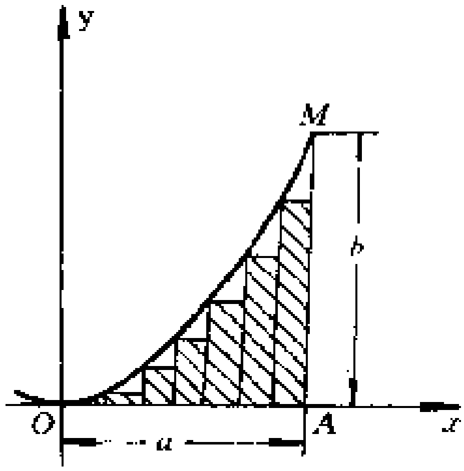


图 1・237

解 底的 n 个分点为

$0,\frac{a}{n},\frac{2a}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}a$；

它们所对应的高为

$0,b\left(\frac{1}{n}\right)^2,b\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,$

$b\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$.

于是，得内接的 n 个矩形面积之和为

$$ab\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{ab(n-1)(2n-1)}{6n^2},$$

当 $n\to\infty$ 时，它趋向于 $\frac{ab}{3}$，即

$$\text{面积}\,OAM=\frac{ab}{3}.$$

求极限：

435. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

解 分子分母同除以 $\sqrt{x}$，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=1.$$

436. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

解 分子分母同除以$\sqrt{x}$,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

437. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解 分子分母同乘以它们的共轭因式,得

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}$$

$$= \frac{4}{3}.$$

438. $\lim\limits_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

$$= \lim_{x\to -8} \frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{(2+\sqrt[3]{x})(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$= \lim_{x\to -8} \frac{-(8+x)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$= -\lim_{x\to -8} \frac{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}+3}$$

$$= -2.$$

439. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} (a > 0).$$

440. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$$

$$=-\frac{1}{16}.$$

441. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

解 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt[3]{x-6}+2)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}{(x^3+8)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x^2-2x+4)(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)}$$

$$=\frac{1}{144}.$$

442. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+2}=\dfrac{1}{4}.$

443. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^4}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{9+2x}+5)}$$

$$=2\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9-2x}+5}=\frac{12}{5}.$$

444. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ （n 为整数）.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1}$$

$$=\frac{1}{n}.$$

445. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-2x-x^2}-1-x)(\sqrt{1-2x-x^2}+1+x)}{x(\sqrt{1-2x-x^2}+1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2(2+x)}{\sqrt{1-2x-x^2}+1+x}$$

$$=-2.$$

446. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2)}{(x+x^2)}$$

$$\cdot\frac{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-x}{(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

447. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x})}{(x+2\sqrt[3]{x^4})}$$

$$\cdot\frac{(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}{(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(1+2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}$$

$$=\frac{2}{27}.$$

448. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$\cdot\frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{3}{2}.$$

449. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt[6]{(x+2)^3}-\sqrt[6]{(x+20)^2})(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(\sqrt[4]{x+9}-2)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}$$

$$\cdot\frac{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{[(x+2)^3-(x+20)^2](\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\cdots+\sqrt[6]{(x+2)^{10}})}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x^2+12x+56)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x^2+12x+56)(\sqrt[4]{x+9}+2)(\sqrt{x+9}+4)}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}}+\sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$=\frac{189\cdot 4\cdot 8}{3^5+3^4\cdot 3+3^3\cdot 3^2+3^2\cdot 3^3+3\cdot 3^4+3^5}$$

$$=\frac{6048}{1458}=4\frac{4}{27}$$

450. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}+\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^4} - \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^3}\right]\left[1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right]}{\left[1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right]\left[1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right]}$$

$$\cdot \frac{\left[\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right]}{\left[\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{7}{12}+\frac{23x}{48}+\frac{7x^2}{54}+\frac{x^3}{81}\right)\left[1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right]}{\frac{x}{2}\left[\sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{44}} + \cdots + \sqrt[12]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^{33}}\right]}$$

$$= \frac{7}{36}.$$

451\. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \sqrt[5]{(1+5x)^3}(1+x) + \cdots + (1+x)^4)}{(1+5x)-(1+x)^5}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \sqrt[5]{(1+5x)^3}(1+x) + \cdots + (1+x)^4}{-10-10x-5x^2-x^3}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

452\. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ （m 及 n 为整数）.

解 如果 m 及 n 为正整数，则

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^n-(1+\beta x)^m}{x\left(\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}}+\cdots+\sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(n\alpha-m\beta)+(C_n^2\alpha^2x+\cdots+\alpha^nx^{n-1}-C_m^2\beta^2-\cdots-\beta^mx^{m-1})}{\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}}+\cdots+\sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}}}$$

$$=\frac{n\alpha-m\beta}{mn}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 为负整数. 设 $m=-m'$,$n=-n'$,其中 m' 及 n' 为正整数,则

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}=\frac{\sqrt[n']{1+\beta x}-\sqrt[m']{1+\alpha x}}{\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}.$$

上式的分母趋于 1,于是利用本题前半段的结果,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n']{1+\beta x}-\sqrt[m']{1+\alpha x}}{x}=\frac{\beta}{n'}-\frac{\alpha}{m'}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 中有一个为负整数,另一个为正整数,则同法可证上述结论仍然成立. 因此,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\quad(mn\neq 0).$$

453. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m 及 n 为整数).

解 与 452 题相同,先设 m 及 n 为正整数.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^n(1+\beta x)^m-1}{x\left(\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}\cdot(1+\beta)^{m(mn-1)}}+\cdots+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n\alpha+m\beta+o(x)}{\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}(1+\beta x)^{m(mn-1)}}+\cdots+1}$$

$$=\frac{n\alpha+m\beta}{mn}$$

$$=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}.$$

若 m 及 n 为负整数，则此结果仍然成立. 事实上，只须设 $m=-m'$，$n=-n'$，其中 m' 及 n' 为正整数. 于是，

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1=\frac{1-\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}{\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}.$$

再利用前半段结果，即得

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}{x(\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x})}=-\frac{\alpha}{m'}-\frac{\beta}{n'}=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}.$$

若 m 及 n 中只有一个为负整数，则同法可证上述结论仍然成立. 因而，当 m 及 n 为整数时，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}\quad(mn\neq0).$$

454. 设 $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 又 m 表整数，求证：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}.$$

证

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{P(x)}{x(\sqrt[m]{1+P(x)}^{m-1}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}}{(1+P(x))^{\frac{m-1}{m}}+\cdots+1}$$

$$=\frac{a_1}{m}.$$

求下列的极限：

455. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$（$m$ 及 n 表整数）.

解 当 m 及 n 为正整数时，我们有

$$\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1}{x^{\frac{m-1}{m}}+x^{\frac{m-2}{m}}+\cdots+1}\to\frac{n}{m}(x\to 1).$$

若 m 及 n 为负整数时，设 $m=-m'$，$n=-n'$，其中 m' 及 n' 为正整数，于是

$$\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{1-\sqrt[m']{x}}{1-\sqrt[n']{x}}\cdot\frac{\sqrt[n']{x}}{\sqrt[m']{x}}\to\frac{n'}{m'}=\frac{n}{m}\quad(x\to 1).$$

当 m 及 n 中只有一个为负整数仍然成立. 因此

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{n}{m}\quad(m\neq 0).$$

456. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

解 设 $x=t^{n!}$，则

$$\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

$$=\frac{(1-t^{3\cdot 4\cdots n})(1-t^{2\cdot 4\cdot 5\cdots n})\cdots(1-t^{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-1)})}{(1-t^{n!})^{n-1}}$$

$$=\frac{(1+t+t^2+\cdots+t^{\frac{n!}{2}-1})(1+t+\cdots+t^{\frac{n!}{3}-1})\cdots(1+t+\cdots+t^{\frac{n!}{n}-1})}{(1+t+\cdots+t^{n!-1})^{n-1}}$$

当 $x\to 1$ 时，$t\to 1$，于是上式趋向于

$$\frac{\frac{n!}{2}\cdot\frac{n!}{3}\cdots\frac{n!}{n}}{(n!)^{n-1}}=\frac{1}{n!},$$

即

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{1}{n!}.$$

457. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}}=\frac{a+b}{2}.$$

458. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{1+\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

459. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$

解 设 $x=\frac{1}{t}$,则

$$x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$$

$$=\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+2t}+1)^2-4(1+t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}$$

$$= \frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}$$

$$= \frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)(1+\sqrt{1+2t})^2}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}$$

$$= \frac{-4}{(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}.$$

当 $x \to +\infty$ 时，$t \to 0$，于是上式趋向于 $-\frac{1}{4}$，

即

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x) = -\frac{1}{4}.$$

460. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$.

解

$$\lim_{x\to+0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)-\left(\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{2\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$= 2\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+x\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+x\sqrt{x}}}}$$

$= 1.$

461. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}}$$

$=\dfrac{2}{3}.$

462. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}).$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+3x^2)^2-(x^2-2x)^3}{\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^{10}}+\sqrt{(x^3+3x^2)^8(x^2-2x)^3}+\cdots+\sqrt[6]{(x^2-2x)^{15}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\left(12-\dfrac{3}{x}+\dfrac{8}{x^2}\right)}{\sqrt[6]{(x^3+3x^2)^{10}}+\cdots+\sqrt[6]{(x^2-2x)^{15}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{12-\dfrac{3}{x}+\dfrac{8}{x^2}}{\sqrt[6]{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{10}}+\cdots+\sqrt[6]{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{15}}}$$

$=2.$

463. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}].$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]\cdot[(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}]}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= 4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\frac{4}{3}.$$

464. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^2+2x}-x-1)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}{(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right]}$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

465. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x]$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}-x]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a_1)\cdots(x+a_n)-x^n}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+a_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)x^{n-1}+\cdots+\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+a_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{a_i}{x}\right)^{\frac{n-j}{n}}\right]}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}.$$

466. $\lim_{x \to \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$ （n 表自然数）.

解 $\lim_{x \to \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n\right]$$

$$= 2^n.$$

467. $\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1 + x^2} + x)^n - (\sqrt{1 + x^2} - x)^n}{x}$ （n 表自然数）.

解 $\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1 + x^2} + x)^n - (\sqrt{1 + x^2} - x)^n}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x}[(x + \sqrt{1 + x^2})^{n-1} + (x + \sqrt{1 + x^2})^{n-2}$$
$$(\sqrt{1 + x^2} - x) + \cdots + (\sqrt{1 + x^2} - x)^{n-1}]$$

$$= 2n.$$

468. 设二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的系数 a 趋于零，系数 b 与 c 为常数，且 $b \neq 0$，试研究此二次方程式之二根 x_1 及 x_2 的性质.

解 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

不失一般性，假设 $b>0$，于是，有

$$\lim_{a\to 0} x_2=\infty$$

及

$$\lim_{a\to 0} x_1=\lim_{a\to 0}\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$=-2c\lim_{a\to 0}\frac{1}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$=-\frac{c}{b}.$$

469. 从条件：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$$

求常数 a 和 b.

解 $\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b$

$$=\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}.$$

按假设，上式的极限为零的必要条件是

$$1-a=0 \quad 及 \quad a+b=0,$$

解之，得

$$a=1,\quad b=-1.$$

470. 从条件：

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0$$

和 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0$

求常数 a_i 和 $b_i(i=1,2)$.

解 $\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1$

$$=\frac{(1-a_1^2)x^2-(1+2a_1b_1)x+(1-b_1^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1},$$

上式极限为零的必要条件是

$$1-a_1^2=0 \quad 及 \quad 1+2a_1b_1=0,$$

解之,得

$$a_1=\pm 1, \quad b_1=\mp\frac{1}{2}.$$

同理可得

$$a_2=\pm 1, \quad b_2=\mp\frac{1}{2}.$$

求下列的极限:

471. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}$

$=5.1=5.$

472. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量,而 $|\sin x|\leqslant 1$,

故$\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小量,即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

473. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m 及 n 为整数).

解 设 $x=\pi+y$,则当 $x\to\pi$ 时,$y\to 0$. 于是,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(-1)^m\sin my}{(-1)^n\sin ny}$$

$$=(-1)^{m-n}\lim_{y\to 0}\frac{\sin my}{my}\cdot\frac{ny}{\sin ny}\cdot\frac{m}{n}$$

$$= (-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

474. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

475. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}\cos x} = \frac{1}{2}.$$

476. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 4x\sin x}{\sin x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\cos 4x = 2.$$

477. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2}$$

$$=4\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cos x=4.$$

478. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+\sin x}{2\sin^2\frac{px}{2}+\sin px}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{px}{2}\left(\sin\frac{px}{2}+\cos\frac{px}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{px}{2}}{\sin\frac{px}{2}}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{px}{2}+\cos\frac{px}{2}}$$

$$=\frac{1}{p}\quad(p\neq0).$$

479. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos 2x \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\cos 2y \sin y}{\sin 2y \cos y} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos 2y}{2\cos^2 y}$$

$$= \frac{1}{2},$$

其中 $x = \frac{\pi}{4} + y$.

480. $\lim\limits_{x \to 1}(1 - x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

解 设 $x = 1 - y$,则

$$\lim_{x \to 1}(1 - x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{y \to 0} y \operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2}$$

$$= \lim_{y \to 0}\left[\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \cos\frac{\pi y}{2}\right] = \frac{2}{\pi}.$$

481. 证明等式:

(a) $\lim\limits_{x \to a}\sin x = \sin a$; (б) $\lim\limits_{x \to a}\cos x = \cos a$;

(в) $\lim\limits_{x \to a}\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}a \left(a \neq \frac{2n-1}{2}\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$.

证 (a) $|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+a}{2}\right|$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant |x - a|.$$

任给 $\varepsilon > 0$,要使

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon,$$

只须 $|x - a| < \varepsilon$,取 $\delta = \varepsilon$,则当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

此即 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a.$

(б) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\lim\limits_{x\to a}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a.$$

(в) $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{tg}x=\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x}=\frac{\sin a}{\cos a}=\mathrm{tg}a.$

其中 $a\neq\frac{2n-1}{2}\pi$； $n=0,\pm1,\pm2\cdots.$

求下列的极限：

482. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}.$

解 $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos a.$$

483. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}.$

解 $$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\sin\frac{x+a}{2}$$

$$=-\sin a.$$

484. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}a}{x-a}.$

解 $$\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos x\cos a}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 a} \quad \left(a \neq \frac{2k+1}{2}\pi ; k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

485. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$.

解 $$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$$
$$=-\lim_{x \to a} \frac{\sin (x-a)}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a}$$
$$=-\frac{1}{\sin^2 a} \quad (a \neq k\pi ; k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

486. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}$.

解 $$\lim_{x \to a} \frac{\sec x-\sec a}{x-a}=\lim_{x \to a} \frac{\cos a-\cos x}{(x-a) \cos x \cos a}$$
$$=\lim_{x \to a} \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos x \cos a} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$
$$=\frac{\sin a}{\cos^2 a} \quad \left(a \neq \frac{2k+1}{2}\pi ; k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

487. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{cosec} x-\operatorname{cosec} a}{x-a}$.

解 $$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{cosec} x-\operatorname{cosec} a}{x-a}$$
$$=-\lim_{x \to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a}$$
$$=-\frac{\cos a}{\sin^2 a}{}^{*)} \quad (a \neq k\pi ; k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

*）利用 482 题的结果.

488. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin (a+2x)-2 \sin (a+x)+\sin a}{x^2}$.

解 $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin (a+2x)-2 \sin (a+x)+\sin a}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{[\sin(a+2x) - \sin(a+x)] - [\sin(a+x) - \sin a]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos\left(a + \frac{3x}{2}\right) \sin \frac{x}{2} - 2\cos\left(a + \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin \frac{x}{2}\left[\cos\left(a + \frac{3x}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$$

$$= -\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \sin(a+x)$$

$$= -\sin a.$$

489. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{[\cos(a+2x) - \cos(a+x)] - [\cos(a+x) - \cos a]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin\left(a + \frac{3x}{2}\right) \sin \frac{x}{2} + 2\sin\left(a + \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{2\sin \frac{x}{2}\left[\sin\left(a + \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{x}{2}\right)\right]}{x^2}$$

$$= -\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cos(a+x)$$

$$= -\cos a.$$

490. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tg} a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(a+2x)-2\mathrm{tg}(a+x)+\mathrm{tg}a}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\mathrm{tg}(a+2x)-\mathrm{tg}(a+x)]-[\mathrm{tg}(a+x)-\mathrm{tg}a]}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\dfrac{\sin(a+2x)\cos(a+x)-\cos(a+2x)\sin(a+x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)}}{x^2}\right.$

$\left.+\dfrac{\dfrac{-\cos a\sin(a+x)-\cos(a+x)\sin a}{\cos(a+x)\cos a}}{x^2}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x[\cos(a+x)\cos a-\cos(a+x)\cos(a+2x)]}{x^2\cos a\cos(a+2x)\cos^2(a+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{2\sin(a+x)}{\cos a\cos(a+2x)\cos(a+x)}$

$=\dfrac{2\sin a}{\cos^3 a}\qquad\left(a\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi;k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ctg}(a+2x)-2\mathrm{ctg}(a+x)+\mathrm{ctg}a}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ctg}(a+2x)-2\mathrm{ctg}(a+x)+\mathrm{ctg}a}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x\sin(a+x)[\sin a-\sin(a+2x)]}{x^2\sin a\sin^2(a+x)\sin(a+2x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\dfrac{2\cos(a+x)}{\sin a\cdot\sin(a+x)\sin(a+2x)}$

$=\dfrac{2\cos a}{\sin^3 a}\quad(a\neq k\pi;k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$

492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}[\cos x-\cos(2a+3x)]-\sin^2 a}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos(2a + 3x) - (1 - \cos 2a)}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[- \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} + \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{3\sin\left(2a + \frac{3x}{2}\right)}{2} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \sin 2a.$$

493. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$.

解 $$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3.$$

494. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$.

解 因为

$$1 - \cos x \cos 2x \cos 3x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)\cos 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cos 4x \cos 2x - \frac{1}{2}\cos^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 2x) - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x).$$

所以,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin 3x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}(4+16+36)=14.$$

495. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

解 设 $x=\frac{\pi}{3}+y$,则

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{1-\cos y+\sqrt{3}\sin y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\sin\frac{y}{2}+\sqrt{3}\,\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

496. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\mathrm{tg}^3 x-3\mathrm{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

解 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{tg}^3 x-3\mathrm{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{tg}x\cdot\frac{\sin^2 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}x(\sin x + \sqrt{3}\cos x)}{-\frac{1}{2}\cos^2 x} = -24.$$

497. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

解 $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\dfrac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}a\operatorname{tg}x}\right)\left(\dfrac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}a\operatorname{tg}x}\right) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^4 a - 1)}{x^2(1 - \operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 x)} = \operatorname{tg}^4 a - 1 = \frac{-\cos 2a}{\cos^4 a}$$

$$\left(a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

498. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}^3 x}$.

解 $$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}^3 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{2\sin^3 x - \sin^2 x\cos x - \cos^3 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x}{2\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x} = \frac{3}{4}.$$

499. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$.

解 $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}x - \sin x}{x^3(\sqrt{1 + \operatorname{tg}x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3\cos x(\sqrt{1 + \operatorname{tg}x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot$$

$$\frac{1}{\cos x(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

500. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\frac{4}{3}.$$

501. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt[3]{\cos x}(1-\sqrt[6]{\cos x})}{\sin^2 x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+\sqrt[6]{\cos x}+\cdots+\sqrt[6]{\cos^5 x}}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot$$

$$\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1+\sqrt[6]{\cos x}+\cdots+\sqrt[6]{\cos^5 x}}$$

$$=\frac{1}{12}.$$

502. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=\sqrt{2}.$$

503. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2\frac{x}{1+\sqrt{\cos x}}=0.$$

504. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

解 不妨令 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x}(1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})}$$

$$+ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2(1 + \sqrt[3]{\cos 3x} + \sqrt[3]{\cos^2 3x})} = 3.$$

505. $\lim_{x \to +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

解 $\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}$

$$= 2\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}.$$

因为 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \to 0$

$(x \to +\infty)$，所以，

$$\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \to 0 \quad (x \to +\infty).$$

又因 $\left|\cos \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}\right| \leqslant 1$，

故 $\lim_{x \to +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0.$

506. (а) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$； (б) $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$；

(в) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

解 (а) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \dfrac{1}{2}$；

(б) $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=1^0=1,$$

507. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}=0.$

508. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

解 因为当 $x\to\infty$ 时，

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\to\frac{3}{2}.$$

及 $$\frac{x^3}{1-x}=\frac{x^2}{\frac{1}{x}-1}\to-\infty,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=0.$$

509. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin^n\frac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

解 因为$\left|\sin\frac{2\pi n}{3n+1}\right|\leqslant1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin^n\frac{2\pi n}{3n+1}=0.$$

510. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$.

解 因为当 $x\to\frac{\pi}{4}+0$ 时，

$$1<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)<+\infty$$

及 $\quad \operatorname{tg}2x \to -\infty$.

所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}=0.$$

511. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

解 $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=1.$

512.+ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{\frac{x^2-1}{2}\cdot 2+1}=e^2.$$

513. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1.$

514. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$.

解 $\quad \lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}(-2)}=e^{-2}.$

515. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a+a}=e^{2a}.$$

516. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x (a_1>0, a_2>0)$.

解 $$\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x\cdot\left(\frac{x+\dfrac{b_1}{a_1}}{x+\dfrac{b_2}{a_2}}\right)^x$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x\cdot\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+\dfrac{b_2}{a_2}}{\dfrac{b_1}{a_1}-\dfrac{b_2}{a_2}}}\right)^{\frac{x+\frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}}\left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}\right)-\frac{b_2}{a_2}}$$

(1) 当 $a_1=a_2=a$ 时，

$$\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=\left(1+\frac{1}{\dfrac{x+\dfrac{b_2}{a}}{\dfrac{b_1-b_2}{a}}}\right)^{\frac{x+\frac{b_2}{a}}{\frac{b_1-b_2}{a}}\cdot\frac{b_1-b_2}{a}-\frac{b_2}{a}}$$

于是，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}.$$

(2) 当 $a_1<a_2$ 时，$0<\dfrac{a_1}{a_2}<1$，

于是，

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x\to 0\quad(x\to+\infty),$$

而 $$\left(\frac{x+\dfrac{b_1}{a_1}}{x+\dfrac{b_2}{a_2}}\right)^x\to e^{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}},$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x=0.$$

(3) 当 $a_1 > a_2$ 时，$\frac{a_1}{a_2} > 1$.

于是，

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x \to +\infty,$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x = +\infty.$$

517. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\cos^2 x} = e.$$

518. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$

$$= \lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\frac{1}{\sin\pi x}\cdot\cos\pi x} = e^{-1}.$$

519. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1+\sin x}{\operatorname{tg}x-\sin x}}\right)^{\frac{1+\sin x}{\operatorname{tg}x-\sin x}\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}} = e^0 = 1.$$

520. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

解 $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

$$= \lim_{x \to a} \left(1 + \frac{1}{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a}}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a} \cdot \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \cdot \frac{1}{\sin a}}$$

$$= e^{\operatorname{ctg} a\,*)} (a \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

*) 利用 482 题的结果.

521. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x}}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x} \cdot \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x}}$

因为

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \frac{\cos x + 1 - 2\cos^2 x}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{x^2}(1 + 2\cos x) = \frac{1 + 2\cos x}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \to \frac{3}{2}$$

$(x \to 0)$,

所以,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

522. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

解 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (1 + \operatorname{tg} x - 1)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} \cdot \frac{-2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1}} = e^{-1}.$$

523. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}^2x)^{-\frac{\operatorname{tg}x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\operatorname{ctg}^2x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg}^2x}\cdot\frac{-\operatorname{ctg}x}{2}}=e^0=1.$$

524. $\lim\limits_{x\to0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^{\operatorname{ctg}x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{\frac{1+\operatorname{tg}x}{-2\operatorname{tg}x}}\right)^{\frac{1+\operatorname{tg}x}{2\operatorname{tg}x}\cdot\left(\frac{-2}{1+\operatorname{tg}x}\right)}=e^{-2}.$$

525. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

解 $\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

$$=\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\cdot x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

因为

$$x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-\frac{2\sin\frac{1}{2x}\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}\cdot2}$$

$$\to1\quad(x\to\infty),$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

526. $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ *).

解 $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\cos\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x \to +0} e^{\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(\cos\sqrt{x} - 1 + 1)}{\cos\sqrt{x} - 1}(\cos\sqrt{x} - 1)}$$

$$= \lim_{x \to +0} e^{-\frac{1}{x} \cdot 2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2} **)} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

*）原题为 $x \to 0$，应改为 $x \to +0$.

* *）利用 529 题的结果.

527. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^n$.

解 $$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^n = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{x+1}}\right)^{\frac{n-1}{x+1} \cdot (x+1) + 1} = e^{x+1}.$$

528. $\lim\limits_{n \to \infty}\cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$.

解 $$\lim_{n \to \infty}\cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left(1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 \frac{x}{\sqrt{n}}} \cdot \left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{\sqrt{n}}}\right)^2 \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

529. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

530. $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\mathrm{in}(x+1) - \ln x]$.

解 $$\lim_{x \to +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \ln e = 1.$$

531. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ $(a > 0)$.

解 $$\lim_{x \to a}\frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{x-a}}\right)^{\frac{a}{x-a} \cdot \frac{1}{a}} = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}.$$

532. $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x]$.

解 $\sin \ln(x+1) - \sin \ln x$

$$= 2\cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2} \sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2}.$$

因为

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \to 0 (x \to +\infty),$$

所以

$$\sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2} \to 0;$$

又因 $\cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2}$ 为有界函数，所以

$$\lim_{x \to +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x] = 0.$$

533. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$.

解 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x + \ln\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{10\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)}{10 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}\right)} = \frac{1}{5}.$$

534. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2}\right) = \lg \frac{1}{100} = -2.$

535. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln(2e^{-3x}+1)}{2x+\ln(3e^{-2x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x}\ln(2e^{-3x}+1)}{2+\dfrac{1}{x}\ln(3e^{-2x}+1)}=\frac{3}{2}.$$

536. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2}\ln x+\ln(x^{-\frac{1}{2}}+1+x^{-\frac{1}{6}})}{\dfrac{1}{3}\ln x+\ln(x^{-\frac{1}{3}}+1+x^{-\frac{1}{12}})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(x^{-\frac{1}{2}}+1+x^{-\frac{1}{6}})}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(x^{-\frac{1}{2}}+1+x^{-\frac{1}{12}})}=\frac{3}{2}.$$

537. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}(x>0)$.

解 $$\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\log(x^2-h^2)-\log x^2}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(-\frac{1}{x^2}\log\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}}\right)=-\frac{1}{x^2}\log e.$$

538. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left[1+\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin bx}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left[1+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}\right]^{\frac{1}{\sin bx}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln\left[1+\frac{\sqrt{2}\sin ax}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}\right]^{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sqrt{2}\sin ax}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}\cdot\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{a}{b}}$$

$$=\ln e^{\frac{2a}{b}}=\frac{2a}{b}.$$

539. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\cos ax}{\cos ax-1}\cdot\frac{\cos bx-1}{\ln\cos bx}\cdot\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{2\sin^2\frac{bx}{2}}=\frac{a^2}{b^2}.$$

540.$^+$ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right]=\ln 1=0.$

541. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}(a>0)$.

解 设 $a^x-1=y$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

542. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}(a>0)$.

解 $$\frac{a^x-x^a}{x-a}=\frac{a^a\left[a^{x-a}-\left(\frac{x}{a}\right)^a\right]}{x-a}$$

$$=a^a\cdot\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^a-1}{x-a}$$

$$=a^a\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\frac{e^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{a\ln\frac{x}{a}}\cdot\frac{a\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{x-a},$$

当 $x\to a$ 时，等式第一项趋向 $a^a\ln a$，而第二项趋向 $a^a\cdot 1\cdot 1=a^a$，所以，

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\ln a-a^a=a^a\ln\frac{a}{e}.$$

543. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}\quad(a>0)$.

解 $$\frac{x^x-a^a}{x-a}=a^a\cdot\frac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}\cdot\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}.$$

而当 $x\to a$ 时，

$$\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}=\frac{x\ln x-x\ln a}{x-a}+\ln a$$

$$=\frac{x}{a}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{\frac{x-a}{a}}+\ln a\to 1+\ln a=\ln ea.$$

又

$$\frac{e^{x\ln x - a\ln a} - 1}{x\ln x - a\ln a} \to 1 (x \to a),$$

所以

$$\lim_{x \to a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a \ln ea.$$

544. $\lim\limits_{x \to 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} e\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x} \cdot e^{-x}} = e \cdot e = e^2.$

545. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$= \left(1 + \frac{1}{\frac{1 + x \cdot 3^x}{x(2^x - 3^x)}}\right)^{\frac{1 + x \cdot 3^x}{x(2^x - 3^x)} \cdot \frac{2^x - 3^x}{x(1 + x \cdot 3^x)}}.$$

因为

$$\frac{2^x - 3^x}{x(1 + x \cdot 3^x)}$$

$$= \frac{1}{1 + x \cdot 3^x} \cdot \left(\frac{2^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x}\right) \to$$

$$\ln 2 - \ln 3^{*)} = \ln \frac{2}{3} \quad (x \to 0),$$

所以

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\ln \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

*）利用 541 题的结果.

546. $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{2\operatorname{tg}\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{2\operatorname{tg}\frac{1}{n}}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}}}=e^2.$$

547. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}[e^{(\alpha-\beta)x}-1]}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}x\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{(\alpha-\beta)x}\cdot\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}x}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}x}\cdot\frac{e^{\beta x}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}x}$$

$$=\ln e^{*)}=1.$$

*）利用 541 题的结果.

548. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}\quad(a>0)$.

解 $$\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha-1}{\left(\frac{x}{a}\right)^\beta-1}$$

$$=a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{e^{\alpha\ln\frac{x}{a}}-1}{\alpha\ln\frac{x}{a}}\cdot\frac{\beta\ln\frac{x}{a}}{e^{\beta\ln\frac{x}{a}}-1}\cdot\frac{\alpha}{\beta}.$$

当 $x\to a$ 时，$\ln\frac{x}{a}\to 0$，于是上式趋向$\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$，

即

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}=\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}\quad(\beta\neq 0).$$

549. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^{x}-a^{b}}{x-b}\quad(a>0).$

解 $$\lim_{x\to b}\frac{a^{x}-a^{b}}{x-b}=\lim_{x\to b}a^{b}\cdot\frac{a^{x-b}-1}{x-b}=a^{b}\ln a^{*)}.$$

*）利用 541 题的结果.

550. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^{x}}{h^{2}}\quad(a>0).$

解 $$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^{x}}{h^{2}}=\lim_{h\to 0}a^{x}\cdot\frac{a^{h}+a^{-h}-2}{h^{2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x}}{a^{h}}\left(\frac{a^{h}-1}{h}\right)^{2}=a^{x}\ln^{2}a^{*)}.$$

*）利用 541 题的结果.

551. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a-b}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x+a}\left(1+\dfrac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1+\dfrac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}a+a}\left(1+\dfrac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}b+b}}{\left(1+\dfrac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b}\cdot[2(a+b)]+(a+b)}}$$

$$=\frac{e^{a}\cdot e^{b}}{e^{2(a+b)}}=e^{-(a+b)}.$$

552. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)\quad(x>0).$

解 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}}=\ln x^{*)}$.

*）利用 541 题的结果.

553. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})\quad(x>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n+1}}[x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1]}{\dfrac{1}{n(n+1)}+\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2+n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\dfrac{1}{n(n+1)}}\cdot$$

$$\frac{x^{\frac{1}{n+1}}\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}+\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2+n}\right)}=\ln x.$$

554. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n\quad(a>0,b>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{a}{b^{\frac{1}{n}}-1}}\right)^{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}}-1}\cdot\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{a}}=e^{\frac{1}{a}\ln b}$$

$$=\sqrt[a]{b}.$$

555. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n\quad(a>0,b>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^{\left(\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1}\right)\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n}$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)^{*)}} = \sqrt{ab} \quad (a>0,b>0).$$

*）利用 541 题的结果.

556. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (a>0,b>0,c>0).$

解 利用 555 题的方法:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)^{\frac{1}{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1}\cdot\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3x}}$$

$$= \sqrt[3]{abc}.$$

557. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (a>0,b>0,c>0).$

解 利用 541 题的结果,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x+1}+b^{x-1}+c^{x+1}-a-b-c}{x(a+b+c)}$$

$$= \frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to 0}\left(a\cdot\frac{a^x-1}{x}+b\cdot\frac{b^x-1}{x}+c\cdot\frac{c^x-1}{x}\right)$$

$$= \ln(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}},$$

因而

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)^{\left(\frac{1}{\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1}\right)\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)} = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

558. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (a>0,b>0).$

解 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{\dfrac{a^x+b^x}{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}}\right)^{\frac{a^x+b^x}{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}}\cdot$$

$$\cdot\left[x\left(\frac{a^{x2}-1}{x^2}+\frac{b^{x2}-1}{x^2}\right)-\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right]\cdot\frac{1}{a^x+b^x}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}(\ln a-\ln b)}=\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

559. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}\quad(a>0,b>0).$

解 $$\lim_{x\to0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x^2}-1}{x^2}-\frac{b^{x^2}-1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{a^x-1}{x}-\dfrac{b^x-1}{x}\right)^2}$$

$$=(\ln a-\ln b)\cdot\frac{1}{(\ln a-\ln b)^2}=\frac{1}{\ln a-\ln b}$$

$$=\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}.$$

560. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}\quad(a>0).$

解 $$\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}=\lim_{x\to a}a^{x^a}\cdot\frac{a^{a^x-x^a}-1}{a^x-x^a}=a^{a^a}\ln a.$$

561. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; (б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

解 (a) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{3^x}\cdot\frac{2^x}{\ln(1+2x)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$$

$$=1\cdot 1\cdot 0^{*)}=0.$$

*）利用 529 题的结果.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln 3+\ln(1+3^{-x})}{x\ln 2+\ln(1+2^{-x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3+\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+3^{-x})}{\ln 2+\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+2^{-x})}=\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

562. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{3}{x}}\cdot\frac{x\ln 2+\ln(2^{-x}+1)}{\dfrac{x}{3}}$$

$$=3\ln 2=\ln 8.$$

563. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\lg_x 2$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\lg_x 2=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\ln x}\cdot\ln 2$

$$=-\ln 2\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln[1+(x-1)]}=-\ln 2.^{*)}$$

*）利用 529 题的结果.

564. 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\quad(a>1,n>0).$$

证 当 $x\geqslant 1$ 时，存在唯一的正整数 k，使

$$k\leqslant x<k+1.$$

于是当 $n>0$ 时，我们有

$$\frac{x^n}{a^x}<\frac{(k+1)^n}{a^k}$$

及

$$\frac{x^n}{a^x} > \frac{k^n}{a^{k+1}} = \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a}.$$

因为当 $x \to +\infty$ 时，$k \to +\infty$，所以有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^k} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^{k+1}} \cdot a = 0 \cdot a^{*)} = 0$$

及

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k^n}{a^{k+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a} = 0 \cdot \frac{1}{a}^{*)} = 0.$$

于是，

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$$

*）利用 60 题的结果.

565. 证明：

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lg_a x}{x^\varepsilon} = 0 \quad (a > 1, \varepsilon > 0).$$

证 设 $\log_a x = y$，则 $x = a^y$，且当 $x \to +\infty$ 时，$y \to +\infty$. 于是

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{(a^y)^\varepsilon} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y^{\frac{1}{\varepsilon}}}{a^y} \right)^\varepsilon = 0^{*)},$$

即

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0.$$

*）利用 564 题的结果.

求下列的极限：

566. (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$； (б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$.

解 (a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \ln(1 + x^2 e^{-x})}{2x + \ln(1 + x^4 e^{-2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{\ln(1+x^2e^{-x})}{x^2e^{-x}}\cdot xe^{-x}}{2+\dfrac{\ln(1+x^4e^{-2x})}{x^4e^{-2x}}\cdot x^3e^{-2x}}=\frac{1}{2};$$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{\ln(1+x^2e^{-x})}{x}}{2+\dfrac{\ln(1+x^4e^{-2x})}{x}}=\frac{1}{2},$$

其中利用了结果

$$\lim_{x\to+\infty}x^na^{-x}=0(n>0,a>1),$$

因而

$$x^2e^{-x}\to 0\text{ 及 }x^4e^{-2x}\to 0\quad(x\to+\infty).$$

567. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln(1+xe^x)}{xe^x}\cdot xe^x}{\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to 0}e^x\sqrt{1+x^2}=1.$$

568. $\lim\limits_{x\to\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{(x+2)^{x+2} \cdot x^x}{(x+1)^{2x+2}} = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2+2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+2}}$$

$$= \ln \frac{e^2}{e^2} = 0.$$

569. $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right] \quad (a>1).$

解 $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right]$

$$= \lim_{x\to+0}\ln\left(\frac{\ln a+\ln x}{\ln x-\ln a}\right)^{\ln x+\ln(\ln a)}$$

$$= \lim_{x\to+0}\ln\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}\cdot 2\ln x\cdot\frac{\ln x+\ln(\ln a)}{\ln x-\ln a}}$$

$$= \ln e^{\ln a^2} = \ln a^2.$$

570. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right].$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)}{\ln^2\left(1+\frac{2}{x-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty}$$

$$\frac{\left\{\ln\left(1+\frac{2}{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}\right)^{\frac{(x+\sqrt{x^2-1})\cdot}{\sqrt{2}}}\right.}{\ln^2\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]}$$

$$\frac{\left.\cdot\frac{(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{2}}\right\}\cdot\frac{2}{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{2(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{2\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]}$$

$$=\frac{1}{8}.$$

571. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{(e^{x^2}-1)(\sqrt{1+x\sin x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}(1+\sqrt{1+x\sin x})}=\frac{1}{2}.$$

572. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}\sin\frac{x(e^x-e^{-x})}{2}}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x(e^x-e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x-e^{-x})}{2}}\cdot\frac{x^2(e^{4x}-1)}{4x^3e^{2x}}\right]$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\cdot\frac{1}{e^{2x}}=-2.$$

573. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+2\left(e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2e^{\frac{x}{x+1}}-1}}\right\}^{\frac{2(x^2+1)}{x+1}\cdot\frac{e^{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{x}{x+1}}}$$

$$=e^2$$

574. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$

$$=\lim_{x\to 1}[1+(-x+1)]^{\frac{1}{1-x}\cdot\frac{\frac{\pi(x-1)}{2}}{\sin\frac{\pi(x-1)}{2}}\cdot\frac{2}{\pi}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

575. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^\alpha x)(1-\sin^\beta x)}}\quad(\alpha>0,\beta>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^\alpha x(1-\sin^\beta x)}}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{(\alpha+\beta)\cdot\ln\sin x}}{\sqrt{(1-e^{\alpha\cdot\ln\sin x})(1-e^{\beta\cdot\ln\sin x})}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-e^{(\alpha+\beta)\cdot\ln\sin x}}{(\alpha+\beta)\ln\sin x}\right)\cdot\left(\frac{\alpha\cdot\ln\sin x}{1-e^{\alpha\cdot\ln\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left(\frac{\beta\cdot\ln\sin x}{1-e^{\beta\ln\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{(\alpha+\beta)\cdot\ln\sin x}{\sqrt{\alpha\beta}\cdot\ln\sin x}\right)=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$

注　其中，x 在$\frac{\pi}{2}$的附近变化，故 $\sin x>0$.

576⁺ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{sh}^2x}{\ln(\mathrm{ch}3x)}$（参见 340 题）.

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{sh}^2x}{\ln(\mathrm{ch}3x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{(e^{2x}-1)^2}{4e^{2x}}}{\ln\left[1+\frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x}\right)^2\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2\cdot\frac{\frac{1}{2}(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x})^2\cdot e^x}{\ln\left[1+\frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}x}-e^{-\frac{3}{2}x}\right)^2\right]}$$

$$\cdot\left(\frac{3x}{e^{3x}-1}\right)^2\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{9}.$$

577. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{x^2+x}-\mathrm{sh}\sqrt{x^2-x}}{\mathrm{ch}x}$.

解　$\mathrm{sh}\sqrt{x^2+x}-\mathrm{sh}\sqrt{x^2-x}$

$$=2\mathrm{sh}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{2}\cdot\mathrm{ch}\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2},$$

因为

$$\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\to1$$

$$(x\to+\infty),$$

$$\frac{\mathrm{ch}\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\mathrm{ch}x}$$

$$=\frac{e^{\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}+e^{-\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{2}}}{e^x+e^{-x}}\to 1,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch}x}=2\operatorname{sh}\frac{1}{2}.$$

578. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}[2x+\ln 2-\ln(1+e^{2x})]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln 2-\ln(e^{-2x}+1)]=\ln 2.$$

579. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\sin 2x}-e^{\sin x})(e^{2x}+1)}{e^{2x}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}\right)(e^{2x}+1)}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)2}{1}=1.$$

580. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$.

解 $\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}=\left(\dfrac{e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}}{2\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$

$$=\left(1+\frac{1}{\frac{2\cos\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}}}\right)^{\frac{2\cos\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{n^2\left(e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}\right)}{2\cos\frac{\pi}{n}}},$$

因为

$$n^2\left(e^{\frac{\pi}{n}}+e^{-\frac{\pi}{n}}-2\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=n^2\left[\left(e^{\frac{\pi}{2n}}-e^{-\frac{\pi}{2n}}\right)^2+2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

$$=n^2\left[\left(e^{\frac{\pi}{2n}}-e^{-\frac{\pi}{2n}}\right)^2+4\sin^2\frac{\pi}{2n}\right]$$

$$=\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2n}}-1}{\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{e^{-\frac{\pi}{2n}}-1}{-\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2+\pi^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2$$

$$\longrightarrow 2\pi^2\quad(n\to\infty),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}=e^{\pi^2}.$$

581. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$.

582. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

583. $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arcctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}=-\dfrac{\pi}{2}$.

584. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arcctg}(-1)=\dfrac{3}{4}\pi$.

585. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$.

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{h}{1+x(x+h)}}{\dfrac{h}{1+x(x+h)}}\cdot\frac{1}{1+x(x+h)}\right]$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\ ^{*)}.$$

*)其中利用了结果:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$.

586. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)}{\dfrac{2x}{1-x}}\cdot\frac{\dfrac{2x}{2-x^2}}{\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{2-x^2}}\cdot\frac{2-x^2}{1-x}\right]=2.$$

587. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}}{\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}}\cdot\frac{n}{n(x^2+1)+x}\right.$$

$$\left.\cdot\left(1+\frac{1}{\dfrac{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2n}}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2n}}}\right)^{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}\cdot\frac{x}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}}\right]=\frac{e^x}{1+x^2}.$$

588. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2x+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2x+1}}{\dfrac{1}{2x+1}}\cdot\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}.$$

589. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=1^{*)}.$$

*)其中利用了结果：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$.

590. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^n}\cdot\frac{(-1)^n}{n\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^n}\cdot\frac{-1}{n\sin(n\pi-\pi\sqrt{1+n^2})}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^n}\cdot\frac{n\pi-\pi\sqrt{1+n^2}}{\sin(n\pi-\pi\sqrt{1+n^2})}}$$

$$\cdot\frac{1}{n(\pi\sqrt{1+n^2}-n\pi)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\pi n(n^2+1-n^2)}}$$

$$=e^{\frac{2}{\pi}}\qquad(n\pi-\pi\sqrt{1+n^2}\to0).$$

591. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

解 设 $y=\frac{1}{x}$,则

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^{100}}{e^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{(y^2)^{50}}{e^{y^2}}=0^{*)}.$$

*)利用 564 题的结果.

592. $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$.

解 设 $y=\frac{1}{x}$,则

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y}=0^{*)}.$$

*)利用 565 题的结果.

593. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$； (б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=+\infty$；

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\dfrac{1}{2}$.

594. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$；

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}}{}^{*)}=-1$$

*)当 $x\to-\infty$时，$x=-\sqrt{x^2}$.

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}}{}^{*)}=1.$$

*)当 $x\to+\infty$时，$x=\sqrt{x^2}$.

595. (a) $\lim\limits_{x\to1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$； (б) $\lim\limits_{x\to1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$；

(б) $\lim\limits_{x\to1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}=-\dfrac{\pi}{2}$.

596. (a) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$； (б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$；

(б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

597. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$； (б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}\cdot\dfrac{e^x}{x}\right]=0$；

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\dfrac{\ln(e^{-x}+1)}{x}\right]=1$.

598. 证明：

(a)当 $x\to-\infty$时，$\dfrac{2x}{1+x}\to2+0$；

(б)当 $x\to+\infty$时，$\dfrac{2x}{1+x}\to2-0$.

证 (a)当 $x<0$ 时，及当$|x|$充分大以后，

$$\frac{2x}{1+x}>2.$$

于是

当 $x\to-\infty$时，$\dfrac{2x}{1+x}\to2+0$；

(б)当 $x>0$ 时，

$$0<\frac{2x}{1+x}<2.$$

于是，

当 $x\to+\infty$时，$\dfrac{2x}{1+x}\to2-0$.

599. 证明：

(a)当 $x\to-0$ 时，$2^x\to1-0$；

(б)当 $x\to+0$ 时，$2^x\to1+0$.

证 (a)当 $x<0$ 时，

$$0<2^x<1.$$

于是，

当 $x\to-0$ 时，$2^x\to1-0$；

(б)当 $x>0$ 时，

$$2^x>1.$$

于是，

当 $x\to+0$ 时，$2^x\to1+0$.

600. 设 $f(x)=x+[x^2]$，求 $f(1)$，$f(1-0)$，$f(1+0)$.

解 $f(1)=2$；

$$f(1-0)=\lim_{x\to1-0}(x+[x^2])=1+0=1;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1+0}(x+[x^2])=1+1=2.$$

601. 设 $f(x)=\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$，求 $f(n)$，$f(n-0)$，$f(n+0)$ $(n=0,\pm1,\cdots)$.

解 $f(n)=0$；

$$f(n-0)=\lim_{x\to n-0}\mathrm{sgn}(\sin\pi x)=(-1)^{n-1};$$

$$f(n+0)=\lim_{x\to n+0}\mathrm{sgn}(\sin\pi x)=(-1)^n.$$

求：

602. $\lim\limits_{x\to0}x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$.

解 因为 $\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ 为有界函数，所以，

$$\lim_{x\to0}x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}=0.$$

603. $\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]$.

解 因为

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}\quad(x\neq0),$$

当 $x>0$ 时

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant1,$$

当 $x<0$ 时，

$$1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\geqslant1,$$

于是，

$$\lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

604. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\pi\sqrt{n^2+1}+n\pi}=0.$$

605. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}[1-\cos(2\pi\sqrt{n^2+n})]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\{1-\cos[2\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]\}=1.$$

606. $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个}x$.

解 先设 $0\leqslant x\leqslant\pi$，这时，$0\leqslant\sin x\leqslant x$，

$0\leqslant\sin(\sin x)\leqslant\sin x$，

依次类推. 用数学归纳法，即可证得

$$0\leqslant\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个} x\leqslant\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n-1个} x,$$

这说明$\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个} x$ 随着 n 的增大而单调减少，于是由其有界性知极限

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个} x=\mu$$

存在有限，且 $0\leqslant\mu\leqslant1$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个} x=\sin(\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n-1个} x)$$

即

$$\sin\mu=\mu,$$

故

$$\mu=0.$$

同法可证，当 $\pi<x\leqslant2\pi$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个} x=0.$$

再利用 $\sin x$ 的周期性（周期为 2π），得知对任一 x 值，均有

$$\lim_{n\to\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个} x=0.$$

607. 设$\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=A$ 及$\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$，由此是否可推出

$$\lim_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B?$$

研究这个例子：当 $x=\dfrac{p}{q}$（其中 p 和 q 是互质的整数）时，$\varphi(x)=\dfrac{1}{q}$；当 x 为无理数时，$\varphi(x)=0$；当 $x\neq0$ 时，$\psi(x)=1$；当 $x=0$ 时，$\psi(x)=0$；并且 $x\to0$.

解 不一定，例如对于函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q},\text{当 } x=\dfrac{p}{q}\text{(其中 } p \text{ 和 } q \text{ 互质)时;}\\ 0,\text{当 } x \text{ 为无理数时.}\end{cases}$$

及

$$\psi(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x\neq 0 \text{ 时;}\\ 0,\text{当 } x=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

有

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0(=A)$$

及

$$\lim_{x\to 0}\psi(x)=1,$$

但是,极限

$$\lim_{x\to 0}\psi(\varphi(x))$$

却不存在. 事实上,当 x 以一串无理数列 x_n 趋近于零时,有 $\varphi(x_n)=0$,因此 $\psi(\varphi(x_n))=0(n=1,2,\cdots)$;而当 x 以一串有理数列 x'_n 趋近于零时,$\varphi(x_n')\neq 0$,因此,$\psi(\varphi(x_n'))=1(n=1,2,\cdots)$. 由此可知,当 $x\to 0$ 时,极限

$$\lim_{x\to 0}\psi(\varphi(x))$$

不存在.

608. 证明哥西定理:若函数 $f(x)$ 定义于区间 $(a,+\infty)$ 上,且在每一个有穷的区间 (a, b) 内是有界的,则

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现设 $x>X_0+1$. 于是,恰有一个正整数 n(依赖于 x),满足 $n\leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x-X_0-n$,则 $0\leqslant\tau<1$, $x=X_0+\tau+n$. 我们有

$$\frac{f(x)}{x}-A=\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]+\frac{f(X_0+\tau)}{x}$$
$$-\frac{(X_0+\tau)A}{x}.$$

显然

$$\left|\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{f(X_0+\tau+n)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right|$$
$$=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A]\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A|$$
$$<\frac{1}{n}\cdot\frac{n\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

由假定,$f(x)$在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界,故存在正数 X_1,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(0\leqslant\tau<1);$$

另外,显然存在正数 X_2,使当 $x>X_2$ 时,恒有

$$\left|\frac{(X_0+1)A}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1,X_2\}$. 于是,当 $x>X$ 时,必有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由此可知
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$$
故(a)获证.

(б)由假定，$f(x)\geqslant c>0$. 记 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=A'$. 显然 $A'\geqslant 0$. 下证 $A'>0$. 事实上，若 $A'=0$，则存在正数 X_0，使当 $x\geqslant X_0$ 时，必 $0<\frac{f(x+1)}{f(x)}<\frac{1}{2}$. 于是
$$0<\frac{f(X_0+n)}{f(X_0)}=\frac{f(X_0+n)}{f(X_0+n-1)}\cdot\frac{f(X_0+n-1)}{f(X_0+n-2)}\cdots$$
$$\cdot\frac{f(X_0+1)}{f(X_0)}<\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
由此可知$\lim\limits_{x\to\infty}f(X_0+n)=0$，此显然与 $f(x)\geqslant c>0$ 矛盾，因此，有 $A'>0$.

由于 $f(x)\geqslant c>0$ 且 $f(x)$在每个有穷区间(a,b)内有界，故函数 $\ln f(x)$在每个有穷区间(a,b)内也有界，并且
$$\lim_{x\to+\infty}[\ln f(x+1)-\ln f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{f(x+1)}{f(x)}=$$
$\ln A'$.

于是，将(a)的结果用于函数 $\ln f(x)$，即知
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x}=\ln A'.$$
故有
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}[e^{\ln f(x)}]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln f(x)}{x}}$$
$$=e^{\ln A'}=A'.$$
证毕.

609. 证明若：(1)函数 $f(x)$定义于域 $x>a$ 内；(2)在每一个有

限的域 $a<x<b$ 内是有界的;(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$(或 $-\infty$),*)则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty(\text{或}-\infty).$$

证 只要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$ 的情形,这时要证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$(对于 $-\infty$ 的情形,只要考虑函数 $-f(x)$ 即可归结为 $+\infty$ 的情形). 任给 $G>0$. 必存在正数 $X_0>a$,使当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$f(x+1)-f(x)>4G.$$

现设 $x>2(X_0+1)$. 仿 608 题(a)之证,恰有一个正整数 n(依赖于 x),满足 $n\leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x-X_0-n$,则 $0\leqslant\tau<1$,$x=X_0+\tau+n$. 由于 $n+1>x-X_0>X_0+2$,故 $n>X_0+1>X_0+\tau$. 从而 $2n>x$,即

$$\frac{n}{x}>\frac{1}{2}.$$

又,我们有

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}+\frac{f(X_0+\tau)}{x};$$

显然

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)]\\&>\frac{1}{n}\cdot 4nG=4G,\end{aligned}$$

故

$$\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}>2G.$$

由假定，$f(x)$在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界，故存在正数 X_1，使当 $x>X_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<G.$$

令 $X=\max\{2(X_0+1),X_1\}$，则当 $x>X$ 时，恒有

$$\frac{f(x)}{x}>G.$$

由此可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

证毕.

*) 原题条件(3)误写为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$，结论误写为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$. 例如，按下式定义$[0,+\infty)$上的函数 $f(x)$：

$$f(x)=\begin{cases}2n,\text{当 } 2n\leqslant x<2n+1 \text{ 时；}\\0,\text{当 } 2n+1\leqslant x<2n+2 \text{ 时.}\end{cases}\quad(=0,1,2,\cdots).$$

则显然 $f(x)$满足原题的条件(1)和(2)(这时 $a=0$)，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$；但显然$\lim\frac{f(x)}{x}\neq\infty$(实际 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$不存在，$\varliminf\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，$\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$).

610. 证明，若：(1)函数 $f(x)$定义于域 $x>a$ 内；(2)在每一个有限的域 $a<x<b$ 内是有界的；(3)存在着有限的或无穷的(带确定符号的无穷，即$+\infty$和$-\infty$)*)极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}.$$

证 先证一条一般性的定理(Stolz 定理在函数情形的推广):若(1)函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都定义于域 $x>a$ 内;(2)$f(x)$ 与 $g(x)$ 在每一个有限域 $a<x<b$ 内有界,并且 $g(x)$ 当 $x<a$ 时满足 $g(x+1)>g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$;(3)存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=l$$

(l 为有限数或为 $+\infty$ 或为 $-\infty$);

则必

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

证如下:

先设 l 为有限数. 任给 $\epsilon>0$. 存在正数 $X_0>a$,使当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}-l\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$

现设 $x>X_0+1$. 于是,恰有一个正整数 n(依赖于 x),使 $n\leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x-X_0-n$,则 $0\leqslant\tau<1$,$x=X_0+\tau+n$. 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}\\&\quad\cdot\left[\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right],\end{aligned}$$

而 $\left|\dfrac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right|<\dfrac{\epsilon}{2}$

$$(k=1,2,\cdots,n),$$

又由于

$$g(x)=g(X_0+\tau+n)>g(X_0+\tau+n-1)$$
$$>g(X_0+\tau+n-2)>\cdots>g(X_0+\tau),$$

从而

$$\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}>0$$
$$(k=1,2,\cdots,n);$$

由此可知

$$\left|\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

容易直接验证等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}-l=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right]\cdot\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\right]$$
$$+\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$，并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界，故必有正数 $X_1>a$ 存在，使当 $x>X_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2},\left|\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}\right|>\frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$. 于是，当 $x>X$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$. l 为有限数时获证.

下设 $l=+\infty$(若 $l=-\infty$,则考虑函数 $-f(x)$ 即可化为 $l=+\infty$ 的情形). 任给 $G>0$. 存在正数 $X_0>a$,使当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}>4G.$$

当 $x>X_0+1$ 时,仿前一段之证,有

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}$$
$$\cdot\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}$$

从而

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}$$
$$>4G\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}$$
$$=4G.$$

易知

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right]\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}$$
$$+\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

根据 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 以及 $f(x)$,$g(x)$ 在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上的有界性,可取正数 $X_1>a$,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$\left|\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2},\left|\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<G.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$. 于是,当 $x>X$ 时,恒有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{1}{2}\cdot 4G-G=G.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$. 所述一般性定理获证.

现在我们应用此一般定理来证明本题. 在一般性定理中取 $g(x)=x^{n+1}$. 显然此 $g(x)$ 满足一般性定理的条件, 并且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n+\frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1}+\cdots+(n+1)x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}$$

$$\cdot\frac{1}{(x+1)+\frac{1}{2}(n+1)nx^{-1}+\cdots+(n+1)x^{-n+1}+x^{-n}}$$

$$=\frac{l}{n+1}.$$

由此, 根据此一般性定理, 即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{n+1}.$$

证毕.

*) 原题所说的无穷, 必须是带确定符号的无穷, 即 $+\infty$ 或 $-\infty$; 参看 609 题末尾加的注.

注. 608 题的(a)和 609 题可直接从上述一般性定理推出. 实际上, 只需令 $g(x)=x$, 由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$$

即知.

611. 证明:(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.

证 (a)当 $x=0$ 时是显然的;当 $x\neq0$ 时,令 $y_n=\frac{n}{x}$,由71题的结果,得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n\cdot x}=e^x;$$

(б)当 $x=0$ 时是显然的,我们先讨论 $x>0$ 的情形.由牛顿二项式定理知

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\leqslant1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

另一方面,当 $m>n$ 时有

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m>1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots$$

$$+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

令 $m\to\infty$(n 保持不变),得

$$e^x\geqslant1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x\quad(x>0).$$

由于

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$=1+(-1)^n\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2,$$

而由 61 题知，对固定的 x 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$. 于是，对于 $x<0$，仍然有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x \quad (x<0).$$

612. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)=2\pi$.

证 由 72 题

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{\theta_k}{k!\ k},$$

其中 $0<\theta_k<1$，因而

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sin\left[2\pi n!\ \left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!\ (n+1)}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left[2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right]}{2\pi\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)}\cdot 2\pi n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)$$

$=2\pi$.

作下列函数的图形：

613. (a) $y=1-x^{100}$；

(б) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n}) \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

解 (a)如图 1.238 所示. 它关于 y 轴对称.

(б) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})=\begin{cases}1, 若 |x|<1;\\ 0, 若 |x|=1.\end{cases}$ 如图 1.239 所示

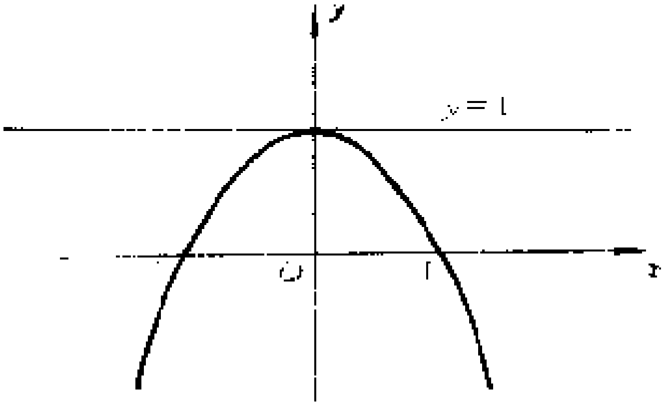


图 1.238

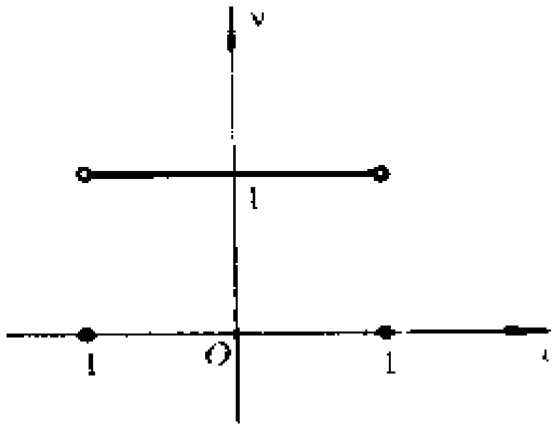


图 1.239

614. (a) $y=\dfrac{x^{100}}{1+x^{100}}\quad(x\geqslant0)$；

(б) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}\quad(x\geqslant0)$.

解 (a)如图 1.240 所示.

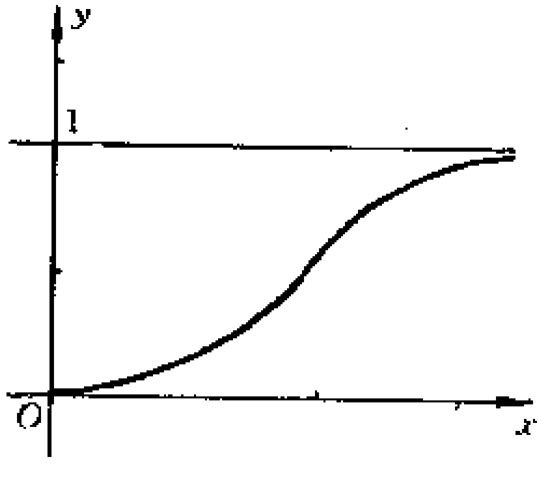


图 1.240

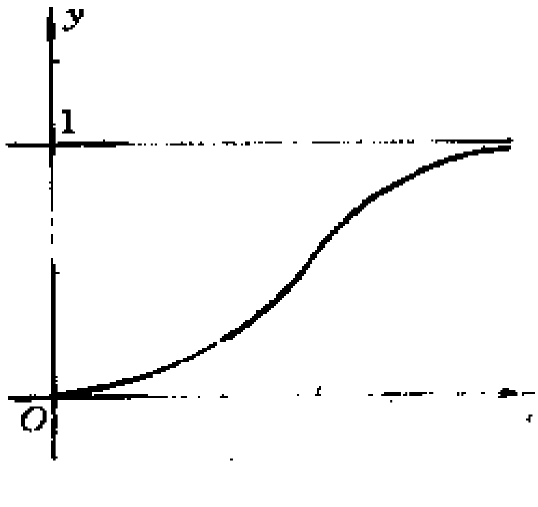


图 1.241

(б) $y=\begin{cases}0, & 若\ 0\leqslant x<1;\\ \dfrac{1}{2}, & 若\ x=1;\\ 1, & 若\ 1<x<+\infty.\end{cases}$

如图 1.241 所示.

615. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$　$(x\neq 0)$.

解　因为 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$,所以,

$$y=\begin{cases}-1, 若 |x|<1, x\neq 0;\\ 0, 若 |x|=1;\\ 1, 若 |x|>1.\end{cases}$$

如图 1.242 所示.

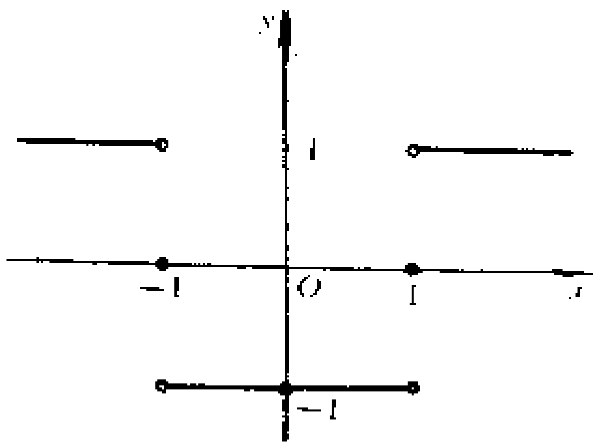


图 1.242

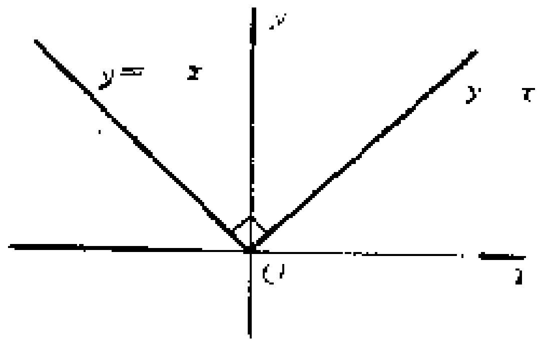


图 1.243

616. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$.

解　$y=\sqrt{x^2}=|x|$.

如图 1.243 所示.

617. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$　$(x\geqslant 0)$.

解　$y=\begin{cases}1, 若\ 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x, 若\ x>1.\end{cases}$

如图 1.244 所示.

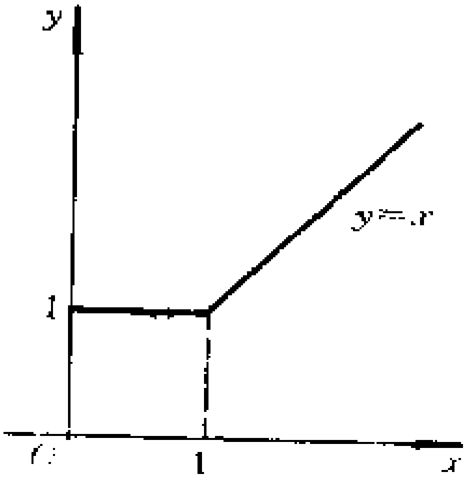


图 1.244

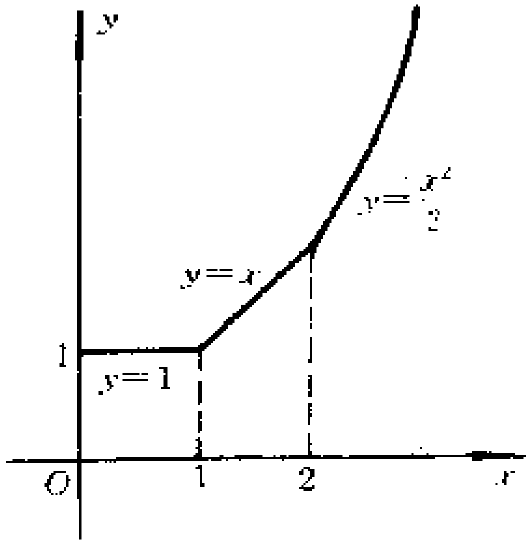


图 1.245

618. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\quad(x\geqslant 0)$.

解 $y=\begin{cases}1, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x, & 若\ 1<x<2;\\ \frac{x^2}{2}, & 若\ 2\leqslant x<+\infty.\end{cases}$

如图 1.245 所示.

619. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$

$(x\geqslant 0)$.

解

$y=\begin{cases}0, 若\ 0\leqslant x<2;\\ 2\sqrt{2}, 若\ x=2;\\ x^2, 若\ x>2.\end{cases}$

如图 1.246 所示.

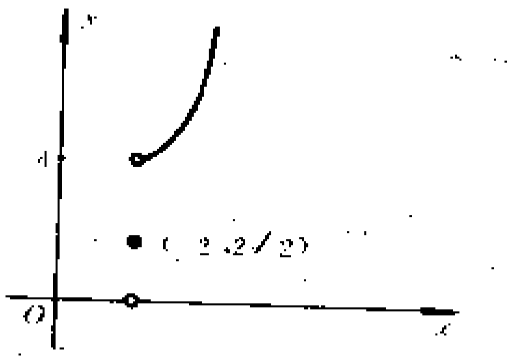


图 1.246

620. (a) $y=\sin^{1000}x$;

(б) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

解 (a)如图 1.247 所示. 其图形始终在 Ox 轴上方.

$$(б)\ y=\begin{cases}0,\text{若 } x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\\[2ex] 1,\text{若 } x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

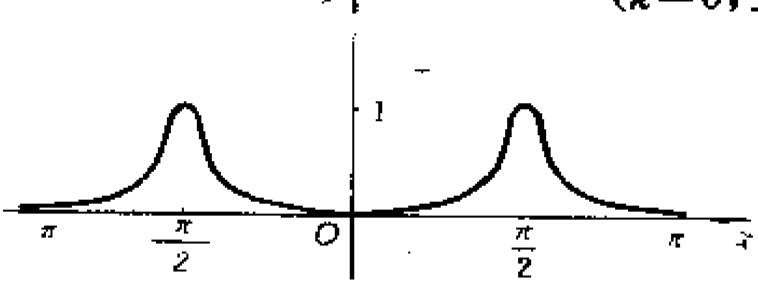


图 1.247

如图 1.248 所示

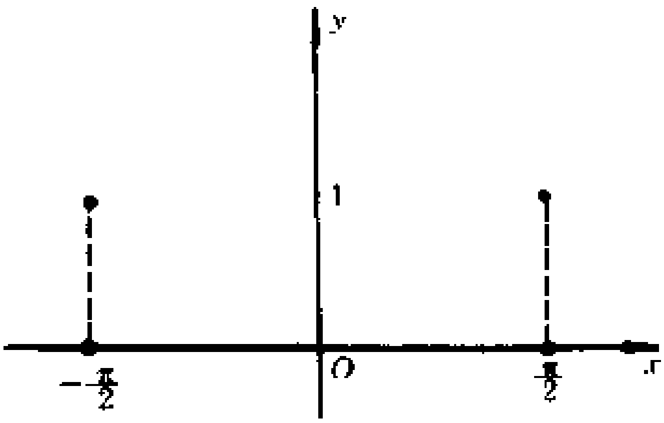


图 1.248

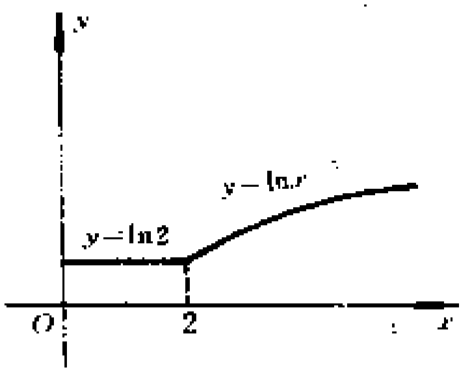


图 1.249

621. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}\quad(x\geqslant0)$.

解 $y=\begin{cases}\ln2,\text{若 } 0\leqslant x\leqslant2;\\ \ln x,\text{若 } 2<x<+\infty.\end{cases}$

如图 1.249 所示.

622. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$.

解 $y=\begin{cases}0, 若 |x|\leqslant 1; \\ \dfrac{\pi}{2}(x-1), 若 x>1.\end{cases}$

如图 1.250 所示.

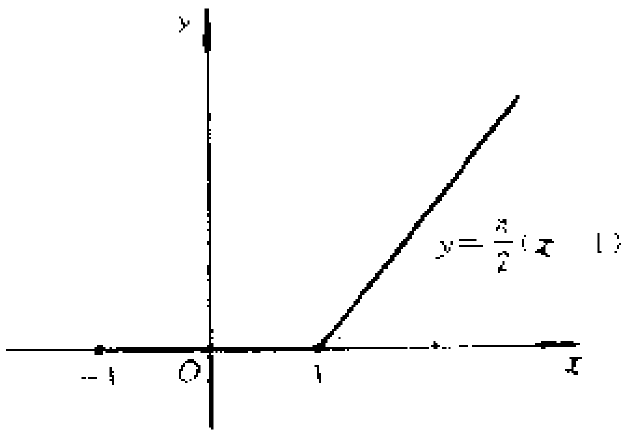


图 1.250

623. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$.

解

$y=\begin{cases}1, 若 x\leqslant -1; \\ e^{x+1}, 若 x>-1.\end{cases}$

如图 1.251 所示.

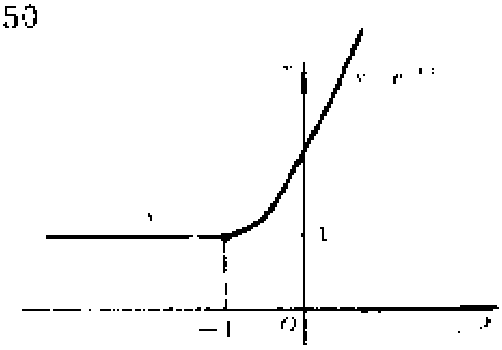


图 1.251

624. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

解

$y=\begin{cases}x, 若 x<0; \\ \dfrac{1}{2}, 若 x=0; \\ 1, 若 x>0.\end{cases}$

如图 1.252 所示.

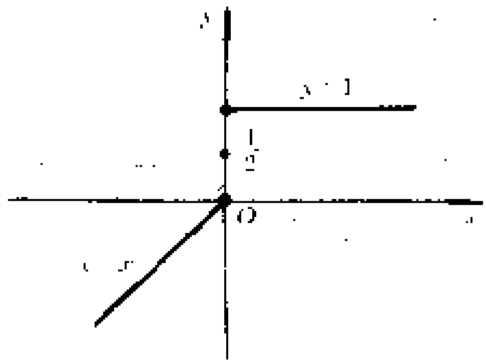


图 1.252

625. $y=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{1}{t-x}\ln\dfrac{t}{x}$

$(x>0)$.

解

$$y=\lim_{t\to x}\frac{\ln\left(1+\frac{t-x}{x}\right)}{\frac{t-x}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

如图 1.253 所示.

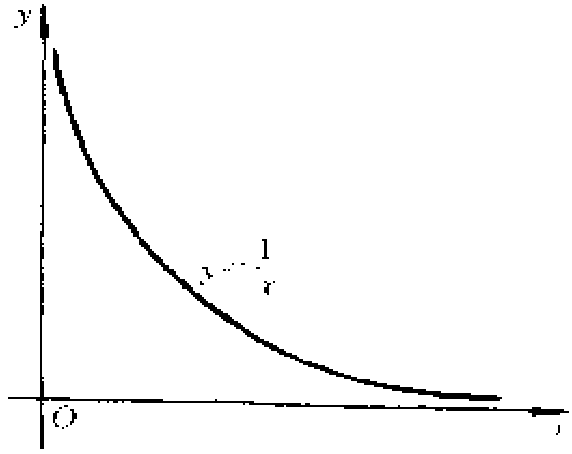


图 1.253

626. 若有

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0,$$

则直线 $y=kx+b$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的(斜)渐近线. 利用这方程式推出渐近线存在的必要而且充分的条件.

解 先讨论渐近线从右边伸向无穷远的情形:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0. \tag{1}$$

而在 $x>0$ 时,

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-(kx+b)}{x}+k+\frac{b}{x},$$

可见

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k. \tag{2}$$

又由(1)式得

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b, \tag{3}$$

即常数 k,b 可由(2)、(3)式确定. 反之,若极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 存在,且为有限数 k,极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$ 存在且有限,等于 b,则(1)式成立,即

$$y=kx+b$$

是一条渐近线。用完全类似的方法可以讨论 $x\to-\infty$ 的情形.

627. 求下列曲线的渐近线并作其图形：

(а) $y=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}$；　(б) $y>\sqrt{x^2+x}$；

(в) $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$；　(г) $y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$；

(д) $y=\ln(1+e^x)$；　(е) $y=x+\arccos\dfrac{1}{x}$；

(ж) $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$.

解　(а)因为 $\lim\limits_{x\to1}y=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to-2}y=\infty$，所以，直线 $x=1$ 及 $x=-2$ 为曲线的垂直渐近线. 其次，因为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x^2+x-2)}=0,$$

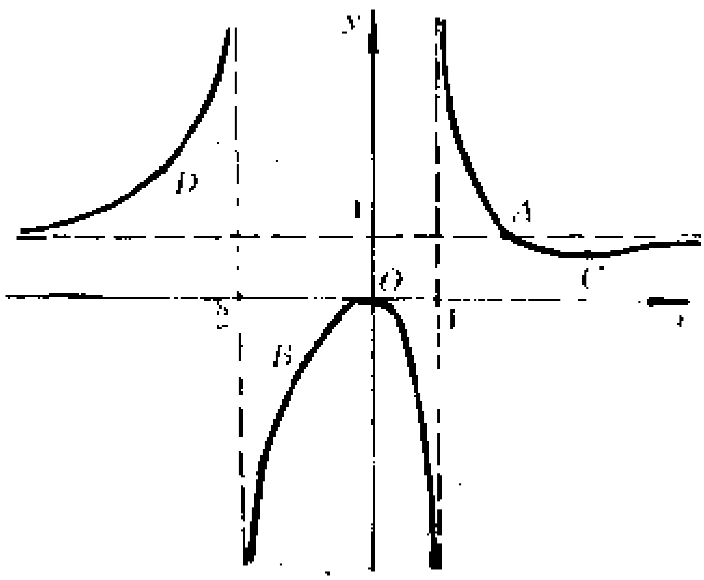


图 1.254

而

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x-2}=1,$$

所以，$y=1$ 为曲线的水平渐近线.

曲线通过原点.

当 $-2<x<1$ 时，$y<0$，故曲线在 Ox 轴的下方；

当 $x>1$ 或 $x<-2$ 时，$y>0$，故曲线在 Ox 轴的上方.

适当描若干点：

$A(2,1),B(-\sqrt{2},-\sqrt{2}),C\left(4,\frac{8}{9}\right),D(-3,\frac{9}{4}),\cdots,$ 并用光滑曲线联接，即得图形(图 1.254).

(б)$k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=1,$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2},$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=-1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=-\frac{1}{2},$$

于是，直线 $y=x+\frac{1}{2}$ 及 $y=-x-\frac{1}{2}$ 为曲线的(斜)渐近线.

曲线 $y=\sqrt{x^2+x}$ 为双曲线

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1,$$

在 Ox 轴上方的部分.

如图 1.255 所示.

(в) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}=-1,$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2-x^3}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{x^2-x^3}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+1}=\frac{1}{3}.$$

斜渐近线为

$$y=-x+\frac{1}{3}.$$

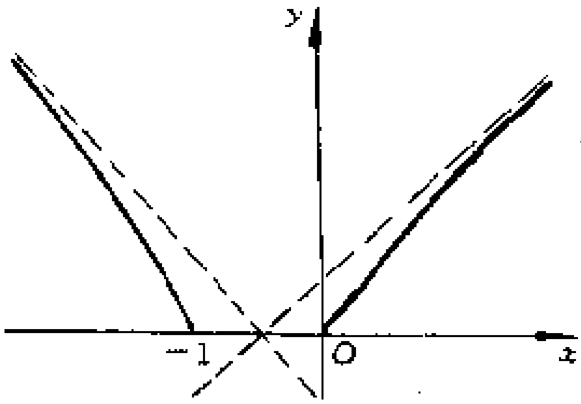


图 1.255

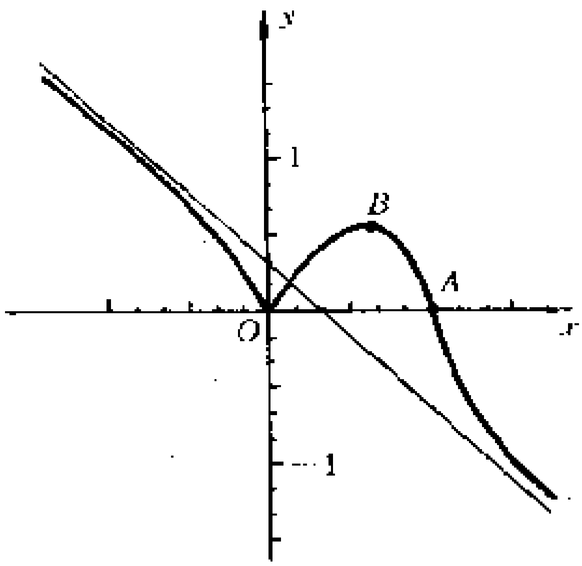


图 1.256

曲线通过原点及点 $A(1,0)$.

当 $-\infty<x<1$ 时，$y>0$；而当 $x>1$ 时，$y<0$.

如图 1.256 所示.

(г)当 $x>0$ 时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x(e^x-1)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x}{e^x-1}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=0,$$

故渐近线为

$$y=x;$$

当 $x<0$ 时，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x(e^x-1)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}=0,$$

故另一渐近线为

$$y=0.$$

曲线在 $x=0$ 处无定义（以后可以说明它是“可去的间断”）.

因为 $y>0$，故图形始终在 Ox 轴的上方.

如图 1.257 所示.

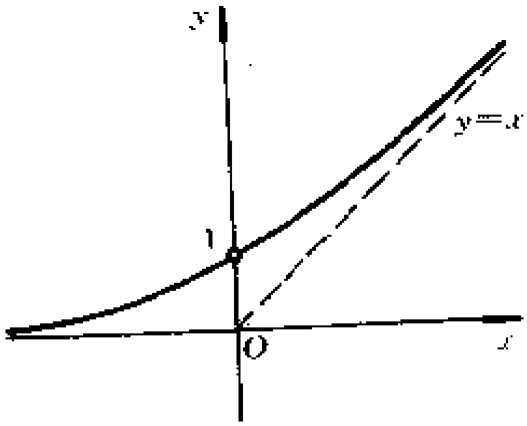


图 1.257

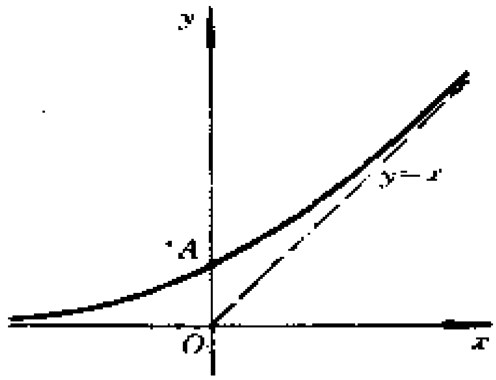


图 1.258

（д）当 $x>0$ 时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+\ln(e^{-x}+1)}{x}\right]=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=0,$$

故渐近线为

$$y=x$$

同法可求，当 $x<0$ 时的渐近线为

$$y=0.$$

曲线通过点 $A(0,\ln 2)$.

如图 1.258 所示.

(e) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\arccos\dfrac{1}{x}}{x}=1$,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x+\arccos\frac{1}{x}\right)-x\right]=\frac{\pi}{2},$$

故渐近线为

$$y=x+\frac{\pi}{2}.$$

将函数 $y=x$ 及 $y=\arccos\dfrac{1}{x}$（见 316 题）的图形按相加法即得，如图 1.259 所示.

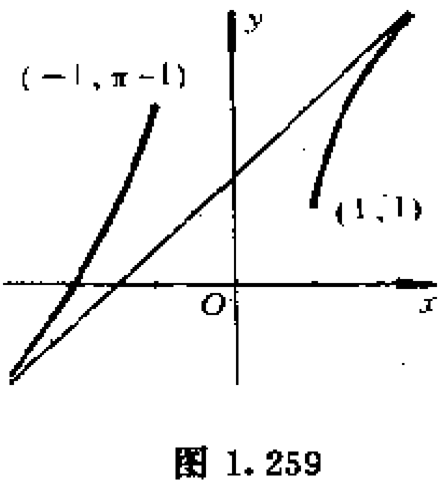


图 1.259

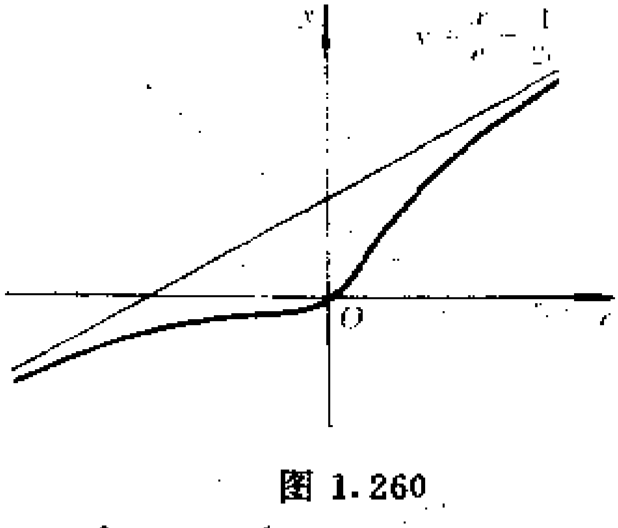


图 1.260

(ж) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^x}{(1+x)^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{e}$,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e}\right]=\frac{1}{2e},$$

故渐近线为

$$y=\frac{x}{e}+\frac{1}{2e}.$$

曲线通过原点.

如图 1.260 所示.

求下列极限：

628. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

解 由于

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

$$\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}(1+|x|+\cdots+|x|^{n-1}).$$

当 $|x|=1$ 时，上式右端为 $\frac{n}{(n+1)!}\to 0(n\to\infty)$；

当 $|x|\neq 1$ 时，此式为 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1-|x|^n}{1-|x|}$

$$=\frac{1}{1-|x|}\cdot\left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{|x|}{n+1}\cdot\frac{(|x|^2)^n}{n!}\right].$$

由 61 题的结果知：$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$，$\frac{(|x|^2)^n}{n!}\to 0(n\to\infty)$，

故当 $n\to\infty$ 时有 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1-|x|^n}{1-|x|}\to 0$.

于是，对于任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]=0.$$

629. $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$，若 $|x|<1$.

解 因为

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x},$$

$$1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2},$$

……

$$1+x^2=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}}.$$

所以，

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

又因 $|x|<1$，故当 $n\to\infty$ 时，$x^{2^{n+1}}\to 0$.

最后，得到

$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=\frac{1}{1-x}.$$

630. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

解　因为

$$\sin x=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}$$

$$=\cdots=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin x}{x}\ (x\neq 0).$$

631. 令

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

其中 $\psi(x)>0$ 且当 $n\to\infty$ 时 $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0(m=1,2,\cdots n)$，换言之，当 $m=1,2,\cdots,n$ 且 $n>N(\varepsilon)$ 时 $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$. 再假定

$\alpha_{mn} \neq 0$.$^{*)}$

证明：

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n}) + \varphi(\alpha_{2n}) + \cdots\varphi(\alpha_{nn})]$$
$$= \lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \cdots + \psi(\alpha_{nn})], \qquad (1)$$

此处假定等式(1)右端的极限存在.

证 任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使当 $0 < |x| < \delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1\right| < \varepsilon,$$

从而（注意到 $\psi(x) > 0$），

$$(1-\varepsilon)\psi(x) < \varphi(x) < (1+\varepsilon)\psi(x). \qquad (2)$$

由 $\alpha_{mn} \neq 0$ 以及 $\alpha_{mn} \rightrightarrows 0$ $(m = 1,2,\cdots,n)$ 知，必有正整数 $N = N(\varepsilon)$ 存在，使当 $n > N$ 时，恒有

$$0 < |\alpha_{mn}| < \delta \quad (m = 1,2,\cdots,n).$$

于是

$$(1-\varepsilon)\psi(\alpha_{mn}) < \varphi(\alpha_{mn}) < (1+\varepsilon)\psi(\alpha_{mn})$$
$$(n > N, m = 1,2,\cdots,n).$$

将这 n 个不等式相加，得

$$(1-\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn}) < \sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn}) < (1+\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})$$
$$(n > N).$$

即

$$1 - \varepsilon < \frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})} < 1 + \varepsilon \quad (n > N).$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}=1.$$

由假定，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})$存在，故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}\right]\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn}).$$

证毕.

*）编者注：此题应加上条件 $\alpha_{mn}\neq 0$（原书没有），因为 $\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 都可能在 $x=0$ 处无定义. 另外，$m=1,2,\cdots,n$.

利用上边的定理，求

632. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right]$.

解 设 $x=\frac{k}{n^2}$，我们将首先说明它满足 631 题的条件.

首先，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}}{\frac{x}{3}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=1.$$

其次，$\frac{k}{n^2} \Rightarrow 0 \quad (n \to \infty; k = 1,2,\cdots,n)$.

最后，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2} = \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{6}.$$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) = \frac{1}{6}.$$

633. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$.

解 因为$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$，而且当 $n\to\infty$ 时，$\frac{ka}{n^2} \Rightarrow 0$ $(k = 1,2,\cdots,n)$.

又因$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka}{n^2} = \frac{a}{2}$，

故利用 631 题的结果，即得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right) = \frac{a}{2}.$$

634. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right) \quad (a > 0)$.

解 我们有$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}\right) = 1$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{k}{n^2}\cdot\ln a \Rightarrow 0 (k = 1,2,\cdots,n)$ 且$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln a = \frac{1}{2}\ln a$；

因而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right) = \frac{1}{2}\ln a.$$

635. $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

解　设 $y=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$，$\ln y=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.
我们考虑下列极限，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

又 $\frac{k}{n^2}\rightrightarrows 0$($n\to\infty$ 时，$k=1,2,\cdots,n$)，且有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln y=\frac{1}{2},$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

636. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

解　设 $y=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$，当 n 充分大时，$\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}>0$，此时，

$$\ln y=\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right).$$

因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}^2x)}{x^2}=1$，又 $\frac{ka}{n\sqrt{n}}\rightrightarrows 0$($n\to\infty$ 时，$k=1,2\cdots,n$)，且有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{6n^3}=\frac{a^2}{3},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln y=-\frac{a^2}{6},$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

637. 叙列 x_n 由以下的等式所给定：

$$x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},$$

$\cdots(a>0)$.

求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 首先，我们注意到此叙列显然是单调上升的. 其次，由 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$，得 $x_n^2=a+x_{n-1}$，

即

$$x_n=\frac{a}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}. \tag{1}$$

因为 $0<x_{n-1}<x_n$，即在(1)式右端第二项小于1，所以，

$$x_n<\frac{a}{x_n}+1. \tag{2}$$

又显然有 $x_n>\sqrt{a}\quad(n=2,3,\cdots)$. (3)

将(3)式代入(2)式右端，即得

$$x_n<\sqrt{a}+1,$$

故叙列$\{x_n\}$是有界的.

根据极限存在的准则可知，叙列$\{x_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设其值为 l.

利用等式 $x_n^2=a+x_{n-1}$，两端取极限，得

$$l^2 = a + l,$$

解之，得

$$l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \quad (a > 0),$$

负根不适合(因为 $x_n > 0$)，只取其正根，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

638. 函数叙列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

用以下的方法来确定：

$$y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} (n = 2,3,\cdots).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

解 当 $x = 0$ 时，$y_n = 0, n = 1,2,\cdots$，则

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

当 $0 < x \leqslant 1$ 时，用归纳法可证 $y_n > 0, n = 1,2,\cdots$：$y_1 > 0$. 若 $y_k > 0$，由 $x > y_{k-1}^2$，可得

$$y_{k+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_k^2}{2} = \frac{4x - (x - y_{k-1}^2)^2}{8} \geqslant \frac{3x}{8} > 0.$$

因而有

$$y_1 - y_3 = \frac{y_2^2}{2} > 0,$$

$$y_2 - y_4 = \frac{y_3^2 - y_1^2}{2} < 0,$$

$$\cdots\cdots$$

用归纳法可证

$$y_{2n} - y_{2n+2} < 0,$$

$$y_{2n-1} - y_{2n+1} > 0 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

即 $$\frac{x}{2}=y_1>y_3>\cdots>0,$$

$$0<y_2<y_4<\cdots<\frac{x}{2}.$$

可见叙列 $y_1,y_3,\cdots$ 及叙列 $y_2,y_4,\cdots$ 都是收敛的.设极限分别为 A_1,A_2,由

$$y_{2n}=\frac{x}{2}-\frac{y_{2n-1}^2}{2}$$

及 $$y_{2n+1}=\frac{x}{2}-\frac{y_{2n}^2}{2},$$

求极限得 $A_2=\frac{x}{2}+\frac{A_1^2}{2}$,$A_1=\frac{x}{2}-\frac{A_2^2}{2}$,相减得

$$A_1-A_2=(A_1-A_2)\frac{(A_1+A_2)}{2}.$$

而 $0\leqslant A_1\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,$0\leqslant A_2\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,故

$$A_1=A_2=A.$$

用极限定义直接可以证明:若$\{y_n\}$的两个子叙列$\{y_{2n}\}$及$\{y_{2n-1}\}(n=1,2,\cdots)$收敛于同一个极限,则$\{y_n\}$也收敛于这个极限,由

$$A=\frac{x}{2}-\frac{A^2}{2}$$

解得

$$A=\sqrt{1+x}-1,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}y_n=\sqrt{1+x}-1.$$

639. 函数叙列

$$y_n=y_n(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

用下面的方法来确定:

$$y_1=\frac{x}{2},y_n=\frac{x}{2}+\frac{y_{n-1}^2}{2}\quad(n=2,3,\cdots).$$

求$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

解 显然，$y_2 \geqslant y_1$. 假设 $y_n \geqslant y_{n-1}$，则由

$$y_{n+1} - y_n = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{2}$$

便可推出 $y_{n+1} \geqslant y_n$.

由数学归纳法便得知叙列$\{y_n\}$单调上升.

现在我们证明这个叙列有界. 显然

$$0 \leqslant y_1 < 1.$$

设 $0 \leqslant y_k < 1$，则 $0 \leqslant y_k^2 < 1$，且 $0 \leqslant y_{k+1} < 1$.

由数学归纳法便得知叙列$\{y_n\}$有界.

这样，我们就证明了此叙列的极限

$$\lim_{n\to\infty} y_n$$

存在. 设其值为 l(显然 $0 \leqslant l \leqslant 1$)，即得

$$l = \frac{x}{2} + \frac{l^2}{2},$$

解之，得 $l = 1 \pm \sqrt{1-x}$. 由于 $0 \leqslant l \leqslant 1$，故必

$$\lim_{n\to\infty} y_n = l = 1 - \sqrt{1-x}.$$

640. 为了求克卜勒方程式(Уравнение Кеплера)

$$x - \varepsilon\sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \tag{1}$$

的近似解，假设

$$x_0 = m, x_1 = m + \varepsilon\sin x_0, \cdots, x_n = m + \varepsilon\sin x_{n-1},$$

…(逐次逼近法).

证明有 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，且数 ξ 为方程式(1)的唯一的根.

证 首先考虑 $|x_m - x_n|$. 由于

$$x_2 - x_1 = \varepsilon(\sin x_1 - \sin x_0) = 2\varepsilon\sin\frac{x_1 - x_0}{2}\cos\frac{x_1 + x_0}{2},$$

所以

$$|x_2 - x_1| \leqslant 2\varepsilon\left|\sin\frac{x_1 - x_0}{2}\right| \leqslant 2\varepsilon \cdot \frac{|x_1 - x_0|}{2}$$
$$= \varepsilon|x_1 - x_0|.$$

同理可证

$$|x_3 - x_2| \leqslant \varepsilon^2|x_1 - x_0|.$$

设

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon^{n-1}|x_1 - x_0|,$$

则有

$$|x_{n+1} - x_n| = 2\varepsilon\left|\sin\frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right|$$
$$\leqslant \varepsilon|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon^n|x_1 - x_0|.$$

由数学归纳法得知对于任意的自然数 n，均有 $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon^{n-1}|x_1 - x_0|$. 于是，当 $m > n$ 时，有

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots$$
$$+ |x_{n+1} - x_n|$$
$$\leqslant (\varepsilon^{m-1} + \varepsilon^{m-2} + \cdots + \varepsilon^n)|x_1 - x_0|$$
$$= \varepsilon^n \cdot \frac{1 - \varepsilon^{m-n}}{1 - \varepsilon} \cdot |x_1 - x_0|,$$

而

$$|x_1 - x_0| = \varepsilon|\sin x_0| \leqslant \varepsilon,$$

所以，

$$|x_m - x_n| \leqslant \varepsilon^{n+1} \cdot \frac{1 - \varepsilon^{m-n}}{1 - \varepsilon} < \frac{\varepsilon^{n+1}}{1 - \varepsilon}.$$

由此知

$$|x_m - x_n| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

按哥西判别法得知极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

存在.设其值为ξ,由等式

$$x_n = m + \varepsilon\sin x_{n-1}$$

取极限即得

$$\xi = m + \varepsilon\sin\xi.$$

这就是说,变量x_n的极限ξ是方程(1)的根.

最后,证明此根的唯一性.设ξ_1是另一根,则

$$\xi_1 - \xi = \varepsilon(\sin\xi_1 - \sin\xi),$$

由此得

$$|\xi_1 - \xi| \leqslant \varepsilon|\xi_1 - \xi|.$$

因为$0 < \varepsilon < 1$,故$\xi_1 = \xi$.

于是,我们就证明了ξ是方程(1)的唯一的根.

641. 若$\omega_k(f)$为函数$f(x)$在区间$|x-\xi| \leqslant k$ $(k>0)$上的振幅,则数

$$\omega_0(f) = \lim_{k\to 0}\omega_k(f)$$

称为函数$f(x)$在ξ点的振幅.

求下列函数$f(x)$在点$x=0$的振幅:

(a)$f(x) = \sin\frac{1}{x}$;　　(б)$f(x) = \frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;

(в)$f(x) = x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$;(г)$f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

(д)$f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$;　　(е)$f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

(ж)$f(x) = (1+|x|)^{\frac{1}{x}}$.

解　(a)$\omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2$;

(б)$\omega_k(f) = +\infty, \omega_0(f) = +\infty$;

(в)$\omega_k(f) = 3k - k = 2k, \omega_0(f) = 0$;

(г) $\omega_k(f) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{k} - \operatorname{arctg}\frac{1}{(-k)}\right]$

$= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{k}$,

$\omega_0(f) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1$;

(д) $\omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2$;

(е) $\omega_k(f) = \left|\frac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}} - \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{k}}}\right|, \omega_0(f) = 1$;

(ж) $\omega_k(f) = (1+k)^{\frac{1}{k}} - (1+k)^{-\frac{1}{k}}, \omega_0(f)$

$= e - e^{-1} = 2\operatorname{sh}1.$

642. 命

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$

证明:对于满足条件 $-1 \leqslant a \leqslant 1$ 的任何数 a,可以选出叙列 $x_n \to 0 (n = 1,2,\cdots)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

证 对于确定的 a:$|a| \leqslant 1$,总存在 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,使

$$\sin x_0 = a.$$

令 $x_n = \frac{1}{2n\pi + x_0}$,则显然有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

又因 $f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + x_0) = a$,

所以

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

643. 设：(a) $f(x)=\sin^2\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$；

(б) $f(x)=(2-x^2)\cos\frac{1}{x}$；

(в) $f(x)=\left(1+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\sec^2\frac{1}{x}}$.

求

$$l=\underline{\lim_{x\to 0}}f(x) \text{ 和 } L=\overline{\lim_{x\to 0}}f(x).$$

解 由 l 及 L 的定义，容易求得

(a) $l=-1,\quad L=2$；

(б) $l=-2,\quad L=2$；

(в) $l=2,\quad L=e$.

644. 设：

(a) $f(x)=\sin x$；(б) $f(x)=x^2\cos^2 x$；

(в) $f(x)=2^{\sin x^2}$；

(г) $f(x)=\frac{x}{1+x^2\sin^2 x}\ (x\geqslant 0)$.

求

$$l=\underline{\lim_{x\to\infty}}f(x) \text{ 和 } L=\overline{\lim_{x\to\infty}}f(x).$$

解 由 l 及 L 的定义，容易求得

(a) $l=-1,\quad L=1$；

(б) $l=0,\quad L=+\infty$；

(в) $l=\frac{1}{2},\quad L=2$；

(г) $l=0,\quad l=+\infty$.

§ 6. 函数无穷小和无穷大的阶

1° 符号

$$\varphi(x) = O^*(\psi(x))$$

表示函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $x \to a$ 的已知过程中是狭义地同阶的无穷小或无穷大，就是说

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad (0 < |k| < +\infty).$$

特别是，若当 $x \to 0$ 时，有

$$\varphi(x) = O^*(x^n) \quad (n > 0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷小 x 是 n 阶无穷小.

仿此，若当 $x \to \infty$ 时，有

$$\varphi(x) = O^*(x^n) \quad (n > 0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷大 x 是 n 阶无穷大.

2° 符号

$$\varphi(x) = o(\psi(x))$$

表 示当 $x \to a$ 时，函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较高阶的无穷小，或函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较低阶的无穷大，就是说

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3° 若当 $x \to a$ 时，无穷小函数 $\varphi(x)$ 的阶（在广义的意义上）不低于某一正的函数 $\psi(x)$ 无穷小的阶（或无穷大函数 $\varphi(x)$ 的阶不高于函数 $\psi(x)$ 无穷大的阶），即

$$\overline{\lim_{x\to a}} \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} = k \quad (0 \leqslant k < +\infty),$$

则约定写为：

$$\varphi(x) = O(\psi(x)).$$

4° 若

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$
则称函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 当 $x\to a$ 时为等价的$[\varphi(x)\sim\psi(x)]$.
例如,当 $x\to 0$ 时,有:

$$\sin x\sim x;\quad \mathrm{tg}x\sim x;$$
$$a^x-1\sim x\ln a(a>0);$$
$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n};\quad \ln(1+x)\sim x.$$

一般地说来,$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x)$.

当求两个函数比的极限时,已知函数可用其等价的函数来代换.

645.

把圆心角 $AOB=x$(图 1.261)当作 1 阶无穷小,求下列各量无穷小的阶:

(a) 弦 AB;

(6) 矢 CD;

(в) 扇形 AOB 的面积;

(г) 三角形 ABC 的面积;

(д) 梯形 ABB_1A_1 的面积;

(e) 弓形 ABC 的面积.

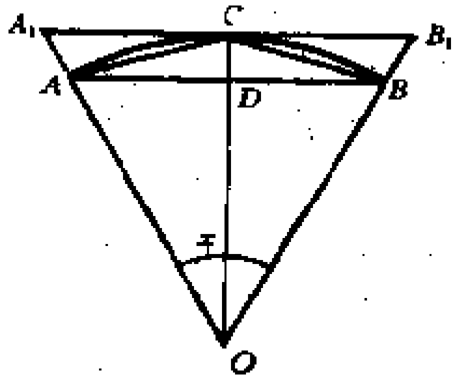


图 1·261

解 (a)$AB=2R\sin\frac{x}{2}$,式中 R 为圆的半径.

因为$\frac{AB}{x}=\frac{2R\sin\frac{x}{2}}{x}\to R(x\to 0)$,故弦 AB 是关于 x 的一阶无穷小.

$$(6)CD=R-R\cos\frac{x}{2}=2R\sin^2\frac{x}{4}.$$

因为$\frac{CD}{x^2}\to\frac{R}{8}$,所以,矢 CD 是关于 x 的二阶无穷小.

(в) 扇形 AOB 的面积 $S=\frac{1}{2}R^2x$.

因为$\frac{S}{x}=\frac{1}{2}R^2$,所以,$S$ 是关于 x 的一阶无穷小.

(г)$\Delta ABC=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=2R^2\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4}$.

因为$\frac{\Delta ABC}{x^3}\to\frac{R^2}{16}$,所以,$\Delta ABC$ 的面积是关于 x 的三阶无穷小.

(д)$A_1C=R\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

于是,梯形 ABB_1A_1 的面积

$$
\begin{aligned}
A_0&=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin^2\frac{x}{2}\left(2R\sin\frac{x}{2}+2R\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\\
&=2R^2\sin^3\frac{x}{2}+2R^2\sin^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.
\end{aligned}
$$

因为$\frac{A_0}{x^3}\to\frac{R^2}{4}+\frac{R^2}{4}=\frac{R^2}{2}$,所以,面积 A_0 是关于 x 的三阶无穷小.

(e) 弓形 ABC 的面积

$$
\begin{aligned}
p&=\frac{1}{2}R^2x-\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{x}{2}\cdot R\cos\frac{x}{2}\\
&=\frac{R^2}{2}(x-\sin x).
\end{aligned}
$$

由于 $x-\sin x$ 是奇函数,故只需考虑 $x\to+0$ 时的情形.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,有

$$
\begin{aligned}
x-\sin x&\leqslant \operatorname{tg}x-\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)\\
&=\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}=O^*(x^3);
\end{aligned}
$$

而由 $x \geqslant 2\sin\frac{x}{2}$，又有

$$x-\sin x \geqslant 2\sin\frac{x}{2}-\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4}=O^*(x^3).$$

于是，当 x 大于 0 而充分小时，存在两常数 $A>0$，$B>0$，使

$$Ax^3 \leqslant x-\sin x \leqslant Bx^3,$$

即弓形面积 p 基本上是关于 x 的三阶无穷小. 实际上，尔后将会看到，有 $x-\sin x \sim \frac{1}{6}x^3$（但要用到导数的概念）.

646. 命 $o(f(x))$ 为当 $x\to a$ 时比函数 $f(x)$ 有较低阶的任意无穷大函数，且 $O(f(x))$ 为 $x\to a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶（在广义的意义上）的任意无穷大函数，其中 $f(x)>0$.

证明：(а) $o\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$；

(б) $O\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$；

(в) $o\{O[f(x)]\}=o[f(x)]$；

(г) $O\{O[f(x)]\}=O[f(x)]$；

(д) $O[f(x)]+o[f(x)]=O[f(x)]$；

(е) $O[f(x)]\cdot O[g(x)]=O[f(x)g(x)]$.

证 (а) 因为

$$\lim_{x\to a}\frac{o\{of(x)]\}}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{o\{o[f(x)]\}}{o\{f(x)]}\cdot\frac{o[f(x)]}{f(x)}=0,$$

故 $o\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$.

(б) 由 133 题(б) 的结果，有

$$\varlimsup_{x\to a}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{f(x)}=\varlimsup_{x\to a}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{o[f(x)]}\cdot\lim_{x\to a}\frac{o\{f(x)]}{f(x)}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)}$ 存在且等于 0. 因此

$O\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$.

(в) 仍由 133 题(б) 的结果，有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|o\{O[f(x)]\}|}{f(x)} = \lim_{x\to a}\left|\frac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]}\right| \cdot \overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)} = 0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)} = 0$，即

$o\{O[f(x)]\} = o[f(x)]$.

(г) 由 132 题(б) 的结果，有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{O[f(x)]\}|}{f(x)} \leqslant \overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{O[f(x)]\}|}{O[f(x)]} \cdot \overline{\lim_{x\to a}}\frac{O[f(x)]}{f(x)} < +\infty,$$

故 $O\{O[f(x)]\} = O[f(x)]$.

(д) 由 131 题(б)，有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]+o[f(x)]|}{f(x)} \leqslant \overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)} + \overline{\lim_{x\to a}}\frac{|o[f(x)]|}{f(x)} = \overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)} < +\infty,$$

故 $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)]$.

(е) 由 132 题(б)，有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]O[g(x)]|}{f(x)g(x)} \leqslant \overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)} \cdot \overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[g(x)]|}{g(x)} < +\infty,$$

故

$$O[f(x)]O[g(x)] = O[f(x)g(x)].$$

647. 设 $x\to+0$ 和 $n>0$. 证明

(а)$CO(x^n)=O(x^n)$ （C 为常数）；

(б)$O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ $(n<m)$；

(в)$O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

证 (а) 由

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|CO(x^n)|}{x^n}=|C|\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故

$$CO(x^n)=O(x^n).$$

(б) 由

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)+O(x^m)|}{x^n}\leqslant\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}$$

$$+\overline{\lim_{x\to+0}}\left(\frac{|O(x^m)|}{x^m}\cdot x^{m-n}\right)=\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故

$$O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)\quad(n<m).$$

(в) 由

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)O(x^m)|}{x^{n+m}}\leqslant\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}$$

$$\cdot\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^m)|}{x^m}<+\infty,$$

得知

$$O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m}).$$

648. 设 $x\to+\infty$ 和 $n>0$. 证明

(а)$CO(x^n)=O(x^n)$；

(б)$O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ $(n>m)$.

(в)$O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

证 (а) 与(в) 同 647 题(а) 与(в) 之证(只要将 $x\to+0$ 换为 $x\to+\infty$). 下证(б)：由于

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|O(x^n)+O(x^m)|}{x^n}$$
$$\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}+\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(\frac{|O(x^m)|}{x^m}\cdot\frac{1}{x^{n-m}}\right)$$
$$=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故

$$O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)\ (n>m).$$

649. 证明符号 $\sim$ 具有下列性质：(1) 反射性：$\varphi(x)\sim\varphi(x)$；(2) 对称性：若 $\varphi(x)\sim\psi(x)$，则 $\psi(x)\sim\varphi(x)$；(3) 传递性：若 $\varphi(x)\sim\psi(x)$ 及 $\psi(x)\sim\chi(x)$，则 $\varphi(x)\sim\chi(x)$.

证 (1) 因为$\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x)}\equiv1\to1$，所以，$\varphi(x)\sim\varphi(x)$.

(2) 因为$\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\to1$，所以，$\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}\to1$.

即：若 $\varphi(x)\sim\psi(x)$，则 $\psi(x)\sim\varphi(x)$.

(3) 因为$\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\to1$，$\dfrac{\psi(x)}{\chi(x)}\to1$，所以，

$$\frac{\varphi(x)}{\chi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{\psi(x)}{\chi(x)}\to1,$$

即：$\varphi(x)\sim\chi(x)$.

650. 设 $x\to+0$. 证明下列等式：

(а)$2x-x^2=O^*(x)$；(б)$x\sin\sqrt{x}=O^*(x^{\frac{3}{2}})$；

(в)$x\sin\dfrac{1}{x}=O(|x|)$；(г)$\ln x=o\left(\dfrac{1}{x^\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon>0)$；

(д)$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$；

(е)$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=O(1)$；(ж)$(1+x)^n=1+nx+o(x)$.

证 由题设 $x\to+0$，于是

(а) 因为$\dfrac{2x-x^2}{x}\to 2$,所以,$2x-x^2=O^*(x)$.

(б) 因为$\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\to 1$,所以,$x\sin\sqrt{x}=O^*(x^{\frac{3}{2}})$.

(в) 因为$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant |x|(x\neq 0)$,所以,

$$x\sin\frac{1}{x}=O(|x|).$$

(г) 因为$\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}}=x^{\varepsilon}\ln x\to 0$,所以,$\ln x=o\left(\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$.

(д) 因为$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{\frac{1}{8}}}$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{x^{\frac{1}{2}}+1}}=1,$$

故 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim x^{\frac{1}{8}}$.

(е) 因为$\left|\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\dfrac{\pi}{2}(x\neq 0)$,所以,$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=O(1)$.

(ж) 因为$\dfrac{(1+x)^n-1-nx}{x}=\dfrac{1}{2}n(n-1)x+\cdots\to 0$,

所以$(1+x)^n-1-nx=o(x)$,即

$$(1+x)^n=1+nx+o(x).$$

651. 设$x\to+\infty$. 证明下列等式:

(а) $2x^3-3x^2+1=O^*(x^3)$;

(б) $\dfrac{x+1}{x^2+1}=O^*\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

(в) $x+x^2\sin x=O(x^2)$;

(г) $\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}=O^*\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(д) $\ln x=o(x^\varepsilon)\quad(\varepsilon>0)$;

(е) $x^p e^{-x}=o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(ж) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$;

(з) $x^2+x\ln^{100}x\sim x^2$;

证 由题设 $x\to+\infty$，于是

(а) 因为$\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3}\to 2$，所以

$$2x^3-3x^2+1=O^*(x^3).$$

(б) 因为$\dfrac{\dfrac{x+1}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x(x+1)}{x^2+1}\to 1$，所以，

$$\frac{x+1}{x^2+1}=O^*\left(\frac{1}{x}\right).$$

(в) 因为$\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{|x+x^2\sin x|}{x^2}=\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\left|\dfrac{1}{x}+\sin x\right|$

$=1<+\infty$，所以，$x+x^2\sin x=O(x^2)$.

(г) 因为$\dfrac{\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{x^2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\to\dfrac{\pi}{2}$，所以，

$$\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}=O^*\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

(д) 因为$\dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}\to 0$，所以，

$$\ln x=o(x^\varepsilon).$$

(e) 因为$\dfrac{x^p e^{-x}}{\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{x^{p+2}}{e^x}\to 0$，所以，

$$x^p e^{-x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

(ж) 因为$\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$

$=\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}\to 1$，所以，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$.

(з) 因为$\dfrac{x^2+x\ln^{100}x}{x^2}=1+\dfrac{\ln^{100}x}{x}\to 1$，所以

$$x^2+x\ln^{100}x\sim x^2.$$

652. 证明当 x 充分大时，下边的不等式成立：

(а) $x^2+10x+100<0.001x^3$；

(б) $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$；(в) $x^{10}e^x<e^{2x}$.

证 (а) 因为当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{x^2+10x+100}{0.001x^3}\to 0$，所以，当 x 充分大以后，有$\dfrac{x^2+10x+100}{0.001x^3}<1$，即

$$x^2+10x+100<0.001x^3.$$

(б) 因为当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{\ln^{1000}x}{\sqrt{x}}\to 0$，所以，当 x 充分大以后，有$\dfrac{\ln^{1000}x}{\sqrt{x}}<1$，即

$$\ln^{1000}x<\sqrt{x}.$$

(в) 因为当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{x^{10}e^x}{e^{2x}}=\dfrac{x^{10}}{e^x}\to 0$，所以，当 x

充分大后，有$\frac{x^{10}e^x}{e^{2x}}<1$，即

$$x^{10}e^x<e^{2x}.$$

653. 设 $x\to 0$. 选出下列函数的形如 Cx^n(C 为常数) 的主部，并求其对于无穷小变数 x 的阶：

(а) $2x-3x^3+x^5$；(б) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$；

(в) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$；(г) $\mathrm{tg}x-\sin x$.

解 所谓函数 $f(x)$ 的主部 $g(x)$，即满足

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to 1 \text{ 或 } f(x)=g(x)+o(x)\ (x\to 0).$$

(а) 因为$\frac{2x-3x^3+x^5}{2x}\to 1\quad(x\to 0)$，

故其主部为 $2x$，它对于无穷小 x 是一阶的.

(б) 因为$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\to 1\ (x\to 0),$$

故其主部为 x，它对于 x 是一阶的.

(в) 因为 $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$

$$=\frac{3x^2-8x^3}{\sqrt[6]{(1-2x)^{15}}+\sqrt[6]{(1-2x)^{12}(1-3x)^2}+\cdots+\sqrt[6]{(1-3x)^{10}}},$$

于是，$\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{\frac{x^2}{2}}\to 1(x\to 0)$，故其主部为 $\frac{x^2}{2}$，它对于 x 是二阶的.

(г) 因为 $\mathrm{tg}x-\sin x=\frac{2}{\cos x}\sin x\sin^2\frac{x}{2}$，于是，

$\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\frac{x^3}{2}}\to 1(x\to 0)$，故其主部为$\frac{x^3}{2}$，它对于 x 是三阶

的.

654. 设 $x \to +0$，证明无穷小

(a) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$；(б) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$，

无论对任何的 n，也不能与无穷小 $x^n (n>0)$ 相比较.

即：对于如此的 n，不能有等式 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(x)}{x^n}=k$，式中 k 为异于零的有限量.

证 (a) 因为 $\lim\limits_{x\to+0}x^n\ln x=0$ *) $(n>0)$，于是，

$$\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\ln x}}{x^n}=\infty,$$

即 $\frac{1}{\ln x}$ 不能与无穷小 x^n 相比较 $(x\to+0)$.

(б) 因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}=0$ **) $(n>0)$，所以，$e^{-\frac{1}{x^2}}$ 不能与无穷小 x^n 相比较 $(x\to 0)$.

*) 参看 592 题.

**) 参看 591 题.

655. 设 $x\to 1$. 选出下列函数的形如 $C(x-1)^n$ 的主部，并求其对于无穷小 $(x-1)$ 的阶：

(a) x^3-3x+2；(б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$；(в) $\ln x$；

(г) e^x-e；(д) x^x-1.

解 (a) 因为 $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$，又

$$\frac{x^3-3x+2}{3(x-1)^2}\to 1\ (x\to 1),$$

故其主部为 $3(x-1)^2$，对于 $(x-1)$ 是二阶无穷小

(б) 因为$\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=-\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$，又

$$\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{-\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}}\to 1(x\to 1),$$

故其主部为$\dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{2}}$，对于$(x-1)$是$\dfrac{1}{3}$阶无穷小.

(в) 因为$\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}\to 1(x\to 1)$，

故其主部为$x-1$，对于$(x-1)$是一阶无穷小.

(г) 因为$e^x-e=e(e^{x-1}-1)$，又

$$\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\to 1(x\to 1).$$

故其主部为$e(x-1)$，对于$(x-1)$是一阶无穷小.

(д) 因$x^x-1=e^{x\ln x}-1$，又

$$\frac{e^{x\ln x}-1}{x-1}=\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\frac{x\ln[1+(x-1)]}{x-1}\to 1(x\to 1),$$

故其主部为$x-1$，对于$(x-1)$是一阶无穷小.

656. 设$x\to+\infty$. 选出下列函数的形如Cx^n的主部，并求其对于无穷大x的阶：

(a)$x^2+100x+10000$；(б) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$；

(в) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$；(г) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

解 (a) 因为$x^2+100x+10000\sim x^2(x\to+\infty)$，故主部为$x^2$，它对于无穷大$x$是二阶的.

(б) 因为$\dfrac{\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}}{2x^2}=\dfrac{2x^5}{2x^5-6x^3+2x^2}$，

$\to 1(x\to+\infty)$

故主部 $2x^2$，它对于无穷大 x 是二阶的.

(в) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}=x^{\frac{2}{3}}\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}\right]$，

于是，

$$\frac{\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}\to 1(x\to+\infty),$$

故主部为 $x^{\frac{2}{3}}$，它对于无穷大 x 是 $\frac{2}{3}$ 阶的.

(г) 因为 $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}\to 1(x\to+\infty)$，

故主部为 $\sqrt[8]{x}$，它对于无穷大 x 是 $\frac{1}{8}$ 阶的.

657. 设 $x\to+\infty$. 选出下列函数的形如 $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 的主部，并求其对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 的阶：

(а) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$；(б) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$；

(в) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$；(г) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

解 (а) 因为 $\dfrac{\frac{x+1}{x^4+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^3}=\dfrac{x^3(x+1)}{x^4}\to 1(x\to+\infty)$，

故主部为 $\left(\frac{1}{x}\right)^3$，它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 3 阶的.

(б) 因为$\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\to 1(x\to+\infty)$,

故主部为$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$,它对于无穷小$\dfrac{1}{x}$是$\dfrac{1}{2}$阶的.

(в) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

$=\dfrac{2\sqrt{x(x+2)}-2(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1})(\sqrt{x(x+2)}+x+1)}$.

于是,由此得

$$\frac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{8}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)}$$

$\to 1(x\to+\infty)$,

故主部为$-\dfrac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$,它对于无穷小$\dfrac{1}{x}$是$\dfrac{3}{2}$阶的.

(г) 因为$\dfrac{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\to 1(x\to+\infty)$, (а) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; (б) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; (в) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$;

(г) $\dfrac{1}{\sin\pi x}$; (д) $\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$;

解 (а) $\dfrac{x^2}{x^2-1}=\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)}$,于是,

$$\frac{\dfrac{x^2}{x^2-1}}{\dfrac{1}{2(x-1)}}=\frac{2x^2}{x+1}\to 1(x\to 1),$$

故主部为$\dfrac{1}{2(x-1)}$,它对于无穷大$\dfrac{1}{x-1}$是一阶的.

(б) 因为$\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{\sqrt{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}}=\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}$

$\to 1(x\to 1)$,

故主部为 $\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$,它对于无穷大$\dfrac{1}{1-x}$是$\dfrac{1}{2}$阶的.

(в) 因为$\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}$,于是,

$$\frac{\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}\ \sqrt[3]{1-x}}}\to (x\to 1),$$

故主部为$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$,它对于无穷大$\dfrac{1}{x-1}$是$\dfrac{1}{3}$阶的.

(г) 因为$\dfrac{\dfrac{1}{\sin\pi x}}{\dfrac{1}{\pi(1-x)}}=\dfrac{\pi(1-x)}{\sin\pi(1-x)}\to 1(x\to 1)$，

故主部为$\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$，它对于无穷大$\dfrac{1}{x-1}$是一阶的.

(д) 因为$\dfrac{\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}}{\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}$

$\to 1(x\to 1)$，

故主部为$\dfrac{1}{x-1}$，它对于无穷大$\dfrac{1}{x-1}$是一阶的.

659. 设$x\to+\infty$和$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $f_n(x)$中的每一个函数都比其前面的一个函数$f_{n-1}(x)$增加较快；

(2) 函数e^x比函数$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$中的每一个都增加得较快.

证 (1) 因为$\dfrac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}=x\to+\infty$，所以，$f_n(x)$比$f_{n-1}(x)$增加较快.

(2) 因为$\dfrac{e^x}{x^n}\to+\infty(x\to+\infty$，$n$为任一固定的自然数)，所以$e^x$比$f_n(x)$中的每一个都增加得较快.

660. 设$x\to+\infty$和$f_n(x)=\sqrt[n]{x}(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) 函数$f_n(x)$中的每一个都比其前面的一个函数$f_{n-1}(x)$增加得较慢；

(2) 函数$f(x)=\ln x$比函数$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$中的每一个都增加得较慢.

证 (1) 因为$\dfrac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}=x^{-\frac{1}{n(n-1)}}$

$$\to 0(x\to+\infty),$$

所以,$f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加得较慢.

(2) 因为$\dfrac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}\to 0^{*)}\quad(x\to+\infty)$,

所以,$\ln x$ 比 $f_n(x)$ 中的每一个增加得较慢.

*) 利用 565 题的结果.

661. 证明对于任意的函数叙列

$$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots(x_0<x<+\infty).$$

可举出一函数 $f(x)$,当 $x\to+\infty$ 时它比函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 中的每一个都增加得较快.

证 取正整数 $N>x_0$. 定义 $x_0<x<+\infty$ 上的函数 $f(x)$ 如下:

$$f(x)=\begin{cases}n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|f_k(x)|+1\right),\text{当 } n\leqslant x<n+1 \text{ 时},\\ \qquad\qquad\qquad\qquad(n=N,N+1,\cdots);\\ 0,\text{当 } x_0<x<N \text{ 时}.\end{cases}$$

于是,对任何正整数 n,当 $x>\max\{N,n\}$ 时,有

$$\left|\frac{f_n(x)}{f(x)}\right|=\frac{|f_n(x)|}{[x]\left(\sum\limits_{k=1}^{[x]}|f_k(x)|+1\right)}<\frac{1}{[x]},$$

其中$[x]$ 表 x 的整数部分. 由此可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{f(x)}=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

故当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 比 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 中的每一个都增加得较快.

§ 7. 函数的连续性

1° 函数的连续性　设

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

即，若对于每一个 $\varepsilon > 0$，都有 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$，使当 $|x - x_0| < \delta$ 时，对于 $f(x)$ 的有意义的一切值，不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

都成立，则称函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时(或在点 x_0) 是连续的.

若函数 $f(x)$ 在集合 X 上的每一点都是连续的，则称函数 $f(x)$ 在已知集合 $X = \{x\}$ (区间，线段等等) 上是连续的.

若某值 $x = x_0$ 属于函数 $f(x)$ 的定义域 $X = \{x\}$ 或为此集合的聚点，而当 $x = x_0$ 时，等式(1) 不成立[即，(а) 数 $f(x_0)$ 不存在，换言之，函数在点 $x = x_0$ 没有定义；或(б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；或(в) 公式(1) 的两端虽有意义，但它们不相等]，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点.

分为：(1) 第一类的不连续点 x_0，对于这些点存在有单侧有限的极限：

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ 和 } f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

(2) 第二类的不连续点 —— 其余的一切不连续点.

差

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

称为函数在点 x_0 的跳跃.

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

成立，则不连续点 x_0 称为无变化的. 若极限 $f(x_0 - 0)$ 或 $f(x_0 + 0)$ 中至少有一个等于符号 ∞，则称 x_0 为无穷型不连续点.

若等式*

$$f(x_0-0)=f(x_0)\,[\text{或}\ f(x_0+0)=f(x_0)]$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是左侧(或右侧)连续. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分而且必要的条件为下面三个数相等:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

2° 初等函数的连续性　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，则函数

(a) $f(x)\pm g(x)$;　(б) $f(x)g(x)$;

(в) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\,[g(x_0)\neq 0]$

也在 $x=x_0$ 连续.

特殊情形:(a) 有理整函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

对任何的 x 值都是连续的;(б) 有理分式函数

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

对所有不使其分母为零的 x 值，都是连续的.

一般地说，基本初等函数:x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x, $\log_a x$, $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, … 在一切使它们有意义的点都连续.

较普遍的结果如下:若函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续，及函数 $g(y)$ 当 $y=f(x_0)$ 时连续，则函数 $g(f(x))$ 当 $x=x_0$ 时连续.

3° 关于连续函数的基本定理　若函数 $f(x)$ 在有限的闭区间 $[a,b]$ 内连续，则:(1) 函数 $f(x)$ 在此闭区间内是有界的;(2) 达到其下确界 m 和上确界 M(外尔什特拉斯定理);(3) 在每一个区间 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ 中，函数具有介于 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 间的一切中介值(哥西定理). 特例，若 $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$，则可找到一个数值 $\gamma(\alpha<\gamma<\beta)$，使得 $f(\gamma)=0$.

662. 已给连续函数 $y=f(x)$ 的图形. 对于给定点 a 与给定数 $\varepsilon>0$，用几何方法表示出这样的数 $\delta>0$，使当 $|x-a|$

$< \delta$ 时，$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

解 如图 1.262 所示，如果 $\delta_1 < \delta_2$，我们只要取

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2),$$

即有

$$\delta = \delta_1.$$

于是，当 $|x - a| < \delta$ 时，

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

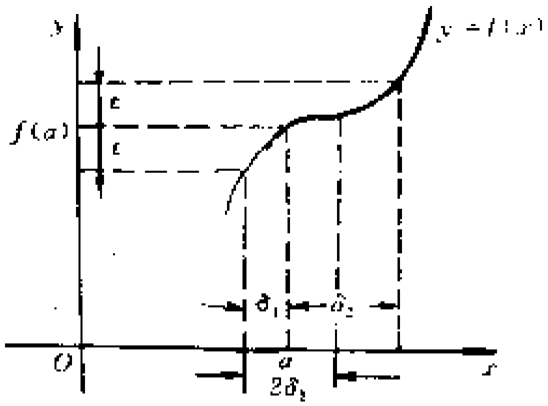


图 1.262

663. 要做一个金属的边长 $x_0 = 10$ 厘米的正方形薄片. 若要其面积 $y = x^2$ 与预计的 $y_0 = 100$ 平方厘米的差不超过(a) ± 1 平方厘米；(б) ± 0.1 平方厘米；(в) ± 0.01 平方厘米；(г) $\pm \varepsilon$ 平方厘米，问其边 x 可以在什么范围内变更?

解 (a) 要 $|x^2 - 100| < 1$，只要

$$99 < x^2 < 101.$$

解之，得

$$9.95 < x < 10.05.$$

(б) 要 $|x^2 - 100| < 0.1$，只要

$$\sqrt{100 - 0.1} < x < \sqrt{100 + 0.1}.$$

解之，得

$$9.995 < x < 10.005.$$

(в) 要 $|x^2 - 100| < 0.01$，只要

$$\sqrt{100 - 0.01} < x < \sqrt{100 + 0.01}.$$

解之，得

$$9.9995 < x < 10.0005.$$

(г) 要 $|x^2 - 100| < \varepsilon$，只要

$$\sqrt{100-\varepsilon} < x < \sqrt{100+\varepsilon}.\ ^{*)}$$

*）本来，x 处应记成 $|x|$，在此仅考虑点 $x = 10$ 处，故在其近傍 x 值恒为正，因此，不必取绝对值了。

664. 立方体的边是在 2 米和 3 米之间，为了使计算这立方体的体积时发生的绝对误差不超过 ε 立方米，设(a)$\varepsilon = 0.1$ 立方米；(б)$\varepsilon = 0.01$ 立方米；(в)$\varepsilon = 0.001$ 立方米，问测量此立方体的边 x 时可允许有怎样的绝对误差 Δ？

解 要 $|x_1^3 - x_2^3| < \varepsilon$，只要

$$|x_1 - x_2|(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < \varepsilon,$$

即只要

$$|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{3\times 3^2} = \frac{\varepsilon}{27},$$

故有

$$(a)\ \Delta < \frac{0.1}{27}(米) = 3.7(毫米);$$

$$(б)\ \Delta < \frac{0.01}{27}(米) = 0.37(毫米);$$

$$(в)\ \Delta < \frac{0.01}{27}(米) = 0.037(毫米).$$

665. 问在 $x_0 = 100$ 的尽可能多大邻域内，函数 $y = \sqrt{x}$ 图形的纵坐标与 $y_0 = 10$ 之差小于 $\varepsilon = 10^{-n}$ $(n \geqslant 0)$？求当 $n = 0,1,2,3$ 时这个邻域的大小.

解 要 $|\sqrt{x} - 10| < 10^{-n}$，只要

$$10[1 - 10^{-(n+1)}] < \sqrt{x} < 10[1 + 10^{-(n+1)}],$$

即只要

$$100[1-10^{-(n+1)}]^2 < x < 100[1+10^{-(n+1)}]^2,$$

故得

(а) 当 $n=0$ 时，　$81 < x < 121$；

(б) 当 $n=1$ 时，　$98.01 < x < 102.01$；

(в) 当 $n=2$ 时，　$98.8001 < x < 100.2001$；

(г) 当 $n=3$ 时，　$99.980001 < x < 100.020001$.

666. 利用《$\varepsilon-\delta$》论证法，证明函数 $f(x)=x^2$ 当 $x=5$ 时连续.

填下表：

ε	1	0.1	0.01	0.001	…
δ					

证　任给 $\varepsilon>0$，

要 $|x^2-25|<\varepsilon$，即 $|x-5||x+5|<\varepsilon$，　(1)

不妨只就 $x=5$ 的某一邻域来考虑. 例如，取

$|x-5|<1$ 或　$4<x<6$，

从而有

$$0<x+5<11.$$

于是，只要

$$|x-5|<\frac{\varepsilon}{11}.$$

取 $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{11},1\right)$，则当 $|x-5|<\delta$ 时，恒有

$$|x^2-5|<\varepsilon,$$

所以，函数 $y=x^2$ 在 $x=5$ 处连续.

填下表：

ε	1	0.1	0.01	0.001	ε	…
δ	0.09	0.009	0.0009	0.00009	$\min\left(\frac{\varepsilon}{11},1\right)$	…

667. 设 $f(x)=\frac{1}{x}$ 和 $\varepsilon=0.001$. 对于数值 $x_0=0.1;0.01;0.001;\cdots$ 求出充分大的正数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$ 使得可从不等式 $|x-x_0|<\delta$ 推出不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

可否对于已知的 $\varepsilon=0.001$ 选出 $\delta>0$ 来，使它对于区间 $(0,1)$ 中的一切 x_0 值都适用，换句话说，对于任意的值 $x_0\in(0,1)$，若 $|x-x_0|<\delta$，则 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$?

解 $\quad |f(x)-f(x_0)|=\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|}.\qquad(1)$

由于 $|x_0|-|x|\leqslant|x-x_0|$ 或 $|x|\geqslant|x_0|-|x-x_0|$，故有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\frac{|x-x_0|}{|x_0|^2-|x_0||x-x_0|}$$

(在此，我们已假设了 $|x-x_0|\leqslant|x_0|$，这一点是可以办到的).

于是要 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，只要

$$\frac{|x-x_0|}{|x_0|^2-|x_0||x-x_0|}<\varepsilon,$$

即只要

$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon|x_0|}.$$

取 $\quad\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon|x_0|}>0$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

我们取近似值，$\delta = 0.001x_0^2(\varepsilon = 0.001)$.

当 $x0 = 0.1$ 时，$\delta = 10^{-5}$;

当 $x_0 = 0.01$ 时，$\delta = 10^{-7}$;

当 $x_0 = 0.001$ 时，$\delta = 10^{-9}$.

由表达式(1)可知，对于不论怎样小的正数 δ(固定)，则当 $|x - x_0| < \delta$ 及 $x_0 \to 0$ 时，$|f(x) - f(x_0)|$ 可任意地大. 因此，无法选出一个公共的正数 δ 来.

668. 简明的用《$\varepsilon - \delta$》的说法在肯定的意义上来表达下面的论断：函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，而在这一点不连续.

解 存在一个 $\varepsilon_0 > 0$，对于无论怎样小的 $\delta > 0$，都有某 x 满足 $|x - x_0| < \delta$，但

$$|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0.$$

669. 设对于某些数 $\varepsilon > 0$，可找到对应的数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$，使得，只要 $|x - x_0| < \delta$，则

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

设：(a) 诸数 ε 形成一有穷的集合；(б) 数 ε 形成分数 $\varepsilon = \frac{1}{2^n}(n = 1, 2, \cdots)$ 的无穷集合. 可否断定函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续?

解 (a) 不能. 因为 ε 不能任意地小.

(б) 可以. 事实上，对于任给的 $\varepsilon > 0$，总可以取充分大的 n，使 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. 于是，存在 $\delta > 0$，使当 $|x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

670. 设已知函数

$$f(x)=x+0.001[x].$$

证明对于每一个$\varepsilon>0.001$,便可选出$\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$,使得:只要$|x'-x|<\delta$,则$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$.而对于$0<\varepsilon\leqslant 0.001$,这件事对于一切的值$x$都不行.

在怎样的点这个函数失去了连续性?

证 当$\varepsilon>0.001$,且$|x'-x|<1$时,

$$|f(x')-f(x)|=|x-x'+0.001([x]-[x'])|$$
$$\leqslant|x-x'|+0.001$$

此时只要取$\delta=\min\{\varepsilon-0.001,1\}$,则当$|x-x'|<\delta$时恒有$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

当$0<\varepsilon\leqslant 0.001$,且$x_0$不为整数时,有整数$n$,使得$n<x_0<n+1$.只要取

$$\delta=\min(x_0-n,n+1-x_0,\varepsilon)>0,$$

则当$|x-x_0|<\delta$时,有$[x]=[x_0]$,从而

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta\leqslant\varepsilon.$$

而当$x_0=n$为整数时,则对于无论怎样选取正数δ,总有x满足

$$x<x_0\text{ 及 }x_0-x<\delta,$$

此时

$$|f(x)-f(x_0)|=(x_0-x)+0.001>\varepsilon.$$

于是,函数$f(x)$在$x=n$(整数)的点失去了连续性.

671. 设对于每一个充分小的数$\delta>0$,都有$\varepsilon=\varepsilon(\delta,x_0)>0$,使得:只要$|x-x_0|<\delta$,则不等式$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立.从这里是否可得出函数$f(x)$在$x=x_0$连续?

由已知的不等式说明了函数 $f(x)$ 的什么性质?

解 不能.因为 ϵ 是由 δ 而确定的,它不能任意小.因此,只能说明函数 $f(x)$ 在点 x_0 的近傍有界.事实上,$|f(x)| < |f(x_0)| + \epsilon$.

672. 设对于每一个数 $\epsilon > 0$,都有数 $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$,使得:若 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$,则 $|x - x_0| < \delta$.

从这里是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续?由这些不等式说明了函数的什么性质?

解 不对,若函数 $f(x)$ 在有穷的区间 (a,b) 内有定义,则只要取 $\delta = 2(b-a)$,不等式 $|x - x_0| < \delta$ 恒成立.若 (a,b) 为无穷区间,例如,设 $b = +\infty$,则必然

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty.$$

事实上,若不然,则

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f(x)| = c < +\infty.$$

于是,存在叙列 $x_n > a\,(n = 1,2,\cdots)$,$x_n \to +\infty$ 使 $f(x_n) \to c$.由此可知数列 $f(x_n)\,(n = 1,2,\cdots)$ 有界,令

$$\varepsilon_0 = \sup\{|f(x_n)| + |f(x_0)| + 1\} > 0.$$

显然

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon_0 (n = 1,2,\cdots),$$

但

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = +\infty,$$

故对此 $\varepsilon_0 > 0$,不存在对应的 $\delta = \delta(\varepsilon_0, x_0) > 0$,此与假定矛盾.由此可知,必有

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty.$$

673. 设对于每一个数 $\delta > 0$ 及每一个 $x = x_0$,都有数 $\epsilon = \epsilon(\delta,$

$x_0) > 0$,使得:若 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,则 $|x - x_0| < \delta$. 从这里是否应得函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续?由已知的不等式说明了函数的什么性质?

解 不能. 它只说明了反函数的连续性和单值性.

674. 利用《$\varepsilon - \delta$》论证法证明下列函数的连续性:(a)$ax + b$;(б)x^2;(в)x^3;(г) $\sqrt{x}$;(д) $\sqrt[3]{x}$;(e)$\sin x$;(ж)$\cos x$;(з)$\operatorname{arc\,tg} x$.

证 (a) 设 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$.

任给 $\varepsilon > 0$,要 $|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \varepsilon$,只要

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$,则当 $|x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性,所以,$f(x) = ax + b$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内点点连续.

(б) $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leqslant |x - x_0| \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|)$.

任给 $\varepsilon > 0$,要 $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$,只要

$$|x - x_0|^2 + 2|x_0||x - x_0| - \varepsilon < 0,$$

即只要 $|x - x_0| < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$.

取 $\delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0| > 0$,则当 $|x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

这就证明了 $f(x) = x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内的连续性.

(в) 由于 $|x^3 - x_0^3| = |x - x_0||x^2 + x_0x + x_0^2|$

$$\leqslant |x - x_0|(|x^2| + |x||x_0| + |x_0|^2),$$

不妨设 $|x - x_0| < 1$,则有 $|x| < 1 + |x_0|$ 及

$$|x^3 - x_0^3| < |x - x_0|(1 + 3|x_0| + 3x_0^2).$$

任给 $\varepsilon > 0$,取 $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3x_0^2}\right)$,则当 $|x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|x^3 - x_0^3| < \varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性,这就证明了 x^3 在$(-\infty, +\infty)$ 内的连续性.

(г) 由于 $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$

$$< \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \quad (x_0 > 0).$$

任给 $\varepsilon > 0$,取 $\delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$,即可得证.

若 $x_0 = 0$,则取 $\delta = \varepsilon^2$.

(д) 由于

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{|x^{\frac{2}{3}} + (xx_0)^{\frac{1}{3}} + x_0^{\frac{2}{3}}|}$$

$$< \frac{|x - x_0|}{|\sqrt[3]{x_0^2}|} \quad (x_0 \neq 0, xx_0 > 0),$$

取 $\delta = \min\{|x_0|, \varepsilon\sqrt[3]{x_0^2}\}$ 即可得证.

若 $x_0 = 0$,则取 $\delta = \varepsilon^3$.

(e) 由于

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|$$

$\leqslant |x - x_0|$,

取 $\delta = \varepsilon$,即可得证.

(ж) 由于

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right|\left|\sin \frac{x + x_0}{2}\right|$$
$$\leqslant |x - x_0|$$

取 $\varepsilon = \delta$,即可得证.

(з) 由 $|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} x_0| = \left|\operatorname{arc\,tg} \frac{x - x_0}{1 + xx_0}\right|$,

又因 $|y| < \frac{\pi}{2}$ 时,$|y| \leqslant |\operatorname{tg} y|$,

故有

$$|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} x_0| \leqslant \left|\frac{x - x_0}{1 + xx_0}\right|.$$

当 $x_0 > 0$ 时,不妨就 $|x - x_0| < |x_0| = x_0$ 进行讨论,此时

$|1 + xx_0| > 1$,则

$$|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} x_0| \leqslant |x - x_0|.$$

当 $x_0 < 0$ 时可同样讨论.

所以,取 $\delta = \min(\varepsilon, |x_0|)$($x_0 = 0$ 时,取 $\delta = \varepsilon$),

则当　$|x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} x_0| < \varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性,所以 $\operatorname{arc\,tg} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

研究下列函数的连续性并绘出其图形:

675.　$f(x) = |x|$.

解　$||x| - |x_0|| \leqslant |x - x_0|$,

取 $\delta = \varepsilon$,即可证得在任一点的连续性,如图 1.263 所示.

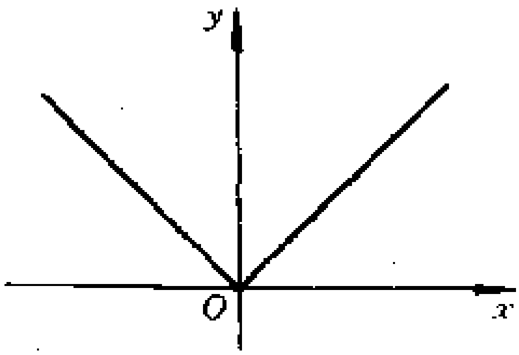


图 1.263

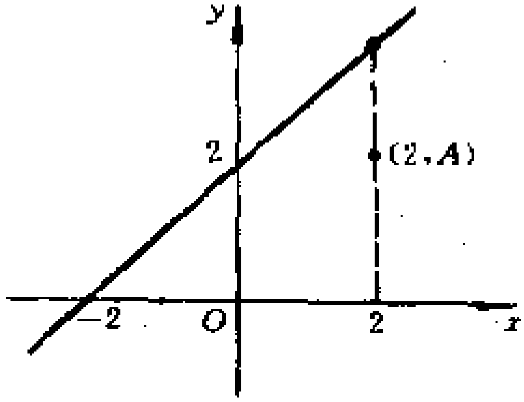


图 1.264

676. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{若 } x\neq 2;\\ A, & \text{若 } x=2.\end{cases}$

解 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x_2-4}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4.$

因此，当 $A=4$ 时，$f(x)$ 在点 $x=2$ 处连续；而当 $A\neq 4$ 时，$f(x)$ 在点 $x=2$ 处不连续. 至于在点 $x\neq 2$ 处显然是连续的，并且 $f(x)=x+2(x\neq 2)$.

如图 1.264 所示.

677. 若 $x\neq -1$，$f(x)$

$=\dfrac{1}{(1+x)^2}$，而 $f(-1)$

是任意的.

解 因为

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=+\infty$，

故函数 $f(x)$ 在点

$x=-1$ 处不连续.

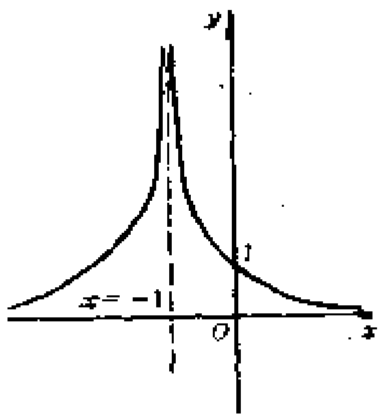


图 1.265

在点 $x\neq -1$ 处函数 $f(x)$ 显然是连续的.

如图 1.265 所示.

678. (а) 若 $x \neq 0$,

$$f_1(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|, \text{而 } f_1(0) = 1;$$

(б) 若 $x \neq 0$,

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \text{而 } f_2(0) = 1.$$

解 (а) 因为 $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 1 = f_1(0)$,故 $f_1(x)$ 点点连续.

(б) 因 $\lim\limits_{x\to +0} f_2(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -0} f_2(x) = -1$,故 $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ 不存在,因此 $f_2(x)$ 在点 $x = 0$ 处不连续,其余各点均连续.

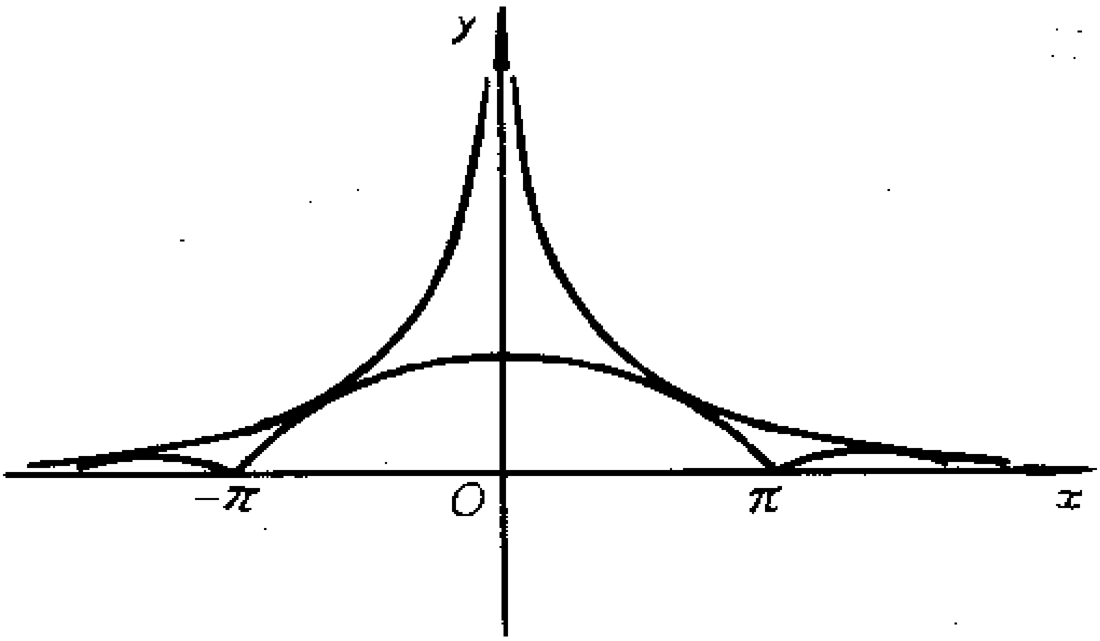


图 1.266

其中(a) 的图形关于 Oy 轴对称(图 1.266),而(б) 的图形关于原点对称(图 1.267).

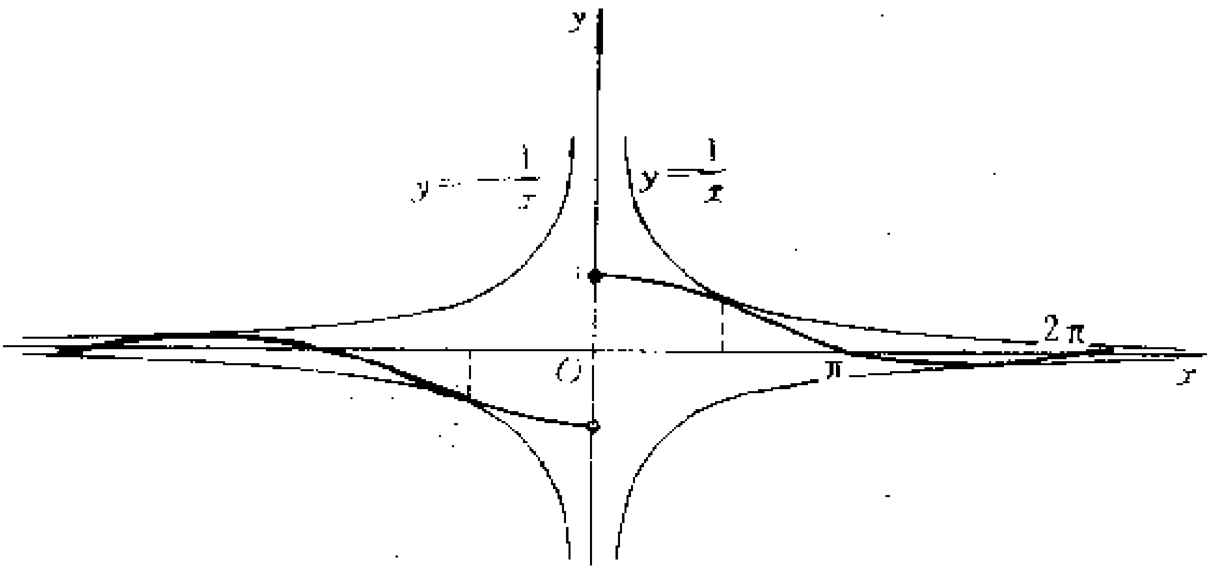


图 1.267

679. 若 $x\neq 0$，$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，而 $f(0)$ 是任意的.

解 在 $x\neq 0$ 的点 $f(x)$ 均为连续，而在 $x=0$ 不连续(因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在). 图形关于原点对称，图 1.268 仅为 $x>0$ 的一部分.

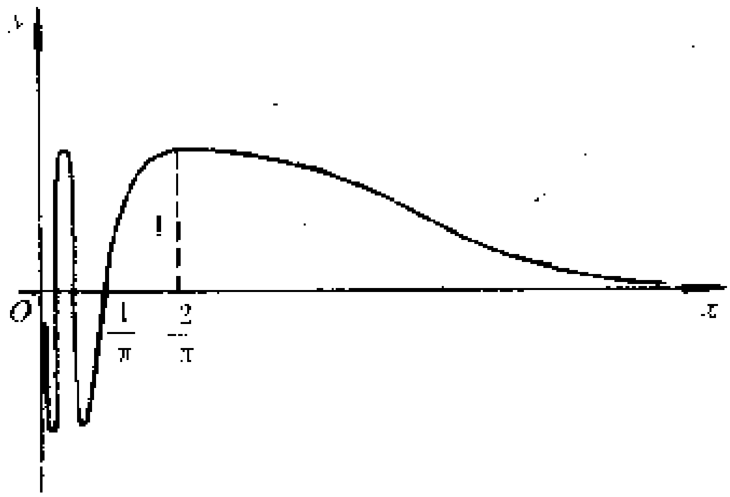


图 1.268

680. 若 $x \neq 0, f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$，而 $f(0) = 0$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$，点点连续.

图形关于 Oy 轴对称，如图 1.269 所示.

当 $x \to \infty$ 时，$y \to 1$，且当 $|x| > \dfrac{2}{\pi}$ 时 $0 < y < 1$.

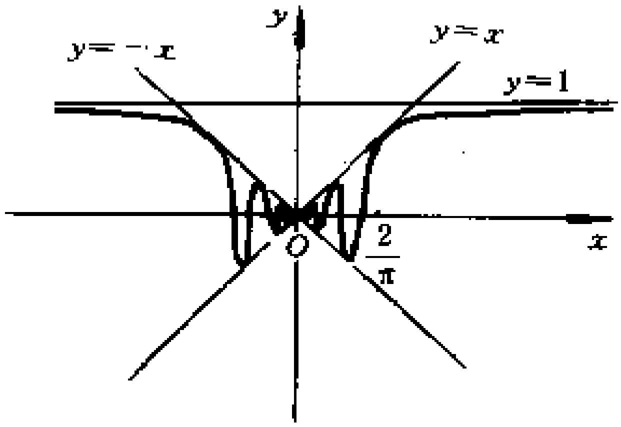


图 1.269

681. 若 $x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$，而 $f(0) = 0$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$，点点连续.

图形关于 Oy 轴对称，如图 1.270 所示.

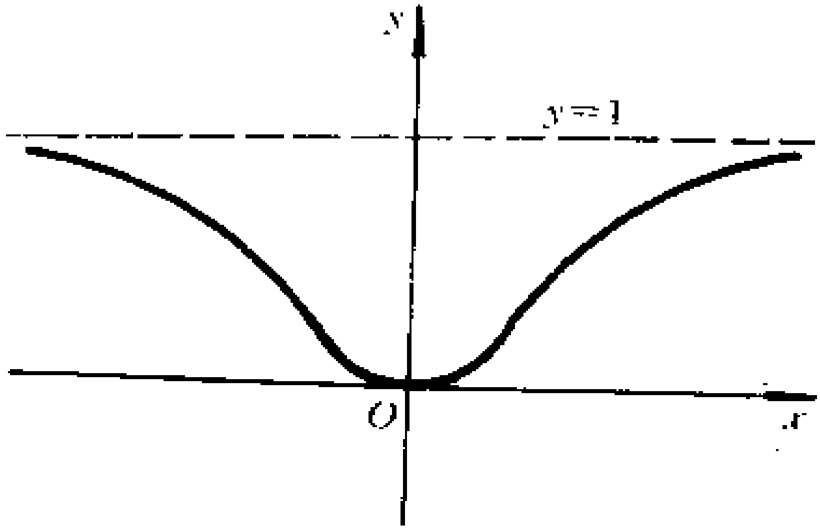


图 1.270

当 $x \to \infty$ 时，$y \to 1$，且 $0 < y < 1$.

682. 若 $x \neq 1, f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$,而 $f(1)$ 是任意的.

解 $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 0$,

除点 $x = 1$ 外其余点点连续.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$. 如图 1.271 所示.

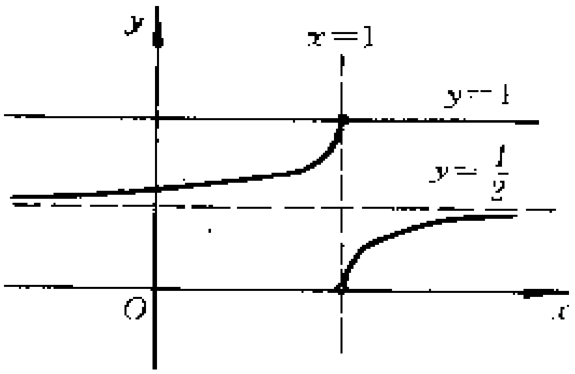


图 1.271

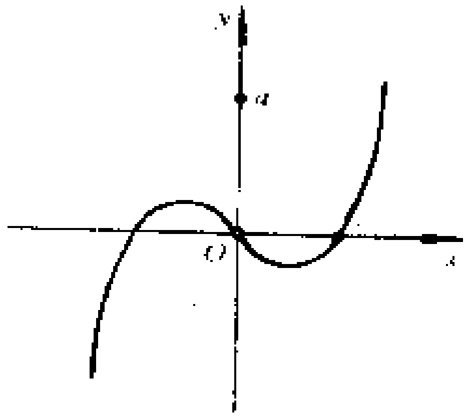


图 1.272

683. 若 $x \neq 0, f(x) = x\ln x^2$,而 $f(0) = a$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2 = 0$

当 $a = 0$ 时,点点连续;而当 $a \neq 0$ 时,除点 $x = 0$ 处不连续,其余点点连续. 图形关于原点对称,如图 1.272 所示.

684. $f(x) = \mathrm{sgn}x$.

解 当 $x < 0$ 时,$f(x) = -1$;

当 $x > 0$,时,$f(x) = 1$;

当 $x = 0$ 时,$f(x) = 0$.

除点 0 外,点点连续.

如图 1.273 所示.

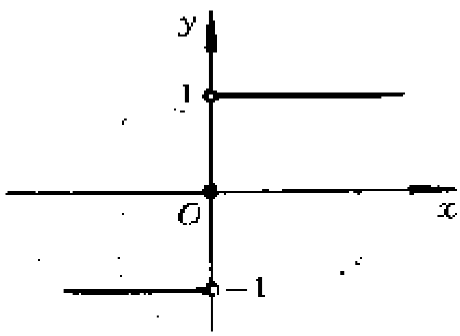


图 1.273

685. $f(x) = [x]$.

解　除当 $x=k$(k 为整数)外，其余点点连续．如图 1.274 所示．

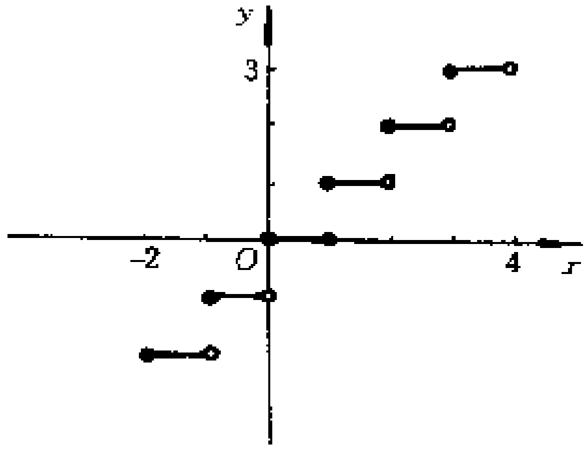


图　1.274

686. $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$.

解　当 $x=k^2$($k=1,2,\cdots$)时不连续．当 $k^2\leqslant x<(k+1)^2$ 时，$f(x)=\sqrt{x}-k$. $f[(k-1)^2]=0$.

如图 1.275 所示．

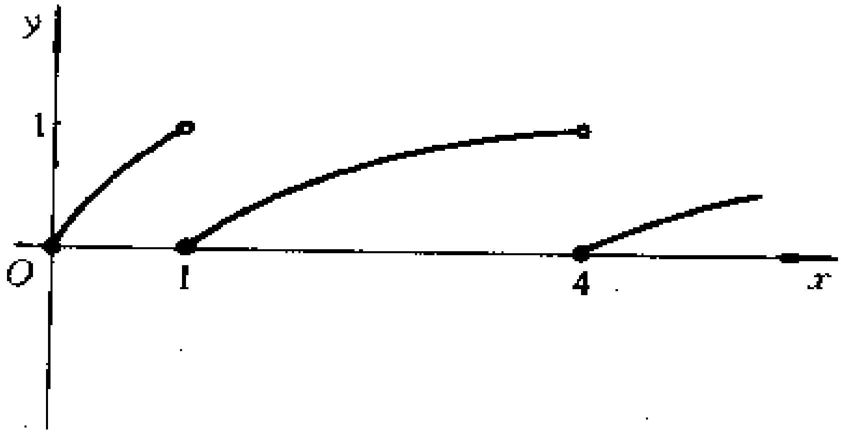


图　1.275

求出下列函数的不连续点，并研究这些点的性质：

687. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

解　$x=-1$ 为无穷型不连续点．

688. $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

解　因 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+x}{1+x^3}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{3}$,

故 $x=-1$ 为“可移去”的不连续点.

689. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$.

解 $\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$,

$x=1$ 及 $x=-2$ 均为无穷型不连续点.

690. $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to-1}y=\infty$, $\lim\limits_{x\to0}y=-1$, 及 $\lim\limits_{x\to1}y=0$,

所以, $x=-1$ 为无穷型不连续点, 而 $x=0$ 及 $x=1$ 为“可移去”的不连续点.

691. $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}y=1$ 及 $\lim\limits_{x\to k\pi}y=\infty$($k$ 为不等于零的整数),

所以, $x=0$ 为“可移去”的不连续点, 而 $x=k\pi$($k=\pm1,\pm2,\cdots$)为无穷型不连续点.

692. $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to2}y=\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\dfrac{2\pi\sin^2\dfrac{\pi}{2}(2-x)}{\dfrac{\pi}{2}(2-x)\cdot2(2+x)}}=0.$

同理, $\lim\limits_{x\to-2}y=0$,

所以, $x=2$ 及 $x=-2$ 为“可移去”的不连续点.

693. $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to0}y$ 不存在,*) 故 $x=0$ 为第二类不连续点.

*）左右极限均不存在.

694. $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}-0} y=(-1)^k$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}+0} y=(-1)^{k-1}$，故 $x=\frac{1}{k}$

$(k=\pm 1, \pm 2, \cdots)$

为第一类不连续点.

695. $y=\dfrac{\cos\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}}$.

解 $x=\dfrac{2}{2k+1}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为"可移去"的不连续点.

696. $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-0}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$，

故 $x=0$ 为第一类不连续点.

697. $y=\sqrt{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} y=0$，$x=0$ 为"可移去"的不连续点.

698. $y=e^{x+\frac{1}{x}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+0} y=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-0} y=0$，

所以，$x=0$ 为第二类不连续点.

699. $y=\frac{1}{\ln x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0} y=0$，$\lim\limits_{x\to 1-0} y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 1+0} y=+\infty$，

所以，$x=0$ 为"可移去"的不连续点，而 $x=1$ 为无

穷型不连续点.

700^+. $y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to1+0}y=1$, $\lim\limits_{x\to1-0}y=0$, $\lim\limits_{x\to+0}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-0}y=+\infty$, 所以 $x=1$ 为第一类不连续点, 而 $x=0$, 为无穷型不连续点.

研究下列函数的连续性并绘出其大略图形.

701. $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

解 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 为第一类不连续点.

如图 1.276 所示.

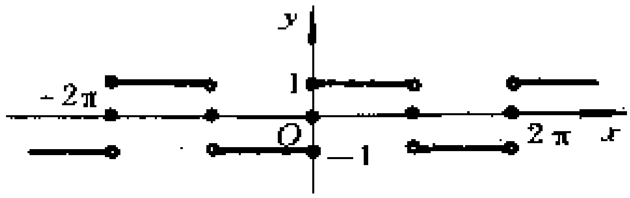


图 1.276

702. $y=x-[x]$.

解 $x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第一类不连续点.

如图 1.277 所示.

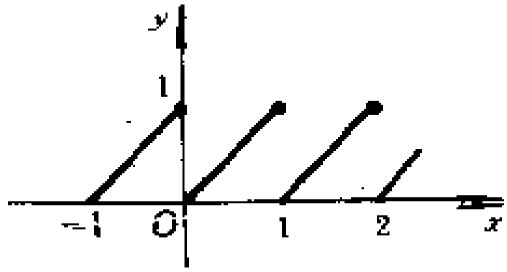


图 1.277

703. $y=x[x]$.

解 $x=k(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第一类不连续点.

如图 1.278 所示.

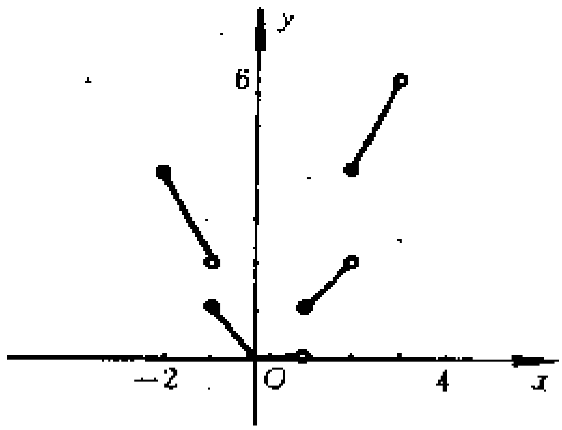


图 1.278

704. $y=[x]\sin\pi x$.

解 处处连续.

当 $x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时 $y=0$.

如图 1.279 所示.

705. $y = x^2 - [x^2]$.

解 $x = \pm\sqrt{k}$ $(k = 1,2,\cdots)$ 为第一类不连续点.

如图 1.280 所示.

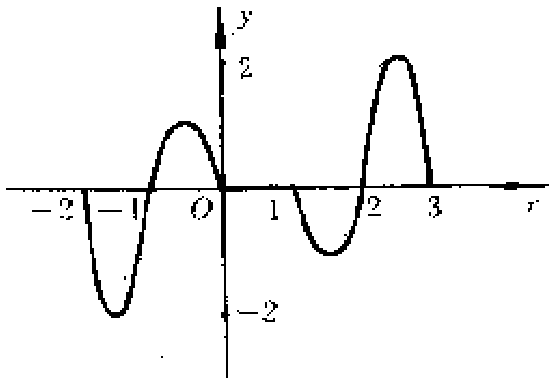


图 1.279

706. $y = [\frac{1}{x}]$.

解 $x = 0$ 为无穷型不连续点,$x = \frac{1}{k}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为第一类不连续点.

图 1.281 仅画了 $x > 0$ 的部分,并且在图形中两轴比例不一致,即已经过"压缩"变换.

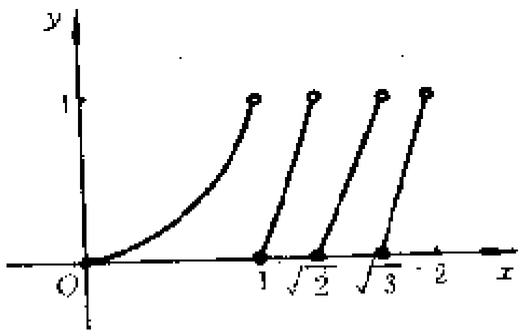


图 1.280

707. $y = x[\frac{1}{x}]$.

解 $x = 0$ 为"可移去"的不连续点,因为$\lim\limits_{x\to 0} y = 1$.

$x = \frac{1}{k}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为第一类不连续点.

图 1.282 仅画了当 $x > 0$ 的部分,并且两轴所取的单位不一致.

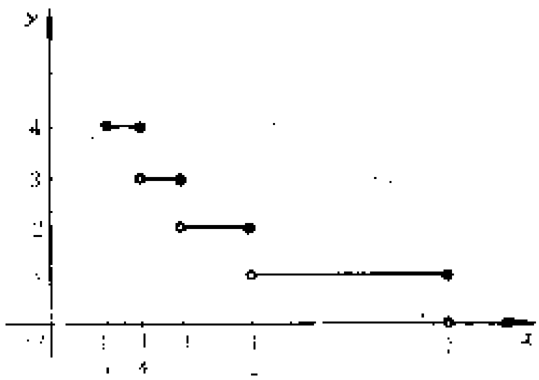


图 1.281

708. $y=\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

凡使 $\cos\frac{1}{x}=0$ 的点,即 $x=\frac{2}{(2k-1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第一类不连续点.

图 1.283 仅画了当 $k=0,\pm1,\pm2$ 时的情形,图形关于 Oy 轴对称.

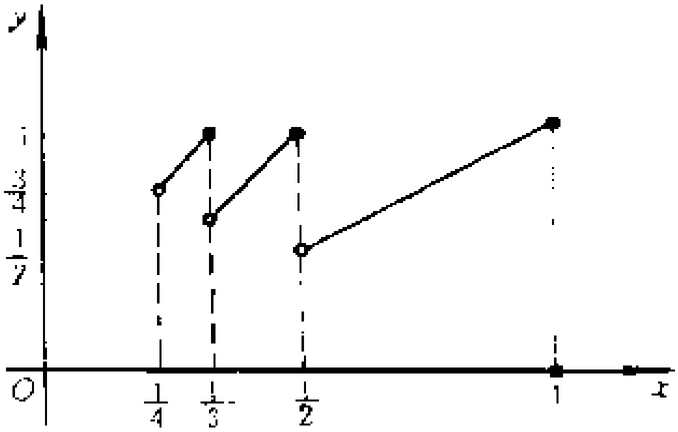


图 1.282

709. $y=\left[\frac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

$x=\pm\frac{1}{k}$ 及 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}(k=1,2\cdots)$ 为第一类不连续点.

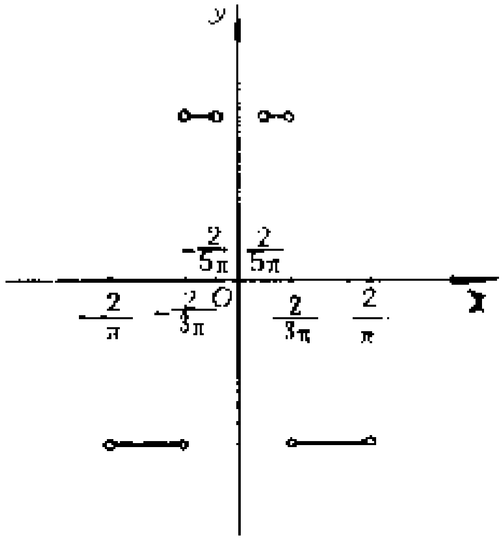


图 1.283

图 1.284 仅画了 $x>0$ 时的一部分. 又两轴所取的比例单位不同.

710. $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}$.

解 凡使 $\sin\frac{\pi}{x}=0$,即

$$x = \frac{1}{k}(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

为无穷型不连续点. $x = 0$ 为第二类不连续点.

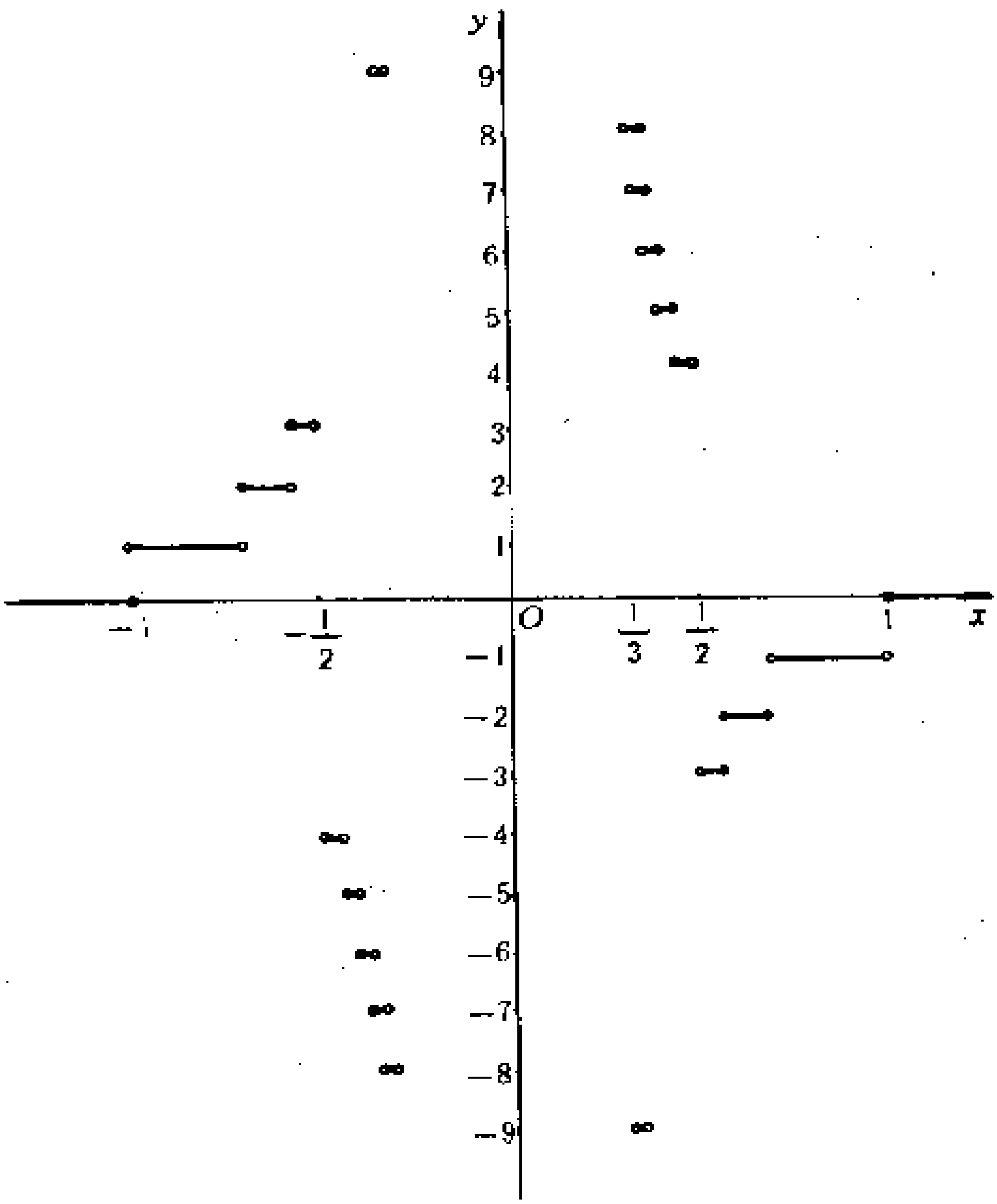


图 1.284

图形关于原点对称,如图 1.285 所示.

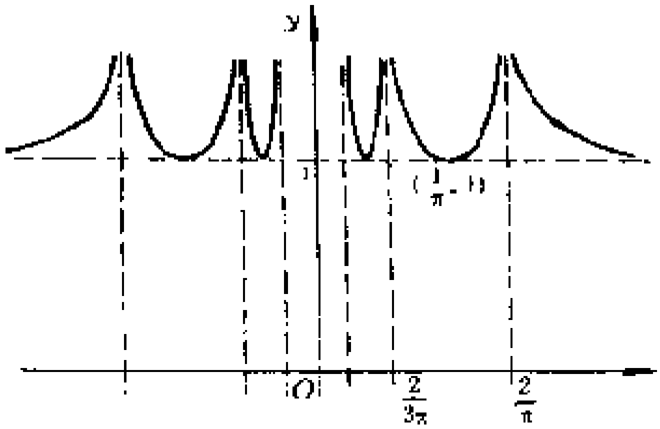


图 1.285

当 $x\to-\infty$ 时，$y\to-\infty$；

当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$.

711. $y=\sec^2\dfrac{1}{x}$.

解 $x=\dfrac{2}{(2k+1)\pi}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷型不连续点.

$x=0$ 为第二类不连续点.

图形关于 Oy 轴对称，当 $x\to+\infty$ 时，$y\to1$.

如图 1.286 所示.

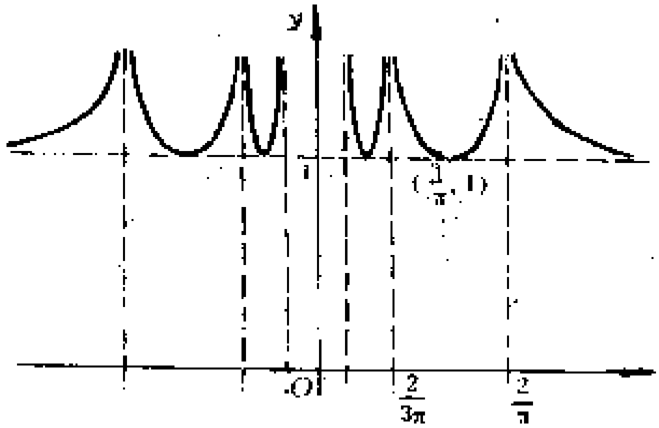


图 1.286

712. $y=(-1)^{[x^2]}$.

解 $x=\pm\sqrt{n}\,(n=1,2,\cdots)$ 为第一类不连续点.

图形关于 Oy 轴对称.

$$\lim_{x\to\sqrt{n}-0} y=(-1)^{n-1},$$

$$\lim_{x\to\sqrt{n}+0} y=(-1)^{n}.$$

如图 1.287 所示.

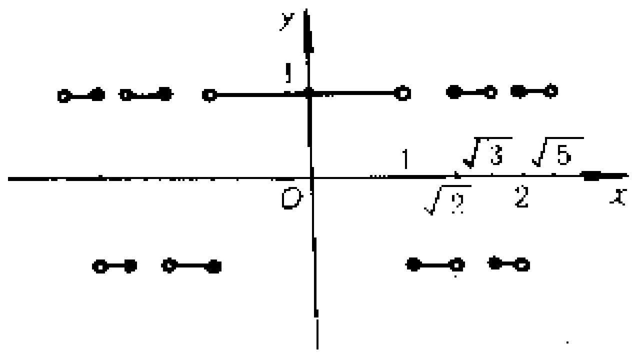


图 1.287

713. $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}\right)$.

解 $x=0$, $x=1$ 和 $x=2$ 为第一类不连续点.

$$\lim_{x\to-0} y=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to1-0} y=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to2-0} y=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to+0} y=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to1+0} y=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to2+0} y=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=0,\ \lim_{x\to-\infty} y=0.$$

如图 1.288 所示.

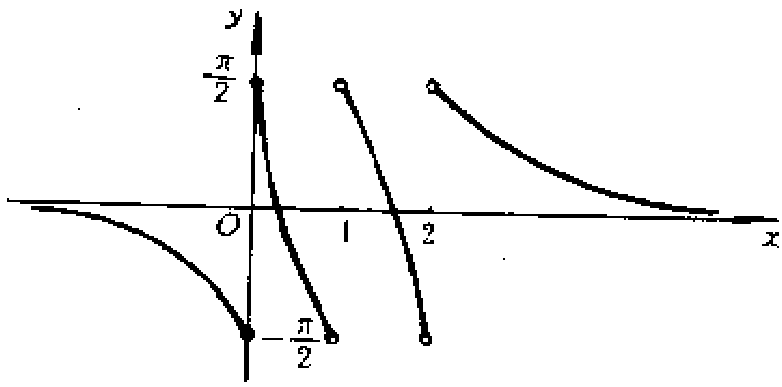


图 1.288

714. $y=\frac{1}{x^2\sin^2x}$.

解 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷型不连续点.

图形关于 Oy 轴对称,如图 1.289 所示.

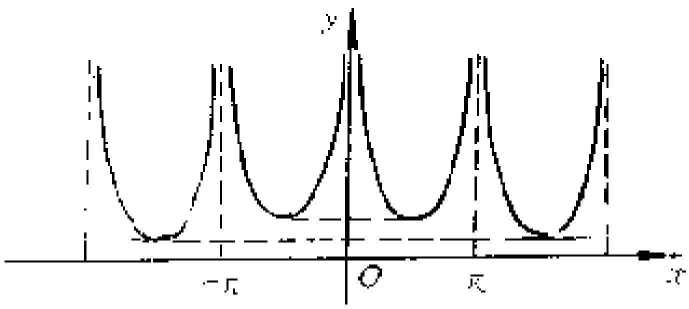


图 1.289

715. $y=\frac{1}{\sin(x^2)}$.

解 $x=\pm\sqrt{k\pi}(k=0,1,2,\cdots)$ 为无穷型不连续点.

图形关于 Oy 轴对称,如图 1.290 所示.图中只画了 $x>0$ 的一部分.

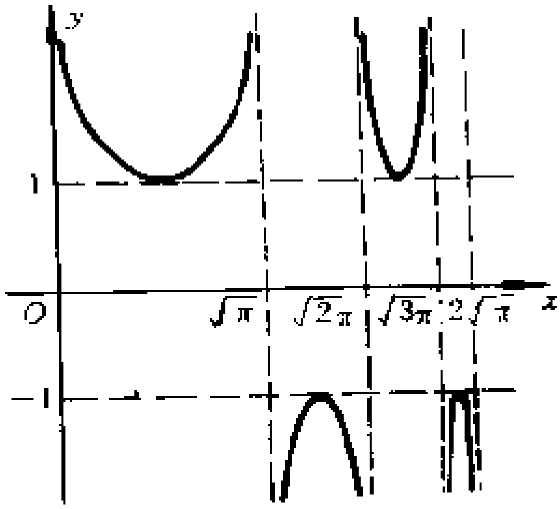


图 1.290

716. $y=\ln\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

解 $x=-1$ 和 $x=3$ 为无穷型不连续点.

定义域为 $x<-1$ 或 $x>3$.

当 $x<\frac{-3}{2}$ 时,$0<\frac{x^2}{x^2-2x-3}<1$,故

$$\ln\frac{1}{(x+1)(x-3)}<0.$$

当 $x>\frac{-3}{2}$ 时,

$$\frac{x^2}{x^2-2x-3}>1$$

故 $\ln\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}>0$.

当 $x\to\infty$ 时，$y\to 0$.

如图 1.291 所示.

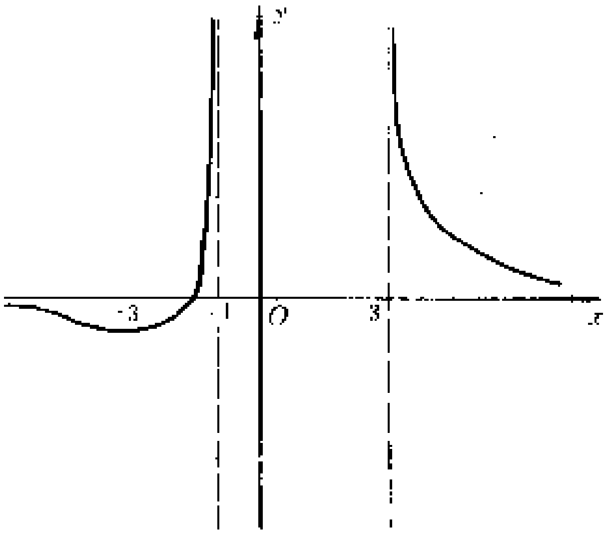


图 1.291

717. $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

$\lim\limits_{x\to\infty}y=1$, $\lim\limits_{x\to+0}y=0$, $\lim\limits_{x\to-0}y=+\infty$.

如图 1.292 所示.

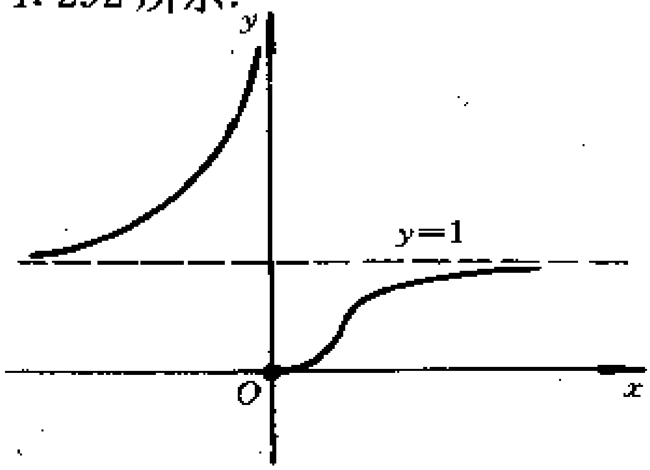


图 1.292

718. $y=1-e^{-\frac{1}{x^2}}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0}y=1$,

故 $x=0$ 为"可移去"的不连续点.

图形关于 Oy 轴对称，如图 1.293 所示.

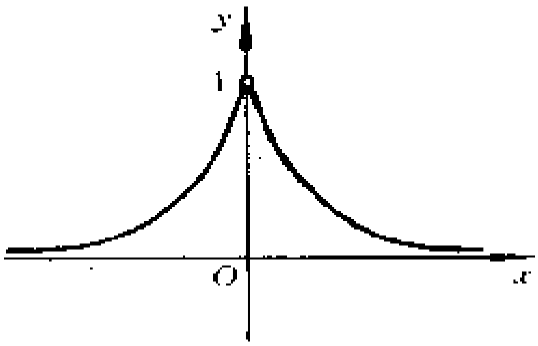


图 1.293

719. $y=\operatorname{th}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

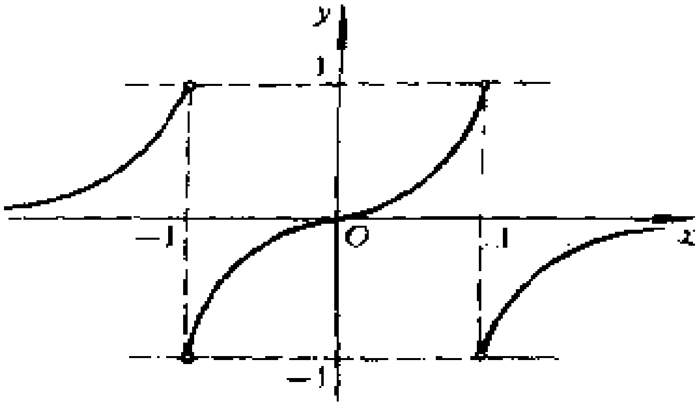


图 1.294

解 $x=\pm 1$ 为第一类不连续点.

$\lim\limits_{x\to 1-0} y=1$,

$\lim\limits_{x\to 1+0} y=-1$.

图形关于原点对称，如图 1.294 所示.

研究下列函数的连续性并作出其图形：

720. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}\ (x\geqslant 0)$.

解 $y=\begin{cases}1, & 当\ 0\leqslant x<1;\\ 0, & 当\ x>1;\\ \dfrac{1}{2}, & 当\ x=1.\end{cases}$

$x=1$ 为第一类不连续点.

如图 1.295 所示.

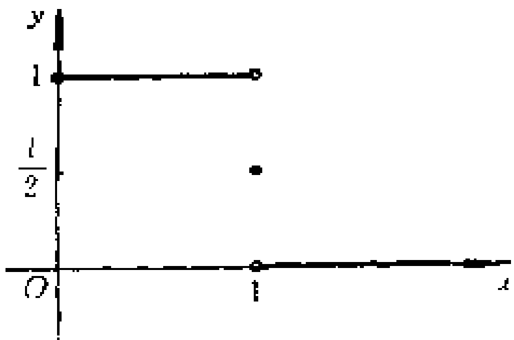


图 1.295

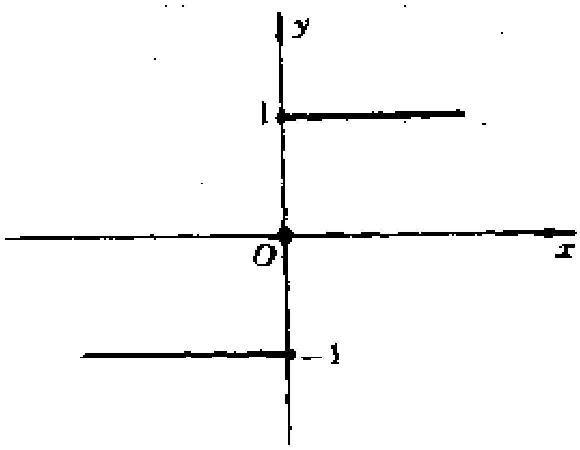


图 1.296

721. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

解 $y=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ -1, & \text{当 } x<0,\end{cases}$

即 $y=\operatorname{sgn}x$.

$x=0$ 为第一类不连续点，如图 1.296 所示.

722. $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

解

$y=\begin{cases}1, & \text{当 } |x|\leqslant 1;\\ x^2, & \text{当 } |x|>1.\end{cases}$

处处连续，如图 1.297 所示.

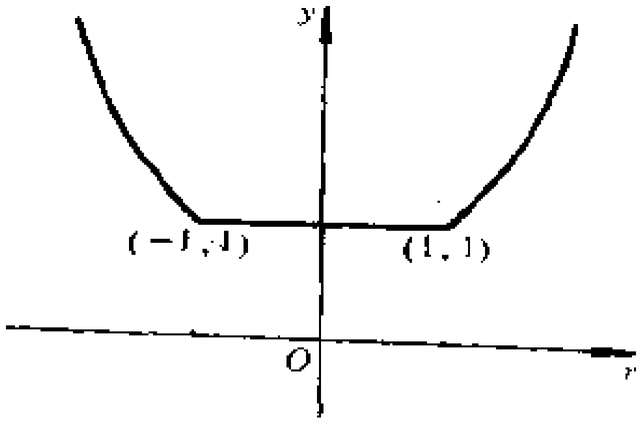


图 1.297

723. $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{2n}x$.

解

$y=\begin{cases}1, & \text{当 } x=k\pi,\\ 0, & \text{当 } x\neq k\pi.\end{cases}$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

$x=k\pi$ 为第一类不连续点，如图 1.298 所示.

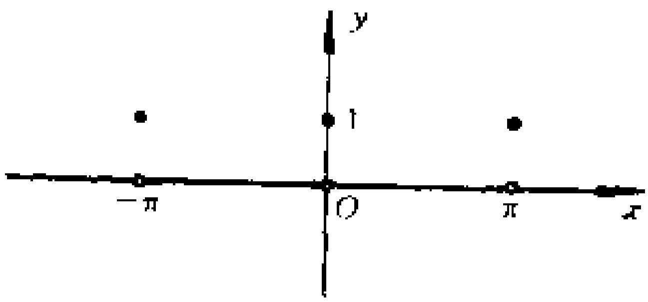


图 1.298

724. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

解 $y=\begin{cases} x, & \text{当} |x-k\pi|<\frac{\pi}{6}; \\ \frac{x}{2}, & \text{当 } x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}; \\ 0, & \text{当} \frac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\frac{5\pi}{6}. \end{cases}$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ 为第一类不连续点.

如图 1.299 所示.

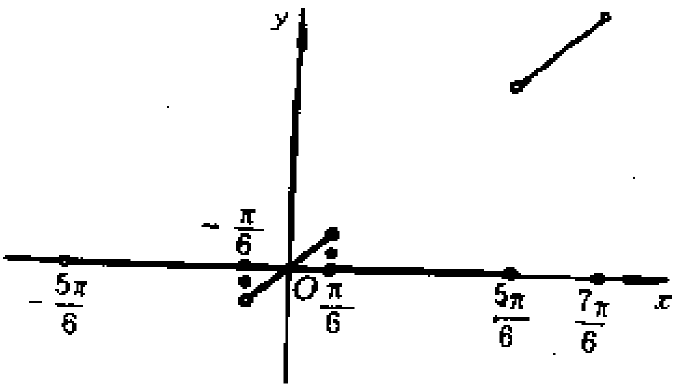


图 1.299

725. $y=\lim\limits_{n\to\infty}[x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg}x)]$.

解 $y=\begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2}; \\ -\frac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi; \\ 0, & \text{当 } x=k\pi+\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$x=\frac{k\pi}{2}(k\neq0)$为第一类不连续点,如图 1.300 所示.

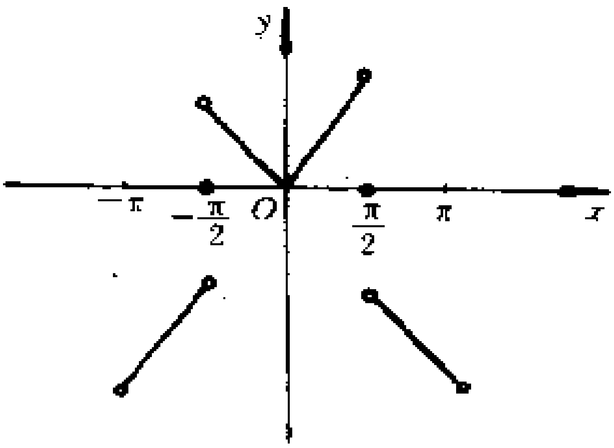


图 1.300

726. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

解 $y=\begin{cases}x, & \text{当 } x\leqslant 0;\\ x^2, & \text{当}>0.\end{cases}$

处处连续，如图 1.301 所示.

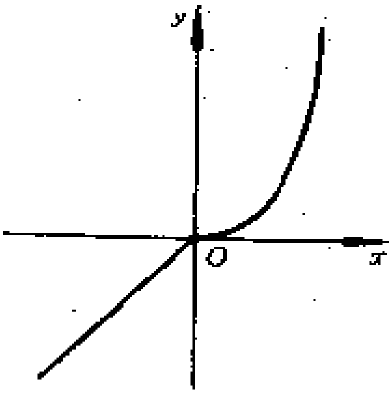


图 1.301

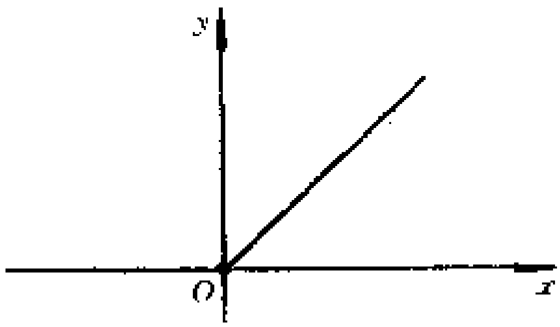


图 1.302

727. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$.

解 $y=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant 0;\\ x, & \text{当 } x>0.\end{cases}$

处处连续，如图 1.302 所示.

728. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\operatorname{th}tx$.

解

$$y=\begin{cases}-(1+x), & \text{当 } x<0;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ 1+x, & \text{当 } x>0.\end{cases}$$

$x=0$ 为第一类不连续点.

如图 1.303 所示.

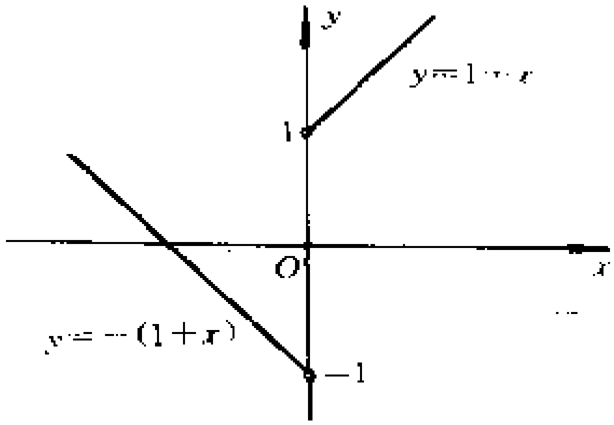


图 1.303

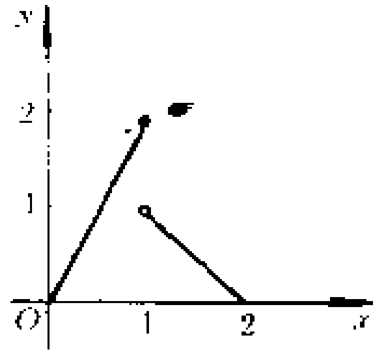


图 1.304

729. 函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, \text{若 } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2-x, \text{若 } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

是否为连续函数?

解 $x=1$ 为第一类不连续点,在$[0,2]$上 $f(x)$不是连续函数.

如图 1.304 所示.

730. 设:

$$f(x)=\begin{cases}e^x, \text{若 } x<0;\\ a+x, \text{若 } x\geqslant 0.\end{cases}$$

当怎样选择数 a,函数 $f(x)$方为连续的?

解 因 $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=a$ 及 $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=1$,

而 $f(0)=a$,故当 $a=1$ 时,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0),$$

此即说明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；至于当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 显然连续.

于是，我们选择数 $a=1$，则函数 $f(x)$ 在整个数轴上为连续的，如图 1.305 所示.

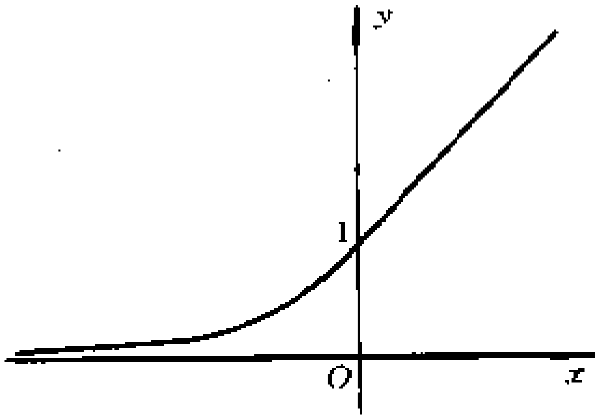


图 1.305

731. 研究下列函数的连续性并说明不连续点的性质，设：

(a) $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, \text{当 } 1<x\leqslant 2; \end{cases}$

(б) $f(x)=\begin{cases} x, \text{当 } |x|\leqslant 1, \\ 1, \text{当 } |x|>1; \end{cases}$

(в) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, \text{当 } |x|\leqslant 1, \\ |x-1|, \text{当 } |x|>1; \end{cases}$

(г) $f(x)=\begin{cases} \mathrm{ctg}^2\pi x, \text{当 } x \text{ 为非整数}; \\ 0, \text{当 } x \text{ 为整数}; \end{cases}$

(д) $f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$

解 (a)连续函数.

(б) $x=-1$ 为第一类不连续点.

(в)$x=-1$ 为第一类不连续点.

(г)$x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为无穷型不连续点.

(д)$x\neq k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为第二类不连续点.

732. 函数 $d=d(x)$是数轴 Ox 上的点 x 与由线 $0\leqslant x\leqslant1$ 及 $2\leqslant x\leqslant3$ 所构成点集间的最短距离. 求函数 d 的解析表示式,作出其图形并研究其连续性.

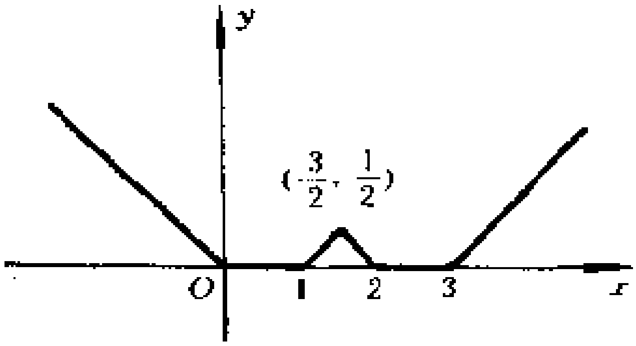


图 1.306

解

$$d=\begin{cases}-x,-\infty<x<0;\\0,0\leqslant x\leqslant1;\\x-1,1<x\leqslant\dfrac{3}{2};\\2-x,\dfrac{3}{2}<x<2;\\0,2\leqslant x\leqslant3;\\x-3,3<x<+\infty.\end{cases}$$

处处连续,如图 1.306 所示.

733. 图形 E 是由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形所构成(图 1.307). 函数 $S=S(y)(0\leqslant y<+\infty)$是图形 E 介于平行线 $Y=0$ 及 $Y=y$ 之间的那一部分面积;而函数 $b=b(y)(0\leqslant y<+\infty)$是用平行线 $Y=y$

去截图形所得截痕之长. 求函数 S 及 b 的解析表示式，作出它们的图形并研究其连续性.

解

$$S=\begin{cases}3y-\dfrac{y^2}{2}, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{2}+2y, & \text{当 } 1<y\leqslant 2;\\ \dfrac{5}{2}+y, & \text{当 } 2<y\leqslant 3;\\ \dfrac{11}{2}, & \text{当 } 3<y<+\infty.\end{cases}$$

处处连续，如图 1.308 所示.

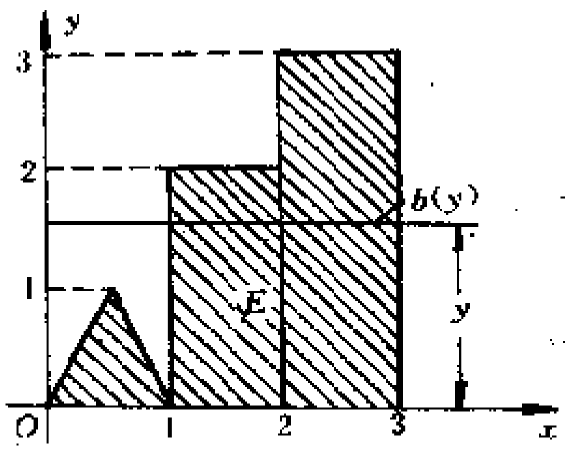


图 1.307

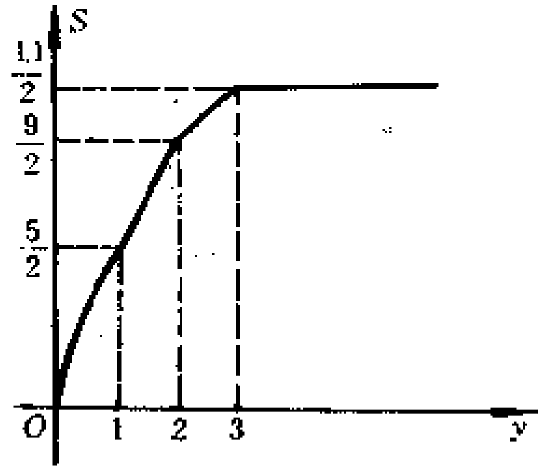


图 1.308

对于函数 $b=b(y)$ 根据假设，则有如下解析表示式：

$$b=\begin{cases}3-y, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 2, & \text{当 } 1<y\leqslant 2;\\ 1, & \text{当 } 2<y\leqslant 3;\\ 0, & \text{当 } 3<y<+\infty.\end{cases}$$

$y=2$ 及 $y=3$ 为第一类不连续点，如图 1.309 所示.

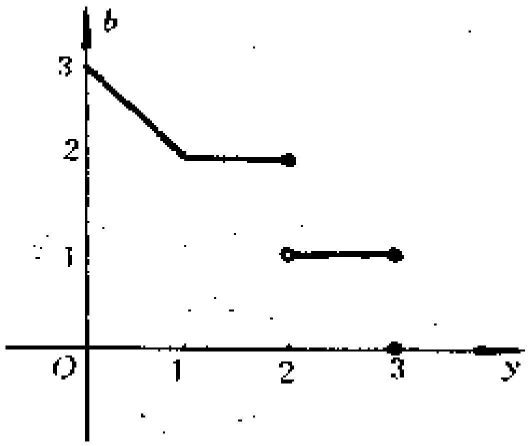


图 1.309

734. 证明迪里黑里函数

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!\ x)\}$$

当 x 取任一值时都是不连续的.

证 记 $f(m,n)=\cos^n(\pi m!\ x)$.

当 x 为有理数时，总可认为 $m>p$，其中 $x=\frac{q}{p}$（p,q 为互质的整数），于是 $f(m,n)=1$，故此时

$$\chi(x)=1;$$

当 x 为无理数时，则对任一固定的 m 而言，$|\cos(\pi m!\ x)|<1$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!\ x)=0,$$

故此时 $\chi(x)=0$.

总之，

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.}\end{cases}$$

由实数的稠密性可知，对于 x 的任意值在其任一邻域内均含有无限个有理数和无理数，因而 $\chi(x)$ 的值总在

1 和 0 这两数中取一个. 这样，$\chi(x)$的极限就不存在. 于是，当 x 取任一值时，$\chi(x)$都是不连续的.

735. 设有函数

$$f(x)=x\cdot\chi(x),$$

式中 $\chi(x)$为迪里黑里函数(参阅上例)，研究此函数 $f(x)$的连续性. 作出这函数的略图.

解

$$x\cdot\chi(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 为有理数时；}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数及 } 0 \text{ 时，}\end{cases}$$

因此，

$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\chi(x)=0$ 等于在 $x=0$ 处的函数值，故当 $x\neq 0$ 时，$x\cdot\chi(x)$不连续，而当 $x=0$ 时，$x\cdot\chi(x)$连续，如图 1.310 所示.

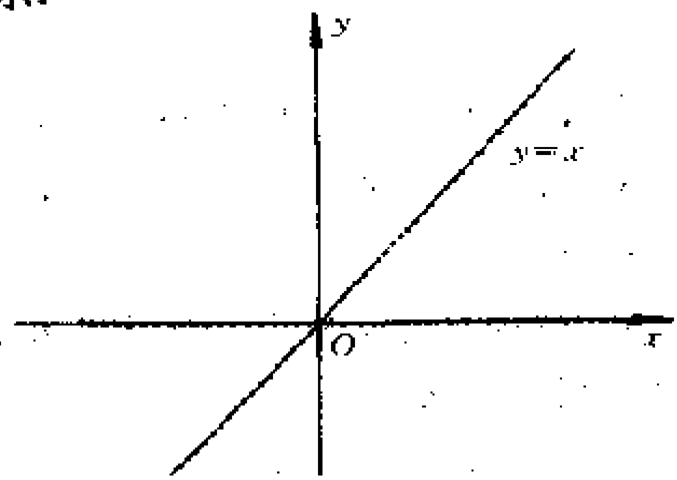


图 1.310

736. 证明黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{若 } x=\dfrac{m}{n}, \text{其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互质的整数，}\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时是不连续的，而当 x 取任一个无理值时是连续的. 作出这个函数的略图.

证　不失一般性，我们仅就区间$[0,1]$讨论，图 1.311 为$f(x)$在$x\in[0,2]$时的略图.

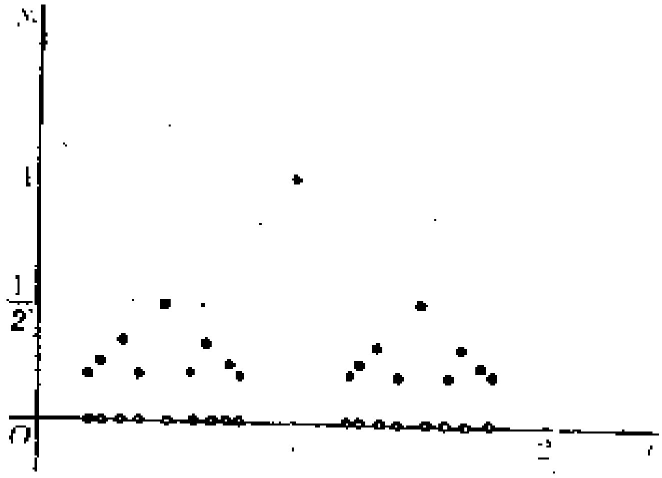


图 1.311

对于任意的$x_0\in[0,1]$来说，若任取$\varepsilon>0$，则满足不等式$n<\frac{1}{\varepsilon}$的自然数n至多只有有限个，即在$[0,1]$中至多只有有限个有理数$\frac{m}{n}$，使得$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}\geqslant\varepsilon$. 因而我们可以取$\delta>0$，使得$x_0$的邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内不含有这样的有理数(若$x_0$为有理数，则可能除去$x_0$). 于是，只要$0<|x-x_0|<\delta$，不论$x$是否为有理数，都成立$|f(x)|<\varepsilon$. 即证明了对于$[0,1]$中任意点$x_0$，都成立

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=0.$$

若x_0为无理数，则$f(x_0)=0$，可见$f(x)$在x_0连续；若x_0是有理数，则$f(x_0)\neq0$，函数$f(x)$在x_0点有可移间断.

737. 若x是既约有理分数$\frac{m}{n}(n\geqslant1)$时，$f(x)=\frac{nx}{n+1}$；若x是无理数时，$f(x)=|x|$.

试研究函数 $f(x)$ 的连续性并作出此函数的略图.

证 当 $x<0$ 时，$f(x)$ 显然不连续，而对于正有理数 $\xi=\frac{m}{n}$，$f(\xi)=\frac{m}{n+1}$. 若我们取一列无理数 x_k 趋于 ξ，则 $\lim\limits_{x_k\to\xi}f(x_k)=\frac{m}{n}\neq\frac{m}{n+1}$，故 $f(x)$ 在正有理数点也不连续. 当 ξ 为正无理数时，由于对任意的 $\varepsilon>0$，满足 $\frac{1}{q}>\varepsilon$ 的自然数 q 至多只有有限个. 与 736 题类似可证 $f(x)$ 在点 $x=\xi$ 连续. 如图 1.312 所示.

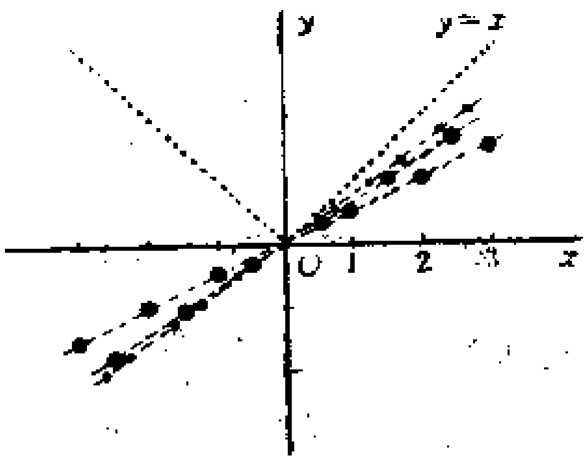


图 1.312

738. 函数 $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ 除 $x=0$ 外，对于自变数 x 的一切值都有定义. 为了使此函数当 $x=0$ 是连续的，则在 $x=0$ 这一点应当以甚么数值作为函数的值？

解 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

所以，应取 $f(0)=\frac{1}{2}$，那么，$f(x)$ 当 $x=0$ 时是连续的.

739. 证明不管怎样选取数 $f(1)$，函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $x=1$ 是不连续的.

证　因为 $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=+\infty$，所以，我们无法选择 $f(1)$ 使之成为连续的.

740. 当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 失去意义，定义 $f(0)$ 的数值，使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，若：

(а) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$；　(б) $f(x)=\frac{\operatorname{tg}2x}{x}$；

(в) $f(x)=\sin x\sin\frac{1}{x}$；　(г) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$；

(д) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$；　(е) $f(x)=x^x\ (x>0)$；

(ж) $f(x)=x\ln^2x$.

解　(а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{3}{2},$$

取 $f(0)=\frac{3}{2}$ 即行.

(б) $f(0)=2$.

(в) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\sin x\sin\frac{1}{x}=0$，故取 $f(0)=0$.

(г) 因为 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，故取 $f(0)=e$.

(д) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$，故取 $f(0)=0$.

(е) 因为 $\lim\limits_{x\to0}x^x=1$，故取 $f(0)=1$.

(ж) 因为 $\lim\limits_{x\to0}x\ln^2x=0$，故取 $f(0)=0$.

741. 设:(a)函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时是连续的,而函数 $g(x)$ 当 $x=x_0$ 时是不连续的;(б)当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的,则此二函数的和 $f(x)+g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续的? 举出适当的例子.

解 (a) $f(x)+g(x)$ 必为不连续的. 事实上,

设 $F(x)=f(x)+g(x)$

对于函数 $F(x)-f(x)=g(x)$,如果 $F(x)$ 在 x_0 连续,则有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[F(x)-f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to x_0}F(x)-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=F(x_0)-f(x_0)=g(x_0)$.

因此当 $g(x)$ 有意义的话,那么 $g(x_0)=F(x_0)-f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,这与假设是矛盾的,故 $F(x)$ 在点 x_0 不连续;若 $g(x_0)$ 没有意义,那么当然它在 x_0 点不连续.

(б)不. 例如,

$$f(x)=\begin{cases}1, 当\ x\geqslant 0,\\ -1, 当\ x<0.\end{cases} 及\ g(x)=\begin{cases}-1, 当\ x\geqslant 0,\\ 1, 当\ x<0.\end{cases}$$

它们在点 $x=0$ 处均不连续,但其和 $f(x)+g(x)\equiv 0$ 却处处连续.

742. 设:(a)函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续,而 $g(x)$ 在点 x_0 不连续;(б)当 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的. 则此二函数的乘积 $f(x)g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续? 举出适当的例子.

解 (a)不. 例如,

$$g(x)=\begin{cases}1, 当\ x\geqslant 0\\ -1, 当\ x<0\end{cases} 及\ f(x)=0.$$

它们满足假设条件,其中 $f(x)$ 处处连续,而 $g(x)$ 在点 $x=0$ 不连续,但 $f(x)g(x)\equiv 0$ 处处连续.

(б)不. 例如，

$$f(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x\geqslant 0\\ -1,\text{当 } x<0\end{cases},\text{及 } g(x)=f(x).$$

它们均在点 $x=0$ 处不连续，但其乘积 $f(x)g(x)\equiv 1$ 却处处连续.

743. 可否断定不连续函数平方后仍为不连续函数？举出处处都有不连续点的函数，而平方后是连续函数的例子.

解 不能. 例如 742 题(б)之例.

又对于函数

$$f(x)=\begin{cases}-1,\text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 1,\text{当 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

处处不连续，但平方后所得函数 $f^2(x)\equiv 1$ 却处处连续.

744. 研究函数 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$ 的连续性，设：

(a) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=1+x^2$；

(б) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=x(1-x^2)$；

(в) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=1+x-[x]$.

解 (a) $f[g(x)]\equiv 1$ 处处连续；

而 $g[f(x)]=\begin{cases}2, x\neq 0;\\ 1,\text{当 } x=0,\end{cases}$

在 $x=0$ 点不连续.

(б)因为 $g(x)=x(1-x^2)$ 当 $x<-1$ 或 $0<x<1$ 时为正，而当 $-1<x<0$ 或 $x>1$ 时为负，故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1,\text{当 } x<-1;\\0,\text{当}=-1;\\-1,\text{当}-1<x<0;\\0,\text{当 } x=0;\\1,\text{当 } 0<x<1;\\0,\text{当 } x=1;\\-1,\text{当 } x>1.\end{cases}$$

在点 $x=-1,x=0,x=1$ 处不连续.

而 $g[f(x)]\equiv 0$ 却处处连续.

(в) $f[g(x)]\equiv 1$ 处处连续.

$g[f(x)]\equiv 1$ 也处处连续.

745. 设

$$f(u)=\begin{cases}u,0<u\leqslant 1;\\2-u,\text{当 } 1<u<2,\end{cases}$$

及 $$\varphi(x)=\begin{cases}x,\text{当 } x \text{ 为有理数};\\2-x,\text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}\quad (0<x<1)$$

研究复合函数 $y=f(u)$ 的连续性，其中 $u=\varphi(x)$.

解 当 x 为有理数时，$u=x$，且 $0<u<1$，故 $f(u)=x$；当 x 为无理数时，$u=2-x$ 且 $1<u<2$，故 $f(u)=2-u=x$. 从而 $f[\varphi(x)]\equiv x$ 处处连续.

746. 证明若 $f(x)$ 为连续函数，则下列函数也是连续的：

$$F(x)=|f(x)|.$$

证 设 x_0 为任一连续点，则对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 δ，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

由 $\quad ||f(x)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|$ 知

$$||f(x)|-|f(x_0)||<\varepsilon,$$

故 $F(x)$ 在点 x_0 也连续.

747. 证明若函数 $f(x)$ 是连续的，则函数

$$f_c(x)=\begin{cases}-c, & \text{若 } f(x)<-c,\\ f(x), & \text{若 } |f(x)|\leqslant c,\\ c, & \text{若 } f(x)>c,\end{cases}$$

（式中 c 为任意的正数）也是连续函数.

证 易知

$$f_c(x)=\frac{1}{2}(|c+f(x)|-|c-f(x)|).$$

于是，利用 746 题的结果，即知 $f_c(x)$ 是连续函数.

748. 证明若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \text{ 和 } M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在 $[a,b]$ 上也是连续的.

证 只证 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. $M(x)$ 连续性之证完全类似. 设 $x_0\in[a,b]$. 先证 $m(x)$ 在点 x_0 右连续. 任给 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续，故存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

于是，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有

$$f(x)>f(x_0)-\varepsilon\geqslant m(x_0)-\varepsilon.$$

而当 $a\leqslant x\leqslant x_0$ 时，$f(x)\geqslant m(x_0)>m(x_0)-\varepsilon$. 由此可知当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$m(x)\geqslant m(x_0)-\varepsilon$. 又因 $m(x)$ 显然是递减的，故

$$m(x_0)\geqslant m(x)\geqslant m(x_0)-\varepsilon\text{（当 } x_0<x<x_0+\delta \text{ 时）}.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0+0}m(x)=m(x_0)$，即 $m(x)$ 在 x_0 右连续. 下证左连续，不妨设 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 的最小值在点 $x=x_0$ 达到，即 $m(x_0)=f(x_0)$（否则，若 $m(x_0)=f(x_1)$，$a\leqslant x_1<$

x_0. 则显然知，当 $x_1<x<x_0$ 时 $m(x)\equiv m(x_0)$，从而左连续). 任给 $\varepsilon>0$. 仿上述，存在 $\delta>0$，使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon=m(x_0)+\varepsilon,$$

因此 $m(x)<m(x_0)+\varepsilon$，从而

$$m(x_0)\leqslant m(x)<m(x_0)+\varepsilon(\text{当 } x_0-\delta<x<x_0 \text{ 时}).$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0-0} m(x)=m(x_0)$，即 $m(x)$ 在 x_0 左连续.

证毕.

749. 证明　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的，则函数

$\varphi(x)=\min[f(x),g(x)]$ 和 $\psi(x)=\max[f(x),g(x)]$

也是连续的.

证　由 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

利用 746 题的结果，即知 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 为连续的.

750. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义并有界，证明函数 $m(x)=\inf\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$ 和 $M(x)=\sup\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 是左方连续的. 而函数

$$\overline{m}(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \text{ 和 } \overline{M}(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a,b]$ 是右方连续的*).

证　设 $x_0\in(a,b]$，要证 $m(x)$ 在 x_0 左方连续. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，故 $m(x)$ 恒为有限，任给 $\varepsilon>0$，必存在一点 $\xi_0\in[a,x_0)$，使得

$$f(\xi_0)<m(x_0)+\varepsilon.$$

于是，当 $\xi_0<x<x_0$ 时，必有 $m(x_0)\leqslant m(x)\leqslant f(\xi_0)<m$

$(x_0)+\varepsilon$，由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0-0} m(x)=m(x_0)$. 故 $m(x)$ 在 x_0 点左方连续.

同法可证 $M(x)$ 在 $[a,b]$ 也为左方连续.

*) $\overline{m}(x)$ 和 $\overline{M}(x)$ 在 $[a,b]$ 右方连续的结论是错误的，今举反例以明之，例如，对于有界函数

$$f_1(x)=\begin{cases}1, 当\ a\leqslant x\leqslant p;\\ 0, 当\ p<x\leqslant b.\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}-1, 当\ a\leqslant x\leqslant p;\\ 0, p<x\leqslant b.\end{cases}$$

分别有

$$\overline{m}(x)=f_1(x), \overline{M}(x)=f_2(x),$$

显然它们在点 p 不是右方连续的.

若定义 $\overline{m}(x)=\inf\limits_{x<\xi\leqslant b} f\{f(\xi)\}$，$\overline{M}(x)=\sup\limits_{x<\xi\leqslant b}\{f(\xi)\}$，则可证明 $\overline{m}(x)$ 与 $\overline{M}(x)$ 在 $[a,b]$ 右方连续.

751. 证明若函数 $f(x)$ 于区间 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续，且有有限的 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，则此函数在已知区间上是有界的.

证　记 $A=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，取 $\varepsilon=1$，则存在 $X>a$，使当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)|<|A|+1$，又因 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续，因而有界，即存在常数 M_1，使当 $x\in[a,X]$ 时，恒有 $|f(x)|<M_1$，取 $M=\max(|A|+1, M_1)$，

则 $x\in[a,+\infty)$ 时，恒有

$$|f(x)|<M.$$

752. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上连续并有界，证明对于任何数 T，可求得叙列 $x_n\to+\infty$，使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

证　不妨设 $T>0$，记 $g(y)=f(x_0+(y+1)T)-f(x_0+yT)$，$y\geqslant 1$. 取一叙列 $\{\varepsilon_n\}(n=1,2,\cdots)$，且当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$. 易见，$g(y)$ 是 $[1,+\infty)$ 上连续且有界的函数，今按下法取 $x_1=x_0+k_1T$，使 $|g(k_1)|<\varepsilon_1$ [如果 $g(1)$，$g(2)$ 异号，则由连续函数介值定理，存在 k_1，且 $1<k_1<2$，使得 $|g(k_1)|=0<\varepsilon_1$，这时取 $x_1=x_0+k_1T$. 若 $g(1)$ 与 $g(2)$ 同号，且 $g(1)$，$g(2)$，$g(3)$，$g(4)\cdots$ 都是同号的，不妨设它们均大于 0，那么我们可以证明，必存在一个自然数 $k_1\geqslant 1$，使 $g(k_1)<\varepsilon_1$. 因为，若对一切自然数 n，$g(n)\geqslant\varepsilon_1$，则由 $g(y)$ 的定义，

$$f(x_0+2T)\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+T),$$
$$f(x_0+3T\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+2T),$$
$$f(x_0+4T)\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+3T),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x_0+nT)\geqslant\varepsilon_1+f[x_0+(n-1)T].$$

则 $f(x_0+nT)\geqslant(n-1)\varepsilon_1+f(x_0+T)$，这与 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内有界矛盾，故必存在自然数 k_1，使得 $|g(k_1)|<\varepsilon_1$，取 $x_1=x_0+k_1T$. 然后，取自然数 $p_2>k_1+1$. 通过考虑 $g(p_2)$，$g(p_2+1)$，$\cdots$ 的符号；仿上，可取 $x_2=x_0+k_2T$，$k_2>k_1+1$，使 $|g(k_2)|<\varepsilon_2$. 依此类推，我们就可得到一叙列 $\{x_n\}$ 适合要求.

753. 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为连续周期函数，当 $-\infty<x<+\infty$ 时，有定义且

$$\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$$

证明　$\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

证　先证明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的周期相同，设 $\varphi(x)$ 的周期为

p，则 $\varphi(x+p)=\varphi(x)$，由于当 $x\to\infty$ 时，$\varphi(x+p)-\psi(x+p)\to 0$ 即得

$$\lim_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]=0$$

以及

$$\lim_{x\to\infty}[\psi(x)-\psi(x+p)]$$

$$=\lim_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p]-\lim_{x\to\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0. \qquad (1)$$

我们再来证明 $\psi(x)$ 的周期也是 p，若不然，则至少存在一个 x_0，使 $\psi(x_0)\neq\psi(x_0+p)$. 且设 $\psi(x)$ 周期为 q，N 为任意正整数，$x=x_0+Nq$，以及 $\alpha=|\psi(x_0)-\psi(x_0+p)|>0$，此时恒有 $|\psi(x)-\psi(x+p)|=\alpha$. 但由(1)式，对充分大的 x，必成立 $|\psi(x)-\psi(x+p)|<\alpha$，这显然是矛盾的.

最后证明 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$，若结论不成立，则至少存在一个 x_1，使 $\varphi(x_1)\neq\psi(x_1)$. 记 $\beta=|\varphi(x_1)-\psi(x_1)>0$，则对任意 $x=x_1+Np$，恒有 $|\varphi(x)-\psi(x)|=\beta$，这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$ 矛盾. 于是，$\varphi(x)\equiv\psi(x)$. 证毕.

754. 证明单调有界函数的一切不连续点皆为第一类的不连续点.

证　不妨设 $f(x)$ 为单调增函数，取其定义域 A 中的任意点 x_0，且设 x_0 不是 A 的左端点，由于 $x<x_0$ 时显然有 $f(x)\leqslant f(x_0)$. 由关于单调函数的极限定理知 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\leqslant f(x_0)$. 可见若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则函数在该点只可能有跃度，即第一类间断点.

755. 证明若函数 $f(x)$ 具有下列诸性质：(1)在闭区间$[a,b]$上有定义且单调，(2)取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间所有的数作

为其函数值，则此函数在$[a,b]$上连续.

证 用反证法，不妨设单调函数$f(x)$为递增的且在x_0间断($x_0\in[a,b]$)，由754题知x_0只能是第一类间断点，则$f(x_0)-f(x_0-0)$及$f(x_0+0)-f(x_0)$中至少有一个大于零，例如$f(x_0)-f(x_0-0)>0$. 于是，由函数$f(x)$的单调性知，$f(x)$无法取到$f(x_0-0)$和$f(x_0)$之间的数值.

这与题设函数$f(x)$的性质(2)矛盾，从而$f(x)$在$[a,b]$上连续.

756. 证明：函数

$$f(x)=\sin\frac{1}{x-a}, 若\ x\neq a\ 及\ f(a)=0,$$

在任意闭区间$[a,b]$上取介于$f(a)$和$f(b)$之间的一切中介值，但在$[a,b]$上并不连续.

证 事实上，只要$a<b$，则$f(x)$在$[a,b]$上取$[-1,1]$之间的一切值，当然更取$f(a)=0$与$f(b)$($|f(b)|\leqslant 1$)之间的一切值. 但显然有$f(x)$在$x=a$处不连续.

757. 证明：若函数$f(x)$在区间(a,b)内连续，且$x_1,x_2,\cdots,x_n$为此区间中的任意值，则在它们之间可找到一个数值ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$$

证 不妨设$a<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n<b$，此时设$x_1\neq x_n$；当$x_1=x_n$结论显然成立.

由于$f(x)$在$[x_1,x_n]$上连续，于是，$f(x)$在$[x_1,x_n]$上取得最大值和最小值：

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in[x_1,x_n].$$

从而有

$$m \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant M.$$

由连续函数的性质，总存在 $\xi \in [x_1, x_n]$，使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

758. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，且

$$l = \varliminf_{x \to a+0} f(x) \text{ 及 } L = \varlimsup_{x \to a+0} f(x).$$

证明对于任意的数 λ，此处 $l \leqslant \lambda \leqslant L$，则有叙列 $x_n \to a+0 (n=1,2,\cdots)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda.$$

证 当 $\lambda = l$ 或 $\lambda = L$ 时结论都是显然的. 因此设

$$l < \lambda < L.$$

由条件有 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$，$a_n \to a+0$，$b_n \to a+0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = L$.

于是，存在自然数 N，使当 $n > N$ 时，恒有

$$f(a_n) < \lambda \text{ 及 } f(b_n) > \lambda.$$

再由 $f(x)$ 的连续性知，在 a_n 及 b_n 之间存在 x_n，使

$$f(x_n) = \lambda (n > N).$$

这样选取的 $\{x_n\}$，由于 $a_n \to a+0$，$b_n \to a+0$，故 $x_n \to a+0$，从而

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda.$$

§8. 反函数. 用参数表示的函数

1°**反函数的存在及其连续性** 若函数 $y = f(x)$ 具有下列性质：(1)

在区间(a,b)上有定义并连续;(2)在严格的意义上说来,于此区间上是单调的,则有单值的反函数 $x=f^{-1}(y)$,此函数在区间(A,B)上有定义并连续,而且在严格的意义上说来,是相应地单调的,其中

$$A=\lim_{x\to a+0}f(x)\text{和 }B=\lim_{x\to b-0}f(x).$$

任何一个单值连续函数 $x=g(y)$,它在其有定义的最大区域上适合方程 $f(g(y))=y$,则被了解为已知连续函数 $y=f(x)$的多值反函数的一个单值连续分枝。

2°以参数表示的函数的连续性　若函数 $\varphi(t)$和 $\psi(t)$在区间(α,β)上有定义并且是连续的,且函数 $\varphi(t)$在此区间上是严格地单调的,则方程组

$$x=\varphi(t),y=\psi(t)$$

在区间(a,b)上把 y 定义成 x 的单值连续函数:

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)],$$

其中　$a=\lim\limits_{t\to\alpha+0}\varphi(t)$及 $b=\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)$.

759. 求线性分式函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq0)$$

的反函数. 在怎样的情形下,反函数与已知函数相同?

解　由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$解之得反函数为

$$y=\frac{-dx+b}{cx-a}\text{或写成 }x=\frac{-yd+b}{yc-a}.$$

欲反函数与已知函数相同,只须

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{-xd+b}{cx-a}.$$

解之得　　$a+d=0$,

此即所求的条件.

760. 设

$$y=x+[x],$$

求反函数 $x=x(y)$.

解 若当 $k\leqslant x<k+1$，即当

$$2k\leqslant y<2k+1$$

时，$[x]=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，此时 $y=x+k$，即反函数为 $x=y-k$.

761. 证明：有唯一的连续函数 $y=y(x)(-\infty<x<+\infty)$ 满足于克卜勒方程

$$y-\varepsilon\sin y=x(0\leqslant\varepsilon<1).$$

证 由 640 题知叙列

$$y_0=x,$$

$$y_1=x+\varepsilon\sin y_0,$$

$$y_2=x+\varepsilon\sin y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n=x+\varepsilon\sin y_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

的极限 $y(x)$ 为克卜勒方程 $y-\varepsilon\sin y=x$ 的唯一的根.

现在证明 $y=y(x)$ 是连续的. 我们只须证明当 $x\to x_0$ 时，$y(x)\to y(x_0)$. 为此，我们考虑

$$\begin{aligned}&|y_n(x)-y_n(x_0)|\\&=|(x-x_0)+\varepsilon[\sin y_{n-1}(x)-\sin y_{n-1}(x_0)]|\\&\leqslant|x-x_0|+\varepsilon|y_{n-1}(x)-y_{n-1}(x_0)|.\end{aligned}$$

逐次应用此不等式，即得

$$\begin{aligned}&|y_n(x)-y_n(x_0)|\\&\leqslant|x-x_0|(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^n)\\&=|x-x_0|\cdot\frac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0|.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，便有

$$|y(x)-y(x_0)|\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0|\ (0\leqslant\varepsilon<1).$$

于是，显然有 $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=y(x_0)$. 这就证明了 $y(x)$ 的连续性.

762. 证明：方程

$$\mathrm{ctg}x=kx$$

对于每一个实数 $k(-\infty<k<+\infty)$ 在区间 $0<x<\pi$ 中有唯一连续的根 $x=x(k)$.

证 令 $f(x)=\frac{\mathrm{ctg}x}{x}$. 显然，在 $(0,\pi)$ 上 $\mathrm{ctg}x$ 和 $\frac{1}{x}$ 都是连续的严格减函数，从而 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上也是连续的严格减函数，并且，很明显

$$\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to\pi-0}f(x)=-\infty.$$

由此可知，对每一实数 $k(-\infty<k<+\infty)$，恰有一个 $x\in(0,\pi)$，使 $f(x)=k$，即 $\mathrm{ctg}x=kx$. 另外，由于 $f(x)=\frac{\mathrm{ctg}x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上是连续的严格减函数，故 $k=f(x)$ 的反函数 $x=x(k)=f^{-1}(k)$ 存在而且是 $-\infty<k<+\infty$ 上的连续的严格减函数. 此 $x=x(k)$ 即方程 $\mathrm{ctg}x=kx$ 的根.

综上述，可知：对任何 $-\infty<k<+\infty$，方程 $\mathrm{ctg}x=kx$ 在 $(0,\pi)$ 上具有唯一的根 $x=x(k)$，而且 $x(k)$ 是 $k(-\infty<k<+\infty)$ 的连续的严格减函数. 证毕.

763. 非单调的函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 可否有单值的反函数？

解 可以，例如函数

$$y=\begin{cases}x,若\ x\ 为有理数,\\-x,若\ x\ 为无理数.\end{cases}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上为单值的，但不是单调的函数，而其反函数仍为此函数本身.

764. 在甚么情形下，函数 $y=f(x)$和反函数 $x=f^{-1}(y)$是同一的函数?

解 为统一坐标起见，我们把 $y=f(x)$的反函数记成为 $y=f^{-1}(x)$.

按题设应有

$$f^{-1}(x)\equiv f(x),$$

即 $x=f(f(x))$，这就是所求的条件.

765. 证明不连续函数

$$y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$$

的反函数是连续函数.

证 易见 $\operatorname{sgn}y=\operatorname{sgn}x$ 及 $\operatorname{sgn}^2x=\begin{cases}1, x\neq0\\0. x=0\end{cases}$，则

$y\operatorname{sgn}y=(1+x^2)\operatorname{sgn}^2x$. 于是反函数在$|y|\geqslant1$ 及 $y=0$ 有定义:

$$x=\begin{cases}\sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, 当\ y\geqslant1\ 时;\\-\sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, 当\ y\leqslant-1\ 时;\\0\qquad 当\ y=0\ 时.\end{cases}$$

易见上述函数在其定义域内连续.

766. 证明：若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义并且是严格地单调的，且

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)\qquad(a\leqslant x_n\leqslant b),$$

则 $$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

证 不妨设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调下降. 如果结论不真,则在 (a,b) 内总存在一个 a_1 及叙列 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$,使

$$x_{n_k}>a_1.$$

由于 $f(x)$ 严格单调下降,故有

$$f(x_{n_k})<f(a_1)<f(a).$$

于是,$f(a)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})\leqslant f(a_1)$,得出矛盾,

因此,有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

求下列函数的反函数的连续的单值枝:

767. $y=x^2$.

解 反函数的单值连续分枝为

$$x=\sqrt{y}\quad(0\leqslant y<+\infty)$$

及 $x=-\sqrt{y}\ (0\leqslant y<+\infty)$.

768. $y=2x-x^2$.

解 由于 $x^2-2x+y=0$,故

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4y}}{2}=1\pm\sqrt{1-y}.$$

于是单值连续分枝为

$x=1-\sqrt{1-y}$ 及 $x=1+\sqrt{1-y}$ $(-\infty<y\leqslant 1)$.

769. $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

解 由于 $x^2y-2x+y=0$,故

$$x=\begin{cases}\dfrac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, & \text{当 } y\neq 0 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } y=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

又由于

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y(1+\sqrt{1-y^2})}=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}=\infty,$$

故反函数的连续分支为

$$x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}(-1\leqslant y\leqslant 1)$$

及 $x=\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}(0<|y|\leqslant 1)$.

770. $y=\sin x$.

解 单值连续分枝为

$$x=(-1)^k\arcsin y+k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$(|y|\leqslant 1)$.

771. $y=\cos x$.

解 单值连续分枝为

$x=2k\pi\pm\arccos y(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)(|y|\leqslant 1)$.

772. $y=\operatorname{tg}x$.

解 单值连续分枝为

$$x=\operatorname{arctg}y+k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$$

$(-\infty<y<+\infty)$.

773. 证明连续函数 $y=1+\sin x$ 对应于区间 $0<x<2\pi$ 的值的集合是一线段.

证 显然，当 $x\in(0,2\pi)$时，$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，从而 $0\leqslant 1+\sin x\leqslant 2$. 而由于 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=2$，$y|_{x=\frac{3\pi}{2}}=0$. 而 $y=1+\sin x$ 是 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上的连续函数，故由介值定理知当 x 从$\frac{\pi}{2}$变到$\frac{3\pi}{2}$时，y 取 0 到 2 之间的一切数值. 由此可知当 $0<x<$

2π 时，y 的值的集合是线段$[0,2]$.

774. 证明等式

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

证 令 $\varphi=\arcsin x$，则得 $\sin\varphi=x$，从而

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=x.$$

因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，故 $0\leqslant\frac{\pi}{2}-\varphi\leqslant\pi$；而在$[0,\pi]$内有唯一的数，它的余弦等于 x. 因此，得

$$\frac{\pi}{2}-\varphi=\arccos x,$$

即

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

775. 证明等式

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\quad(x\neq0).$$

证 当 $x>0$ 时. 令 $\varphi=\operatorname{arctg}x$，则得 $\operatorname{tg}\varphi=x$，且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. 又 $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\operatorname{tg}\varphi=x$，故

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{x}.$$

因为 $0<\frac{\pi}{2}-\varphi<\frac{\pi}{2}$，而在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内仅有唯一的数，使其正切等于$\frac{1}{x}$，故

$$\frac{\pi}{2}-\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{x},$$

即当 $x>0$ 时，$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

当 $x<0$ 时，令 $\varphi=\operatorname{arctg}x$，则得 $\operatorname{tg}\varphi=x$，且 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$. 又

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\operatorname{tg}\varphi=x\text{，即 }\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{x}\text{，}$$

因为 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{2}-\varphi<0$，而在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 内有唯一的数，使其正切等于 $\frac{1}{x}$，故

$$-\frac{\pi}{2}-\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{x},$$

即当 $x<0$ 时，$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$.

总之，当 $x\neq0$ 时，

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x.$$

776. 证明反正切相加的定理：

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi,$$

式中 $\varepsilon=\varepsilon(x,y)$ 为取值：0，1，－1 三者之一的函数.

当已知 x 的值时，对于怎样的 y 值，函数 ε 可能不连续？在 Oxy 平面上作出函数 ε 连续的对应域，并求此函数在所求得的域内的数值.

证 由于

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}y<\frac{\pi}{2}\text{ 及 }-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2},$$

故有

$$-\pi<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y<\pi.$$

若 x 和 y 的符号相反，则

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y<\frac{\pi}{2}.$$

若 $x>0$ 和 $y>0$，则

$$0<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y<\pi.$$

再看这个和是位于 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 还是 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. 条件

$$0<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y<\frac{\pi}{2},$$

即

$$\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}y,$$

它相当于 $x<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}y\right)=\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}y)=\frac{1}{y}$，

也即 $\quad xy<1.$

因此，当 $x>0, y>0, xy<1$ 时，此和位于 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 同法可证，当 $x>0, y>0, xy>1$ 时，此和位于 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

仿此，又可证得：当 $x<0, y<0, xy<1$ 时，此和位于 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$；当 $x<0$，$y<0$，$xy>1$ 时，此和位于 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.

总之，若 $xy<1$，则此和位于 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；若 $x>0, xy>1$，则此和位于 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$；若 $x<0, xy>1$，则此和位于 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.

其次，我们考虑此和的正切

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)=\frac{x+y}{1-xy}.$$

现令 $u=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y$，$v=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$，则得

$\mathrm{tg}u=\mathrm{tg}v$.

因为$-\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$,故当$-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$时,$u=v$;当$\frac{\pi}{2}<u<\pi$时,$v+\pi=u$;当$-\pi<u<-\frac{\pi}{2}$时,$u=-\pi+v$. 因此,我们证得:

$$\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}y=\begin{cases}\mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } xy<1;\\ \pi+\mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } x>0,xy>1;\\ -\pi+\mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } x>0,xy>1;\end{cases}$$

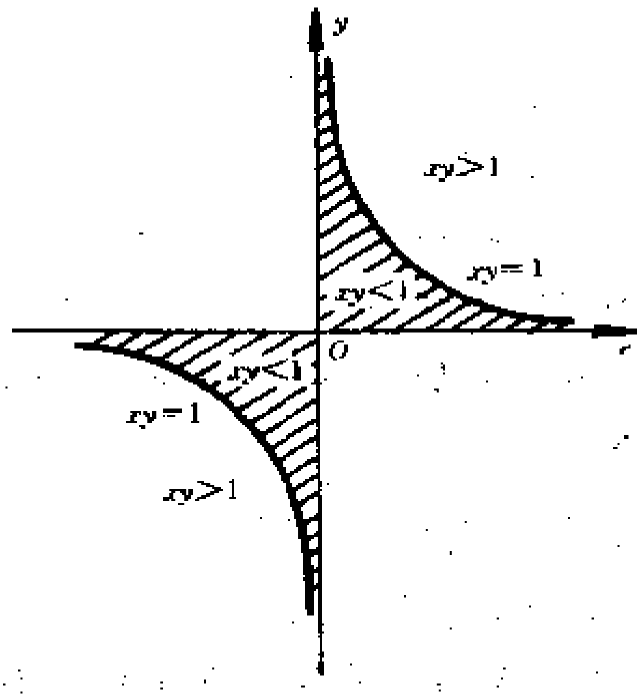


图 1.313

当 x 固定时,若 $y=\frac{1}{x}$,则 ϵ 不连续,因为此时(例如设 $x>0$),当 $y>\frac{1}{x}$时 $\epsilon\equiv1$,而当 $y<\frac{1}{x}$时 $\epsilon\equiv0$.

如图 1.313 所示，曲线 $xy=1$ 为函数 $\varepsilon=\varepsilon(x,y)$ 的不连续域.

当 $xy<1$ 时，$\varepsilon=0$；当 $x>0, xy>1$ 时，$\varepsilon=1$；当 $x<0, xy>1$ 时，$\varepsilon=-1$.

777. 证明反正弦相加的定理：

$\arcsin x+\arcsin y=(-)^{\varepsilon}\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})+\varepsilon\pi$

$(|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1)$，

式中，若 $xy\leqslant 0$ 或 $x^2+y^2\leqslant 1$，$\varepsilon=0$；若 $xy>0$ 及 $x^2+y^2>1$，$\varepsilon=\operatorname{sgn}x$.

证 令 $u=\arcsin x+\arcsin y(|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1)$，

即得

$$\sin u=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

由此，还不能断定

$$u=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}).$$

事实上，u 及 $v=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$ 可以位在不同的区间内，其中 v 始终位在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内，而 u 可有三种情形：

情形 I：$-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$.

若 $xy\leqslant 0$，则不是 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $-1\leqslant y\leqslant 0$ 就是 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 及 $0\leqslant y\leqslant 1$，不论哪一种情况，总有

$$0\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}\text{ 及 }-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin y\leqslant 0\text{（或交换）}$$

因而

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x+\arcsin y=u\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

若 $x>0, y>0$ 时，显然有 $u\geqslant 0$.，条件 $u\leqslant\frac{\pi}{2}$

即

$$u=\arcsin x+\arcsin y\leqslant\frac{\pi}{2},$$

相当于

$$\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}-\arcsin y=\arccos y.$$

由于正弦在第一象限内是增函数，故这又相当于

$$\sin(\arcsin x)\leqslant\sin(\arccos y),$$

或 $x\leqslant\sqrt{1-y^2}$，即 $x^2+y^2\leqslant 1$.

同法可证，若 $x<0, y<0$ 时，必 $u\leqslant 0$. 且条件 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u$ 相当于 $x^2+y^2\leqslant 1$.

情形 I：$\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$.

在 $\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$ 时，必 $x>0, y>0$. 条件

$$\frac{\pi}{2}<\arcsin x+\arcsin y\leqslant\pi,$$

即

$$\arcsin x>\frac{\pi}{2}-\arcsin y,$$

两端取正弦，即得 $x^2+y^2>1$.

情形 II：$-\pi\leqslant u<-\frac{\pi}{2}$,

在这种情形下必 $x<0, y<0$. 条件

$$-\pi\leqslant\arcsin x+\arcsin y<-\frac{\pi}{2},$$

即

$$\frac{\pi}{2}<\arcsin(-x)+\arcsin(-y)\leqslant\pi,$$

因此，即　$x^2+y^2>1$.

总之，当 $xy\leqslant 0$ 或 $xy>0$ 但 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时，必有 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$；当 $x>0,y>0,x^2+y^2>1$ 时，必 $\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$；当 $x<0,y<0,x^2+y^2>1$ 时，必 $-\pi\leqslant u<-\frac{\pi}{2}$.

但当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$u=v$；当 $\frac{\pi}{2}<u\leqslant\pi$ 时，$u=\pi-v$；当 $-\pi\leqslant u<-\frac{\pi}{2}$ 时，$u=-\pi-v$.

因此，最后得

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{arc}\sin x+\operatorname{arc}\sin y\\
&=\begin{cases}
\operatorname{arc}\sin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),\\
\qquad\text{若 } xy\leqslant 0 \text{ 或 } x^2+y^2\leqslant 1;\\
\pi-\operatorname{arc}\sin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),\\
\qquad\text{若 } x>0,y>0,x^2+y^2>1;\\
-\pi-\operatorname{arc}\sin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}),\\
\qquad\text{其 } x<0,y<0,x^2+y^2>1.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{arc}\sin x+\operatorname{arc}\sin y\\
&=(-1)^{\varepsilon}\operatorname{arc}\sin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x})+\varepsilon\pi,
\end{aligned}
$$

其中　$\varepsilon=\begin{cases}0,\text{若 } xy\leqslant 0 \text{ 或 } x^2+y^2\leqslant 1;\\ \operatorname{sgn} x,\text{若 } xy>0 \text{ 及 } x^2+y^2>1,\end{cases}$

$(|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1)$.

778. 证明反余弦相加的定理：

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{arc}\cos x+\operatorname{arc}\cos y\\
&=(-1)^{\varepsilon}\operatorname{arc}\cos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})+2\varepsilon\pi
\end{aligned}
$$

$(|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1)$,

其中,若 $x+y\geqslant 0, \varepsilon=0$;若 $x+y<0, \varepsilon=1$.

证 由基本的不等式

$$0\leqslant \arccos x\leqslant \pi \quad 及 \quad 0\leqslant \arccos y\leqslant \pi,$$

有 $$0\leqslant \arccos x+\arccos y\leqslant 2\pi.$$

若 $$0\leqslant \arccos x+\arccos y\leqslant \pi,$$

则 $$\arccos x\leqslant \pi-\arccos y.$$

由于 $\arccos x$ 及 $\pi-\arccos y$ 都含在 $[0,\pi]$ 内,而在此区间内余弦是减函数,故有

$$x\geqslant \cos(\pi-\arccos y)=-y,$$

即

$$x+y\geqslant 0$$

同法可证得,若

$$\pi<\arccos x+\arccos y\leqslant 2\pi,$$

则

$$x+y<0.$$

又由于

$$\cos(\arccos x+\arccos y)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2},$$

故知

$$u=\arccos x+\arccos y$$

及 $$v=\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$$

有同一的余弦.因 v 始终在 0 与 π 之间,故知:

若 $0\leqslant u\leqslant \pi$,则 $u=v$;若 $\pi<u\leqslant 2\pi$,则 $u=2\pi-v$.

因此,最后得

$$\arccos x+\arccos y$$

$$=\begin{cases}\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \quad 若\ x+y\geqslant 0; \\ 2\pi-\arccos(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \quad 若\ x+y<0,\end{cases}$$

此即所欲证明的公式.

779. 作函数的图形：

(a) $y=\arcsin x-\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(6) $y=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x$.

解 (a)利用777题的结果得知：

由于 $x^2+(-\sqrt{1-x^2})^2=1$，故

$$y=\arcsin x+\arcsin(-\sqrt{1-x^2})$$
$$=\arcsin(x\sqrt{1-(1-x^2)}-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2})$$
$$=\arcsin(x|x|-1+x^2).$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=-\frac{\pi}{2}$；当 $0<x\leqslant 1$ 时，$y=\arcsin(2x^2-1)$. 可以证明，

$\arcsin(2x^2-1)-2\arcsin x=-\frac{\pi}{2}$，故有

$$y=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, 当 -1\leqslant x\leqslant 0 时, \\ 2\arcsin x-\frac{\pi}{2}, 当\ 0<x\leqslant 1 时,\end{cases}$$

如图1·314所示.

(6)由于

$2\arcsin x=\arcsin x+\arcsin x$

$$=\begin{cases}\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), 若 |x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}};\\ \pi\operatorname{sgn}x-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), 若 |x|>\frac{1}{\sqrt{2}},\end{cases}$$

故当 $-1\leqslant x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y=-(\pi+4\arcsin x)$；

当 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y=0$；

当 $\frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1$ 时，$y=\pi-4\arcsin x$.

如图 1・315 所示。

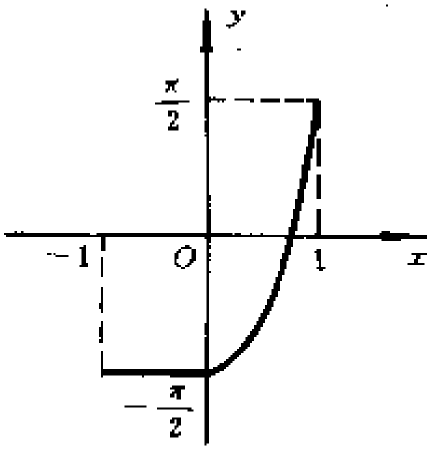


图 1・314

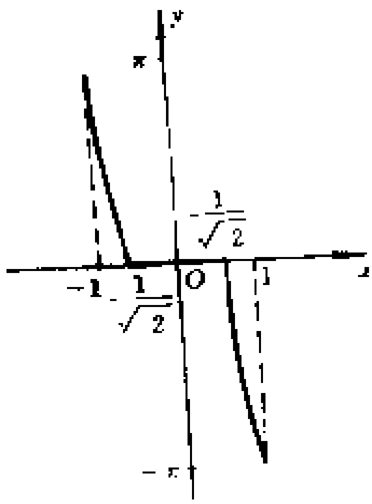


图 1・315

780. 函数 $y=y(x)$ 由下面的方程给出：

$$x=\operatorname{arc\,tg}t, y=\operatorname{arc\,ctg}t \quad (-\infty<t<+\infty),$$

求此函数. 在怎样的域上此函数才有定义?

解 由条件 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, 0<y<\pi$ 且

$$\operatorname{tg}x=t, \operatorname{ctg}y=t,$$

即得

$$\operatorname{ctg} y=\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

从而当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$y=\frac{\pi}{2}-x.$$

781. 设

$$x=\operatorname{ch} t, y=\operatorname{sh} t \quad(-\infty<t<+\infty).$$

参数 t 变化的域怎样，即可视变数 y 为变数 x 的单值函数?求在各个域上 y 的表示式.

解 由于 $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$，故

$$x^2-y^2=\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1.$$

当 $\operatorname{sh} t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\geqslant 0$ 时，即 $e^t\geqslant e^{-t}$ 或 $e^{2t}\geqslant 1$ 或 $t\geqslant 0$ 时，

$$y=\sqrt{x^2-1};$$

当 $t\leqslant 0$ 时，$y=-\sqrt{x^2-1}$.

不论 t 为何值，$x\geqslant 1$，故 $\sqrt{x^2-1}$ 有意义. $t=0$ 是函数 $y=y(x)$ 单值区域的分界值.

782. 要使方程组

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

把 y 定义为 x 的单值函数的必要而且充分的条件是甚么?

解 其必要而且充分的条件为，使 $\varphi(t)=x$ 的一切 t 值，函数 $\psi(t)$ 应有同一的值. 下面加以证明. 先证必要性. 若不然，则存在 x^* 及 $t_1\neq t_2$，使

$$\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=x^* \text{ 且 } \psi(t_1)\neq\psi(t_2).$$

于是，对于这样的 x^*，一方面有 $y_1=\psi(t_1)$ 及 $y_2=\psi(t_2)$，

另一方面又有$y_1 \neq y_2$，这样y就不定义为x的单值函数. 因此，使$\varphi(t) = x$的一切t值，$\psi(t)$应有同一的值.

再证充分性. 设所述条件满足，则对于任一$x^* \in \{\varphi(t)\}$，有t^*使

$$\varphi(t^*) = x^*, \quad \psi(t^*) = y^*$$

有意义，这样定义的函数$y = y(x)$不因t^*的不同选取而不同，因此它由x^*唯一确定，从而y定义为x的单值函数.

783. 在怎样的条件下，二方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

及 $x = \varphi[\chi(\tau)], y = \psi[\chi(\tau)] \quad (\alpha < \tau < \beta)$

定义出同一的函数$y = y(x)$?

解 当$\alpha < \tau < \beta$时，函数$\chi(\tau)$的值的集应为区间(a, b).

784. 设函数$\varphi(x)$和$\psi(x)$在区间(a,b)内有定义并且是连续的，且

$$A = \inf_{a<x<b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a<x<b} \varphi(x).$$

在怎样的场合下，有定义在区间(A,B)上的单值函数$f(x)$，使得

当$a < x < b$时，$\psi(x) = f[\varphi(x)]$?

解 显然，要求对于使$\varphi(x) = u$的一切x值(其中u为区间(A,B)中的任一给定的数)，函数$\psi(x)$应取同一的值. 满足了这个条件就可以了. 这时，对$u \in (A,B)$可定义

$$f(u) = \psi(x),$$

其中x为满足$\varphi(x) = u(a < x < b)$的任何数. 上述条件

保证了这样定义的 $f(u)$ 是单值的.

§9. 函数的一致连续性

1° 一致连续性的定义　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在有 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,且对于使 $f(x)$ 有意义的任何数值 $x' x'' \in X$,由不等式

$$|x'-x''|<\delta$$

可得不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在已知集合(区间、线段等)$X=\{x\}$ 上为一致连续的.

2° 康托尔定理　在有界的闭区间$[a,b]$上有定义的连续函数 $f(x)$ 在此闭区间上一致连续.

785. 某工厂的车间制造正方形薄板,其边 x 可取由 1 厘米到 10 厘米之间的值. 为了使不论何种边长(在上述的范围内)的薄板的面积 y 与原设计的面积差皆小于 ε,问可以多大的公差 δ 对这些薄板的边长加工,设(a)$\varepsilon=1$ 平方厘米;(б)$\varepsilon=0.01$ 平方厘米;(в)$\varepsilon=0.0001$ 平方厘米,计算 δ 的值.

解　$y=x^2$. 由于,

$$|x'^2-x''^2|=|x'-x''||x'+x''|\leqslant 20|x'-x''|,$$

于是对于任给的 $\varepsilon>0$,要 $|x'^2-x''^2|<\varepsilon$ 时,只要 $|x'-x''|<\frac{\varepsilon}{20}$ 即可.

于是,在加工薄板边长时,只要取公差 $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{20}$,当 $|x'-x''|<\delta$ 时,即可满足要求.

(a) 当 $\varepsilon = 1$ 厘米^2 时，$\delta \leqslant \frac{1}{20} = 0.05$ 厘米 $= 0.5$ 毫米；

(б) 当 $\varepsilon = 0.01$ 厘米^2 时，$\delta \leqslant \frac{0.01}{20} = 0.0005$ 厘米

$= 0.005$ 毫米；

(в) 当 $\varepsilon = 0.0001$ 厘米^2 时，$\delta \leqslant \frac{0.0001}{20}$

$= 0.000005$ 厘米 $= 0.00005$ 毫米.

786.$^+$ 圆柱形鞘筒之宽度为 ε，长度为 δ，将鞘筒套在曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 上且沿此曲线滑动，但筒之轴须保持平行于 Ox 轴. 为了使此筒顺利地经过此曲线上由不等式 $-10 \leqslant x \leqslant 10$ 所限定的部分，问 δ 应等于甚么？设 (a) $\varepsilon = 1$；(б) $\varepsilon = 0.1$；(в) $\varepsilon = 0.001$；(г) ε 为任意小数.

解 $y = \sqrt[3]{x}$. 对于 $y' \neq y''$，由于

$$|y' - y''| = \left|\frac{y'^3 - y''^3}{y'^2 + y'y'' + y''^2}\right|$$

$$= \left|\frac{y'^3 - y''^3}{\frac{3}{4}(y' + y'')^2 + \frac{1}{4}(y' - y'')^2}\right|$$

$$\leqslant \frac{|y'^3 - y''^3|}{\frac{1}{4}|y' - y''|^2}$$

即

$\frac{1}{4}|y' - y''|^3 \leqslant |y'^3 - y''^3| = |x' - x''|$ 或 $|y' - y''| \leqslant \sqrt[3]{4|x' - x''|}$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$，要 $|y' - y''| < \varepsilon$，只要 $4|x' - x''| < \varepsilon^3$，或 $|x' - x''| < \frac{\varepsilon^3}{4}$ 即可.

取 $0 < \delta < \frac{\varepsilon^3}{4}$，则当 $|x' - x''| < \delta$ 时，恒有

$$|\sqrt[3]{x'}-\sqrt[3]{x''}|<\varepsilon.$$

(a) 当 $\varepsilon=1$ 时，$\delta<\frac{1}{4}$；

(б) 当 $\varepsilon=0.1$ 时，$\delta<2.5\times10^{-4}$；

(в) 当 $\varepsilon=0.001$ 时，$\delta<2.5\times10^{-10}$；

(г) 当 ε 为任意小数时，$\delta<\frac{\varepsilon^3}{4}(\varepsilon\leqslant1)$.

787. 以《$\varepsilon-\delta$》的说法在肯定的意义上表达下面论断的意义：函数 $f(x)$ 在某集合（区间，线段）上连续，但在此集合上并不一致连续.

解 设集合为 E. 所需论断的《$\varepsilon-\delta$》说明如下：对于任给的 $\varepsilon>0$，及 $x_0\in E$，总存在一个数 $\delta(\varepsilon_1,x_0)>0$，使当 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon,x_0)$ 时，恒有

$$|f(x)-f(x0)|<\varepsilon.$$

同时，至少存在一个 $\varepsilon_0>0$，使对于任意给定的 $\delta>0$，都可找到 $x_1,x_2\in E$，满足 $|x_1-x_2|<\delta$，但是

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0.$$

788. 证明：函数

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

在区间$(0,1)$上是连续的，但在此区间上并非一致连续的.

证 连续性是显然的，现证其不一致连续. 考虑$(0,1)$上的两串点

$$x_n=\frac{1}{n},\quad x_n'=\frac{1}{n+1}.$$

则当 $0<\varepsilon_0<1$ 时，不论 $\delta>0$ 取得多小，只要 n 取得充分大，总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 1 > \varepsilon_0.$$

因而,$f(x) = \frac{1}{x}$ 在(0,1)上并非一致连续.

789. 证明:函数

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$$

在区间(0,1)上是连续的并且有界,但在此区间上并非一致连续的.

证 当 $x \neq 0$ 时,由基本初等函数在其定义域的连续性可知,$f(x)$ 是连续的,同时,由于 $|f(x)| \leqslant 1$,因而它也是有界的.

现考虑(0,1)上的两串点 $x_n = \frac{2}{n}$,$x_n' = \frac{2}{n+1}$,则当 $0 < \varepsilon_0 < 1$ 时,不论 $\delta > 0$ 取得多小,只要 n 充分大,总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{2}{n(n+1)} < \delta,$$

但是

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 1 > \varepsilon_0.$$

因而,$f(x)$ 在(0,1)上并非一致连续.

790. 证明:函数

$$f(x) = \sin x^2$$

在无穷区间 $-\infty < x < +\infty$ 上是连续的并且有界,但在此区间上并非一致连续的.

证 函数 $f(x)$ 的连续性及其有界性是显然的.现证其

不一致连续性.

考虑$(-\infty,+\infty)$上的两串点

$$x_n=\sqrt{\frac{n\pi}{2}},\quad x_n'=\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}.$$

则当$0<\varepsilon_0<1$时,不论$\delta>0$如何选取,只要n充分大,总可以使

$$|x_n-x_n'|=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}}+\sqrt{\frac{n+1}{2}\pi}}<\delta,$$

但是,

$$|f(x_n)-f(x_n')|=1>\varepsilon_0.$$

因而,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上并非一致连续.

791. 证明:若函数$f(x)$在域$a\leqslant x<+\infty$上有定义并且是连续的,而且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

存在,则$f(x)$在此域上是一致连续的.

证 任给$\varepsilon>0$.由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,故必存在$X>a$,使当$x'>X,x''>X$时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由于$f(x)$在$[a,X+1]$连续,故一致连续,从而必有正数δ'存在,使当$x'\in[a,X+1]$,$x''\in[a,X+1]$,$|x'-x''|<\delta'$时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

令$\delta=\min\{\delta',1\}$.现设x',x''为满足$a\leqslant x'<+\infty$,$a\leqslant x''<+\infty$,$|x'-x''|<\delta$的任何两点.由于$|x'-x''|$

$<\delta$,故 x' 与 x'' 或同时属于$[a,X+1]$,或同时满足 $x'>X,x''>X$. 因此,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上一致连续. 证毕.

792. 证明:无界函数

$$f(x)=x+\sin x$$

于全轴 $-\infty<x<+\infty$ 上一致连续.

证 $|f(x')-f(x'')|=|(x'-x'')+(\sin x'-\sin x'')|$

$$\leqslant|x'-x''|+|\sin x'-\sin x''|\leqslant 2|x'-x''|.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$,则当 $-\infty<x'<+\infty$, $-\infty<x''<+\infty$, $|x'-x''|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致连续.

793. 函数 $f(x)=x^2$ 在下列区间中是否为一致连续的:(a)$(-l,l)$,这里 l 为随便多大的正数;(б) 在区间$(-\infty,+\infty)$上?

解 当 $x_1,x_2\in(-l,l)$ 时,

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2l|x_1-x_2|.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2l}$,则当 $|x_1-x_2|<\delta$,且 $x_1,x_2\in(-l,l)$ 时,恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在$(-l,l)$ 上一致连续.

(б) 取 $\varepsilon_0=1$,不论 $\delta>0$ 取得多小,只要 n 充分大,我们总可以使 $x'_n=n+\frac{1}{n}$,$x''_n=n$ 的距离 $|x_n'-x_n''|$

$= \frac{1}{n} < \delta$,但是,

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 > \varepsilon_0.$$

可见 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上非一致连续.

研究下列函数在已知域上的一致连续性:

794. $f(x) = \frac{x}{4-x^2}(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

解 $|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{x_1}{4-x_1^2} - \frac{x_2}{4-x_2^2}\right|$

$$= \left|\frac{4 + x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}\right| |x_1 - x_2|.$$

由于 $\left|\frac{4 + x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}\right| < \frac{4+1}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9} < 1$,

故对于任给的 $\varepsilon > 0$,取 $\delta = \varepsilon$,则对满足 $|x_1 - x_2| < \delta$ 的 x_1, x_2(x_1, x_2 属于$[-1,1]$)值,均有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

因而 $f(x)$ 在区间$[-1,1]$上一致连续.

795. $f(x) = \ln x (0 < x < 1)$.

解 考虑 $x_n = \frac{1}{n}, x_n' = \frac{1}{2n}$,则当 $0 < \varepsilon_0 < \ln 2$ 时,不论 δ 如何选取,只要 n 充分大,我们总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{2n} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \ln 2 > \varepsilon.$$

因而 $f(x)$ 在区间$(0,1)$内并非一致连续.

796. $f(x) = \frac{\sin x}{x}(0 < x < \pi)$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，我们定义函数

$$F(x)=\begin{cases}1 & ,x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x} & 0<x<\pi;\\ 0 & x=\pi.\end{cases}$$

易见 $F(x)$ 在$[0,\pi]$上连续，根据康托尔定理便知，$F(x)$ 在$[0,\pi]$上一致连续，从而 $f(x)$ 也在$(0,\pi)$上一致连续.

797. $f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x}(0<x<1)$.

解 取 $\varepsilon_0=1$，令 $x_n=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$，$x_n'=\dfrac{1}{n\pi}$(n 为正整数)，显然 x_n、x_n' 均属于$(0,1)$. 不论 $\delta>0$ 取得多么小，只要 n 充分大，总有

$$|x_n-x_n'|=\frac{1}{(2n+1)n\pi}<\delta,$$

但是，

$$|f(x_n)-f(x'_n)|=e^{\frac{1}{n\pi}}>1=\varepsilon_0.$$

因而 $f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$上非一致连续.

798. $f(x)=\text{arc tg}x(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $f(x)$ 在区间$(-\infty,1]$、$[0,+\infty)$上连续，且有

$$\lim_{x\to+\infty}\text{arc tg}x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\text{arc tg}x=-\frac{\pi}{2},$$

由 791 题知 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$及$(-\infty,1]$上均一致连续.

于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1(\varepsilon)>0$，当 x_1、$x_2\in(-\infty,1]$，$|x_1-x_2|<\delta_1(\varepsilon)$ 时，恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

成立.

又存在 $\delta_2(\varepsilon)>0$，当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，$|x_1-x_2|<\delta_2(\varepsilon)$ 时，恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

成立.

今取 $\delta(\varepsilon)=\min\{1,\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$，则当 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$ 时，x_1 与 x_2 必或同时属于 $(-\infty,1]$，或同时属于 $[0,+\infty)$，故恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

799. $f(x)=\sqrt{x}\ (1\leqslant x<+\infty)$.

解　考虑 $[1,+\infty)$ 内任意两点 x_1,x_2.

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\left|\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right|\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{2}.$$

于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $|x_1-x_2|<\delta$，$x_1,x_2\in[1,+\infty)$ 时，恒有

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|<\frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon.$$

因而 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

800. $f(x)=x\sin x\ (0\leqslant x<+\infty)$.

解　考虑点 $x_n=2n\pi+\frac{1}{n}$，$x_n'=2n\pi$，则

$$|x_n-x_n'|=\frac{1}{n}.$$

而

$$|f(x_n)-f(x_n')|=\left(2n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}$$
$$=2n\pi\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}=0,$$

及 $$\lim_{n\to\infty}2n\pi\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2\pi\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=2\pi,$$

所以，

$$|f(x_n)-f(x_n')|\to 2\pi\quad(n\to\infty).$$

现取 $\varepsilon_0=2\pi-1$. 于是，不论 $\delta>0$ 取得多么小，只要 n 充分大，总有 $|x_n-x_n'|<\delta$，并且

$$|f(x_n)-f(x_n')|>\varepsilon_0=2\pi-1.$$

因而 $f(x)=x\sin x$ 在区间$(0,+\infty)$ 上非一致连续.

801. 证明：函数 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ 在每个区间

$$J_1=(<1<x<0)\text{ 及 }J_2=(0<x<1)$$

上是一致连续的，但在它们的和

$$J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$$

上并非一致连续的.

证 在 $J_1=(-1<x<0)$ 上 $f(x)=-\frac{\sin x}{x}$，在 $J_2=(0<x<1)$ 上 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，它们的一致连续性由 796 题可知.

由于

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to-0}f(x)=-\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=-1,$$

故必存在 $\eta>0(\eta<1)$，使当 $0<x_1<\eta$，$-\eta<x_2<0$

时恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|>1$. 现取 $\varepsilon_0=1$,则不论 $\delta>0$ 取得多么小,都可取两点 x_1' 和 x_2',使 $0<x_1'<\min\left\{\eta,\frac{\delta}{2}\right\}$, $-\min\left\{\eta,\frac{\delta}{2}\right\}<x_2'<0$. 于是 $|x_1'-x_2'|<\delta$,但是,

$$|f(x_1')-f(x_2')|>\varepsilon_0=1.$$

由此可知 $f(x)$ 在 $J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$ 上非一致连续.

802. 对于 $\varepsilon>0$,求使函数 $f(x)$ 在已知区间上满足一致连续的条件的 $\delta=\delta(\varepsilon)$(任何的!)设:

(а)$f(x)=5x-3\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(б)$f(x)x^2-2x-1\quad(-2\leqslant x\leqslant 5)$;

(в)$f(x)-\frac{1}{x}\quad(0.1\leqslant x\leqslant 1)$;

(г)$f(x)=\sqrt{x}\quad(0\leqslant x<+\infty)$;

(д)$f(x)=2\sin x-\cos x\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(е)$f(x)=x\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 及 $f(0)=0(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

解 (а)$|f(x_1)-f(x_2)|=5|x_1-x_2|$.

只需取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ 即行.

(б)$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2-2|$.

由于 $-2\leqslant x\leqslant 5$,故 $|x_1+x_2-2|\leqslant 8$,于是只需取 $\delta=\frac{\varepsilon}{8}$ 即行.

(в)$|f(x_1)-f(x_2)|=\frac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{0.01}$.

只需取 $\delta=0.01\varepsilon$.

(г) 对于 $a\geqslant 0,b\geqslant 0$,显然有不等式

$$\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

成立.

对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon^2$,则当 $|x_1-x_2|<\delta$,x_1、$x_2\in[0,+\infty)$ 时,

$$\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2+\delta}\leqslant\sqrt{x_2}+\sqrt{\delta}=\sqrt{x_2}+\varepsilon;$$

同理可有

$$\sqrt{x_2}<\sqrt{x_1+\delta}\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{\delta}=\sqrt{x_1}+\varepsilon.$$

则恒有

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\varepsilon.$$

(д) $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2|\sin x_1-\sin x_2|+|\cos x_1-\cos x_2|$

$$\leqslant 2|x_1-x_2|+\left|\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)-\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)\right|=3|x_1-x_2|$$

只需取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$.

(e) 任给 $\varepsilon>0$. 当 $x_1,x_2\in\left[\dfrac{\varepsilon}{3},\pi\right]$ 时,有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|x_1\sin\frac{1}{x_1}-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$=\left|x_1\sin\frac{1}{x_1}-x_1\sin\frac{1}{x_2}+x_1\sin\frac{1}{x_2}-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\leqslant|x_1|\cdot\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|+|x_1-x_2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\leqslant|x_1|\cdot\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|+|x_1-x_2|$$

$$= \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot |x_1 - x_2| \leqslant \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}|x_1 - x_2|.$$

取 $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right\}$. 现设 $x_1, x_2 \in [0,\pi]$ 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$, 下证必有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

不妨设 $x_1 < x_2$. 若 $x_1 \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$, 则 x_1, x_2 均属于 $\left[\frac{\varepsilon}{3}, \pi\right]$, 故由上述, 知

$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot |x_1 - x_2| < \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon_2}{3+\varepsilon} = \varepsilon$.

若 $0 \leqslant x_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, 则 $x_2 = x_2 - x_1 + x_1 < \delta + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$. 于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1 \sin\frac{1}{x_1} - x_2 \sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\leqslant |x_1| + |x_2| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (\text{当 } x_1 > 0 \text{ 时}),$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|0 - x_2 \sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\leqslant |x_2| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

(当 $x_1 = 0$ 时)

总上述, 只要 $x_1, x_2 \in [0,\pi]$, $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

803. 需要尽量地把闭区间[1,10]划分为几个彼此相等的线段, 才能使得函数 $f(x) = x^2$ 在这些线段中的每一段上的振幅是小于 0.0001?

解 设分为相等的 n 段, 则对于每段中的任意两点均有 $|x_1 - x_2| \leqslant \frac{9}{n}$. 于是,

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \leqslant \frac{(10+10)9}{n}$$
$$= \frac{180}{n}.$$

按题设，我们只需$\frac{180}{n} < 0.0001$，也即

$$n > 1800000.$$

因此，应把〔1,10〕等分成至少为 1800000 个的等长的线段，就能满足要求.

804. 证明：在区间(a,b)上有穷个一致连续函数的和与它们的乘积在此区间内仍是一致连续的.

证 由于有穷个函数相加或相乘可逐次分解成两个函数相加或相乘，故我们只需考虑两个函数的情况.

设$f(x)$与$g(x)$都在有限区间(a,b)上一致连续，要证$f(x)+g(x)$与$f(x)g(x)$也在(a,b)上一致连续. 任给$\varepsilon > 0$. 由于$f(x)$在(a,b)上一致连续，故有$\delta_1 > 0$存在，使对于(a,b)中任何两点x'与x''，只要$|x'-x''| < \delta_1$，就有$|f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. 又由于$g(x)$在$(a,b)$上一致连续，故又有$\delta_2 > 0$存在，使对于$(a,b)$中任何两点$x'$与$x''$，只要$|x'-x''| < \delta_2$，就有$|g(x')-g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当$|x'-x''| < \delta$ (x'，x''为(a,b)中任何两点）时，恒有

$$|[f(x')+g(x')] - [f(x'')+g(x'')]| \leqslant |f(x') - f(x'')| + |g(x')-g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故$f(x)+g(x)$在(a,b)上一致连续. 下证$f(x)g(x)$在(a,b)上一致连续. 为此先证一个结论：若函数$F(x)$在

有限区间(a,b)上一致连续，则$F(x)$在(a,b)上必有界.事实上，对于任意给定的$\epsilon>0$，都有$\delta>0$存在，使对于(a,b)中任何两点x',x''，只要$|x'-x''|<\delta$，就有$|F(x')-F(x'')|<\epsilon$. 特别，当$a<x'<a+\delta$，$a<x''<a+\delta$时，必有$|F(x')-F(x'')|<\epsilon$；当$b-\delta<x'<b$，$b-\delta<x''<b$时，也必有$|F(x')-F(x'')|<\epsilon$. 因此，根据柯西收敛准则，知$F(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}F(x)$与$F(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}F(x)$都存在（有限）. 现在$[a,b]$上定义函数$F^*(x)$：

$$F^*(x)=\begin{cases}F(x),\text{当 } a<x<b \text{ 时；}\\F(a+0),\text{当 } x=a \text{ 时；}\\F(b-0),\text{当 } x=b \text{ 时.}\end{cases}$$

显然，$F^*(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，从而有界，由此可知$F(x)$在(a,b)上有界.

根据刚才已证的结论，存在常数$L>0$与$M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant L,\ |g(x)|\leqslant M\ (a<x<b).$$

任给$\epsilon>0$，根据$f(x)$与$g(x)$在(a,b)上的一致连续性，可取$\delta>0$，使对于(a,b)中任何两点x'与x''，只要$|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\epsilon}{2M},\ |g(x')-g(x'')|<\frac{\epsilon}{2L}.$$

由此可知，

$$\begin{aligned}&|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&=|[f(x')-f(x'')]g(x')+f(x'')[g(x')-g(x'')]|\\&<\frac{\epsilon}{2M}\cdot M+\frac{\epsilon}{2L}\cdot L=\epsilon.\end{aligned}$$

故得知 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

注. 当 (a,b) 是无穷区间时, (a,b) 上一致连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x)+g(x)$ 必也一致连续, 但乘积 $f(x)g(x)$ 不一定一致连续. 例如, 设 $(a,b)=(-\infty,+\infty)$, 函数 $f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 则函数 $[f(x)]^2=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续(参看 793 题(6)).

805. 证明: 若单调有界的函数 $f(x)$ 在有穷或无穷的区间 (a,b) 上是连续的, 则此函数在区间 (a,b) 上是一致连续的.

证 分三种情形论之.

(i) 设 (a,b) 是有限区间. 由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调有界, 故极限 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ 与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 都存在(有限). 按下式定义 $[a,b]$ 上的函数 $f^*(x)$:

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), \text{当 } a<x<b \text{ 时};\\ f(a+0), \text{当 } x=a \text{ 时};\\ f(b-0), \text{当 } x=b \text{ 时}.\end{cases}$$

显然 $f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 从而一致连续, 当然在 (a,b) 上也一致连续, 故 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

(ii) a 为有限数, $b=+\infty$. 此时, 令

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), \text{当 } a<x<+\infty \text{ 时};\\ f(a+0), \text{当 } x=a \text{ 时}.\end{cases}$$

则 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^*(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在(有限), 故根据 791 题的结果知 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 一致连续, 从而 $f(x)$ 在 $a<x<+\infty$ 一致连续.

若 $a=-\infty$，b 为有限数．考虑函数 $g(x)=f(-x)$，$(-b<x<+\infty)$ 即化成刚才证明了的左端点是有限数右端点是 $+\infty$ 的情形．

(iii) $a=-\infty$，$b=+\infty$．任给 $\varepsilon>0$．利用(ii)已证的结果，$f(x)$ 在 $0<x<+\infty$ 上一致连续，故存在 $\delta_1>0$，使当 x' 与 x'' 都属于 $(0,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

同样利用(ii)已证的结果，$f(x)$ 在 $-\infty<x<1$ 上一致连续，故对于同一个 ε，存在 $\delta_2>0$，使当 x' 与 x'' 都属于 $(-\infty,1)$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

现令 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$，则当 $-\infty<x'<+\infty$，$-\infty<x''<+\infty$，$|x'-x''|<\delta$ 时，x' 与 x'' 必或是同属于区间 $(0,+\infty)$，或是同属于区间 $(-\infty,1)$．因此，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由此可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续．证毕．

806. 证明：在有穷区间 (a,b) 上有定义而且是连续的函数 $f(x)$，可用连续的方法延拓到闭区间 $[a,b]$ 上，其必要且充分的条件是函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是一致连续的．

证　必要性：若 $f(x)$ 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a,b]$ 上，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而一致连续，当然在 (a,b) 上也是一致连续的．

充分性：若 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续．根据804题的证明过程，知 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 都存在(有限)．按下式定义 $[a,b]$ 上的函数：

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), \text{当 } a<x<b \text{ 时;} \\ f(a+0), \text{当 } x=a \text{ 时;} \\ f(b-0), \text{当 } x=b \text{ 时.} \end{cases}$$

显然，$f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上 $f^*(x)\equiv f(x)$. 故 $f^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续延拓. 证毕.

807. 函数

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|$$

(式中 x_1 和 x_2 为 (a,b) 中受条件 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ 限制的任意两点) 称为函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的连续模数.

证明：函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是一致连续的必要且充分的条件是

$$\lim_{\delta\to-0}\omega_f(\delta)=0.$$

证 必要性：设 $f(x)$ 在 (a,b) 一致连续. 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta'>0$，使 (a,b) 中任何两点 x_1,x_2，只要 $|x_1-x_2|<\delta'$ 就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 现设 $0<\delta<\delta'$，则当 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ 时，必 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

由此可知，$\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$.

充分性：设

$$\lim_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0.$$

任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta'>0$，使当 $0<\delta<\delta'$ 时，恒有

$$\omega_f(\delta)<\varepsilon.$$

现设 x_1 与 x_2 是 (a,b) 中满足 $|x_1-x_2|<\delta'$ 的任何两点.

若 $x_1 = x_2$，则显然

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \varepsilon;$$

若 $x_1 \neq x_2$. 令 $|x_1 - x_2| = \delta'$，则 $0 < \delta^* < \delta'$，于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \omega_f(\delta^*) < \varepsilon.$$

由此可知，$f(x)$ 在(a,b) 内一致连续. 证毕.

808. 设：

(a)$f(x) = x^3 (0 \leqslant x \leqslant 1)$；

(б)$f(x) = \sqrt{x} (0 \leqslant x < a)$ 及$(a < x < +\infty)$；

(в)$f(x) = \sin x + \cos x (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

对函数 $f(x)$ 的连续模数 $\omega_f(\delta)$（参阅前题）作下形的估价

$$\omega_f(\delta) \leqslant C\delta^{\alpha},$$

式中 C 和 α 为常数.

解 (a)$|x_1^3 - x_2^3| = |x_1 - x_2||x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2| \leqslant 3\delta$，于是，

$$\omega_f(\delta) \leqslant 3\delta.$$

(б) 当 $0 \leqslant x \leqslant a$ 时[参看 802 题(г) 的证明过程]

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leqslant \sqrt{|x_1 - x_2|} \leqslant \sqrt{\delta},$$

于是，

$$\omega_f(\delta) \leqslant \sqrt{\delta};$$

当 $a < x < +\infty$ 时

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{a}},$$

于是，

$$\omega_f(\delta) \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{a}}.$$

(в) $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

故 $$\left|\sqrt{2}\sin\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\left(x_2+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$=\sqrt{2}\cdot 2\left|\cos\frac{x_1+x_2+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|$$

$$\leqslant\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{|x_1-x_2|}{2}=\sqrt{2}\,\delta,$$

于是

$$\omega_f(\delta)\leqslant\sqrt{2}\,\delta.$$

§ 10. 函数方程

809. 证明：对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

的唯一的连续函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是齐次线性函数：

$$f(x)=ax,$$

式中 $a=f(1)$ 是任意的常数.

证 先证：若 $f(x)$ 满足(1)，则对任何有理数 c，必有

$$f(cx)=cf(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

事实上，当 m 与 n 为正整数时，有

$$f(mx)=f(x+(m-1)x)=f(x)+f((m-1)x)$$
$$=f(x)+f(x)+f((m-2)x)=\cdots$$
$$=f(x)+f(x)+\cdots+f(x)=mf(x);$$

$$f(x)=f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right)，故\ f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x).$$

于是

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=mf\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{m}{n}f(x).$$

又在(1)中令 $y=0$,得 $f(x)=f(x)+f(0)$,故 $f(0)=0$;又在(1)中令 $y=-x$,并注意已证的结果 $f(0)=0$,得 $f(-x)=-f(x)$.

于是

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x).$$

故对任何有理数 c,有 $f(cx)=cf(x)(-\infty<x<+\infty)$. 下面,我们利用 $f(x)$ 的连续性证明对任何无理数 c,此式也成立. 事实上,设 c 为无理数. 取一串有理数 c_n,使 $c_n\to c(n\to\infty)$. 于是

$$f(C_nx)=C_nf(x),(n=1,2\cdots).$$

在此式两端令 $n\to\infty$ 取极限,并注意到函数 f 在点 cx 连续,即得 $f(cx)=cf(x)$. 于是,对任何实数 x 和 c,有 $f(cx)=cf(x)$. 由此可知,对任何实数 x,有

$$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)=ax,$$

其中 $a=f(1)$. 证毕.

810. 证明:满足方程(1)的单调函数 $f(x)$ 是齐次线性的.

证 由 809 题之证明过程,知:对任何有理数 c,有

$$f(cx)=cf(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

下面,我们利用 $f(x)$ 的单调性证明此式对任何无理数 c 成立. 为确定起见,设 $f(x)$ 是单调递增的,设 c 是无理数,要证 $f(cx)=cf(x)(-\infty<x<+\infty)$. 只就 $x>0$ 讨论之($x\leqslant 0$ 时可类似讨论). 取两串有理数 $\{c_n\}$

与$\{c_n'\}$使：

$$c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c < \cdots < c_3' < c_2' < c_1',$$

并且 $c_n \to c, c_n' \to c(n \to \infty)$. 由于 $x > 0$，故

$$c_1 x < c_2 x < c_3 x < \cdots cx < \cdots < c_3' x < c_2' x < c_1' x,$$

并且 $c_n x \to cx, c_n' x \to cx(n \to \infty)$. 另外，我们有

$$f(c_n x) = c_n x, f(c_n' x) = c_n' x (n = 1,2,\cdots).$$

由于 $f(x)$ 是单调递增的，故在点 cx 的左、右极限均存在有限，并且满足

$$f(cx - 0) \leqslant f(cx) \leqslant f(cx + 0).$$

在前面两个等式中令 $n \to \infty$ 取极限，得

$$f(cx - 0) = cx, \quad f(cx + 0) = cx.$$

由此可知 $f(cx) = cx$.

以下证明同 809 题，不再重复.

811. 证明：满足方程(1)且在某小区间$(-\varepsilon,\varepsilon)$中为有界的函数 $f(x)$，是线性齐次函数.

证　由 809 题的证明过程，知：对任何有理数 c，有

$$f(cx) = cf(x) \ (-\infty < x < +\infty).$$

下面，我们利用 $f(x)$ 在$(-\varepsilon,\varepsilon)$中的有界性来证明对于任何无理数 c，此式也成立. 用反证法，假定对于某无理数 c_0 以及某实数 x_0，有 $f(c_0 x_0) \neq c_0 f(x_0)$. 令 $f(c_0 x_0) - c_0 f(x_0) = \alpha$，则 $\alpha \neq 0$. 今取一串有理数$\{c_n\}$，使 $c_n \to c_0(n \to \infty)$. 于是，对于任何正整数 m，有

$$\begin{aligned} f[m(c_0 - c_n)x_0] &= mf[(c_0 - c_n)x_0] \\ &= m[f(c_0 x_0) - f(c_n x_0)] \\ &= m(c_0 - c_n)f(x_0) + m\alpha, \end{aligned}$$

$$(n = 1,2,3\cdots; m = 1,2,3\cdots).$$

任给 $G>0$. 先取定一个正整数 m, 使 $m>\frac{2G}{|\alpha|}$. 对此 m, 再取定一个正整数 n, 使

$$|m(c_0-c_n)x_0|<\varepsilon,\ |m(c_0-c_n)f(x_0)|<G.$$

令 $\bar{x}=m(c_0-c_n)x_0$. 于是 $\bar{x}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 并且

$$|f(\bar{x})|\geqslant|m\alpha|-|m(c_0-c_n)f(x_0)|>2G-G=G.$$

由所给 $G>0$ 的任意性, 即知 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 无界, 此与假定矛盾. 于是, 对任何无理数 c, 也有

$$f(cx)=cf(x).$$

以下证明同 809 题, 不再重复.

812. 证明: 对 x 和 y 的一切值满足方程

$$f(x+y)=f(x)f(y) \tag{2}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是指数函数:

$$f(x)=a^x,$$

式中 $a=f(1)$ 为正的常数.

证 先证必 $f(x)>0(-\infty<x<+\infty)$. 事实上, 由 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$, 知 $f(x)\geqslant 0$. 由于 $f(x)\not\equiv 0$, 故存在 x_0 使 $f(x_0)>0$. 在(2)中令 $x=x_0$, $y=0$, 得 $f(x_0)=f(x_0)f(0)$, 故 $f(0)=1$; 又在(2)中令 $y=-x$, 得 $1=f(0)=f(x)f(-x)$, 故 $f(x)\neq 0$, 由此可知 $\quad f(x)>0(-\infty<x<+\infty)$.

当 m 与 n 为正整数时,

$$f(mx)=f((m-1)x+x)=f((m-1)x)\cdot f(x)$$
$$=f((m-2)x)\cdot f(x)\cdot f(x)=\cdots=[f(x)]^m;$$

$f(x)=f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n$, 即 $f\left(\frac{x}{n}\right)=$

$[f(x)]^{\frac{1}{n}}$.

于是

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m=[f(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

又有

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=[f(-x)]^{\frac{m}{n}}=[f(x)]^{-\frac{m}{n}}.$$

由此可知，对任何有理数 c，有

$$f(cx)=[f(x)]^c(-\infty<x<+\infty).$$

根据 $f(x)$ 的连续性，仿 809 之证易知此式对任何无理数也成立. 因此，对于任何实数 c 与 x，有

$$f(cx)=[f(x)]^c,$$

从而 $f(x)=f(x\cdot 1)=[f(1)]^x=a^x, a=f(1)>0$.

注. 也可利用 809 题的结果来证. 前面已证 $f(x)>0(-\infty<x<+\infty)$. 令 $F(x)=\log_a f(x)$，这里 $a=f(1)>0$. 于是 $F(x)$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，满足(1)式：

$$F(x+y)=\log_a f(x+y)=\log_a f(x)f(y)$$
$$=\log_a f(x)+\log_a f(y)=F(x)+F(y).$$

故由 809 题的结果，知 $F(x)=a^*x$，这里
$a^*=F(1)=\log_a f(1)=\log_a a=1$，从而 $F(x)=x$. 由此可知 $f(x)=a^x$.

813. 证明：在区间 $(0,\varepsilon)$ 中有界并满足方程(2)的不恒等于零的函数 $f(x)$ 是指数函数.

证 由 812 的证明知：$f(x)>0(-\infty<x<+\infty)$，并且对任何有理数 c，有 $f(cx)=[f(x)]^c$.

下证对任何无理数 c，也有

$$f(cx)=[f(x)]^c(-\infty<x<+\infty).$$

用反证法. 假定对某无理数 c_0，及某实数 x_0，有 $f(c_0x_0)\neq[f(x_0)]^{c_0}$. 显然 $x_0\neq 0$（因为 $f(0)=1$）. 不妨设 $x_0>0$. 我们有 $f(c_0x_0)=\beta[f(x_0)]^{c_0}$，$\beta>0$，$\beta\neq 1$. 不妨设 $\beta>1$. 取一串有理数 c_n，使 $c_1<c_2<c_3<\cdots<c_0$，且 $c_n\to c_0(n\to\infty)$. 于是，对任何正整数 m，有

$$f[m(c_0-c_n)x_0]=\{f[(c_0-c_n)x_0]\}^m$$

$$=f(c_0x_0)^m\cdot f(-c_nx_0)^m=\beta^m\cdot[f(x_0)]^{m(c_0-c_n)}.$$

现任给 $G>0$. 先取定一个正整数 m，使 $\beta^m>2G$. 然后，再取一个 n，使

$$0<m(c_0-c_n)x_0<\varepsilon,[f(x_0)]^{m(c_0-c_n)}>\frac{1}{2}.$$

于是，令 $\bar{x}=m(c_0-c_n)x_0$，则 $\bar{x}\in(0,\varepsilon)$，且 $f(\bar{x})>2G\cdot\frac{1}{2}=G$，故 $f(x)$ 在 $(0,\varepsilon)$ 无界，此与假定矛盾. 注意，若 $\beta<1$，则需取 $c_1>c_2>c_3>\cdots>c_0$，$c_n\to c$ 并考虑 $f[-m(c_0-c_n)x_0]=\beta^{-m}[f(x_0)]^{-m(c_0-c_n)}$. 由此可知，对任何无理数 c，$f(cx)=[f(x)]^c$ 也成立.

以下证明同于 812 题，不再重复.

814. 证明：对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)(0<x<+\infty)$ 是对数函数：

$$f(x)=\log_a x,$$

式中 a 为正的常数.

证 在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中令 $y=1$，得 $f(1)=0$.

由于 $f(x) \not\equiv 0$，故存在 $x_0 > 0$ 使 $f(x_0) \neq 0$. 先设 $f(x_0) > 0$.

由于 $f(x_0^2) = f(x_0) + f(x_0) = 2f(x_0)$，$f(x_0^4) = 2f(x_0^2) = 4f(x_0)$，…，利用归纳法，易知 $f(x_0^{2n}) = 2nf(x_0) \to +\infty (n \to \infty)$. 故可取某正整数 n，使 $f(x_0^{2n}) > 1$. 于是，根据连续函数性质知，在 1 与 x_0^{2n} 之间必存在某 a（显然 $a > 0$）使 $f(a) = 1$. 现考虑函数 $F(x) = f(a^x)(-\infty < x < +\infty)$. 显然 $F(x)$ 连续且满足(1)式：

$$F(x+y) = f(a^{x+y}) = f(a^x \cdot a^y) = f(a^x) + f(a^y)$$
$$= F(x) + F(y)$$

于是，根据 809 题的结果知 $F(x) = a^* x(-\infty < x < +\infty)$，其中 $a^* = F(1) = f(a) = 1$. 于是 $F(x) = x$，即

$$f(a^x) = x;$$

令 $a^x = y$，则 $x = \log_a y$，于是

$$f(y) = \log_a y (0 < y < +\infty).$$

若 $f(x_0) < 0$，则可考虑函数 $g(x) = -f(x)$.

于是 $g(x_0) > 0$ 且 $g(x)$ 也满足 $g(xy) = g(x) + g(y)$，故根据刚才已证的结果，知 $g(y) = \log_a y (0 < y < +\infty)$，其中 $a > 0$. 即 $-f(y) = \log_a y$，或 $f(y) = -\log_a y$.

令 $a^* = \dfrac{1}{a}$，则 $a^* > 0$ 且 $-\log_a y = \log_{a^*} y$，故

$$f(y) = \log_{a^*} y \quad (0 < y < +\infty),$$

其中 $a^* > 0$. 证毕.

815. 证明：对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{3}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)(0 < x < +\infty)$ 是

幂函数：

$$f(x)=x^a,$$

式中 a 为常数.

证 考察函数 $F(x)=f(e^x)(-\infty<x<+\infty)$，则 $F(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 连续不恒为零，且满足(2)式：

$$F(x+y)=f(e^{x+y})=f(e^x\cdot e^y)=f(e^x)f(e^y)$$
$$=F(x)F(y).$$

于是，根据 812 题的结果知

$$F(x)=b^x \quad (-\infty<x<+\infty),$$

其中 $b>0$，即 $f(e^x)=b^x(-\infty<x<+\infty)$.

令 $e^x=y$，则 $y>0$；显然，存在唯一的 $a(-\infty<a<+\infty)$，使 $e^a=b$. 于是

$$f(y)=b^x=e^{ax}=y^a \quad (0<y<+\infty).$$

证毕.

816. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程(3)的一切连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$.

证 因为 $f(xy)=f(x)f(y)$，所以 $f(1)=f(1)f(1)$，于是 $f(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

当 $f(1)=0$ 时，对于任意实数 x，均有

$$f(x)=f(1)f(x)\equiv 0.$$

当 $f(1)=1$ 时，由于 $f(1)=f((-1)\cdot(-1))=f(-1)f(-1)=1$，所以 $f(-1)=\pm 1$. 下面分两种情况讨论：

1° 当 $f(-1)=1$ 时，由于

$$f(-x)=f(-1)f(x)=f(x),$$

所以在这种情形下就可把问题归结为对 $0<x<+\infty$ 中

的 x 进行讨论. 而对于 $x>0$,我们已证得 $f(x)=x^a$,式中 a 为常数*). 然后再利用 $f(-x)=f(x)$,即得

$$f(x)=|x|^a.$$

为保证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中连续,需 $a\geqslant 0$.

2° 当 $f(-1)=-1$ 时,同 1° 可得

$$f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a\quad(a\geqslant 0).$$

综上所述,所求的函数为(1)$f(x)\equiv 0$;或(2)$f(x)=|x|^a(a\geqslant 0)$;或(3)$f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a(a\geqslant 0)$.

*) 利用 815 题的结果.

817. 证明:不连续函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x$$

满足方程(3).

证 由 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 知,$f(xy)=\operatorname{sgn}(xy)$.

分三种情况讨论:

1° 当 $xy>0$ 时,x 与 y 同号,此时

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=1;$$

2° 当 $xy<0$ 时,x 与 y 异号,此时

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=-1;$$

3° 当 $xy=0$ 时,在实数域内,x 与 y 中至少有一个为 0,于是

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y=0.$$

总之,不论哪一种情形,均有

$$\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x\cdot\operatorname{sgn}y,$$

也即函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 满足方程

$$f(xy)=f(x)f(y).$$

818. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

的一切连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$.

解 显见函数

$$f(x)=\cos ax \text{ 或 } f(x)=\operatorname{ch}ax$$

满足所给方程. 下面我们将指出满足所给方程的函数具有上述形式. 为此, 在方程中令 $y=0$, 得

$$2f(x)=2f(x)f(0),$$

则当 $f(x)\neq 0$ 时 $f(0)=1$. 又令 $x=0$ 得

$$f(y)+f(-y)=2f(y),$$

所以

$$f(-y)=f(y).$$

由 $f(x)$ 的连续性, 故知存在 $c>0$, 使当 $x\in[0,c]$ 时, $f(x)>0$. 设 $f(c)=a$. 下面分两种情况讨论:

1° 当 $0<a\leqslant 1$ 时,

于是存在 θ: $0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}$, 使得

$$f(c)=\cos\theta. \tag{1'}$$

从而

$$f(2c)=2[f(c)]^2-f(0)=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,$$

$$f(3c)=2f(2c)f(c)-f(c)=2\cos 2\theta\cos\theta-\cos\theta$$
$$=\cos 3\theta.$$

利用数学归纳法易证, 对于一切正整数 n, 均有

$$f(nc)=\cos n\theta. \tag{2'}$$

又

$$\left[f\left(\frac{1}{2}c\right)\right]^2=\frac{1}{2}[f(0)+f(c)]=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

$$= \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

由于 $f(x) > 0$,故取正根,则得

$$f\left(\frac{1}{2}c\right) = \cos \frac{\theta}{2}. \tag{3'}$$

同样,利用数学归纳法可得,对于一切正整数 n,均有

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right). \tag{4'}$$

重复应用(1′)到(2′)的推理过程于(4′),可知对于一切正整数 m,均有

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right). \tag{5'}$$

因此,对于$\frac{m}{2^n}$型的正实数 x_n,有

$$f(cx_n) = \cos(\theta x_n).$$

又因任一正实数 x 皆可表成$\frac{m}{2^n}$型数列的极限,所以利用极限过程易得

$$f(cx) = \cos(\theta x) \tag{6'}$$

由于 $f(-y) = f(y)$,故(6′)式对 $x < 0$ 也成立. 至于当 $x = 0$ 时,$f(cx) = \cos(\theta x)$ 显然成立. 因此,对于 $-\infty < x < +\infty$ 的一切实数,均有

$f(cx) = \cos(\theta x)$. 把 cx 换成 x,并令$\frac{\theta}{c} = a$,则得

$$f(x) = \cos ax.$$

2° 当 $a > 1$ 时,于是存在这样的 θ,使得

$$f(c) = a = \operatorname{ch}\theta.$$

根据双曲余弦的关系式,再重复上面的推理过程,可得

$$f(x)=\operatorname{ch}ax.$$

当 $a=0$ 时，$f(x)\equiv 1$.

综上所述，所求的函数为

$$f(x)=\cos ax \text{ 或 } f(x)=\operatorname{ch}ax.$$

819. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程组：

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$$

$$g(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

及

$$f(0)=1 \text{ 和 } g(0)=0$$

的一切有界连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$.

解 考虑函数

$$F(x)=f^2(x)+g^2(x),$$

则

$$F(x+y)=f^2(x+y)+g^2(x+y)=[f(x)f(y)-g(x)g(y)]^2+[f(x)g(y)+f(y)g(x)]^2=F(x)F(y),$$

由于 $F(0)=1$ 及 $F(x)\neq 0$，故

$$F(x)=a^x \quad (-\infty<x<+\infty),$$

式中 $a=F(1)$ 为正的常数*).

由于 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有界，故只能有 $a=1$. 因此，对于一切实数 x，有 $f^2(x)+g^2(x)=1$.

因为

$$0=g(0)=g(x-x)=f(x)g(-x)+f(-x)g(x)$$

及

$$1=f(0)=f(x-x)=f(x)f(-x)-g(-x)g(x).$$

上面二式分别乘以 $g(-x)$ 及 $f(-x)$，然后相加，得

$$f(-x)=f(x)\cdot[f^2(-x)+g^2(-x)]=f(x);$$

如果上面二式分别乘以 $f(-x)$ 及 $g(-x)$，然后相减，得

$$g(-x)=-g(x)[g^2(-x)+f^2(-x)]=-g(x).$$

从而可得

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$$
$$+f(x)f(-y)-g(x)g(-y)=2f(x)f(y).$$

于是，考虑到 $f(x)$ 的有界性，可得

$$f(x)=\cos ax^{**)},$$

再由 $f^2(x)+g^2(x)=1$ 可得

$$g(x)=\pm\sin ax,$$

*) 利用 812 题的结果.

**) 利用 818 题的结果.

820. 设

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$$

及

$$\Delta^2 f(x)=\Delta\{\Delta f(x)\}$$

分别为函数 $f(x)$ 的一阶、二阶有限差.

证明：若函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是连续的且

$$\Delta^2 f(x)\equiv 0,$$

则此函数是线性函数，即

$$f(x)=ax+b,$$

式中 a 和 b 为常数.

证 由 $\Delta^2 f(x)\equiv 0$ 得

$$f(x+\Delta_1 x+\Delta_2 x)-f(x+\Delta_2 x)$$
$$\equiv f(x+\Delta_1 x)-f(x).$$

令 $x = 0$，得

$$f(\Delta_1 + \Delta_2) - f(\angle_2) \equiv f(\Delta_1) - f(0).$$

令 $\Delta_2 - n\Delta_1$，得

$$f[(n+1)\Delta_1] - f(n\angle_1) \equiv f(\Delta_1) - f(0).$$

利用数学归纳法，可得

$$f[(n+1)\Delta_1] - f(0) \equiv (n+1)[f(\Delta_1) - f(0)]. \tag{1'}$$

关系式(′)可写成

$$f(\Delta_1) - f(0) = \frac{1}{n}[f(n\Delta_1) - f(0)].$$

在上式中令 $n\Delta_1 = m$，再利用(1′)即得

$$f\left(\frac{m}{n}\right) - f(0) = \frac{m}{n}[f(1) - f(0)],$$

所以

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a \cdot \frac{m}{n} + b,$$

式中 $a = f(1) - f(0)$ 及 $b = f(0)$ 均为常数.

于是，对于有理数 x，均有

$$f(x) = ax + b.$$

对于无理数 x，利用 $f(x)$ 的连续性，即可证得上式仍成立. 事实上，取有理数列 $x_n \to x$，则

$$\lim_{x_n \to x} f(x_n) = f(x).$$

另一方面

$$\lim_{x_n \to x} f(x_n) = \lim_{x_n \to x}(ax_n + b) = ax + b.$$

因此，对于一切实数 x，均有

$$f(x) = ax + b.$$