КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.С.Желтухин

Неопределенные интегралы: методы вычисления

КАЗАНЬ – 2005

ПЕЧАТАЕТСЯ
ПО РЕШЕНИЮ СЕКЦИИ
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОГО СОВЕТА
КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Составитель:
доцент В. С. Желтухин

В пособии рассматриваются основные приемы и методы вычисления неопределенных интегралов. Рекомендуется студентам первого курса факультета ВМК.

1 ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение. Функция $F(x)$ в данном промежутке $\mathcal{X}$ называется *первообразной функции* $f(x)$ или *неопределенным интегралом* от $f(x)$, если во всем промежутке $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)\,dx$.

Теорема. *Если в некотором промежутке $\mathcal{X}$ функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C — любая постоянная, также будет первообразной для $f(x)$, и наоборот, каждая функция, первообразная для $f(x)$ в некотором промежутке $\mathcal{X}$, может быть представлена в этой форме.*

В силу теоремы, выражение $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, представляет собой общий вид функции, которая имеет производную $f(x)$ или дифференциал $f(x)\,dx$ и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx,$$

в котором неявным образом уже заключена произвольная постоянная. Выражение $f(x)dx$ называют *подинтегральным выражением*, а функцию $f(x)$ — *подинтегральной функцией.*

Операция интегрирования проверяется обратным действием — дифференцированием. Например,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad \text{поскольку} \quad \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2.$$

Свойства интеграла

1) $d\displaystyle\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$ или $\left(\displaystyle\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$

2) $\displaystyle\int F'(x)\,dx = \int dF(x) = F(x) + C.$

(знаки дифференциала d и интеграла $\int$ взаимно сокращаются, только во втором случае к $F(x)$ нужно прибавить произвольную постоянную).

Каждая формула дифференциального исчисления, устанавливающая, что для некоторой функции $F(x)$ производной будет $f(x)$, приводит к соответствующей формуле интегрального исчисления

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Перебрав формулы, по которым вычисляются производные элементарных функций, и добавив некоторые формулы, выведенные дальше, можно составить таблицу интегралов (см. табл. 1).

Правила интегрирования

I) Если a – произвольная постоянная, то

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx.$$

II) $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

III) Если $\displaystyle\int f(t)\,dt = F(t) + C$, то $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Частные случаи:

(a) $\displaystyle\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C;$

(b) $\displaystyle\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$

Рассмотрим применение правил интегрирования на примерах.

П р и м е р 1. Вычислить интеграл $\displaystyle\int (6x^2 - 3x + 5)\,dx.$

▷ Применим сначала правило II:

$$\int (6x^2 - 3x + 5)\,dx = \int 6x^2dx - \int 3x\,dx + \int 5\,dx,$$

затем правило I:

$$\int 6x^2dx - \int 3x\,dx + \int 5\,dx = 6\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 5\int dx,$$

Таблица 1

Основные интегралы от элементарных функций

1) $\int 0 \cdot dx = C.$

2) $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C.$

3) $$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

4) $$\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$$

5) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1.$$

7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C,\ |x| > 1.$$

8) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

9) $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$

10) $\int e^x\, dx = e^x + C.$

11) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

12) $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

13) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

14) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

15) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

16) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

17) $\int \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = -\operatorname{cth} x + C.$

18) $\int \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx = \operatorname{th} x + C.$

и напоследок воспользуемся п.п. 2, 3 табл. 1:

$$6\int x^2\,dx-3\int x\,dx+5\int\,dx=2x^3-\frac{3}{2}\,x^2+5x+C.$$

Таким образом, $\displaystyle\int(6x^2-3x+5)\,dx=2x^3-\frac{3}{2}\,x^2+5x+C.$ $\triangleleft$

П р и м е р 2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int(1+\sqrt{x}\,)^4\,dx.$

$$\triangleright\int(1+\sqrt{x}\,)^4\,dx=\int(1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2)\,dx=$$

$$=\int dx+4\int\sqrt{x}\,dx+6\int x\,dx+4\int x^{3/2}\,dx+\int x^2\,dx=$$

$$=x+\frac{8}{3}\,x^{3/2}+3x^2+\frac{8}{5}\,x^{5/2}+\frac{1}{3}\,x^3+C.\ \triangleleft$$

П р и м е р 3. Вычислить $\displaystyle J=\int\frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}\,dx.$

$$\begin{aligned}\triangleright J\ &=\ \int\frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{3}\,x+\frac{1}{3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\,dx=\\&=\ \frac{1}{3}\int x\,dx+\frac{1}{3}\int dx-\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}=\\&=\ \frac{1}{6}\,x^2+\frac{1}{3}\,x-\ln\,x+\frac{1}{x}+C.\triangleleft\end{aligned}$$

Примеры на применение правила III:

П р и м е р 4. $\triangleright$

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C.$

2) $\displaystyle\int\sin mx\,dx=-\frac{1}{m}\cos\,mx+C.$

3) $\displaystyle\int e^{-3x}\,dx=-\frac{1}{3}\,e^{-3x}+C.\triangleleft$

П р и м е р 5. $\triangleright$

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+(x/a)^2}=\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C.$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.\triangleleft$

Примеры на все правила:

П р и м е р 6. $\triangleright$

$$\begin{aligned}\int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+1)}{e^x}\,dx &= \int (e^{2x}-e^x+1-e^{-x})\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\,e^{2x}-e^x+x+e^{-x}+C.\triangleleft\end{aligned}$$

П р и м е р 7. $\triangleright$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-3x+1}{x+1}\,dx &= \int \frac{(2x-5)(x+1)+6}{x+1}\,dx = \\ =\int \left(2x-5+\frac{6}{x+1}\right)\,dx &= x^2-5x+6\ln|x+1|+C.\triangleleft\end{aligned}$$

Интегрирование дроби со сложным знаменателем часто облегчается разложением ее на сумму дробей с более простыми знаменателями.

П р и м е р 8. $\triangleright$ Так, например,

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right),$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\,dx - \int \frac{1}{x+a}\,dx\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.\triangleleft$$

Вообще, дробь вида $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}$ разлагается на сумму дробей:

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)}\cdot\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right),$$

поэтому

П р и м е р 9. $\triangleright$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\left(\int \frac{dx}{x+b} - \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C.\triangleleft$$

П р и м е р 10. Вычислить

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C}, \quad B^2 - AC > 0.$$

$\triangleright$ Знаменатель дроби разлагается на вещественные множители:

$$Ax^2 + 2Bx + C = A(x - \alpha)(x - \beta),$$

где

$$\alpha = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \beta = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Тогда, в соответствии с примером 9, полагая в нем $a = -\beta$, $b = -\alpha$, получим

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{2\sqrt{B^2 - AC}} \ln \left| \frac{Ax + B - \sqrt{B^2 - AC}}{Ax + B + \sqrt{B^2 - AC}} \right| + C_1. \triangleleft$$

П р и м е р 11. $\triangleright$ В частности,

1) $$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x - 1/2)(x + 3/2)} = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+3} \right| + C. \triangleleft$$

Некоторые тригонометрические выражения, после тех или иных элементарных преобразований, также интегрируются при помощи простейших приемов.

П р и м е р 12. $\triangleright$ Очевидно, например, что

$$\cos^2 mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2},$$

следовательно

$$\int \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2mx\, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C. \triangleleft$$

П р и м е р 13. $\triangleright$ Аналогично,

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x];$$

считая $m \pm n \neq 0$, получим, что

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{1}{2(m+n)} \cos(m+n)x - \frac{1}{2(m-n)} \cos(m-n)x + C. \triangleleft$$

В заключение рассмотрим немного более сложный пример:

П р и м е р 14. Вычислить $J = \displaystyle\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\, dx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

$\triangleright$ Так как

$$\sin 2nx = \sum_{k=1}^{n} [\sin 2kx - \sin(2k-2)x] = 2\sin x \sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x,$$

то подинтегральная функция приводится к $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x$ и искомый интеграл

$$J = 2\sum_{k=1}^{n} \int \cos(2k-1)x\, dx = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + C. \triangleleft$$

2 ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Метод *замены переменной* или метод *подстановки* является одним из сильнейших приемов интегрирования функций. В основе метода лежит следующее простое

Свойство: *если известно, что* $\displaystyle\int g(t)\, dt = G(t) + C$, *то тогда*

$$\int g[\omega(x)]\omega'(x)\, dx = G[\omega(x)] + C.$$

(функции $g(t)$, $\omega(x)$, $\omega'(x)$ предполагаются непрерывными).

Пусть требуется вычислить интеграл $\displaystyle\int f(x)\, dx$. Во многих случаях удается в качестве новой переменной выбрать такую функцию от x

$$t = \omega(x),$$

чтобы подинтегральное выражение представилось в виде

$$f(x)\, dx = g[\omega(x)]\omega'(x)\, dx,$$

где $g(t)$ — более удобная для интегрирования функция, чем $f(x)$. Тогда, по сказанному выше, достаточно найти интеграл

$$\int g(t)\, dt = G(t) + C,$$

чтобы из него подстановкой $t = \omega(x)$ получить искомый интеграл. Обычно пишут просто

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt, \tag{1}$$

подразумевая, что в функции от t, которая представлена интегралом справа, уже произведена указанная замена.

П р и м е р 15. Найдем интеграл $\displaystyle\int \sin^3 x\,\cos x\,dx$.

$\triangleright$ Так как $d\sin x = \cos x\,dx$, то, полагая $t = \sin x$, преобразуем подинтегральное выражение к виду

$$\sin^3 x\,\cos x\,dx = \sin^3 x\,d(\sin x) = t^3\,dt.$$

Интеграл от последнего выражения легко вычисляется:

$$\int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, и подставляя $\sin x$ вместо t, получим:

$$\int \sin^3 x\,\cos x\,dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C. \triangleleft$$

При выборе подстановки $t = \omega(x)$, упрощающей подинтегральное выражение, **необходимо помнить, что в его составе должен найтись множитель $\omega'(x)\,dx$, дающий дифференциал новой переменной, dt.**

П р и м е р 16. Вычислить интеграл $J = \displaystyle\int \sin^3 x\,dx$.

$\triangleright$ Здесь подстановка $t = \sin x$ непригодна именно ввиду отсутствия упомянутого множителя. Если попробовать выделить из подинтегрального выражения, в качестве дифференциала новой переменной, множитель $\sin x\,dx$, или лучше $-\sin x\,dx$, то это приведет к подстановке $t = \cos x$; так как остающееся выражение

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1,$$

этой подстановкой упрощается, то подстановка оправдана. Имеем

$$J = \int \sin^3 x\,dx = \int \left(t^2 - 1\right)\,dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C. \triangleleft$$

При некотором навыке в производстве подстановки можно самой переменной t и не писать. Например, в интеграле

$$\int \sin^3 x \, \cos x \, dx = \int \sin^3 x \, d(\sin x),$$

мысленно рассматривают $\sin x$ как новую переменную и сразу переходят к результату.

П р и м е р 17. Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$;

$$\triangleright \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{d\left(\dfrac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - 1}} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) + C =$$

$$= \ln(x + \sqrt{(x^2 - a^2)}) + C_1,$$

где $C_1 = C - \ln a$. Подстановка $t = x/a$ в этом примере подразумевается.

Из этого примера сразу видно, что правило интегрирования III является непосредственным следствием применения метода замены переменных. $\triangleleft$

Иногда подстановка применяется в форме, отличной от указанной. Именно, в подинтегральное выражение $f(x)\,dx$ подставляют, вместо x, функцию $x = \varphi(t)$ от новой переменной t и получают в результате выражение

$$f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = g(t)\,dt.$$

Если в этом выражении произвести подстановку $t = \omega(x)$, где $\omega(x)$ — функция, обратная для $\varphi(t)$, то, очевидно, вернемся к исходному подинтегральному выражению $f(x)\,dx$. Поэтому имеет место равенство (1), в правой части которого, после вычисления интеграла, необходимо подставить $t = \omega(x)$.

П р и м е р 18. Рассмотрим интеграл $J = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x}\,)}$.

$\triangleright$ Если положить $x = t^6$ (чтобы все корни “извлеклись”), то получим $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5\,dt$, и

$$\begin{aligned} J &= 6\int \frac{t^2\,dt}{1+t^2} = 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = \\ &= 6(t - \operatorname{arctg} t + C) = 6\left(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right) + C. \triangleleft \end{aligned}$$

П р и м е р 19. $\triangleright$ Аналогично, в интеграле $J = \displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ разность квадратов под корнем, первый из которых — константа, подсказывает тригонометрическую подстановку $x = a\sin t$. При этом мы считаем, что $x \in (-a, a)$, а $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, поэтому $t = \arcsin x$. Имеем:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, \quad dx = a\cos t\,dt.$$

При этом

$$J = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int \cos^2 t\,dt = a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C,$$

(см. пример 12). Подставляя в последнее выражение $t = \arcsin(x/a)$, получим

$$J = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

(здесь учтено, что $a^2\sin 2t = 2a\sin t \cdot a\cos t = 2x\sqrt{a^2 - x^2}$). $\triangleleft$

Умение находить удобные подстановки создается упражнениями. Ниже приведены отдельные частные замечания, облегчающие их поиск.

П р и м е р 20. $\triangleright$ Интегралы вида $\displaystyle\int g\left(x^2\right)x\,dx$, где $g(x)$ — удобная для интегрирования функция, берутся подстановкой $t = x^2$. Например,

$$\int e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Аналогично, интегралы вида $\displaystyle\int g\left(^3\right)x^2\,dx$ берутся подстановкой $t = x^2$, и т.д. $\triangleleft$

П р и м е р 21. $\triangleright$ $\int \left(\alpha x^2+\beta\right)^\mu x\,dx$, $(\mu\neq -1)$ — в этом интеграле можно было бы положить $t=x^2$, но проще сразу взять $u=\alpha x^2+\beta$, так как множитель $x\,dx$ лишь множителем отличается от $du=2\alpha x\,dx$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\int \left(\alpha x^2+\beta\right)^\mu x\,dx &= \frac{1}{2\alpha}\int u^\mu\,du=\frac{1}{2\alpha(\mu+1)}\,u^{\mu+1}+C=\\ &= \frac{1}{2\alpha(\mu+1)}\left(\alpha x^2+\beta\right)^{\mu+1}+C.\triangleleft\end{aligned}$$

П р и м е р 22. $\triangleright$Интегралы вида $\int g(\ln x)\frac{dx}{x}=\int g(\ln x)d\ln x$ берутся подстановкой $t=\ln x$. Например,

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx=\int \ln x\,d\ln x=\frac{1}{2}\ln^2 x+C.\triangleleft$$

П р и м е р 23. $\triangleright$ Интегралы вида

$$\int g(\sin x)\cos x\,dx,\quad \int g(\cos x)\sin x\,dx,\quad \int g(\operatorname{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x}\,,$$

берутся, соответственно, подстановками

$$t=\sin x,\quad t=\cos x,\quad t=\operatorname{tg} x.$$

Например,

$$\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}=\int \frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}\sin x+C.\triangleleft$$

П р и м е р 24. $\triangleright$Интегралы вида $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int \frac{d\,f(x)}{f(x)}$ (числитель представляет собой дифференциал знаменателя) сразу берутся подстановкой $t=f(x)$. Например,

1) $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}=\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\ln(x^2+1)+C.$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\,\cos x}=\int \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,\frac{dx}{\cos^2 x}=\int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}=\ln|\operatorname{tg} x|+C.\triangleleft$

При интегрировании выражений, содержащих двучлены вида a^2-x^2, x^2+a^2, x^2-a^2 обычно бывает выгодно заменить x тригонометрической или гиперболической функцией от новой переменной t, используя при этом соотношения

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1, \qquad 1+\operatorname{tg}^2 t=\sec^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}\,,$$
$$\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1, \qquad 1-\operatorname{th}^2 t=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\,.$$

П р и м е р 25. Рассмотрим интеграл $J=\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,.$

▷ Подстановка

$x=a\operatorname{tg}t,\ dx=\dfrac{a\,dt}{\cos^2 t},\ x^2+a^2=\dfrac{a^2}{\cos^2 t},\ t=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a},\ t\in(-\pi/2,\pi/2),$ приводит искомый интеграл к виду

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{a^3}\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cdot\cos t)+C= \\ &= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2}+C. \end{aligned}$$

(при подстановке $t=\operatorname{arctg}x$ необходимо выразить $\sin t$ и $\cos t$ через $\operatorname{tg}t=x/a$ — см. приложение А). ◁

П р и м е р 26. ▷

В интеграле $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ удобнее применить гиперболическую подстановку:

$$x=a\operatorname{ch}t, \quad dx=a\operatorname{sh}t\,dt, \quad \sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{sh}t.$$

Тогда
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int dt=t+C.$$

При переходе к переменной x учтем, что $\operatorname{Arch}u = \ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)$ (см. приложение А), так что

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\,\right]+C= \\ &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\,\right)+C', \end{aligned}$$

причем в постоянную C' включено слагаемое $-\ln a$. $\triangleleft$

Рассмотрим еще два примера, где подстановка не столь естественна, как в предыдущих, но зато быстро ведет к цели.

П р и м е р 27. Вычислить $J = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}, \quad (\alpha \neq 0)$.

$\triangleright$ Положим $\sqrt{x^2+\alpha} = t - x$ и примем t за новую переменную. Возводя последнее равенство в квадрат, получим: $x^2+\alpha = t^2-2tx+x^2$, откуда

$$x = \frac{t^2-\alpha}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+\alpha}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+\alpha} = \frac{t^2+\alpha}{2t}\,.$$

Подставляя эти равенства в подинтегральное выражение, получаем

$$J \;=\; \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\,\right)+C,$$

(сравните с предыдущим примером). $\triangleleft$

П р и м е р 28. Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}, \quad (\alpha < x < \beta)$.

Положим $x = \alpha\cos^2\varphi + \beta\sin^2\varphi$, $(0<\varphi<\pi/2)$, где φ — новая переменная; тогда

$$x-\alpha = (\beta-\alpha)\sin^2\varphi, \qquad \beta - x = (\beta-\alpha)\cos^2\varphi,$$
$$dx = 2(\beta-\alpha)\sin\varphi\,\cos\varphi\,d\varphi, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}\,.$$

Таким образом,

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = 2\int d\varphi = 2\varphi + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} + C. \triangleleft$$

3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные $u' = f'(x)$ и $v' = g'(x)$. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, $d(uv) = u\,dv + v\,du$, или

$u\,dv = d(uv) - v\,du$. Для выражения $d(uv)$ первообразной будет, очевидно, uv. Поэтому имеет место формула *интегрирования по частям*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \tag{2}$$

которая позволяет привести интегрирование выражения $u\,dv = uv'\,dx$ к интегрированию выражения $v\,du = vu'\,dx$.

П р и м е р 29. Пусть требуется найти $\int x\cos x\,dx$.

$\triangleright$ Положим $u = x$, $dv = \cos x\,dx$, так что $du = dx$, $v = \sin x$ (для интегрирования по частям достаточно представить $\cos x\,dx$ **хотя бы одним способом** в виде dv; поэтому нет необходимости писать наиболее общее выражение для v, включающее произвольную постоянную). По формуле (2),

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C. \triangleleft$$

Таким образом, интегрирование по частям позволило заменить сложную подинтегральную функцию $x\cos x$ на простую $\sin x$. При этом для получения v пришлось заодно проинтегрировать выражение $\cos x\,dx$, поэтому формула и называется: интегрирование по частям.

При применении формулы (2) необходимо стараться так разбить подинтегральное выражение, чтобы интегрирование дифференциала dv не представляло трудностей и переход к интегралу от $v\,du$ **в совокупности** приводил бы к упрощению подинтегрального выражения. Так, в приведенном примере, явно невыгодно было бы взять $x\,dx$ за dv, а $\cos x$ — за u.

Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например,

$$\int P_n(x) f(x)\,dx,$$

где $P_n(x)$ — полином степени n (n — натуральное), а $f(x)$ — любая из функций $\ln^m ax$, e^{ax}, $\sin^m ax$, $\cos^m ax$, $\mathrm{tg}^m\,ax$, $\mathrm{sh}^m\,ax$, $\mathrm{ch}^m\,ax$, $\mathrm{th}^m\,ax$,

$\arcsin^m ax$, $\arccos^m ax$, $\mathrm{arctg}^m\, ax$, $\mathrm{Arch}^m\, ax$, $\mathrm{Arsh}^m\, ax$, $\mathrm{Arth}^m\, ax$, где $m \ge 1$ – целое, $a \ne 0$ – вещественное, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Часто для получения окончательного выражения необходимо применять интегрирование по частям неоднократно.

П р и м е р 30. Вычислить $J = \int x^2 \sin x\, dx$.

$$\begin{aligned} \triangleright J &= \int x^2\, d(-\cos x) = -x^2 \cos x - \int (-\cos x)\, d(x^2) = \\ &= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x\, d\sin x = \\ &= -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x\, dx\right) = \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Иногда использование формулы (2) приводит к уравнению относительно искомого интеграла.

П р и м е р 31. Вычислить $J_n = \int e^{ax} \cos(bx)\, dx \quad (a \ne 0,\ b \ne 0)$.

$\triangleright$ Выберем сначала

$$u = \cos(bx), \quad dv = e^{ax}\, dx;$$

тогда

$$du = -b \sin(bx)\, dx, \quad v = \frac{e^{ax}}{a},$$

и интеграл преобразуется к виду

$$J = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx)\, dx.$$

Применим формулу интегрирования по частям еще раз, положив

$$u = \sin(bx), \quad dv = e^{ax}\, dx, \quad du = b \cos(bx)\, dx, \quad v = \frac{e^{ax}}{a}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a}\left[\frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx)\, dx\right] = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b^2}{a^2} J. \end{aligned}$$

После двукратного применения формулы интегрирования по частям искомый интеграл оказался выраженным через самого себя. Разрешая полученное равенство относительно J, получим

$$J = \int e^{ax} \cos(bx)\, dx = \frac{b \sin(bx) + a \cos(bx)}{a^2 + b^2}\, e^{ax} + C. \triangleleft$$

В ряде случаев применение формулы (2) приводит к рекуррентным соотношениям.

П р и м е р 32. Вычислить $J_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$

$\triangleright$ Выберем

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx,$$

тогда

$$du = -\frac{2nx\, dx}{(x^2 + a^2)^{(n+1)}}, \quad v = x,$$

и по формуле (2)

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2\, dx}{(x^2 + a^2)^{(n+1)}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot \tilde{J}.$$

Последний интеграл преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \int \frac{x^2\, dx}{(x^2 + a^2)^{(n+1)}} = \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{(n+1)}}\, dx = \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{(n+1)}} = J_n - a^2 J_{n+1}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, придем к соотношению

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

откуда

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{a^2}\,J_n. \qquad (3)$$

Полученная формула сводит вычисление интеграла J_{n+1} к вычислению интеграла J_n с показателем степени в подинтегральном выражении на единицу меньшим. Зная интеграл $J_1 = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C_1$, найдем по формуле (3) при $n = 1$,

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C_2,$$

где $C_2 = \dfrac{1}{2a^2}\,C_1$. Полагая в формуле (3) $n = 2$, получим

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{4a^2}\,\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2} + \frac{3}{4a^2}J_2 = \\ &= \frac{1}{4a^2}\,\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2} + \frac{3}{8a^4}\,\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C_3, \end{aligned}$$

и т.д. Таким образом, можно вычислить интеграл J_n для любого показателя n. $\triangleleft$

4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Дробно-рациональной функцией называется отношение двух полиномов $P_n(x)/Q_m(x)$, где

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n, \quad Q_m(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m,$$

n и m — натуральные числа.

При $n \geq m$ в дробно-рациональной функции можно выделить целую часть

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n_1}(x) + \frac{P_{n_2}(x)}{Q_m(x)}\,,$$

где $n_2 < m$, так что достаточно рассмотреть случай правильной дроби ($n < m$).

Элементарными дробями называют дроби следующего вида

$$\text{I.}\quad \frac{A}{x-a}\,; \qquad\qquad \text{II.}\quad \frac{A}{(x-a)^k}\,, \quad (k=2,3,\ldots);$$

$$\text{III.}\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,; \qquad \text{IV.}\quad \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^l}\,, \quad (l=2,3,\ldots);$$

где A, M, N, a, p, q — вещественные числа, и, кроме того, $p^2/4 - q < 0$, так что трехчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней.

Дроби вида I и II интегрируются легко:

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{I}} &= A\int \frac{dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C, \\ J_{\mathrm{II}} &= A\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

Интегрирование дробей вида III и IV облегчается следующей подстановкой. Выделим из трехчлена x^2+px+q полный квадрат двучлена:

$$x^2+px+q = \bigl(x+p/2\bigr)^2 + \bigl(q-p^2/4\bigr)\,.$$

Так как $q - p^2/4 > 0$, положим $q-p^2/4 = a^2$, считая, например, для определенности $a = +\sqrt{q-p^2/4}\,$.

Выберем подстановку $x+p/2 = t$, $dx = dt$, так что

$$x^2+px+q = t^2+a^2, \quad Mx+N = Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right).$$

В случае III будем иметь

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{III}} &= \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{t^2+a^2}\,dt = \\ &= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \\ &= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C = \\ &= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C. \end{aligned}$$

Для случая IV та же подстановка дает

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{IV}} &= \int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}\,dx = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{\left(t^2+a^2\right)^m}\,dt = \\ &= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}\,. \qquad (4) \end{aligned}$$

Первый из интегралов в правой части (4) легко вычисляется подстановкой $t^2+a^2=u, \quad 2t\,dt=du$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} &= \int \frac{du}{u^m} = -\frac{1}{(m-1)}\,\frac{1}{u^{m-1}} + C = \\ &= -\frac{1}{(m-1)}\,\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} + C. \qquad (5) \end{aligned}$$

Второй из интегралов в правой части (4) при любом m может быть вычислен по рекуррентной формуле (3). Остается лишь подставить в результат $t=(2x+p)/2$, чтобы вернуться к переменной x.

При интегрировании дробно-рациональной функции фундаментальное значение имеет следующая теорема из области алгебры:

Каждая правильная дробь $P_n(x)/Q_m(x)$ может быть представлена в виде суммы конечного числа элементарных дробей.

Это разложение правильной дроби на элементарные тесно связано с разложением ее знаменателя $Q_m(x)$ на простые множители. Известно, что каждый целый полином с вещественными коэффициентами единственным образом разлагается на вещественные множители вида $(x-a)$ и $\left(x^2+px+q\right)$, причем квадратичный трехчлен не имеет вещественных корней. Объединяя одинаковые множители, и полагая, для простоты, старший коэффициент полинома $Q_m(x)$ равным единице, запишем разложение этого полинома в виде

$$\begin{aligned} Q_m(x) = \left(x-a_1\right)^{k_1} \ldots \left(x-a_s\right)^{k_s} \cdot \\ \cdot \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1} \ldots \left(x^2+p_rx+q_r\right)^{m_r}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $k_1,\ldots k_s$, $m_1,\ldots m_r$ — натуральные числа.

Согласно теореме, каждому множителю вида $(x-a_i)^{k_i}$ в разложении полинома $Q_m(x)$ в форме (6) соответствует сумма k_i элементарных дробей вида

$$\frac{A_1^{(i)}}{x-a_i}+\frac{A_2^{(i)}}{(x-a_i)^2}+\ldots+\frac{A_{k_i}^{(i)}}{(x-a_i)^{k_i}}, \tag{7}$$

в разложении дроби $P_n(x)/Q_m(x)$, а множителю вида $\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{m_j}$ — сумма m_j элементарных дробей вида

$$\frac{M_1^{(j)}x+N_1^{(j)}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{M_2^{(j)}x+N_2^{(j)}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^2}+\ldots+\frac{M_{m_j}^{(j)}x+N_{m_j}^{(j)}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{m_j}}\,. \tag{8}$$

Таким образом, зная разложение (6), мы знаем знаменатели тех элементарных дробей, на которые разлагается дробь $P_n(x)/Q_m(x)$. Для определения числителей этих дробей, т.е. коэффициентов

$$A_\alpha^{(i)},\quad \alpha=1,2,\ldots k_i,\quad i=1,2,\ldots,s,$$

и

$$M_\beta^{(j)},\ N_\beta^{j},\quad \beta=1,2,\ldots m_j,\quad j=1,2,\ldots,r,$$

применяют *метод неопределенных коэффициентов*, который состоит в следующем.

Зная вид разложения $P_n(x)/Q_m(x)$ на элементарные дроби в соответствии с формулами (7), (8), записывают это разложение с буквенными коэффициентами в числителях. Общим знаменателем всех элементарных дробей будет, очевидно, полином $Q_m(x)$; складывая эти элементарные дроби, получим правильную дробь, в числителе которой будет полином с коэффициентами в виде комбинации неизвестных множителей при элементарных дробях. Отбрасывая знаменатель $Q_m(x)$ слева и справа, приходим к равенству двух полиномов степени $(m-1)$. Приводя подобные члены в полиноме с буквенными коэффициентами, и приравнивая выражения при одинаковых степенях численным коэффициентам полинома $P_n(x)$, получим систему линейных уравнений, из которой определятся значения неизвестных коэффициентов. Возможность разложения дроби $P_n(x)/Q_m(x)$ на элементарные дроби — строго доказанный факт, поэтому полученная система никогда не будет противоречивой, и всегда — определенной.

Поясним сказанное примером.

П р и м е р 33. Вычислить интеграл $J = \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2} dx.$

$\triangleright$ Согласно теореме, для дроби $\frac{P_2(x)}{Q_5(x)} = \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}$ имеется разложение

$$\frac{P_2(x)}{Q_5(x)} = \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{\left(x^2+1\right)^2}\,.$$

Приводя сумму справа к общему знаменателю, и приравнивая числители получившихся дробей, придем к тождеству

$$2x^2+2x+13 = A\left(x^2+1\right)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему из пяти уравнений

$$\begin{array}{c|rcl} x^4 & 0 & = & A + B\ , \\ x^3 & 0 & = & -2B + C, \\ x^2 & 2 & = & 2A + B - 2C + D, \\ x^1 & 2 & = & -2B + C - 2D + E, \\ x^0 & 13 & = & A - 2C - 2E, \end{array}$$

откуда $A = 1,\ B = -1,\ C = -2,\ D = -3,\ E = -4$. Таким образом,

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{\left(x^2+1\right)^2}\,.$$

Используя приведенные выше формулы для интегралов от элементарных дробей, получим

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}\, dx - \int \frac{3x+4}{\left(x^2+1\right)^2}\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4 \operatorname{arctg} x + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Нахождение коэффициентов разложения дробно-рациональной функции, соответствующих множителям вида $(x-a_i)$ в разложении полинома $Q_m(x)$, облегчается следующим приемом. Приравняв числители двух дробно-рациональных функций — заданной и с неопределенными коэффициентами,— и, *не приводя в последней подобные члены*, подставим в них значения $x = a_i$. При этом в равенстве слева получим некоторое число, а справа останется лишь одно слагаемое с неизвестным коэффициентом, соответствующим дроби вида $\dfrac{1}{x-a_i}$ в разложении $P_n(x)/Q_m(x)$.

П р и м е р 34. ▷ Разложение дроби $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}$ имеет вид

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x-3}\,.$$

Из этого равенства элементарных дробей следует равенство многочленов

$$x = A_1(x+2)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x+1)(x+2).$$

Подставляя последовательно в равенство значения $x = -1$, $x = -2$, $x = 3$, найдем

$$-1 = -4A_1, \quad -2 = 5A_2, \quad 3 = 20A_3,$$

или

$$A_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = -\frac{2}{5}, \quad A_3 = \frac{3}{20}\,.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} \;=\; \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} - \frac{2}{5}\,\frac{1}{x+2} + \frac{3}{20}\,\frac{1}{x-3}\,. \triangleleft$$

В случае кратных вещественных корней нахождение коэффициентов разложения дробно-рациональной функции на элементарные дроби облегчает дифференцирование полиномов.

П р и м е р 35. Рассмотрим $J = \displaystyle\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,.$

$\triangleright$ Разложим знаменатель рациональной дроби на множители:

$$\begin{aligned}
x^5+x^4-x^3-x^2 &= x^2(x^3+x^2-x-1)= \\
&= x^2(x+1)(x^2-1)=x^2(x+1)^2(x-1).
\end{aligned}$$

Из этого разложения следует, что

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}\,.$$

Из равенства дробей следует равенство многочленов

$$\begin{aligned}
x^4+1 &= Ax(x-1)(x+1)^2+B(x-1)(x+1)^2+ \\
&+Cx^2(x+1)^2+Dx^2(x^2-1)+Ex^2(x-1). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Полагая в равенстве (9) поочередно $x=0$, $x=1$, $x=-1$, получим $B=-1$, $C=1/2$, $E=-1$.

Чтобы найти коэффициент А, продифференцируем равенство (9):

$$\begin{aligned}
4x^3 &= A(x+1)(4x^2-x-1)+B(x+1)(3x-1)+ \\
&+2Cx(x+1)(2x+1)+2Dx(2x^2-1)+Ex(3x-2),
\end{aligned}$$

и положим в последнем соотношении $x=0$. Получим:

$$0=-A-B, \quad \text{или} \quad A=1.$$

Аналогично, подставляя $x=-1$, получаем $-4=-2D+5E$, откуда находим $D=-1/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
J &= \int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}= \\
&= \ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C= \\
&= \frac{2x+1}{x(x+1)}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)x^2}{x+1}\right|\,. \ \triangleleft
\end{aligned}$$

Если знаменатель правильной дроби $P_n(x)/Q_m(x)$ имеет кратные корни, особенно комплексные, целесообразно воспользоваться следующей *формулой Остроградского*:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = \frac{P_{n_1}(x)}{Q_{m_1}(x)} + \int \frac{P_{n_2}(x)}{Q_{m_2}(x)}\,dx, \tag{10}$$

где $Q_{m_2}(x) = (x-a_1)\dots(x-a_s)(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_rx+q_r)$ — многочлен, все корни (вещественные и комплексные) которого простые и совпадают с корнями полинома $Q_m(x)$, полином $Q_{m_1}(x) = Q_m(x)/Q_{m_2}(x)$, а $P_{n_1}(x)$ и $P_{n_2}(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых меньше, чем степени, соответственно,полиномов $Q_{m_1}(x)$ и $Q_{m_2}(x)$. Коэффициенты полиномов $P_{n_1}(x)$ и $P_{n_2}(x)$ находят после дифференцирования равенства (10), приведения правой части к общему знаменателю и приравнивания числителей получившихся выражений.

Первое слагаемое в формуле (10) называют *рациональной частью,* а второе — *трансцендентной частью* интеграла $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$. Замечательно то, что метод Остроградского позволяет найти рациональную часть интеграла от правильной дробно-рациональной функции чисто алгебраическим путем, т.е. не прибегая к интегрированию каких-либо функций.

П р и м е р 36. Выделить рациональную часть интеграла

$$J = \int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2}\,dx.$$

$\triangleright$ Имеем: $Q_1 = Q_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1$, поэтому

$$J = \frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1} + \int \frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1}\,dx.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\begin{aligned} J' &= \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2} = \\ &= \left(\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right)' + \frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1}\,. \end{aligned}$$

После дифференцирования дроби в правой части, приведения полученного выражения к общему знаменателю и приравнивания числителей, получим

$$4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8 = (2ax + b)(x^3 + x^2 + x + 1) - \\ - (ax^2 + bx + c)(3x^2 + 2x + 1) + (dx^2 + ex + f)(x^3 + x^2 + x + 1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях этого равенства, получим систему уравнений, из которых и определятся неизвестные $a, b, \ldots, f$:

$$\begin{array}{c|rcl} x^5 & 0 & = & d \text{ (в последующем } d \text{ в расчет не берем),} \\ x^4 & 4 & = & -a + e\ , \\ x^3 & 4 & = & -2b + e + f, \\ x^2 & 16 & = & a - b - 3c + e + f, \\ x^1 & 12 & = & 2a - 2c + e + f, \\ x^0 & 8 & = & b - c + f. \end{array}$$

Из этой системы следует, что $a = -1$, $b = 1$, $c = -4$, $d = 0$, $e = 3$, $f = 3$, и искомый интеграл

$$J = -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3\int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3 \operatorname{arctg} x + C. \triangleleft$$

* * *

Выше описаны методы интегрирования дробно-рациональных функций. В дальнейшем основным приемом интегрирования различных классов функций будет разыскивание таких подстановок $t = \omega(x)$, которые привели бы подинтегральное выражение к рациональному виду. Всюду ниже выражение $R[x, u(x), \ldots]$ будет означать рациональную функцию своих аргументов, т.е.

$$R[x, u(x), \ldots] = \frac{P[x, u(x), \ldots]}{Q[x, u(x), \ldots]},$$

где $P[x, u(x), \ldots]$, $Q[x, u(x), \ldots]$ — полиномы от переменных $x, u(x), \ldots$, $u(x)$ — заданная функция переменной x.

5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ

Интегрирование выражений вида $\int R\left[x, \left(\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right] dx$

В интеграле вида

$$J = \int R\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}\right] dx, \tag{11}$$

положим

$$t = \omega(x) = \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m}, \tag{12}$$

откуда

$$t^m = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}. \tag{13}$$

Интеграл примет вид

$$J = \int R[\varphi(t), t]\varphi'(t)\, dt. \tag{14}$$

Так как R, φ, φ' — рациональные функции, то выражение (14) есть интеграл от рациональной функции. Вычислив его по правилам, изложенным выше, к переменной x вернемся, подставив $t = \omega(x)$.

К интегралам вида (14) сводятся и более общие интегралы

$$\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{r}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{s}, \ldots\right], dx$$

с рациональными показателями $r, s, \ldots$. Для приведения этого интеграла к рациональному виду используется подстановка (12), в которой за m принимают общий знаменатель дробей $r, s, \ldots$.

П р и м е р 37. Вычислить $J = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\, dx.$

$\triangleright$ Здесь дробно-линейная функция $(\alpha x+\beta)/(\gamma x+\delta)$ свелась просто к линейной функции, $x+1$. Полагаем

$$t = \sqrt{x+1}, \quad x = t^2 - 1, \quad dx = 2t\, dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
J &= 2\int \frac{t+2}{t^4-t}\,t\,dt = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}\,dt = \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)dt = \\
&= \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \\
&= \ln\frac{x-2\sqrt{x+1}+2}{x+\sqrt{x+1}+2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C. \triangleleft
\end{aligned}$$

П р и м е р 38. Вычислить $J = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)\,(2-x)^5}}$.

$\triangleright$ Интеграл преобразуется к виду (11) с помощью элементарного преобразования подинтегральной функции:

$$J = \int \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{1/3} \frac{dx}{(2-x)^2}\,.$$

Полагаем

$$t = \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{1/3}, \qquad x = \frac{1-t^3}{1+t^3},$$

$$dx = -\frac{12\,t^2\,dt}{(1+t^3)^2}, \qquad \frac{1}{2-x} = \frac{1+t^3}{4t^3}\,.$$

Тогда

$$J = -12\int \frac{\left(t^3+1\right)^2 t^3\,dt}{16t^6\left(t^3+1\right)^2} = -\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2/3} + C. \triangleleft$$

Интегрирование выражений вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx, \quad a \neq 0,\ b^2-4ac \neq 0, \qquad (15)$$

могут быть сведены к интегралам от рациональных функций с помощью одной из следующих **подстановок Эйлера**:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}\,x$**, в случае, если** $a > 0$**.**

Пусть, например, выбрана подстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x.$$

Возводя это равенство в квадрат, получим, что $bx+c=t^2-2\sqrt{a}\,tx$, так что

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \qquad dx=2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}.$$

"Изюминка" эйлеровой подстановки заключается в том, что для определения x получается уравнение первой степени, так что x, а вместе с ним и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ выражаются рационально через t. При подстановке полученных выражений в (15) получим интеграл от рациональной функции. Для возврата к переменной x в полученном результате нужно положить $t=\sqrt{ax^2+bx+c}\mp\sqrt{a}\,x$.

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$**, в случае, если** $c>0$**.**

Поступая аналогично описанному выше , получим (при выборе в подстановке знака "+"):

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}, \qquad t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x},$$

$$\begin{aligned} dx &= 2\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}\,dt, \\ \sqrt{ax^2+bx+c} &= \frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}. \end{aligned}$$

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t(x-\lambda)$ **или** $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t(x-\mu)$**, в случае, если квадратный трехчлен имеет различные вещественные корни** λ **и** μ**:**

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu);$$

знаки в подстановке можно выбрать любые.

Пусть выбрана подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$. Возводя это равенство в квадрат и сокращая на $(x-\lambda)$, получим уравнение первой степени:

$$a(x-\mu)=t^2(x-\lambda),$$

так что

$$x = \frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}, \qquad dx = 2\frac{a(\mu - \lambda)t}{\left(t^2 - a\right)^2}\, dt,$$

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(x - \lambda)}, \qquad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a}.$$

П р и м е р 39. Рассмотрим $J = \displaystyle\int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{x\sqrt{1 + x + x^2}}\, dx.$

▷ Применим вторую подстановку Эйлера. Положим

$$\sqrt{1 + x + x^2} = tx + 1,$$

и возведем это равенство в квадрат; получим

$$1 + x + x^2 = t^2x^2 + 2tx + 1,$$

так что

$$x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}, \qquad dx = 2\,\frac{1 - t + t^2}{\left(1 - t^2\right)^2}\, dt,$$

$$t = \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}, \qquad \sqrt{1 + x + x^2} = \frac{1 - t + t^2}{1 - t^2}.$$

Подставляя эти выражения в искомый интеграл, получим

$$J = \int \frac{-2t\, dt}{1 - t^2} = \ln\left|1 - t^2\right| + C = \ln\left|\frac{2\sqrt{1 + x + x^2} - 2 - x}{x^2}\right| + C. ◁$$

Заметим, что первая подстановка Эйлера фактически применена в примере 27 к вычислению интеграла $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

П р и м е р 40. Табличный интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ известен из элементарных соображений, но для упражнения применим к нему подстановки Эйлера.

▷ Воспользуемся третьей подстановкой

$$\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x);$$

тогда

$$x = a\,\frac{t^2-1}{t^2+1}\,, \quad dx = \frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}\,, \quad \sqrt{a^2-x^2} = \frac{2at}{t^2+1}\,,$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

Так как имеет место тождество

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \arcsin\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2}, \quad (-a<x<a),$$

то этот результат лишь формой разнится от известного нам. ◁

Приведенный пример показывает, что при интегрировании необходимо иметь в виду возможность для интеграла получаться в разных формах, в зависимости от применяемого для его вычисления метода. Поэтому **в сомнительных случаях результат интегрирования следует обязательно проверять дифференцированием.**

Пример 41. ▷ Если к тому же интегралу применить вторую подстановку $\sqrt{a^2-x^2} = xt-a$, то, поступая аналогично предыдущему, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\,2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \;2\operatorname{arctg} t + C = -\,2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

Здесь имеет место другое обстоятельство: этот результат годится отдельно для промежутка $(-a,0)$ и $(0,a)$, ибо в точке $x=0$ выражение

$$-\,2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

лишено смысла, так как

$$\lim_{x\to 0-}\left(-\,2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) \;=\; \pi,$$

$$\lim_{x\to 0+}\left(-\,2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) \;=\; -\pi.$$

Выбирая для упомянутых промежутков *различные* значения постоянной C так, чтобы второе из них было на 2π больше первого, можно составить функцию, непрерывную на всем промежутке $(-a, a)$, если принять за ее значение при $x = 0$ общий предел слева и справа.

И на этот раз мы получили прежний результат лишь в другой форме, ибо имеют место тождества

$$- 2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} - \pi & \text{для} \quad 0 < x < a, \\[2ex] \arcsin\dfrac{x}{a} + \pi & \text{для} \quad -a < x < 0. \triangleleft \end{cases}$$

Подстановки Эйлера часто приводят к довольно сложным интегралам от рациональных функций. В простых случаях целесообразно воспользоваться приемами, приведенными ниже.

Интегрирование выражений вида $\displaystyle\int\frac{P_n(x)\,dx}{Q_m(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

В интегралах вида

$$\int\frac{P_n(x)\,dx}{Q_m(x)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены, необходимо разложить дробно-рациональную функцию $P_n(x)/Q_m(x)$ на элементарные дроби. При этом получим интегралы следующего вида

1) $\displaystyle\int\frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

3) $\displaystyle\int\frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad p^2-4q<0.$

Методы интегрирования этих выражений рассмотрены ниже.

Интегрирование выражений вида $\int P_n(x)\left(ax^2+bx+c\right)^{\pm 1/2} dx$

Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n, вычисляются по формуле

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \\ = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,. \quad (16)$$

Здесь λ — число, $P_{n-1}(x)$ — полином степени $n-1$. Коэффициенты полинома $P_{n-1}(x)$ и число λ считаются неизвестными и определяются после дифференцирования равенства (16), приведения правой части к общему знаменателю и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях в числителях получившихся дробей.

Так как

$$P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{P_n(x)(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

то описанный метод применим и к вычислению интегралов вида

$$\int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

П р и м е р 42. Вычислить $J = \int \frac{x^2+3x+5}{\sqrt{x^2-2x+10}}\,dx$.

$\triangleright$ По формуле (16) имеем

$$J = (Ax+B)\sqrt{x^2-2x+10} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}\,,$$

где A, B и λ — неизвестные пока коэффициенты. Дифференцируя обе части равенства, находим

$$\frac{x^2+3x+5}{\sqrt{x^2-2x+10}} = \\ = A\sqrt{x^2-2x+10} + \frac{(Ax+B)(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+10}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+10}}\,.$$

Приводя выражение справа к общему знаменателю и приравнивая числители, получаем

$$x^2+3x+5=A(x^2-2x+10)+(Ax+B)(x-1)+\lambda,$$

откуда

$$1=2A,\quad 3=-3A+B,\quad 5=10A-B+\lambda,$$

или

$$A=\frac{1}{2}\,,\quad B=\frac{9}{2}\,,\quad \lambda=\frac{9}{2}\,.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\,(x+9)\sqrt{x^2-2x+10}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+9}}= \\ &= \frac{x+9}{2}\sqrt{x^2-2x+10}+\frac{9}{2}\ln\Big(x-1+\sqrt{x^2-2x+10}\Big)+C.\triangleleft \end{aligned}$$

Интегрирование выражений вида $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралы вида $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $n>0$ — целое число, приводятся к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x-\alpha=\dfrac{1}{t}$.

П р и м е р 43. Вычислить $J=\displaystyle\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+4}}$.

$\triangleright$ Применяем подстановку

$$x-3=\frac{1}{t}\,,\quad dx=-\frac{dt}{t^2};$$

тогда

$$\begin{aligned} J=-\int\frac{dt}{\sqrt{13t^2+6t+1}}&= \\ &=-\frac{1}{\sqrt{13}}\int\frac{d\left(\sqrt{13}\,t+3/\sqrt{13}\,\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{13}\,t+3/\sqrt{13}\,\right)^2+4/13}}= \\ &=-\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\sqrt{13}\,t+\frac{3}{\sqrt{13}}+\sqrt{13t^2+6t+1}\right|+C= \\ &=-\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{\sqrt{13}}{x-3}+\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{\sqrt{x^2+4}}{x-3}\right|+C.\triangleleft \end{aligned}$$

Прежде, чем перейти к методам вычисления интегралов вида

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}\,,$$

рассмотрим два интеграла частного вида.

Интегрирование выражений вида $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{(2m+1)/2}}$

Для вычисления интегралов вида

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{(2m+1)/2}} = \\ = \int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^m \left(ax^2+bx+c\right)^{1/2}}\,, \quad (17)$$

где $m>0$ — целое число, применяется *подстановка Абеля*

$$t = \left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\,. \quad (18)$$

Возводя это равенство в квадрат, и умножая на $4(ax^2+bx+c)$, получим

$$4t^2(ax^2+bx+c) = (4a^2x^2+4abx+b^2).$$

Вычитая из обеих частей этого равенства выражение $4a(ax^2+bx+c)$, получим, что

$$4(a-t^2)(ax^2+bx+c) = 4ac-b^2,$$

и, таким образом,

$$\left(ax^2+bx+c\right)^m = \left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^m \frac{1}{\left(a-t^2\right)^m}\,. \quad (19)$$

Из (18) следует, что

$$t\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{2ax+b}{2}\,.$$

Дифференцируя это равенство, найдем:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\;dt + t\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'dx = \\ = \sqrt{ax^2+bx+c}\;dt + t^2\,dx = a\,dx,$$

так что

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{dt}{a-t^2}\,. \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{(2m+1)/2}} = \left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^m \int \left(a-t^2\right)^{m-1}\,dt,$$

и интеграл (17) привелся к интегралу от полинома.

П р и м е р 44. Вычислить $J = \displaystyle\int \frac{dx}{(2x^2-x+2)^{7/2}}$.

$\triangleright$ Подстановка Абеля

$$t = \left(\sqrt{2x^2-x+2}\right)' = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}$$

дает

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}} &= \frac{dt}{2-t^2}, \\ \left(2x^2-x+2\right)^3 &= \left(\frac{15}{4}\right)^3 \frac{1}{\left(2-t^2\right)^3} = \frac{3375}{64}\,\frac{1}{\left(2-t^2\right)^3}\,. \end{aligned}$$

Искомый интеграл преобразуется к виду

$$J = \frac{64}{3375} \int \left(2-t^2\right)^2\,dt.$$

Интегрируя его и возвращаясь к переменной x, получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{64}{3375}\left[2\,\frac{4x-1}{(2x^2-x+2)^{1/2}} - \frac{1}{6}\,\frac{(4x-1)^3}{(2x^2-x+2)^{3/2}} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{160}\,\frac{(4x-1)^5}{(2x^2-x+2)^{5/2}}\right]. \triangleleft \end{aligned}$$

Интегрирование выражений вида $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+\lambda^2)^n\,\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$

В интегралах вида $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+\lambda^2)^n\,\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$, где $n>0$ — целое число, удобно использовать подстановку

$$\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{x^2}} = t. \tag{21}$$

Эффективной также оказывается подстановка Абеля

$$t=\left(\sqrt{\alpha x^2+\beta}\right)'=\frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}\,. \tag{22}$$

В силу (20),

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=\frac{dt}{\alpha-t^2};$$

кроме того,

$$x^2+\lambda=\frac{\left(\beta-\alpha\lambda^2\right)t^2+\lambda^2\alpha^2}{\alpha\left(\alpha-t^2\right)}\,.$$

Поэтому

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+\lambda^2\right)^k\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=\alpha^k\int\frac{\left(\alpha-t^2\right)^{k-1}dt}{[(\beta-\alpha\lambda^2)t^2+\lambda^2\alpha^2]^k}\,,$$

и искомый интеграл привелся к интегралу от рациональной функции.

П р и м е р 45. Найти $J=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}}$.

$\triangleright$ а) Применим сначала подстановку

$$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=v,\quad \frac{1}{x^2}=1-v^2,\quad \frac{dx}{x^3}=v\,dv;$$

тогда

$$\begin{aligned} J &= \int\frac{dv}{3-2v^2}=\frac{1}{2\sqrt6}\ln\left|\frac{\sqrt3+v\sqrt2}{\sqrt3-v\sqrt2}\right|+C= \\ &= \frac{1}{2\sqrt6}\ln\left|\frac{x\sqrt3+\sqrt{2x^2-2}}{x\sqrt3-\sqrt{2x^2-2}}\right|+C. \end{aligned}$$

б) Подстановка Абеля приводит к следующему результату:

$$t=\left(\sqrt{x^2-1}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,,\quad \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{dt}{1-t^2}\,,$$

$$x^2+2=\frac{2-3t^2}{1-t^2}\,,$$

и

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dt}{2-3t^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+t\sqrt{3}}{\sqrt{2}-t\sqrt{3}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2x^2-2}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2x^2-2}} \right| + C. \end{aligned}$$

Таким образом, обе подстановки эквивалентны, как с точки зрения тождественности окончательных результатов, так и по объему вычислительной работы. ◁

Интегрирование выражений вида $\displaystyle\int \frac{(Mx+N)\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$

При вычислении интегралов вида

$$J = \int \frac{(Mx+N)\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{23}$$

выделяют два случая.

1) $\left(ax^2+bx+c\right) = a\left(x^2+px+q\right)$ — трехчлены в знаменателе совпадают или отличаются лишь множителем. Тогда искомый интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}} = \frac{M}{2\sqrt{a}} \int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}} + \\ &+ \frac{2N-Mp}{2\sqrt{a}} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Первый интеграл сразу берется подстановкой $t = x^2+px+q$, ко второму применяют подстановку Абеля (18).

2) В общем случае, когда $\left(ax^2+bx+c\right) \neq a\left(x^2+px+q\right)$, к цели ведет подстановка, уничтожающая члены в первой степени в обоих трехчленах одновременно. Этот случай также разбивается на два варианта.

2а) При $p \neq b/a$ применяется подстановка
$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}, \tag{25}$$
где коэффициенты μ и ν подбираются так, чтобы удовлетворить указанному условию. Подставляя (25) в трехчлены, входящие в подынтегральное выражение, получим
$$\begin{aligned} x^2 + px + q \;&=\; \frac{(\mu^2 + p\mu + q)t^2}{(t+1)^2} + \\ &\quad + \frac{[2\mu\nu + p(\mu+\nu) + 2q]t + (\nu^2 + p\nu + q)}{(t+1)^2}, \\ ax^2 + bx + c \;&=\; \frac{(a\mu^2 + b\mu + c)t^2}{(t+1)^2} + \\ &\quad + \frac{[2a\mu\nu + b(\mu+\nu) + 2c]t + (a\nu^2 + b\nu + c)}{(t+1)^2}. \end{aligned}$$

Значения μ и ν определяются из условий равенства нулю коэффициентов при первых степенях t:
$$2\mu\nu + p(\mu+\nu) + 2q = 0, \quad 2a\mu\nu + b(\mu+\nu) + 2c = 0.$$
или
$$(\mu+\nu) = -2\,\frac{aq - c}{ap - b}, \quad \mu\nu = \frac{bq - cp}{ap - b}.$$
Согласно теореме Виета, μ и ν есть корни квадратного уравнения
$$(ap - b)z^2 + 2(aq - c)z + (bq - cp) = 0. \tag{26}$$
Можно доказать, что корни уравнения (26) вещественны и различны, и, таким образом, подстановка (25) определена.

В результате подстановки интеграл (23) преобразуется к виду
$$J = \int \frac{P(t)\,dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}},$$
где $P(t)$ — полином степени $2m - 1$ и $\lambda > 0$. При $m > 1$ правильную дробь $P(t)/\left(t^2 + \lambda\right)^m$ разложим на элементарные, в результате чего придем к сумме интегралов вида
$$J_k = \int \frac{(A_k t + B_k)\,dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{27}$$

2b) Если $p = b/a$, то линейная замена $x = t - p/2$ сразу приводит интеграл (23) к интегралу вида (27).

Полученный интеграл разлагается на два:

$$J_k = \frac{A_k}{\alpha} \int \frac{\alpha t\, dt}{(t^2+\lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} + B_k \int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}}\,.$$

Первый из них легко берется подстановкой $u = \sqrt{\alpha t^2 + \beta}$. Ко второму применяются подстановки (21) или (22).

П р и м е р 46. Вычислить $J = \displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

$\triangleright$ Дробно-линейная подстановка

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t+1},$$

дает

$$x^2 \pm x + 1 = \frac{(\mu^2 \pm \mu + 1)t^2 + [2\mu\nu \pm (\mu+\nu) + 2]t + (\nu^2 \pm \nu + 1)}{(t+1)^2}\,.$$

Требования

$$2\mu\nu \pm (\mu+\nu) + 2 = 0,$$

или

$$\mu + \nu = 0, \quad \mu\nu = -1,$$

удовлетворяются, например, при $\mu = 1$, $\nu = -1$. Имеем

$$x = \frac{t-1}{t+1}, \qquad dx = \frac{2\,dt}{(t+1)^2}\,, \quad x + 3 = \frac{4t+2}{t+1}\,,$$

$$x^2 - x + 1 \;=\; \frac{t^2+3}{(t+1)^2}\,, \quad \sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3t^2+1}}{t+1}\,,$$

если, для определенности, считать $t + 1 > 0$ (т.е. $x < 1$). Таким образом,

$$J = \int \frac{(8t+4)\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} =$$

$$= 8 \int \frac{t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} + 4 \int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}\,.$$

Первый интеграл легко вычисляется подстановкой $u = \sqrt{3t^2+1}$ и оказывается равным $\sqrt{8}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{3t^2+1}{8}} + C'$. Ко второму применим подстановку Абеля $u = \dfrac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}$, которая приведет его к виду

$$J_2 = 12\int \frac{du}{27-8u^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u}\right| + C''.$$

Остается лишь вернуться к переменной x:

$$J = \sqrt{8}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2}(x+1)}\right| + C. \ \triangleleft$$

Интегрирование выражений вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$ с помощью тригонометрических и гиперболических подстановок

При вычислении интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx,$$

иногда оказываются удобными тригонометрическая или гиперболическая подстановки.

Выделим в подкоренном выражении, входящем в интеграл, полный квадрат и применим подстановку $t = x + b/(2a)$. В результате получим: $ax^2+bx+c = \pm p^2t^2 \pm q^2$, а интеграл приведется к одному из следующих интегралов

$$\text{(I)} \quad \int R\left(t, \sqrt{p^2t^2+q^2}\right)\,dt\,;$$

$$\text{(II)} \quad \int R\left(t, \sqrt{p^2t^2-q^2}\right)\,dt\,;$$

$$\text{(III)} \quad \int R\left(t, \sqrt{q^2-p^2t^2}\right)\,dt\,.$$

Интегралы вида I–III могут быть сведены к интегралам от выражений, рациональных относительно синуса или косинуса (тригонометрических или гиперболических), с помощью следующих подстановок, соответственно:

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad t = \frac{p}{q}\operatorname{tg} z, \quad \text{или} \quad t = \frac{p}{q}\operatorname{sh} z;\\
&\text{(II)} \quad t = \frac{p}{q}\sec z, \quad \text{или} \quad t = \frac{p}{q}\operatorname{ch} z;\\
&\text{(III)} \quad t = \frac{p}{q}\sin z, \quad \text{или} \quad t = \frac{p}{q}\cos z, \quad \text{или} \quad t = \frac{p}{q}\operatorname{th} z.
\end{aligned}
$$

П р и м е р 47. Вычислить $J = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$.

$\triangleright$ $5 + 2x + x^2 = 4 + (x+1)^2$, поэтому применяем подстановку $t = x + 1$. Тогда

$$J = \int \frac{dt}{\sqrt{(4+t^2)^3}},$$

— интеграл типа I. Подстановка $t = 2\operatorname{tg} z$ дает

$$dt = \frac{2\,dz}{\cos^2 z}, \quad \sqrt{(4+t^2)^3} = 2^3\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 z)^3} = \frac{8}{\cos^3 z}.$$

В результате получаем

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{4}\int \cos z\,dz = \frac{1}{4}\sin z + C = \frac{1}{4}\frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}} + C =\\
&= \frac{1}{4}\frac{t/2}{\sqrt{1+t^2/4}} + C = \frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}} + C. \triangleleft
\end{aligned}
$$

П р и м е р 48. Вычислить $J = \displaystyle\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx$.

$\triangleright$ Интеграл типа II; применяем подстановку

$$x = \operatorname{ch} t, \quad dx = \operatorname{sh} t\,dt.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
J &= \int \sqrt{\left(\operatorname{ch}^2 t - 1\right)^3}\, dt = \int \operatorname{sh}^4 t\, dt = \int \left(\frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}\right)^2 dt = \\
&= \frac{1}{4}\int \operatorname{ch}^2 2t\, dt - \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2t\, dt + \frac{1}{4}\int dt = \\
&= \frac{1}{8}\int (\operatorname{ch} 4t + 1)\, dt - \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + \frac{1}{4} t = \\
&= \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4t - \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + \frac{3}{8} t + C.
\end{aligned}
$$

Возвратимся к переменной x:

$$
\begin{aligned}
t &= \operatorname{Arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right); \\
\operatorname{sh} 2t &= 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2x\sqrt{x^2 - 1}; \\
\operatorname{sh} 4t &= 2 \operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t = 4x\sqrt{x^2 - 1}\left(2x^2 - 1\right).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
J = \frac{1}{8}x\left(2x^2 - 1\right)\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} + \frac{3}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + C. \triangleleft
$$

Тригонометрические подстановки могут быть полезны и в других случаях, не отмеченных выше.

П р и м е р 49. Вычислить $J = \displaystyle\int \frac{dx}{\left(1 + \sqrt{x}\right)\sqrt{x - x^2}}$.

$\triangleright$ Применим подстановку

$$
x = \sin^2 t, \quad dx = 2 \sin t \cos t\, dt.
$$

Получим

$$
\begin{aligned}
J &= \int \frac{2 \sin t \cos t\, dt}{(1 + \sin t)\sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t}} = \int \frac{2\, dt}{1 + \sin t} = 2\int \frac{1 - \sin t}{\cos^2 t}\, dt = \\
&= 2 \operatorname{tg} t - \frac{2}{\cos t} + C = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x}} + C = \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{1 - x}} + C. \triangleleft
\end{aligned}
$$

Интегрирование дифференциального бинома

Интегралы вида

$$\int x^m \left(ax^n + b\right)^p dx, \tag{28}$$

где a, b — любые постоянные ($a \neq 0$, $b \neq 0$), показатели m, n, p — рациональные числа, ($n \neq 0$, $p \neq 0$), называют *интегралом от дифференциального бинома.* Интеграл (28) сводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях:

1) p — целое число; в этом случае применяется подстановка $t = x^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n;

2) $\dfrac{m+1}{n}$ — целое число; к цели ведет подстановка $ax^n + b = t^s$, где s — знаменатель дроби p;

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое число; применяется подстановка $a + bx^{-n} = t^s$, где s — знаменатель дроби p.

Если ни одно из указанных условий не выполняется, то согласно *теореме Чебышева* интеграл (28) не может быть выражен через элементарные функции .

П р и м е р 50. $J = \displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} \left(1 + x^{1/4}\right)^{1/3} dx.$

$\triangleright$ Здесь

$$m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{3};$$

так как

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-(1/2)+1}{(1/4)} = 2,$$

то имеем второй случай интегрируемости. Положим

$$1 + \sqrt[4]{x} = t^3, \quad x = \left(t^3 - 1\right)^4, \quad dx = 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3 dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J &= 12 \int \left(t^6 - t^3\right) dt = \frac{3}{7} t^4 (4t^3 - 7) + C = \\ &= \frac{3}{7} \left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^{4/3} \left(4\sqrt[4]{x} - 3\right) + C. \triangleleft \end{aligned}$$

П р и м е р 51. $J=\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int x^0\left(1+x^4\right)^{-1/4}\,dx.$

$\triangleright$ Здесь

$$m=0,\quad n=4,\quad p=-\frac{1}{4};$$

третий случай интегрируемости, так как

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0.$$

Положим

$$1+x^{-4}=\frac{x^4+1}{x^4}=t^4,\quad x=\left(t^4-1\right)^{-1/4},\quad dx=-t^3\left(t^4-1\right)^{-5/4}\,dt,$$

так что $\sqrt[4]{1+x^4}=tx=t\left(t^4-1\right)^{-1/4}$ и

$$\begin{aligned} J &= -\int\frac{t^2\,dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}= \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C= \\ &= \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.\triangleleft \end{aligned}$$

В случае, когда показатели являются большими неправильными дробями, интегрирование дифференциального бинома облегчается использованием *формул приведения*. Предварительно, с помощью подстановки $z=x^n$ интеграл преобразуется к виду

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx=\frac{1}{n}\int(az+b)^p z^q\,dz=\frac{1}{n}J_{p,q}\,, \tag{29}$$

где $q=\dfrac{m+1}{n}-1$. Условия интегрируемости для $J_{p,q}$ принимают вид:

1) p — целое; 2) q — целое; 3) $p+q$ — целое.

Для интеграла $J_{p,q}$ имеют место следующие формулы приведения:

$$\text{(I)} \quad J_{p,\,q} = -\frac{(az+b)^{p+1}z^{q+1}}{b(p+1)} + \frac{p+q+2}{b(p+1)}\, J_{p+1,\,q}\,, \quad (p \neq -1),$$

$$\text{(II)} \quad J_{p,\,q} = \frac{(az+b)^{p+1}z^{q+1}}{b(q+1)} - a\,\frac{p+q+2}{b(q+1)}\, J_{p,\,q+1}\,, \quad (q \neq -1),$$

$$\text{(III)} \quad J_{p,\,q} = \frac{(az+b)^{p}z^{q+1}}{p+q+1} + \frac{bp}{p+q+1}\, J_{p-1,\,q}\,, \quad (p+q \neq -1),$$

$$\text{(IV)} \quad J_{p,\,q} = \frac{(az+b)^{p+1}z^{q}}{a(p+q+1)} - \frac{bq}{a(p+q+1)}\, J_{p,\,q-1}\,, \quad (p+q \neq -1),$$

которые позволяют уменьшить или увеличить показатели p или q на единицу.

П р и м е р 52. Получить рекуррентную формулу для интеграла

$$H_m = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (m \text{ — целое}),$$

и установить, к каким выражениям сводится вычисление интеграла при разных m.

$\triangleright$ Здесь $n = 2$, $p = -1/2$; поэтому при m нечетном оказывается целым число

$$\frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{2}\,,$$

а при m четном — число

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m}{2},$$

так что во всех случаях интеграл берется в конечном виде. Подстановкой $z = x^2$ сведем его к интегралу

$$\frac{1}{2}\int (1-z)^{-1/2} z^{(m-1)/2}\,dz = \frac{1}{2}\, J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m-1}{2}}\,.$$

Если, считая $m > 1$, применить к последнему интегралу формулу (IV), то получим

$$J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m-1}{2}} = -2\,\frac{(1-z)^{1/2}z^{(m-1)/2}}{m} + \frac{m-1}{m}\, J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m-3}{2}}\,,$$

или, возвращаясь к заданному интегралу,

$$H_m = -\frac{1}{m}\, x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m}\, H_{m-2}\,.$$

Эта формула, уменьшая значение m на 2, последовательно сводит вычисление H_m либо к

$$H_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

при m нечетном, либо же к

$$H_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

при m четном.

Пусть теперь $m < -1$, так что $m = -\mu$, $\mu > 1$. Применим на этот раз формулу (II)

$$J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m-1}{2}} = 2\,\frac{(1-z)^{1/2} z^{(m+1)/2}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1}\,J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m+1}{2}}\,,$$

откуда

$$H_{-\mu} = -\frac{x^{-(\mu-1)}\sqrt{1-x^2}}{\mu-1} + \frac{\mu-2}{\mu-1}\,H_{-(\mu-2)}\,.$$

С помощью этой формулы мы имеем возможность уменьшать значение μ на 2, и последовательно свести вычисление $H_{-\mu}$ либо к

$$H_{-1} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C,$$

при μ нечетном, либо же к

$$H_{-2} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C,$$

при m четном. $\triangleleft$

6 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Интегрирование выражений вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Дифференциалы этого вида **всегда** могут быть рационализированы с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi).$$

Действительно,

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}\,,$$

так что

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}\,, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка иногда приводит к сложным выкладкам. В некоторых случаях цель может быть быстрее и проще достигнута с помощью других подстановок:

1) Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то удобнее оказывается подстановка $t = \cos x,\ x \in (-\pi/2,\ \pi/2)$;

2) Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяют подстановку $t = \sin x,\ x \in (0,\ \pi)$;

3) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ то эффективнее применить подстановку $t = \mathrm{tg}\,x,\ x \in (-\pi/2,\ \pi/2)$.

П р и м е р 53. Вычислить $J = \displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$.

$\triangleright$ Подинтегральное выражение нечетно относительно $\cos x$, поэтому применяем подстановку $t = \sin x$, $\cos x\,dx = dt$, $\sin^2 x = 1-t^2$:

$$J = \int t^2(1-t^2)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \triangleleft$$

П р и м е р 54. Вычислить $J = \displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx$.

$\triangleright$ Подинтегральное выражение меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$. Подстановка $t = \cos x$ дает:

$$J = -\int \frac{t^4 - 2\,t^2 + 1}{t^4}\,dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C. \triangleleft$$

П р и м е р 55. Вычислить $J = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

$\triangleright$ Подинтегральное выражение не изменяет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$. Подстановка

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$

приводит искомый интеграл к виду

$$J = \int \frac{\left(t^2+1\right)^2}{t^4}\, dt = \\ = t + \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C. \triangleleft$$

П р и м е р 56. Вычислить $J = \frac{1}{2} \int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\, dx$.

$\triangleright$ Применим универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Имеем

$$J = (1-r^2) \int \frac{dt}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} = \\ = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\, t\right) + C = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C. \triangleleft$$

В некоторых случаях интегрирование выражений вида $R(\sin x, \cos x)$ может быть проведено другими методами.

П р и м е р 57. Вычислить $J = \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.

$\triangleright$ Используем тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; получим

$$J = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{dx}{\sin x} = \\ = -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} - \int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C. \triangleleft$$

Интегрирование выражений вида $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$.

Дифференциалы этого вида, так же, как и тригонометрические дифференциалы $R(\sin x, \cos x)\, dx$, всегда можно привести к рациональному виду с помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$. При этом

$$\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{th}(x/2)}{1-\operatorname{th}^2(x/2)} = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1+\operatorname{th}^2(x/2)}{1-\operatorname{th}^2(x/2)} = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$x = 2\operatorname{Arth} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1-t^2},$$

так что

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1-t^2}.$$

Так же, как и при интегрировании тригонометрических выражений, в ряде случаев удобнее другие подстановки:

1) Если $R(-\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то $t = \operatorname{ch} x$;

2) Если $R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то $t = \operatorname{sh} x$;

3) Если $R(-\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то $t = \operatorname{th} x$.

Также, как и в интегралах от тригонометрических функций, иногда интегрирование выражений вида $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ может быть выполнено другими методами.

П р и м е р 58. Вычислить $J = \displaystyle\int \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh}^8 x\,dx$.

▷ Подинтегральное выражение нечетно относительно $\operatorname{ch} x$; применяем подстановку $t = \operatorname{sh} x$. Имеем

$$\begin{aligned} J &= \int (1+\operatorname{sh}^2 x)\operatorname{sh}^8 x\,d\operatorname{sh} x = \int (1+t^2)t^8\,dt = \\ &= \frac{t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{9}\operatorname{sh}^9 x + \frac{1}{11}\operatorname{sh}^{11} x + C. \triangleleft \end{aligned}$$

П р и м е р 59. Вычислить $J = \displaystyle\int \frac{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}{4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x}\,dx$.

▷ Воспользуемся тем обстоятельством, что и числитель и знаменатель есть линейная комбинация $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$, и, кроме того,

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \qquad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и его производной:

$$2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x = \alpha(4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x) + \beta(4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x).$$

Для определения α и β получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4\alpha + 5\beta = 2, \\ 5\alpha + 4\beta = 3, \end{cases}$$

откуда $\alpha = 7/9$, $\beta = -2/9$. Следовательно,

$$J = \frac{7}{9}\int dx - \frac{2}{9}\int \frac{4\operatorname{ch} x + 5\operatorname{sh} x}{4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x}\,dx =$$

$$= \frac{7}{9}\,x - \frac{2}{9}\int \frac{d(4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x)}{4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x} =$$
$$= \frac{7}{9}\,x - \frac{2}{9}\ln(4\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x) + C. \triangleleft$$

Интегрирование выражений вида $\int \sin^\nu x \cdot \cos^\mu x\,dx$, $\int \operatorname{sh}^\nu x \cdot \operatorname{ch}^\mu x\,dx$

Интегралы вида

$$J_1 = \int \sin^\nu x \cos^\mu x\,dx, \quad J_2 = \int \operatorname{sh}^\nu x \operatorname{ch}^\mu x\,dx$$

(μ, ν — рациональные числа) подстановками

$$t = \sin x, \quad t = \cos x,$$

и, соответственно,

$$t = \operatorname{sh} x, \quad t = \operatorname{ch} x,$$

всегда можно привести к интегралу от дифференциального бинома.

Значительно больший интерес представляет подстановка

$$t = \sin^2 x, \quad dt = 2\sin x \cos x\,dx,$$

которая приводит интеграл J_1 к интегралу $J_{p,q}$, определенному формулой (29) на с. 46:

$$J_1 = \frac{1}{2}\int \sin^{\nu-1}\left(1 - \sin^2 x\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \cdot 2\sin x \cos x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int (1-t)^{\frac{\mu-1}{2}}\, t^{\frac{\nu-1}{2}}\,dt = \frac{1}{2} J_{\frac{\mu-1}{2};\,\frac{\nu-1}{2}}\,.$$

Из условий интегрируемости дифференциального бинома следует, что интеграл J_1 берется в конечном виде, если μ или ν есть нечетное целое число, либо если $\mu+\nu$ есть четное целое число.

Если показатель ν (или μ) будет *нечетным,* то рационализация сразу достигается подстановкой $t=\cos x$ (или $t=\sin x$). Если же оба показателя μ и ν четные (а также если они оба *нечетные*), то можно для той же цели применить подстановку $t=\operatorname{tg} x$ или $t=\operatorname{ctg} x$.

Если показатели μ и ν оба *положительные четные* числа, то предпочтительнее другой прием, основанный на использовании формул

$$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}\,,\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\,,\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\,.$$

Именно, если $\nu=2n, \quad \mu=2m$, то при $\nu\geq\mu$ получим

$$\begin{aligned}\sin^{2n} x\cos^{2m} x &= (\sin x\cos x)^{2m}\sin^{2(n-m)} x= \\ &= \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2m}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{n-m},\end{aligned}$$

а при $\nu<\mu$

$$\begin{aligned}\sin^{2n} x\cos^{2m} x &= (\sin x\cos x)^{2n}\cos^{2(m-n)} x= \\ &= \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2n}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{n-m}.\end{aligned}$$

В развернутом виде получится сумма членов вида

$$C\sin^{\nu_1} 2x\cdot\cos^{\mu_1} 2x,$$

где $\nu_1+\mu_1\geq n+m=\dfrac{\nu+\mu}{2}$. Те члены, у которых хотя бы один из показателей ν_1, или μ_1 есть нечетное число, легко интегрируются по указанному выше способу. Остальные члены подвергаем подобному же разложению, переходя к $\sin 4x$ и $\cos 4x$, и т.д. Так как при каждом разложении сумма показателей уменьшается, по крайней мере, вдвое, то процесс быстро завершается.

При больших показателях степеней μ и ν (не обязательно целых) имеют место следующие *формулы приведения*, вытекающие из соответствующих формул для интеграла от дифференциального бинома (с. 47):

$$\text{(I)} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\, dx = -\ \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\mu+1} +$$
$$+ \frac{\nu+\mu+2}{\mu+1} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu+2} x\, dx, \quad \mu \neq -1;$$

$$\text{(II)} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\, dx = = \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+1} +$$
$$\frac{\nu+\mu+2}{\nu+1} \int \sin^{\nu+2} x \cos^{\mu} x\, dx, \quad \nu \neq -1;$$

$$\text{(III)} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\, dx = = \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu-1} x}{\nu+\mu} +$$
$$+ \frac{\mu-1}{\nu+\mu} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu-2} x\, dx, \quad \nu+\mu \neq 0;$$

$$\text{(IV)} \int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\, dx = = \frac{\sin^{\nu-1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+\mu} +$$
$$+ \frac{\nu-1}{\nu+\mu} \int \sin^{\nu-2} x \cos^{\mu} x\, dx, \quad \nu+\mu \neq 0.$$

Эти формулы позволяют увеличить или уменьшить показатель ν или μ на 2 (за указанными исключениями). Если оба показателя ν и μ — целые числа, то последовательным применением формул приведения можно свести вычисление интеграла к одному из девяти элементарных интегралов, отвечающих различным комбинациям из значений ν и μ, равных -1, 0 или 1:

1) $\displaystyle\int dx = x + C;$

2) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

3) $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

6) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + C;$

7) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + C;$

8) $\displaystyle\int \sin x \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C\,.$

Аналогичные приемы применяются для вычисления интегралов от гиперболических функций вида

$$\int \operatorname{sh}^{\nu} x \operatorname{ch}^{\mu} x \, dx.$$

П р и м е р 60. Вычислить $J = \displaystyle\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$.

$\triangleright$ Здесь пригодна подстановка $t = \operatorname{tg} x$, но проще воспользоваться формулами понижения степени:

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8}\sin^2 2x\,(\cos 2x + 1) = \frac{1}{8}\sin^2 2x \cos 2x + \frac{1}{16}(1 - \cos 4x);$$

поэтому

$$J = \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C. \triangleleft$$

П р и м е р 61. Вычислить $J = \displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\, dx$.

$\triangleright$ Пригодна подстановка $t = \cos x$, но проще воспользоваться II и III формулами приведения:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\, dx &= -\frac{\cos^5 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\, dx,\\
\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\, dx &= \frac{1}{3}\cos^3 x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, dx = \\
&= \frac{1}{3}\cos^3 x + \cos x + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,
\end{aligned}$$

так что после упрощающих преобразований

$$J = -\frac{\cos^5 x}{2\sin^2 x} - \cos x - \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \triangleleft$$

Обзор других случаев.

В разделе 3 показано, как интегрируются выражения вида

$$P_n(x)e^{ax}, \quad P_n(x)\sin bx,$$

где $P_n(x)$ — целый полином. Отметим, что дробные выражения

$$\frac{e^x}{x^n}, \quad \frac{\sin x}{x^n},$$

уже не интегрируются в конечном виде.

С помощью интегрирования по частям легко установить для интегралов от этих выражений рекуррентные формулы и свести их, соответственно, к следующим основным интегралам

(интегральный логарифм)

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{dy}{\ln y} = \mathrm{li}(y) + C,\ y \in (0,1)$$

(интегральный синус)

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \mathrm{Si}(x) + C,\ x \in (-\infty, +\infty)$$

(интеграл вероятностей)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2}\,dx = \Phi_0(x) + C,\ x \in (-\infty, +\infty)$$

Подчеркнем, что **все эти интегралы реально существуют, но они представляют собой совершенно новые функции и не приводятся к тем функциям, которые называют "элементарными".** При этом символами $\mathrm{li}(x)$, $\mathrm{Si}(x)$, $\Phi_0(x)$ обозначаются те первообразные функций

$$\frac{x}{\ln x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2},$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathrm{Si}(0) = 0, \quad \lim_{y \to 0+} \mathrm{li}(y) = 0, \quad \Phi_0(0) = 0.$$

П р и м е р 62. Выразить через интегральный логарифм $\mathrm{li}(x)$ и элементарные функции интеграл $J = \displaystyle\int \frac{dx}{\ln^2 x}$.

$\triangleright$ Воспользуемся формулой интегрирования по частям, положив $u = x, \quad dv = \dfrac{dx}{x \ln^2 x}$ так, что

$$du = dx, \quad v = \int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}.$$

Тогда

$$J = -\frac{x}{\ln x} + \int \frac{dx}{\ln x} = -\frac{x}{\ln x} + \mathrm{li}(x) + C. \triangleleft$$

7 ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{(x-\sqrt{x}\,)(1+\sqrt{x}\,)}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k} \quad (k>1).$

3. $\displaystyle\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2+x-2}{x+3}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \cos mx \sin nx\,dx \quad (m\pm n\neq 0).$

6. $\displaystyle\int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx \quad (n>0).$

7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+x^4}\,.$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\,dx.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}\,.$

10. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{A^2\sin^2 x+B^2\cos^2 x}\,.$

12. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}\,.$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx.$

15. $\displaystyle\int \operatorname{tg}\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}\,.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\,.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}}\,.$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,.$

19. $\displaystyle\int x^3\ln x\,dx.$

20. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx.$

21. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx.$

22. $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx.$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2}\,.$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}\,.$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2+4x+1}-\sqrt{2x+1}}\,.$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)^2}\,.$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}\,dx.$

28. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx.$

29. $\displaystyle\int \frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)\left(x^2-2x+2\right)^3}\,dx.$

30. $\displaystyle\int \frac{x^6 - x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{(x+1)^2\,(x^2+x+1)^3}\,dx.$

Вывести рекуррентные соотношения и вычислить интегралы при $m = -3$ и $m = 4$:

31. $\displaystyle\int \frac{x^m}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$ 32. $\displaystyle\int \frac{x^m}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\,.$

Вычислить интегралы:

33. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax^2+b}}.$

34. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax^2+b}}{x}\,dx.$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$

37. $\displaystyle\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}\,dx.$

39. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(7x-x^2-10)^3}}\,dx.$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)\,\sqrt{2x^2-2x+5}}\,.$

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)\,(2-x)^5}}\,dx.$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}\,.$

44. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx.$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}\,.$

46. $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx.$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{a + b\,\mathrm{tg}\,x}\,.$

48. $\displaystyle\int \frac{dx}{a + b\cos x}\,.$

49. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^5 x}\,.$

50. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}^2\,x}{\mathrm{sh}^3\,x}\,dx.$

51. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^6\,x\,dx.$

52. $\displaystyle\int \sin^4 \cos^6 x\,dx.$

53. $\displaystyle\int \mathrm{sh}^2\,x\,\mathrm{ch}^3\,x\,dx.$

54. $\displaystyle\int (2x+1)e^{\mathrm{arctg}\,x}\,dx.$

55. $\displaystyle\int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx.$

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}\,.$

57. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}-x^3+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\,dx.$

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{A\cos^2 x+2B\sin x\cos x+C\sin^2 x}, \quad (AC-B^2>0).$

Выразить через функции $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{li}(x)$, $\Phi_0(x)$ **и элементарные функции интегралы**

59. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{Si}(x)\,dx.$ 60. $\displaystyle\int \mathrm{li}(x)\,dx.$

61. $\displaystyle\int x\Phi_0(x)\,dx.$ 62. $\displaystyle\int \Phi_0(x)\,dx.$

ПРИЛОЖЕНИЯ

A Основные соотношения для тригонометрических и гиперболических функций, а также обратных к ним

A.1 Тригонометрические функции и обратные к ним

Основные тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Если $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, то $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

Формулы сложения

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;\\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;\\
\sin(x + y + z) &= \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z +\\
&\quad + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z;\\
\cos(x + y + z) &= \cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z -\\
&\quad - \sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \sin z;
\end{aligned}$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \qquad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x};$$

Формулы для половинного значения аргумента

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x};$$
$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}\,.$$

Знак выбирается в соответствии со знаком левой части.

Функции кратных аргументов

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,;$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=$$
$$=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x\,;$$
$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}\,;$$
$$\operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg}x}=\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x}{2}\,;$$

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\,;\qquad \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\,;$$
$$\operatorname{tg}3x=\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}\,;\qquad \operatorname{ctg}3x=\frac{\operatorname{ctg}^3 x-3\operatorname{ctg}x}{3\operatorname{ctg}^2 x-1}\,;$$
$$\sin 4x=8\cos^3 x\sin x-4\cos x\sin x\,;\qquad \cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1\,;$$
$$\operatorname{tg}4x=\frac{4\operatorname{tg}x-4\operatorname{tg}^3 x}{1-6\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}\,;\qquad \operatorname{ctg}4x=\frac{\operatorname{ctg}^4 x-6\operatorname{ctg}^2 x+1}{4\operatorname{ctg}^3 x-4\operatorname{ctg}x}\,.$$

Функции кратных аргументов при больших n

$$\begin{aligned}\cos nx &= \cos^n x-C_n^2\cos^{n-2}x\sin^2 x+\\ &\quad +C_n^4\cos^{n-4}x\sin^4 x-C_n^6\cos^{n-6}x\sin^6 x+\ldots;\\ \sin nx &= C_n^1\cos^{n-1}x\sin x-C_n^3\cos^{n-3}x\sin^3 x+\\ &\quad +C_n^5\cos^{n-5}x\sin^5 x-\ldots\ .\end{aligned}$$

Сумма и разность функций

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,;$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\,;$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,;$$
$$\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}\,;$$
$$\cos x\pm\sin x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\mp x\right)\,;$$

$$\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}\,;\qquad \operatorname{ctg}x\pm\operatorname{ctg}y=\pm\frac{\sin(x\pm y)}{\sin x\sin y}\,;$$
$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}y=\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}\,;\qquad \operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}y=\pm\frac{\cos(x+y)}{\sin x\cos y}\,.$$

Произведения функций

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right];$$
$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right];$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x-y)+\sin(x+y)\right];$$
$$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 y-\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 y\,;$$
$$\sin(x+y)\sin(x-y)=\cos^2 y-\cos^2 x=\sin^2 x-\sin^2 y;$$
$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}=-\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y};$$
$$\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y=\frac{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}=-\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y};$$
$$\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}y=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}y}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}y}=-\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}y}{\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}y}\,;$$
$$\sin x\sin y\sin z=\frac{1}{4}\left[\sin(x+y-z)+\sin(y+z-x)+\right.$$
$$\left.+\sin(z+x-y)-\sin(x+y+z)\right];$$
$$\sin x\cos y\cos z=\frac{1}{4}\left[\sin(x+y-z)-\sin(y+z-x)+\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\sin(z+x-y)+\sin(x+y+z)];\\
\sin x\sin y\cos z &= \frac{1}{4}\,[-\cos(x+y-z)+\cos(y+z-x)+\\
&+\cos(z+x-y)-\cos(x+y+z)];\\
\cos x\cos y\cos z &= \frac{1}{4}\,[\cos(x+y-z)+\cos(y+z-x)+\\
&+\cos(z+x-y)+\cos(x+y+z)].
\end{aligned}
$$

Формулы понижения степени

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}\,; & \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}\,;\\
\sin^3 x &= \frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\,; & \cos^3 x &= \frac{3\cos x+\cos 3x}{4}\,;\\
\sin^4 x &= \frac{\cos 4x-4\cos 2x+3}{8}\,; & \cos^4 x &= \frac{\cos 4x+4\cos 2x+3}{8}\,.
\end{aligned}
$$

Обратные функции

$$
\begin{aligned}
\arcsin x &= -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2}-\arccos x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,;\\
\arccos x &= \pi-\arccos(-x) = \frac{\pi}{2}-\arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,;\\
\operatorname{arctg} x &= -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,;\\
\operatorname{arcctg} x &= \pi-\operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.
\end{aligned}
$$

Сумма и разность обратных функций

$$
\arcsin x+\arcsin y = \begin{cases}
\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-y^2}\right),\\
\qquad \text{при}\quad xy\le 0 \text{ или } x^2+y^2\le 1;\\
\pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-y^2}\right),\\
\qquad \text{при } x>0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1;\\
-\pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-y^2}\right),\\
\qquad \text{при } x<0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1;
\end{cases}
$$

$$\arcsin x-\arcsin y=\begin{cases}-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-y^2}\right), \\ \qquad\qquad \text{при} \quad xy\ge 0 \text{ или } x^2+y^2\ge 1; \\ \pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-y^2}\right), \\ \qquad\qquad \text{при } x>0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1; \\ -\pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-y^2}\right), \\ \qquad\qquad \text{при } x<0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1;\end{cases}$$

$$\arccos x+\arccos y=\begin{cases}\arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right), \\ \qquad\qquad \text{при} \quad x+y\ge 0; \\ 2\pi-\arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right), \\ \qquad\qquad \text{при} \quad x+y\le 0;\end{cases}$$

$$\arccos x-\arccos y=\begin{cases}-\arccos\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right), \\ \qquad\qquad \text{при} \quad x\ge y; \\ \arccos\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right), \\ \qquad\qquad \text{при} \quad x<y;\end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy} \quad \text{при} \quad xy<1; \\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy} \quad \text{при} \quad x>0,\ xy>1; \\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy} \quad \text{при} \quad x<0,\ xy>1;\end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \ \text{при} \quad xy>-1; \\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \ \text{при} \quad x>0,\ xy<-1; \\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \ \text{при} \quad x<0,\ xy<-1.\end{cases}$$

Связь тригонометрических (или обратных тригонометрических) функций

	$a=\sin x$	$a=\cos x$	$a=\operatorname{tg} x$	$a=\operatorname{ctg} x$
$\sin x$	a	$\pm\sqrt{1-a^2}$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-a^2}$	a	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	a	$\dfrac{1}{a}$
$\operatorname{ctg} x$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\pm\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\dfrac{1}{a}$	a

Знак выбирается в соответствии со знаком левой части. Таблица позволяет найти соотношения как между тригонометрическими, так и между обратными тригонометрическими функциями одного аргумента. Например, если $\sin x = a$, то

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\ (0 \le x \le \frac{\pi}{2}), \quad \arcsin a = \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\,.$$

A.2 Гиперболические функции и обратные к ним

Определения

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\,, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\,.$$

Связь с тригонометрическими функциями

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz, \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} x = i \operatorname{ctg} iz,$$
$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz, \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \quad \operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz.$$

Здесь $z = x+iy$ — комплексное число, i — мнимая единица ($i^2 = -1$).

Равенства, в которых гиперболические функции f встречаются в форме $f(x)$, или $f(ax)$, могут быть получены из аналогичных соотношений для соответствующих тригонометрических функций, если формально заменить $\sin x$ на $i \operatorname{sh} x$ и $\cos x$ на $\operatorname{ch} x$.

Основные тождества

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; &\qquad \operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1; \\ 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; &\qquad \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}; \\ \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x; &\qquad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}. \end{aligned}$$

Универсальная гиперболическая подстановка

Если $t = \operatorname{th} \dfrac{x}{2}$, то

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th}(x/2)}{1 - \operatorname{th}^2(x/2)} = \frac{2t}{1 - t^2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2(x/2)}{1 - \operatorname{th}^2(x/2)} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2},$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1 - t^2}, \quad x = 2 \operatorname{Arth} t.$$

Функции отрицательного аргумента

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x; \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$$

Формулы сложения

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y; \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}; \qquad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$$

Функции для половинного значения аргумента

$$\operatorname{sh}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{2}};\qquad \operatorname{ch}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x+1}{2}};$$

$$\operatorname{th}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x+1}=\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{sh}x}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\,;$$

$$\operatorname{cth}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1}=\frac{\operatorname{ch}x+1}{\operatorname{sh}x}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x+1}{\operatorname{ch}x-1}}\,.$$

Знак выбирается в соответствии со знаком левой части.

Функции кратных аргументов

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x=\frac{2\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}^2x};$$

$$\operatorname{ch}2x=\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x=2\operatorname{ch}^2x-1=2\operatorname{sh}^2x+1;$$

$$\operatorname{sh}3x=3\operatorname{sh}x+4\operatorname{sh}^3x;\qquad \operatorname{ch}3x=-3\operatorname{ch}x+4\operatorname{ch}^3x;$$

$$\operatorname{sh}4x=4\operatorname{sh}^3x\operatorname{ch}x+4\operatorname{ch}^3x\operatorname{sh}x;\qquad \operatorname{ch}4x=\operatorname{ch}^4x+6\operatorname{ch}^2x\operatorname{sh}^2x+\operatorname{sh}^4x;$$

$$\operatorname{th}2x=\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x};\qquad \operatorname{cth}2x=\frac{1+\operatorname{cth}^2x}{2\operatorname{cth}x}\,.$$

Сумма и разность функций

$$\operatorname{sh}x\pm\operatorname{sh}y=2\operatorname{sh}\frac{x\pm y}{2}\operatorname{ch}\frac{x\mp y}{2};$$

$$\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y=2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2};\qquad \operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{th}x\pm\operatorname{th}y=\frac{\operatorname{sh}(x\pm y)}{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y};\qquad \operatorname{cth}x\pm\operatorname{cth}y=\frac{\operatorname{sh}(y\pm x)}{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y}\,.$$

Произведения функций

$$\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y=\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y)\right];$$

$$\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y=\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(x-y)+\operatorname{ch}(x+y)\right];$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(x-y) + \operatorname{sh}(x+y)\right];$$
$$\operatorname{sh}(x+y)\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 y;$$
$$\operatorname{ch}(x+y)\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

Формула Муавра

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} y)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx.$$

Формулы понижения степени

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1); \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1);$$

Обратные гиперболические функции

$$\begin{aligned}
y = &\qquad \operatorname{Arsh} x \text{ \textit{(ареасинус)}}, \quad \text{если } x = \operatorname{sh} y;\\
y = &\qquad \operatorname{Arch} x \text{ \textit{(ареакосинус)}}, \quad \text{если } x = \operatorname{ch} y;\\
y = &\qquad \operatorname{Arth} x \text{ \textit{(ареатангенс)}}, \quad \text{если } x = \operatorname{th} y;\\
y = &\qquad \operatorname{Arcth} x \text{ \textit{(ареакотангенс)}}, \quad \text{если } x = \operatorname{cth} y.
\end{aligned}$$

Следует учесть, что $y = \operatorname{ch} x$ не во всей области определения – монотонная функция. Поэтому для каждого из двух интервалов монотонности получают свою обратную функцию $y = \operatorname{Arch} x$.

Связь обратных гиперболических функций с логарифмической функцией

$$y = \operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right);$$
$$y = \operatorname{Arch} x = \begin{cases} \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right), & \text{для } x \geq 1 \text{ и } -\infty < y \leq 0;\\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), & \text{для } x \geq 1 \text{ и } 0 \leq y \leq +\infty; \end{cases}$$
$$y = \operatorname{Arth} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{при } |x| < 1;$$

$$y = \operatorname{Arcth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad \text{при } |x| > 1.$$

Соотношения между гиперболическими (или обратными гиперболическими) функциями

	$a = \operatorname{sh} x$	$a = \operatorname{ch} x$	$a = \operatorname{th} x$	$a = \operatorname{cth} x$
$\operatorname{sh} x$	a	$\pm\sqrt{a^2-1}$	$\pm \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\pm \dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$
$\operatorname{ch} x$	$\sqrt{a^2+1}$	a	$\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$	$\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$
$\operatorname{th} x$	$\pm \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$	$\pm \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$	a	$\dfrac{1}{a}$
$\operatorname{cth} x$	$\pm \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$	$\pm \dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$	$\dfrac{1}{a}$	a

Если $\operatorname{sh} x = a$, то $\operatorname{cth} x = \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$ $(x \geq 0)$, $\operatorname{Arsh} a = \operatorname{Arcth} \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$.
Знак выбирается в соответствии со знаком левой части.

Сумма и разность обратных гиперболических функций

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arch} y &= \operatorname{Arsh}\left(xy \pm \sqrt{(1+x^2)(y^2-1)}\right) = \\
&= \operatorname{Arch}\left[y\sqrt{1+x^2} \pm x\sqrt{y^2-1}\right]; \\
\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y &= \operatorname{Arsh}\left(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}\right); \\
\operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y &= \operatorname{Arsh}\left(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right); \\
\operatorname{Arth} x + \operatorname{Arth} y &= \operatorname{Arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}; \\
\operatorname{Arcth} x \pm \operatorname{Arcth} y &= \operatorname{Arcth} \frac{1 \pm xy}{x \pm y}.
\end{aligned}$$

В Обзор методов интегрирования

В данном приложении приведена сводка основных интегралов и методы их интегрирования с указанием номеров страниц и примеров, в которых подробно разбирается применение этих методов.

Всюду ниже $P_n(x)$, $Q_m(x)$ означают полиномы целой степени относительно x; $R[x, u(x), \dots]$ — рациональную функцию переменных $x, u(x), \dots$; $u(x)$ — произвольное выражение относительно x. Предполагается, что квадратные трехчлены, за исключением особо оговоренных случаев, не имеют вещественных корней. Ограничения на области определения приведенных выражений указаны в тексте пособия.

---

1. $\displaystyle\int g[\omega(x)]\omega'(x)\,dx$ (с. 9).

$\triangleright$ Подстановка $\omega(x) = t$. $\triangleleft$

См. примеры №№ 15–17, 20–24.

---

2. $\displaystyle\int u(x)v'(x)\,dx$ (с. 15).

$\triangleright$ Интегрирование по частям:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = uv - \int v(x)u'(x)\,dx. \triangleleft$$

См. примеры №№ 29–32.

---

3. $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx,$ где $n < m$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — правильная рациональная дробь (с. 21).

$\triangleright$ Подинтегральную функцию представляют в виде суммы элементарных дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \ (k = 1, 2, \dots).$$

Интеграл от первой дроби легко сводится к табличному, ко второй применяют методы, изложенные в п.п. 4, 5 данного приложения.

В случае кратных корней полинома $Q_m(x)$ для выделения рациональной части интеграла используют формулу Остроградского (с. 26). $\triangleleft$

См. примеры №№ 33–36.

---

4. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$, где $M,\ N,\ p,\ q$ — вещественные числа (с. 20).

$\triangleright$ Подстановка $x+p/2=t$ $\triangleleft$

См. пример № 33 .

---

5. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$, где $M,\ N,\ p,\ q$ — вещественные числа, n – целое (с. 20).

$\triangleright$ Подстановка $x+p/2=t$ приводит интеграл к сумме интегралов вида

$$\int \frac{2t\,dt}{(t^2+1)^n} \quad \text{и} \quad \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}\,.$$

К первому применяется подстановка $t^2+a^2=u$, ко второму — рекуррентная формула из п. 6 данного приложения. $\triangleleft$

См. пример № 33 .

---

6. $\displaystyle J_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, где n – целое (с. 19).

$\triangleright$ Рекуррентная формула

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{a^2}\,J_n. \quad \triangleleft$$

или тригонометрическая подстановка (с. 14).

См. примеры №№ 25, 32 .

---

7. $\displaystyle\int R\left(x,Y^r,Y^s,\ldots\right)\,dx$, где $Y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, $r,s,\ldots$ рациональные (с. 28).

$\triangleright$ Подстановка

$$t=\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{1/m},$$

где m — общий знаменатель дробей $r,s,\ldots$. $\triangleleft$

См. примеры №№ 18, 37, 38.

---

8. $\displaystyle\int x^m\left(ax^n+b\right)^p\,dx$, где m,n,p — рациональные числа (с. 45).

$\triangleright$ Интегрируется в трех случаях:

1) если p — целое число, то применяется подстановка

$$t = x^N,$$

где N — общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\dfrac{m+1}{n}$ — целое число, то применяется подстановка

$$ax^n + b = t^s,$$

где s — знаменатель дроби p;

3) если $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое число, то применяется подстановка

$$a + bx^{-n} = t^s,$$

где s — знаменатель дроби p.

В случае, когда p и m — "большие" неправильные дроби подстановка $z = x^n$ приводит его к интегралу

$$J_{p,q} = \int (az+b)^p z^q \, dz$$

(с. 45), к которому применяются формулы приведения из следующего пункта. $\triangleleft$

См. примеры №№ 50 – 52.

---

9. $J_{p,q} = \displaystyle\int (az+b)^p z^q \, dz$, где p, q — "большие" неправильные дроби.

$\triangleright$ Формулы приведения (с. 47):

$$J_{p,\,q} = \begin{cases} -\dfrac{(az+b)^{p+1} z^{q+1}}{b(p+1)} + \dfrac{p+q+2}{b(p+1)}\, J_{p+1,\,q}; \\ \dfrac{(az+b)^{p+1} z^{q+1}}{b(q+1)} - a\dfrac{p+q+2}{b(q+1)}\, J_{p,\,q+1}; \end{cases}$$

$$J_{p,\,q} = \begin{cases} \dfrac{(az+b)^{p} z^{q+1}}{p+q+1} + \dfrac{bp}{p+q+1}\, J_{p-1,\,q}; \\ \dfrac{(az+b)^{p+1} z^{q}}{a(p+q+1)} - \dfrac{bq}{a(p+q+1)}\, J_{p,\,q-1}\,. \end{cases} \triangleleft$$

См. пример № 52.

---

10. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx$.

$\triangleright$ I. Одна из подстановок Эйлера (с. 29):

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}\, x$, если $a > 0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-\lambda)$, если у трехчлена есть вещественные корни; λ — один из таких корней.

II. Тригонометрическая или гиперболическая подстановки (с. 42). $\triangleleft$

См. примеры №№ 19, 26–28, 39–41, 47–49.

---

11. $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$ (с. 33).

$\triangleright$ Дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ разлагается на сумму элементарных дробей, после чего интеграл приводится к сумме интегралов одного из ниже приведенных видов. $\triangleleft$

---

12. $\displaystyle\int \frac{P_n(x)\, dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad \int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$ (с. 34).

$\triangleright$ Используется формула

$$\int \frac{P_n(x)\, dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

в которой коэффициенты полинома $P_{n-1}(x)$ и постоянная λ определяются методом неопределенных коэффициентов. $\triangleleft$

См. пример № 42.

---

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (с. 35)

$\triangleright$ Подстановка $x - \alpha = \dfrac{1}{t}$. $\triangleleft$

См. пример № 43.

---

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^n\sqrt{ax^2+c}}$, где n — целое, a, b, c — вещественные (с. 37).

$\triangleright$ Подстановка $\sqrt{a+\dfrac{c}{x^2}}=t$, или подстановка Абеля

$$t=\left(\sqrt{\alpha x^2+\beta}\right)'=\frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}. \ \triangleleft$$

См. пример № 45.

---

16. $\displaystyle\int\frac{(Mx+N)\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где m — целое, M, N, a, b, c, p, q — вещественные (с. 39).

$\triangleright$ 1) Если $(ax^2+bx+c)=a\left(x^2+px+q\right)$, то интеграл разбивается на сумму интегралов

$$J_1=\frac{M}{2a}\int\frac{(2ax+b)\,dx}{(ax^2+bx+c)^{(2m+1)/2}}$$

и

$$J_2=\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{(2m+1)/2}}\,.$$

К первому применяется подстановка $t=ax^2+bx+c$, ко второму — подстановка Абеля (см. п. 14).

2) Если $(ax^2+bx+c)\neq a\left(x^2+px+q\right)$ и $p\neq b/a$, то применяется подстановка $x=\dfrac{\mu t+\nu}{t+1}$, где коэффициенты μ и ν подбираются так, чтобы уничтожить члены в первой степени в обоих трехчленах одновременно (с. 40).

3) Если $(ax^2+bx+c)\neq a\left(x^2+px+q\right)$ и $p=b/a$, то применяется подстановка $x=t-p/2$ (с. 41). $\triangleleft$

См. пример № 46.

---

17. $\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ (с. 48).

$\triangleright$ 1) Если

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

то применяют подстановку $t=\cos x$;

2) Если

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

то применяют подстановку $t=\sin x$;

3) Если

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то применяют подстановку $t = \operatorname{tg} x$;

4) В остальных случаях применяют универсальную подстановку

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

или специальные приемы. $\triangleleft$

См. примеры №№ 53–57.

---

18. $\displaystyle\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$ (с. 50).

$\triangleright$ 1) Если

$$R(-\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x),$$

то применяют подстановку $t = \operatorname{ch} x$;

2) Если

$$R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x),$$

то применяют подстановку $t = \operatorname{sh} x$;

3) Если $R(-\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то применяют подстановку $t = \operatorname{th} x$;

4) В остальных случаях применяют универсальную подстановку

$$t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$$

или другие приемы. $\triangleleft$

См. примеры №№ 58, 59.

---

19. $\displaystyle\int R(\sin^m x, \cos^n x)\,dx, \quad \int R(\operatorname{sh}^m x, \operatorname{ch}^n x)\,dx,$ где m, n — целые числа (с. 53)

$\triangleright$ 1) Если m — нечетное положительное, то применяют, соответственно, подстановки $t = \cos x$ и $t = \operatorname{ch} x$.

2) Если n — нечетное положительное, то применяют, соответственно, подстановки $t = \sin x$ и $t = \operatorname{sh} x$.

3) Если $m+n$ — четное отрицательное, то применяют, соответственно, подстановки $t = \operatorname{tg} x$ и $t = \operatorname{th} x$.

4) Если m и n — четные неотрицательные, то применяют формулы понижения степени;

При больших m и n применяют формулы приведения, аналогичные формулам п. 9. $\triangleleft$

См. примеры №№ 60, 61.

---

20. $\displaystyle\int R(\sin^p x, \cos^q x)\, dx, \quad \int R(\operatorname{sh}^p x, \operatorname{ch}^q x)\, dx,$ где p, q — рациональные числа (с. 52).

$\triangleright$ Подстановкой $t = \sin x$ ($t = \operatorname{sh} x$) приводится к интегралу от дифференциального бинома

$$\int t^p (1 \pm t^2)^{q-1}\, dt,$$

При больших p и q применяют формулы приведения (с. 54). $\triangleleft$

---

21. $\displaystyle\int P_n(x) f(x)\, dx$, где $f(x)$ — тригонометрическая, обратная тригонометрическая, гиперболическая, обратная гиперболическая, показательная или логарифмическая функции.

$\triangleright$ Интегрирование по частям (с. 15). $\triangleleft$

См. примеры №№ 29–32.

Список литературы

[1] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2.– М.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948.

[2] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды.: Учеб. пособие для вузов/Под ред. Л.Д.Кудрявцева – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986.

[3] Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу. - Казань: Унипресс, 1998.

[4] Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1962.

Содержание