# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания
для решения задач



---

## Т е м а 1. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $F$ — первообразная функции $f$ на промежутке $[a;b]$, т. е. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in [a;b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f$ на промежутке $[a;b]$ может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1}$$

**Пример 1.** Вычислить $\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$.

Р е ш е н и е.

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x, \text{ если } 1-x \geqslant 1, \text{ т. е. } x \leqslant 1; \\ -(1-x) = x-1, \text{ если } 1-x < 1, \text{ т. е. } x > 1. \end{cases}$$

Первообразные для этих случаев:

$$\int (1-x)\,dx = x - \frac{x^2}{2} + C_1, \quad \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + C_2.$$

Естественно предположить, что первообразной функцией для $|1-x|$ будет

$$F_1(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2}, & x \leqslant 1, \\ \frac{x^2}{2} - x, & x > 1. \end{cases}$$

Но в данном случае это будет неверно, поскольку $\lim\limits_{x\to 1+0} F_1(x) = -\frac{1}{2}$, а $F_1(1) = \frac{1}{2}$, т. е. функция $F_1$ разрывна в точке $x = 1$, а первообразная, как функция, имеющая производную, должна быть непрерывна. Поэтому для вычисления интеграла следует разбить промежуток интегрирования на части, на которых формулы для первообразной задают непрерывную функцию, и воспользоваться аддитивностью интеграла:

$$\int\limits_0^2 |1-x|\,dx = \int\limits_0^1 |1-x|\,dx + \int\limits_1^2 |1-x|\,dx = \int\limits_0^1 (1-x)\,dx + \int\limits_1^2 (x-1)\,dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 0 + \left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 1.$$

**Пример 2.** Вычислить $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

Р е ш е н и е. Вычислим первообразную с помощью замены переменной $t = \operatorname{tg} x$ (формально, не обращая внимания на разрывы функции tg):

$$t = \operatorname{tg} x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad x = \operatorname{arctg} t + k\pi, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

Здесь тоже нельзя использовать функцию $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}$ в качестве первообразной на промежутке $[0;\pi]$, так как она имеет разрыв в точке $x = \frac{\pi}{2}$ :

$$\lim_{x\to\pi/2-0} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}, \quad \text{поэтому} \quad \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Аналогично,

$$\lim_{x\to\pi/2+0} \operatorname{tg} x = -\infty, \ \lim_{y\to-\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}, \ \text{поэтому} \ \lim_{x\to\pi/2+0} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

т. е. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} F(x) \neq \lim\limits_{x\to\pi/2+0} F(x)$.

Рассмотрим функции

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x\to\pi/2-0} F(x), & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad F_2(x) = \begin{cases} F(x), & \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \\ \lim\limits_{x\to\pi/2+0} F(x), & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Тогда $F_1$ будет первообразной для $f$ на промежутке $[0;\frac{\pi}{2}]$, а $F_2$ — на промежутке $[\frac{\pi}{2};\pi]$. Снова используем аддитивность интеграла:

$$\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi/2} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} = F_1(x)\Big|_0^{\pi/2} + F_2(x)\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \pi}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, при вычислении интегралов по формуле Ньютона-Лейбница следует выяснить, является ли функция $F$, полученная в качестве первообразной, непрерывной на промежутке интегрирования. Если это оказалось не так, то следует разбить промежуток интегрирования на промежутки непрерывности функции $F$ и использовать аддитивность интеграла.

**Задание 1.** 1. Вычислить интегралы, применяя формулу Ньютона-Лейбница:

$$\text{а)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} \ (0 < \alpha < \pi); \quad \text{б)} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon\cos x} \ (0 \leqslant \varepsilon < 1);$$

$$\text{в)} \int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx; \quad \text{г)} \int\limits_{0}^{1} x|x - \alpha|\, dx = I(\alpha).$$

2. Выяснить, почему формальное применение формулы (1) приводит к неверным результатам:

$$\text{а)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}\ ; \quad \text{б)} \int\limits_{-1}^{1} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' dx.$$

**Т е м а 2. Интегрирование по частям в определенном интеграле.**

Пусть $u, v \in C^1([a;b])$. Тогда

$$\int\limits_{a}^{b} u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_{a}^{b} v(x)u'(x)\, dx. \tag{2}$$

**Пример 1.** Вычислить $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Р е ш е н и е. Положим $u(x) = \operatorname{arctg} x,\ v'(x) = x$. Тогда

$$u'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ v(x) = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \quad \text{(берем одну из первообразных).}$$

По формуле (2) $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\, dx =$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - 0 - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\, dx}{1+x^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - 0\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Пример 2.** Выразить интеграл $I_n = \int\limits_0^a (a^2 - x^2)^n dx$ через $I_{n-1}$ $\quad (n \geqslant 1)$ (такие формулы обычно называются "формулами понижения").

Р е ш е н и е. Положим $u(x) = (a^2 - x^2)^n, \quad v'(x) = 1$. Тогда $v(x) = \int 1\,dx = x$, $u'(x) = n(a^2 - x^2)^{n-1} \cdot (-2x)$. Применим формулу (2):

$$I_n = \int\limits_0^a (a^2 - x^2)^n dx = x(a^2 - x^2)^n \Big|_0^a - \int\limits_0^a x \cdot n(a^2 - x^2)^{n-1}(-2x)\,dx =$$

$$= 0 + 2n \int\limits_0^a x^2 (a^2 - x^2)^{n-1} dx = 2n \int\limits_0^a \big(a^2 - (a^2 - x^2)\big)(a^2 - x^2)^{n-1} dx =$$

$$= 2na^2 \int\limits_0^a (a^2 - x^2)^{n-1} dx - 2n \int\limits_0^a (a^2 - x^2)^n dx = 2na^2 I_{n-1} - 2nI_n.$$

Получили равенство $I_n = 2na^2 I_{n-1} - 2nI_n$, откуда $I_n = \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$.

**Задание 2.** Вычислить интегралы, применяя формулу (2) интегрирования по частям:

$$\text{а) } \int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx \ ; \quad \text{б) } \int\limits_0^1 \arccos x\,dx \ ; \quad \text{в) } I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^{2n} x\,dx \quad (n > 0,\ n \in \mathbb{N}).$$

В последнем примере выразить $I_n$ через $I_{n-1}$, положив

$$u(x) = \sin^{2n-1} x, \quad v(x) = \frac{\sin x}{\cos^{2n} x}.$$

## Т е м а 3. Замена переменной в определенном интеграле.

Пусть функция $f$ непрерывна на $[a;b]$, $\varphi \in C^1([\alpha;\beta])$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\varphi([\alpha;\beta]) \subset [a;b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt. \tag{3}$$

1 способ замены переменной. Вводим новую переменную $t$ по формуле $x = \varphi(t)$ и в исходном интеграле заменяем $x$ на $\varphi(t)$ и $dx$ на $\varphi'(t)\,dt$. Кроме того, находим новые пределы интегрирования $\alpha$ и $\beta$ из уравнений $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

**Пример 1.** Вычислить $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ $(a > 0)$ при помощи замены переменной $x = a\sin t$.

Р е ш е н и е. $x^2 = a^2\sin^2 t$, $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = \pm a\cos t$, $dx = a\cos t\,dt$. Новые пределы интегрирования:

$$a\sin\alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha = k\pi \ ; \quad a\sin\beta = a \Longleftrightarrow \sin\beta = 1 \Longleftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi.$$

Удобно выбрать простейшие значения $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$. Тогда, так как на промежутке $[0;\pi/2]$ значения $\cos t$ неотрицательны, то $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$ и

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\cdot a\cos t\cdot a\cos t\,dt = a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

<u>2 способ замены переменной.</u> Представляем подинтегральную функцию в виде произведения: $f(x) = g\big(\omega(x)\big)\cdot\omega'(x)$ и вводим новую переменную по формуле $t = \omega(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g\big(\omega(x)\big)\omega'(x)\,dx = \int_{\omega(a)}^{\omega(b)} g(t)\,dt.$$

**Пример 2.** Вычислить $\int\limits_0^{\pi/3}\operatorname{tg} x\,dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int_0^{\pi/3}\operatorname{tg} x\,dx = \int_0^{\pi/3}\frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/3}\frac{-(\cos x)'\,dx}{\cos x}.$$

Вводим новую переменную $t = \cos x$, $dt = (\cos x)'\,dx$. Новые пределы интегрирования: $x = 0$ переходит в $t = \cos 0 = 1$, $x = \frac{\pi}{3}$ переходит в $t = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

$$\int_0^{\pi/3}\frac{-(\cos x)'\,dx}{\cos x} = \int_1^{1/2}\frac{-dt}{t} = \int_{1/2}^1\frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{1/2}^1 = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

**Пример 3.** В интеграле $\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сделать замену переменной $t = \sqrt{1-x^2}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся 1-м способом, для этого выразим $x$ через $t$: $t^2 = 1 - x^2 \iff x^2 = 1 - t^2 \iff x = \pm\sqrt{1-t^2}$. Если положить $\varphi(t) = \sqrt{1-t^2}$, то при нахождении новых пределов интегрирования уравнение $\varphi(\alpha) = -1/2$ не имеет решений. Если же $\varphi(t) = -\sqrt{1-t^2}$, то уравнение $\varphi(\beta) = 1/2$ не имеет решений. Поэтому используем аддитивность интеграла:

$$\int_{-1/2}^{1/2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1/2}^{0}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{1/2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4}$$

В первом интеграле положим $x = -\sqrt{1-t^2}$; $dx = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Новые пределы интегрирования:

$$\varphi(\alpha_1) = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow -\sqrt{1-\alpha_1^2} = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow 1-\alpha_1^2 = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \alpha_1^2 = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (так как } t = \sqrt{1-x^2})$$

$$\varphi(\beta_1) = 0 \Longleftrightarrow -\sqrt{1-\beta_1^2} = 0 \Longleftrightarrow 1-\beta_1^2 = 0 \Longleftrightarrow \beta_1^2 = 1 \Longleftrightarrow \beta_1 = 1.$$

$$\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{(1-t^2)\cdot\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{t}\,dt = \int\limits_{\sqrt{3}/2}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Во втором интеграле положим $x = \sqrt{1-t^2}$; $dx = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Новые пределы интегрирования:

$$\varphi(\alpha_2) = 0 \Longleftrightarrow -\sqrt{1-\alpha_2^2} = 0 \Longleftrightarrow 1-\alpha_2^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \alpha_2^2 = 1 \Longleftrightarrow \alpha_2 = 1 \text{ (и здесь } t = \sqrt{1-x^2}).$$

$$\varphi(\beta_2) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \sqrt{1-\beta_2^2} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 1-\beta_2^2 = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \beta_2^2 = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \beta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{1}^{\sqrt{3}/2} \frac{(1-t^2)\cdot\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{t}\,dt = -\int\limits_{1}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-t^2}\,dt = \int\limits_{\sqrt{3}/2}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Из равенства (4) получаем:

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int\limits_{\sqrt{3}/2}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

**Пример 4.** В интеграле $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$ сделать замену переменной $x = \frac{1}{t}$.

Р е ш е н и е. При вычислении новых пределов интегрирования нужно решить уравнения $\varphi(\alpha) = -1 \Longleftrightarrow 1/\alpha = -1 \Longleftrightarrow \alpha = -1$; $\varphi(\beta) = 1 \Longleftrightarrow 1/\beta = 1 \Longleftrightarrow \beta = 1$. Но на промежутке $[\alpha;\beta] = [-1;1]$ функция $\varphi(t) = 1/t$ имеет разрыв в точке 0, поэтому (формально) такая замена переменной неосуществима.

Разобьём промежуток изменения переменной $x$ на промежутки, внутри которых функция $t = 1/x$ непрерывна вместе со своей производной:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^2\,dx}{x^4+1} + \int\limits_{0}^{1} \frac{x^2\,dx}{x^4+1}.$$

Преобразуем подинтегральное выражение:

$$\frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \frac{\frac{1}{t^2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt}{\frac{1}{t^4}+1} = -\frac{dt}{t^4+1}.$$

Новые пределы интегрирования при преобразовании 1-го интеграла:
$1/\alpha = -1 \iff \alpha = -1$, а уравнение $1/\beta = 0$ решений не имеет. Однако при изменении $x$ в промежутке $[-1;0)$ функция $t = 1/x$ принимает значения в промежутке $(-\infty;-1]$ (поскольку $\lim\limits_{x\to 0-} 1/x = -\infty$), и, соответственно, $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} 1/t = 0$, т. е. пределу интегрирования $x = 0$ должно соответствовать $t = -\infty$. В действительности формула замены переменной имеет место и для несобственных интегралов:
если $f \in C\big((a;b)\big)$, $\varphi \in C^1\big((\alpha;\beta)\big)$, $\varphi\big((\alpha;\beta)\big) \subset (a;b)$, $\lim\limits_{t\to\alpha}\varphi(t) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t) = b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt$$

(из сходимости интеграла слева следует сходимость интеграла справа). В нашем примере:

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \int\limits_{-1}^{-\infty} -\frac{dt}{t^4+1} = \int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dt}{t^4+1}.$$

Аналогично, $x \in (0;1] \iff t \in [1;+\infty)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} 1/t = 0$, поэтому

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \int\limits_{+\infty}^{1} -\frac{dt}{t^4+1} = \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1}.$$

В итоге

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dt}{t^4+1} + \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1}.$$

**Задание 3.** 1. Вычислить интегралы:

$$\text{а)}\ \int\limits_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}\ ;\quad \text{б)}\ \int\limits_{0}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx\ ;\quad \text{в)}\ \int\limits_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx\ \left(t = x-\frac{1}{x}\right).$$

2. Объяснить, почему формальная замена приводит к неверным результатам:

$$\text{а)}\ \int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}\ (t = \operatorname{tg} x)\ ;\quad \text{б)}\ \int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{1+x^2}\ \left(x = \frac{1}{t}\right).$$

3. Можно ли в интеграле $\int\limits_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ сделать замену $x = \sin t$ ?

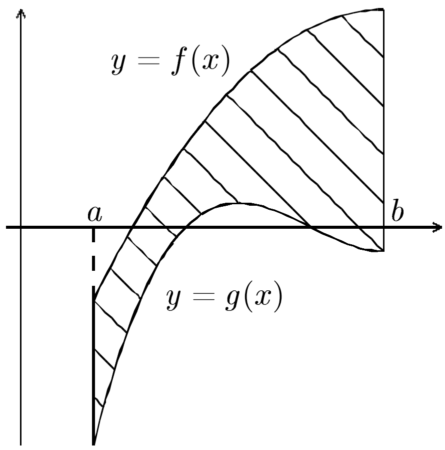
## Т е м а 4. Вычисление площадей.

Если функции $f$, $g$ непрерывны на $[a;b]$ и для любого $x \in [a;b]$ $\;f(x) \geqslant g(x)$, то площадь криволинейной трапеции

$$E = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

вычисляется по формуле

$$S(E) = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\, dx. \qquad (5)$$

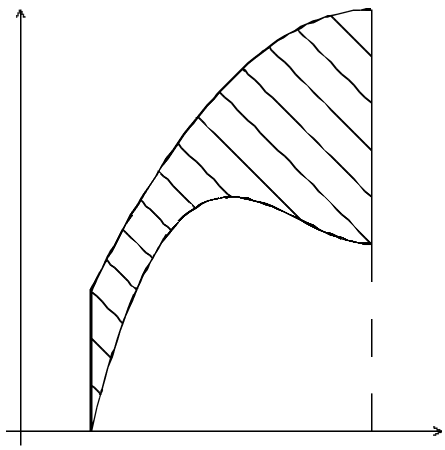


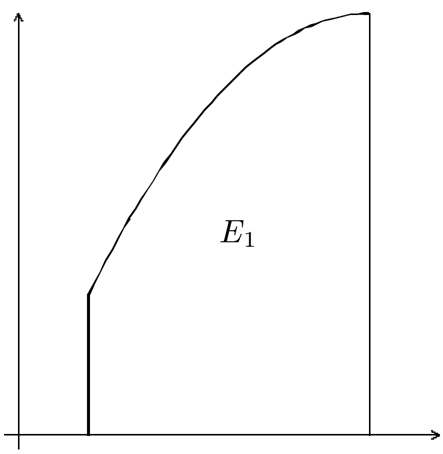

Обосновать эту формулу можно следующим образом: если функции $f$, $g$ принимают значения произвольного знака, сдвигаем фигуру вдоль оси $Oy$ в полуплоскость $y \geqslant 0$: к функциям $f$ и $g$ прибавляем константу $m$, такую, что для всех $x \in [a;b]$ $g(x) + m \geqslant 0$. Тогда

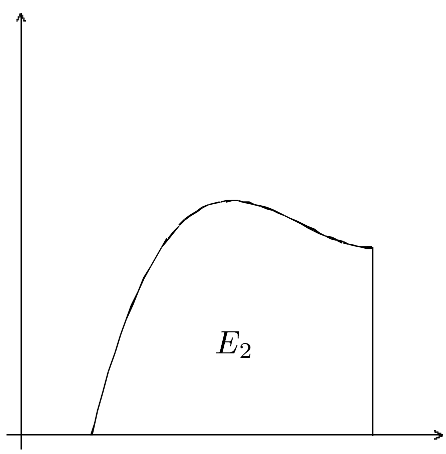
$$S(E) = S(E_1) - S(E_2) =$$

$$= \int\limits_a^b (f(x) + m)\, dx - \int\limits_a^b (g(x) + m)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$






Аналогичная формула верна для площади фигуры, ограниченной кривыми $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$ (при $\psi(y) \geqslant \varphi(y)$ для $c \leqslant y \leqslant d$):

$$S(E) = \int\limits_c^d (\psi(y) - \varphi(y))\, dy. \qquad (5')$$

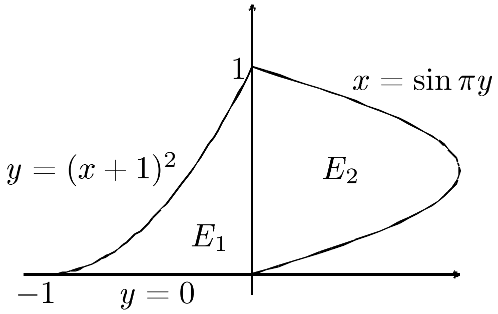
Для вычисления площади фигуры более сложного вида её обычно представляют в виде объединения криволинейных трапеций.

**Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:
$y = (x+1)^2,\ x = \sin \pi y,\ y = 0.$

Р е ш е н и е.

$E = E_1 \cup E_2$ ; по формуле (5):

$$S(E_1) = \int\limits_{-1}^{0} (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{3} \ ;$$




по формуле (5′):

$$S(E_2) = \int\limits_{0}^{1} \sin \pi y \, dy = -\frac{\cos \pi y}{\pi}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{\pi} \ ;$$

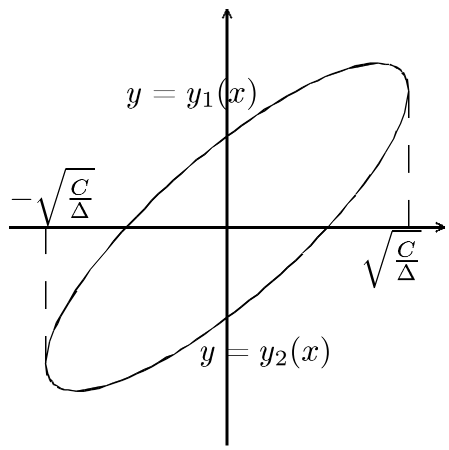
$$S(E) = S(E_1) + S(E_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}.$$

**Пример 2.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой:
$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (C > 0,\ \Delta = AC - B^2 > 0).$
Р е ш е н и е. Поскольку квадратное уравнение $Cy^2 + 2Bxy + Ax^2 - 1 = 0$ имеет не более двух вещественных корней $y_1(x)$ и $y_2(x)$, кривая является объединением графиков двух функций:

$$y_1(x) = \frac{-Bx + \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2-1)}}{C} = \frac{-Bx + \sqrt{C - (AC - B^2)x^2}}{C} =$$
$$= \frac{-Bx + \sqrt{C - \Delta x^2}}{C} \ ; \quad y_2(x) = \frac{-Bx - \sqrt{C - \Delta x^2}}{C} \ .$$

Очевидно, $y_1(x) \geqslant y_2(x)$, и эти функции определены при $C - \Delta x^2 \geqslant 0 \iff$ $\iff -\sqrt{\frac{C}{\Delta}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{C}{\Delta}}$.

Поскольку кривая — второго порядка, центрально-симметрична (из уравнения) и расположена в полосе конечной ширины, это — эллипс. По формуле (5)




$$S(E) = \int\limits_{-\sqrt{C/\Delta}}^{\sqrt{C/\Delta}} (y_1(x) - y_2(x))\, dx =$$
$$= \int\limits_{-\sqrt{C/\Delta}}^{\sqrt{C/\Delta}} \frac{2\sqrt{C - \Delta x^2}}{C}\, dx \ .$$

Сделаем замену $x = \sqrt{C/\Delta}\sin t$ :

$-\sqrt{C/\Delta} \leqslant x \leqslant \sqrt{C/\Delta} \Longleftrightarrow -1 \leqslant \sin t \leqslant 1$ и можно взять для $t$, например, промежуток $[-\pi/2; \pi/2]$.

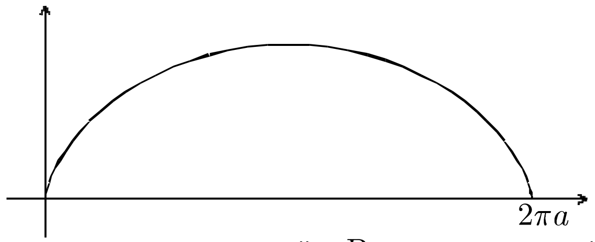
$$\sqrt{C-\Delta x^2} = \sqrt{C - C\sin^2 t} = \sqrt{C}\cdot\sqrt{\cos^2 t} = \sqrt{C}\cdot\cos t \quad (\text{для } t \in [-\pi/2;\pi/2]);$$

$$dx = \sqrt{C/\Delta}\cos t\,dt,\ S(E) = \frac{2}{C}\int\limits_{-\sqrt{C/\Delta}}^{\sqrt{C/\Delta}} \sqrt{C-\Delta x^2}\,dx = \frac{2}{C}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{C}\,\cos t\cdot\sqrt{C/\Delta}\cos t\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\ .$$

**Пример 3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой
$x = a(t-\sin t), \quad y = a(1-\cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ и осью $Ox$.
Р е ш е н и е. Кривая — циклоида (строится согласно способу построения параметрических графиков).

$$S(E) = \int\limits_0^{2\pi a} y(x)\,dx\ .$$



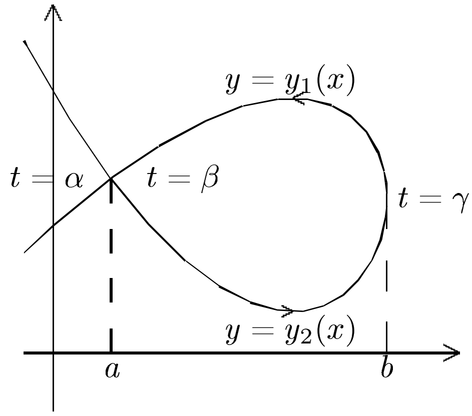

Очевидно, $y$ невозможно выразить через $x$ явно, поэтому сделаем замену переменной. В качестве новой переменной удобно взять $t$, поскольку и $y$, и $x$ уже выражены через $t$: $y(x) = a(1-\cos t)$ , $\quad dx = \big(a(t-\sin t)\big)'dt = a(1-\cos t)\,dt$. Новые пределы интегрирования: $x=0 \Longleftrightarrow t=0, \quad x = 2\pi a \Longleftrightarrow t = 2\pi$.

$$S(E) = \int\limits_0^{2\pi a} y(x)\,dx = \int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt = a^2\int\limits_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\left(\frac{3t}{2} - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2\ .$$

Аналогичная идея используется при выводе формул для площади петли кривой, заданной в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta.$$




Формулу выводим в предположении, что фигура выпукла, возрастание параметра $t$ соответствует обходу петли против часовой стрелки и точка самопересечения (получаемая при $t = \alpha$ и при $t = \beta$) — крайняя левая точка фигуры (см. рис.).

$$S(E) = \int\limits_a^b (y_1(x) - y_2(x))\,dx = \int\limits_a^b y_1(x)\,dx - \int\limits_a^b y_2(x)\,dx\ .$$

В обоих интегралах делаем замену $x = x(t)$. В первом интеграле значение $x = a$ получается при $t = \beta$, значение $x = b$ — при $t = \gamma$, функция $y_1(x)$ переходит в $y(t)$, $dx = x'(t)\,dt$. Таким образом,

$$\int\limits_a^b y_1(x)\,dx = \int\limits_\beta^\gamma y(t)x'(t)\,dt\ .$$

Во втором интеграле делаем ту же замену, но, поскольку заменяем функцию $y = y_2(x)$, значение $x = a$ теперь получается при $t = \alpha$:

$$\int\limits_a^b y_2(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\gamma y(t)x'(t)\,dt\ ; \quad S(E) = \int\limits_\beta^\gamma y(t)x'(t)\,dt - \int\limits_\alpha^\gamma y(t)x'(t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_\gamma^\beta y(t)x'(t)\,dt - \int\limits_\alpha^\gamma y(t)x'(t)\,dt = -\int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt\ .$$

Получили:

$$S(E) = -\int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt\ . \tag{6}$$

При задании кривой графиками функций $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ аналогично получим формулу

$$S(E) = \int\limits_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,dt\ . \tag{7}$$

Сложив равенства (6) и (7) и разделив на 2, получим более симметричную формулу

$$S(E) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt\ . \tag{8}$$

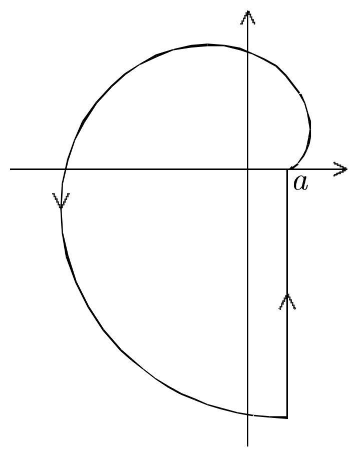
Если петля получается при противоположном направлении обхода (по часовой стрелке), легко видеть, что во всех трёх формулах изменится знак. Поскольку $S(E)$ положительна, то независимо от направления обхода

$$S(E) = \Big|\int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt\Big| = \Big|\int\limits_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,dt\Big| = \frac{1}{2}\Big|\int\limits_\alpha^\beta \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt\Big|\ .$$

В случае невыпуклой петли все формулы остаются верными (формулу (6) можно доказать разбиением фигуры вертикальными прямыми на конечное число выпуклых фигур, если это возможно, а формулу (7) — разбиением на выпуклые фигуры горизонтальными прямыми).

**Пример 4.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$




и лучом $x = a,\ y \leqslant 0$ .
Р е ш е н и е. Чтобы получить параметрические уравнения всей замкнутой кривой (см. рис.), необходимо параметризовать луч, причём так, чтобы направление, указанное стрелкой, было направлением движения точки при возрастании параметра. Этому условию удовлетворяет, например, параметризация $x = a,\ y = a(t - 4\pi),\quad 2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi$. При $t = 2\pi$ получаем точку $(a, -2\pi a)$ — конечную точку спирали, а при $t = 4\pi$ — точку $(a, 0)$. Итак, параметризация всей замкнутой кривой:

$$x(t) = \begin{cases} a(\cos t + t\sin t), & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ a, & 2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi. \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} a(\sin t - t\cos t), & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ a(t - 4\pi), & 2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi. \end{cases}$$

Тогда

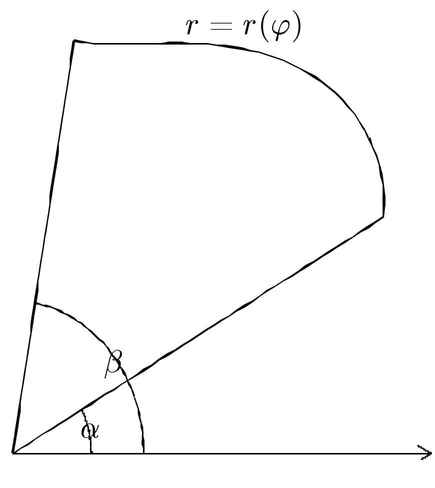
$$x'(t) = \begin{cases} at\cos t, & 0 \leqslant t < 2\pi, \\ 0, & 2\pi < t \leqslant 4\pi. \end{cases} \qquad y'(t) = \begin{cases} at\sin t, & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ a, & 2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi. \end{cases}$$

Используем симметричную формулу для площади петли:

$$x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = \begin{cases} a^2t^2, & 0 \leqslant t < 2\pi, \\ a^2, & 2\pi < t \leqslant 4\pi. \end{cases} \quad \text{(после преобразований).}$$

$$S(E) = \frac{1}{2}\Big|\int\limits_0^{4\pi} \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt\Big| = \frac{1}{2}\Big|\int\limits_0^{2\pi} a^2t^2\,dt + \int\limits_{2\pi}^{4\pi} a^2\,dt\Big| = a^2\left(\frac{4\pi^3}{3} + \pi\right) .$$

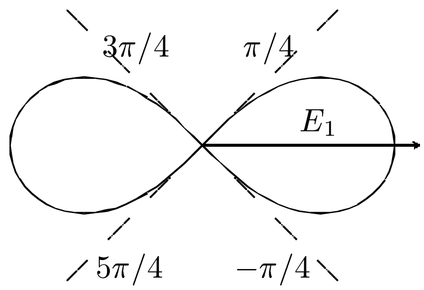
Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, то площадь сектора, ограниченного этой кривой и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (при $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$), даётся формулой




$$S(E) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(r(\varphi)\big)^2 d\varphi .$$

**Пример 5.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (считаем, что $a > 0$).
Р е ш е н и е. Так как $r \geqslant 0$, то $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, область определения

$$\{\varphi \mid \cos 2\varphi \geqslant 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right] .$$

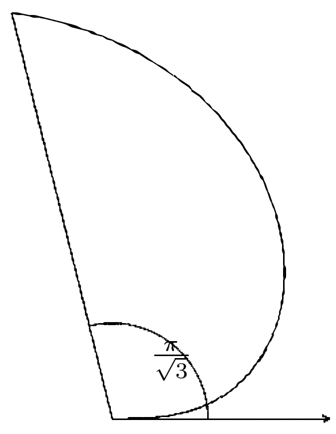



Поскольку $r(-\varphi) = r(\varphi)$, кривая симметрична относительно полярной оси, кроме того, $r(\varphi + \pi) = r(\varphi)$, поэтому кривая ещё и центрально-симметрична. Функция $r(\varphi)$ имеет период $2\pi$, поэтому вся кривая получается при изменении $\varphi$ на промежутке длиной $2\pi$ (например, $[-\pi/4; 2\pi - \pi/4]$). В область определения из этого промежутка входят значения $\varphi$ : $-\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$ и $3\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 5\pi/4$, при этом на промежутке $[0; \pi/4]$ функция $r(\varphi)$ убывает от $a$ до 0. Исходя из всех этих свойств, строим график.

В силу симметрии

$$S(E) = 4S(E_1) = 4 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/4} \big(r(\varphi)\big)^2 d\varphi = 2 \int\limits_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = 2a^2 \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4} = a^2 .$$

**Пример 6.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\varphi = r \operatorname{arctg} r$ и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/\sqrt{3}$.




Р е ш е н и е. Так как $\varphi(r)$ непрерывна, монотонно возрастает на $[0; +\infty)$ и принимает значения на $[0; +\infty)$, то существует непрерывная обратная функция $r(\varphi)$, определённая на $[0; +\infty)$. Тогда

$$S(E) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/\sqrt{3}} \big(r(\varphi)\big)^2 d\varphi .$$

Очевидно, невозможно в общем виде решить уравнение $r \operatorname{arctg} r = \varphi$ и выразить $r$ через $\varphi$ некоторой формулой. Поэтому сделаем в интеграле замену переменной — возьмём в качестве новой переменной $r$. Тогда значение $\varphi = 0$ соответствует $r = 0$, а $\varphi = \pi/\sqrt{3}$ соответствует $r = \sqrt{3}$ (так как $\sqrt{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot \pi/3 = \pi/\sqrt{3}$).

$$S(E) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{3}} r^2 \, d(r \operatorname{arctg} r) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{3}} r^2 \left(\operatorname{arctg} r + \frac{r}{1+r^2}\right) dr =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{3}} r^2 \operatorname{arctg} r \, dr + \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3 \, dr}{1+r^2} .$$

1-й интеграл преобразуем интегрированием по частям:

$$u = \operatorname{arctg} r, \quad v' = r^2, \quad u' = \frac{1}{1+r^2}, \quad v = \frac{r^3}{3}\ .$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} r^2 \operatorname{arctg} r\, dr = \frac{1}{2}\left(\frac{r^3}{3}\operatorname{arctg} r\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{3}\cdot\frac{1}{1+r^2}\,dr\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \frac{1}{6}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{r^3\,dr}{1+r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{6}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{r^3\,dr}{1+r^2}\ .$$

$$S(E) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{r^3\,dr}{1+r^2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{r^3\,dr}{1+r^2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(r - \frac{r}{1+r^2}\right)dr =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ln 2\ .$$

**Задание 4.** Вычислить площади фигур, ограниченных кривыми:

а) $y = 2x - x^2,\ x + y = 0$ (определить координаты точек пересечения);

б) $y = \dfrac{a^3}{a^2+x^2}\ ,\ y = 0$ (промежуток интегрирования $(-\infty;\infty)$ );

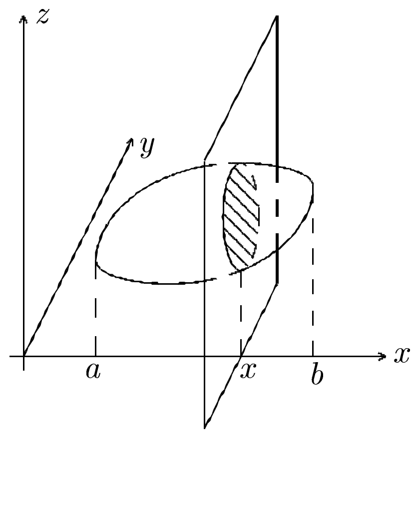
в) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases}$ (площадь петли: для нахождения значений параметра $t = \alpha$ и $t = \beta$, соответствующих точке самопересечения, решить систему уравнений $x(\alpha) = x(\beta),\ y(\alpha) = y(\beta)$ при $\alpha \neq \beta$).

г) $r = a(3 + 2\cos\varphi)$ при $a > 0$;

д) $\varphi = 4r - r^3,\ \varphi = 0$;

е) $x^4 + y^4 = ax^2y$ (выразить $x$ и $y$ через параметр $t,$ положив $y = tx$).

## Т е м а 5. Вычисление объёмов тел по известным поперечным сечениям.




Если тело ограничено конечным числом поверхностей, задаваемых непрерывными функциями, сечение тела плоскостью $x = \text{const}$ непусто при $a \leqslant x \leqslant b$ и $S(x)$ — площадь этого сечения, то объём тела вычисляется по формуле:

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx$$

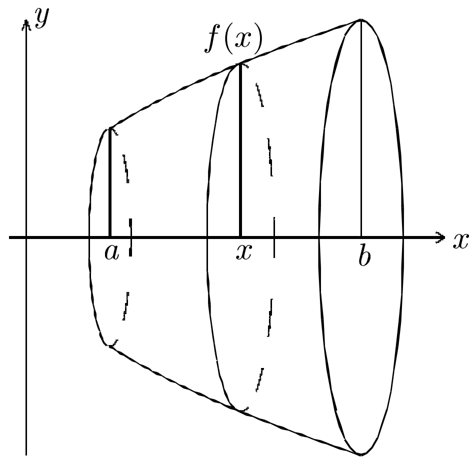
(аналогичные формулы для сечений поверхностями $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$). В частности, если тело образовано вращением вокруг оси

$Ox$ криволинейной трапеции

$$\{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

то сечение плоскостью $x = \mathrm{const}$ — это круг с радиусом $f(x)$, и в этом случае

$$S(x) = \pi\big(f(x)\big)^2, \quad V = \pi \int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx.$$




**Пример 1.** Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями
$x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2 \quad (a > 0).$
Р е ш е н и е. Рассмотрим сечение тела плоскостью $z = \mathrm{const}$ и спроектируем его на плоскость $Oxy$ (так как плоскость $Oxy$ параллельна плоскости $z = \mathrm{const}$, сечение проектируется без искажений). Уравнения, определяющие пересечения плоскости $z = \mathrm{const}$ с поверхностями, имеют вид:

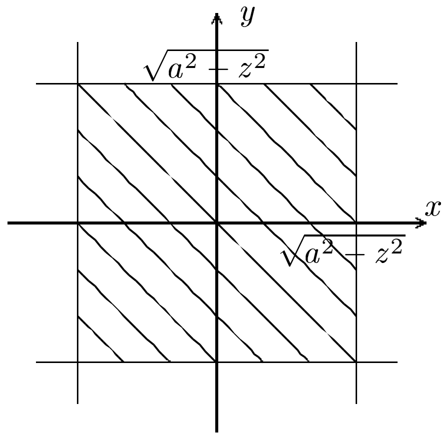
$$1)\ \begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ z = \mathrm{const} \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} y^2 + z^2 = a^2 \\ z = \mathrm{const} \end{cases}.$$

Соответственно, уравнения проекций этих линий на плоскость $Oxy$ имеют вид:

$$1)\ x^2 = a^2 - z^2,\ \text{где } z = \mathrm{const}; \quad 2)\ y^2 = a^2 - z^2,\ \text{где } z = \mathrm{const}.$$

Очевидно, правые части этих уравнений — тоже постоянные величины. Если $a^2 - z^2 > 0$, то геометрическое место точек, удовлетворяющих первому уравнению — это пара вертикальных прямых $x = \pm\sqrt{a^2 - z^2}$, расположенных на расстоянии $\sqrt{a^2 - z^2}$ от начала координат; второе уравнение даёт пару горизонтальных прямых $y = \pm\sqrt{a^2 - z^2}$. Сечение ограничено этими парами прямых, т. е. представляет собой квадрат со стороной $2\sqrt{a^2 - z^2}$. Тогда

$$S(z) = (2\sqrt{a^2 - z^2})^2 = 4(a^2 - z^2).$$




Если $a^2 - z^2 = 0$, то сечение сводится к точке $(0, 0)$, если же $a^2 - z^2 < 0$, то сечение будет пустым множеством. Итак, значения $z$, при которых сечение не пусто:

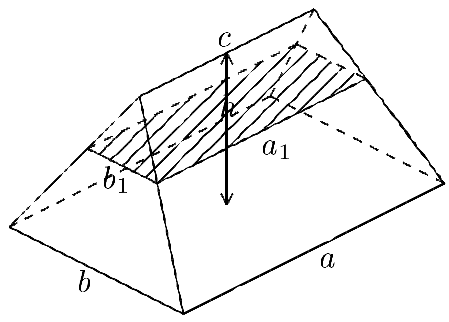
$$a^2 - z^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow -a \leqslant z \leqslant a.$$

Тогда

$$V = \int\limits_{-a}^{a} 4(a^2 - z^2)\, dz = 4\left(a^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{16a^3}{3}.$$

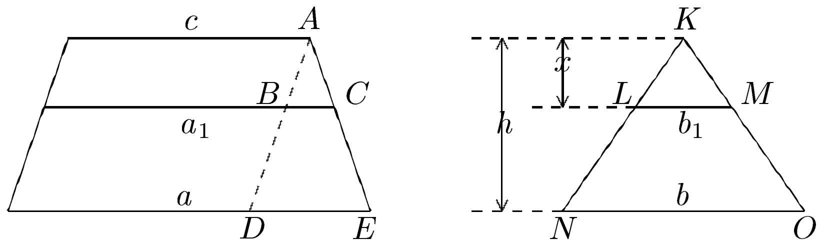
Сечения этого тела плоскостями $x = \mathrm{const}$ и $y = \mathrm{const}$ имеют более сложный вид.

**Пример 2.** Вычислить объём тела, основание которого — прямоугольник со сторонами $a$ и $b$, верхнее ребро длиной $c$ параллельно стороне $a$, высота равна $h$.




Р е ш е н и е. Рассмотрим сечение тела плоскостью, параллельной основанию (тогда сечение будет наиболее простым — представляет собой прямоугольник). Пусть $x$ — расстояние секущей плоскости от верхнего ребра. Из подобия треугольников ($\Delta ABC \sim \Delta ADE$, $\Delta KLM \sim \Delta KNO$, см. проекции на вертикальные плоскости) получаем:

$$\frac{a_1 - c}{a - c} = \frac{x}{h}\,, \quad \frac{b_1}{b} = \frac{x}{h}\,.$$

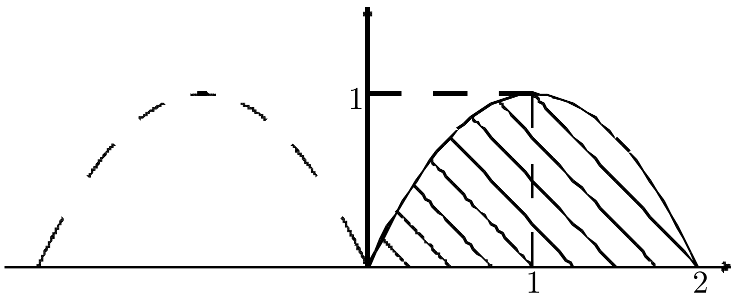



$$a_1 = c + \frac{(a-c)x}{h}\,, \quad b_1 = \frac{bx}{h}\,;$$

$$S(x) = a_1 b_1 = \frac{bx}{h}\left(c + \frac{(a-c)x}{h}\right); \quad V = \int\limits_0^h S(x)\,dx = \int\limits_0^h \left(\frac{bc}{h}x + \frac{b(a-c)}{h^2}x^2\right)dx =$$

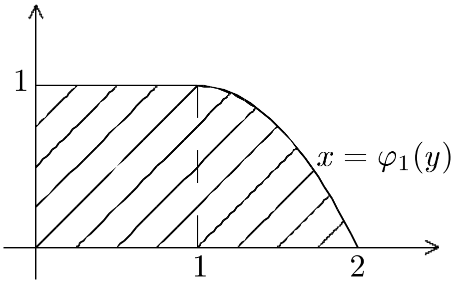
$$= \left(\frac{bc}{2h}x^2 + \frac{b(a-c)}{3h^2}x^3\right)\Bigg|_0^h = \frac{bch}{2} + \frac{b(a-c)h}{3} = \frac{bh(2a+c)}{6}\,.$$

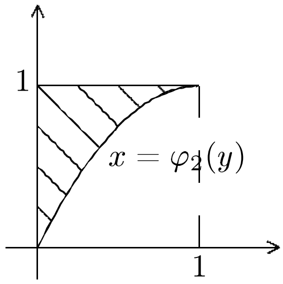
**Пример 3.** Вычислить объём тела, полученного вращением площади, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, вокруг оси $Oy$.




Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой $V = \int\limits_a^b \big(\varphi(y)\big)^2\,dy$.

Искомый объём равен разности объёмов, полученных вращением следующих криволинейных трапеций:




Функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ — это, очевидно, корни уравнения $2x - x^2 = y$, разрешаемого относительно $x$:

$$x^2 - 2x + y = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1-y},\ \varphi_1(y) = 1 + \sqrt{1-y},\ \varphi_2(y) = 1 - \sqrt{1-y}.$$

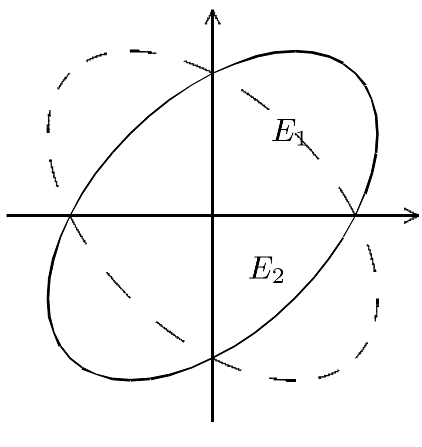
$$V = V_1 - V_2 = \pi \int\limits_0^1 \Big( \big(\varphi_1(y)\big)^2 - \big(\varphi_2(y)\big)^2 \Big)\, dy = \pi \int\limits_0^1 (\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2)\, dy =$$

$$= \pi \int\limits_0^1 2 \cdot 2\sqrt{1-y}\, dy = 4\pi \int\limits_0^1 \sqrt{1-y}\, dy\ . \quad \text{Делаем замену } t = \sqrt{1-y}\ \ :$$

$$y = 1 - t^2, \quad dy = -2t\, dt, \quad y = 0 \iff t = 1, \quad y = 1 \iff t = 0.$$

$$V = 4\pi \int\limits_0^1 \sqrt{1-y}\, dy = 4\pi \int\limits_1^0 t \cdot (-2t)\, dt = 8\pi \int\limits_0^1 t^2\, dt = \frac{8\pi}{3}\ .$$

**Пример 4.** Найти объём тела, полученного вращением площади, ограниченной кривой $x^2 - xy + y^2 = a^2$, вокруг $Ox$.



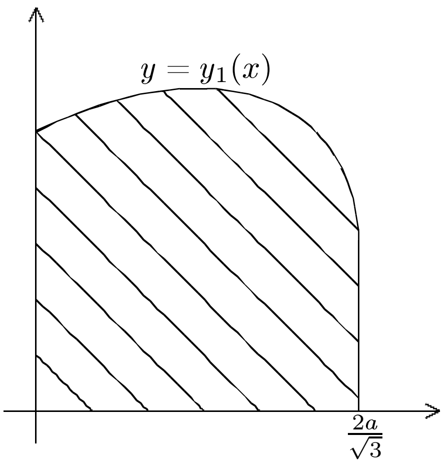

Р е ш е н и е. Кривая представляет собой эллипс с центром в начале координат, но главные оси не совпадают с координатными осями (см. решение примера 2 темы 4). В силу центральной симметрии кривой при вращении получается фигура, симметричная относительно плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной оси $Ox$. Поэтому достаточно вычислить объём, образованный вращением правой половины площади эллипса. Сверху и снизу эту фигуру ограничивают графики функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ — корней квадратного уравнения $y^2 - xy + x^2 - a^2 = 0$:

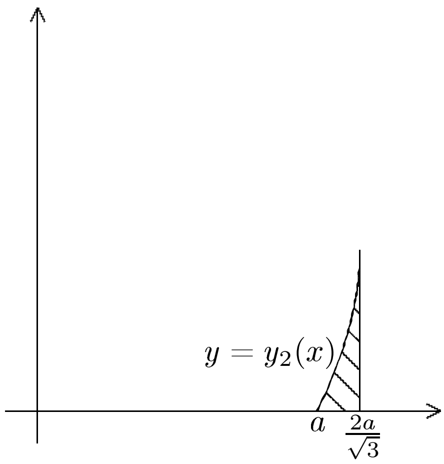
$$y_1(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4(x^2 - a^2)}}{2} = \frac{x + \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2}, \quad y_2(x) = \frac{x - \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2}.$$

При этом $4a^2 - 3x^2 \geqslant 0 \iff x^2 \leqslant 4a^2/3 \iff -2a/\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2a/\sqrt{3}$. При $x \geqslant 0$ имеют место очевидные неравенства:

$$\frac{x + \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2} \geqslant \frac{x - \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2}, \quad \frac{x + \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2} \geqslant \frac{-x + \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2},$$

т. е. $y_1(x) \geqslant |y_2(x)|$. Это означает, что тело, образуемое вращением фигуры $E_2$, содержится внутри тела, образуемого вращением фигуры $E_1$. Поэтому $V = 2(V_1 - V_2)$, где $V_1$ — объём тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = y_1(x)$, прямой $x = 2a/\sqrt{3}$ и осями координат; $V_2$ — объём тела, образованного вращением криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y = y_2(x)$, прямой $x = 2a/\sqrt{3}$ и осью $Ox$:




Кривая $y = y_2(x)$ пересекает ось $Ox$ в точке $(a, 0)$ — это можно получить, подставив $y = 0$ в уравнение эллипса $x^2 - xy + y^2 = a^2$.

$$V_1 = \pi \int\limits_0^{2a/\sqrt{3}} \big(y_1(x)\big)^2 dx = \pi \int\limits_0^{2a/\sqrt{3}} \left(\frac{x + \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int\limits_0^{2a/\sqrt{3}} (x^2 + 2x\sqrt{4a^2 - 3x^2} + 4a^2 - 3x^2)\, dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{2a/\sqrt{3}} (2a^2 - x^2 + x\sqrt{4a^2 - 3x^2})\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{2a/\sqrt{3}} (2a^2 - x^2)\, dx + \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{2a/\sqrt{3}} x\sqrt{4a^2 - 3x^2}\, dx;$$

$$V_2 = \pi \int\limits_a^{2a/\sqrt{3}} \big(y_2(x)\big)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int\limits_a^{2a/\sqrt{3}} (x^2 - 2x\sqrt{4a^2 - 3x^2} + 4a^2 - 3x^2)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int\limits_a^{2a/\sqrt{3}} (2a^2 - x^2)\, dx - \frac{\pi}{2} \int\limits_a^{2a/\sqrt{3}} x\sqrt{4a^2 - 3x^2}\, dx, \quad V = 2(V_1 - V_2) =$$

$$= \pi \left( \int\limits_0^a (2a^2 - x^2)\, dx + \int\limits_0^{2a/\sqrt{3}} x\sqrt{4a^2 - 3x^2}\, dx + \int\limits_a^{2a/\sqrt{3}} x\sqrt{4a^2 - 3x^2}\, dx \right).$$

Два последних интеграла вычисляем при помощи замены $t = \sqrt{4a^2 - 3x^2}$:

$$4a^2 - 3x^2 = t^2, \quad x^2 = (4a^2 - t^2)/3, \quad 2x\, dx = (-2t\, dt)/3.$$

Новые пределы интегрирования:

$$x = 0 \Longleftrightarrow t = 2a \ (a > 0), \quad x = a \Longleftrightarrow t = a, \quad x = 2a/\sqrt{3} \Longleftrightarrow t = 0.$$

$$\int\limits_0^{2a/\sqrt{3}} x\sqrt{4a^2 - 3x^2}\,dx + \int\limits_a^{2a/\sqrt{3}} x\sqrt{4a^2 - 3x^2}\,dx = \int\limits_{2a}^{0} t\left(-\frac{1}{3}t\right)\,dt + \int\limits_a^0 t\left(-\frac{1}{3}t\right)\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^{2a} t^2\,dt + \int\limits_0^a t^2\,dt\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{8a^3}{3} + \frac{a^3}{3}\right) = a^3.$$

$$V = \pi\left(\left(2a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a + a^3\right) = \frac{8\pi a^3}{3}.$$

**Задание 5.** 1. Вычислить объёмы тел, ограниченных поверхностями:

а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ , $\quad z = \dfrac{c}{a}x$ , $\quad z = 0$ (удобны сечения плоскостями $x = \text{const}$) ;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , $\quad x^2 + y^2 = ax$ (сечения плоскостями $x = \text{const}$ , для нахождения площади сечения потребуется ещё одно интегрирование) ;

в) найти объём усечённого конуса, основания которого — эллипсы с полуосями $A$, $B$ и $a$, $b$, а высота равна $h$.

2. Вычислить объёмы тел вращения, ограниченных поверхностями, полученными при вращении следующих кривых:

а) $y = \sin x \quad y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ вокруг оси $Oy$ ;

б) $x^2 + (y - b)^2 = a^2 \quad (0 < a < b)$ вокруг оси $Ox$ ;

в) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ , $\quad y = 0$ вокруг прямой $y = 2a$ (ввести в интеграле новую переменную $t$) ;

г) вывести формулу для объёма тела, образованного вращением фигуры, ограниченной петлей кривой $x = x(t)$ , $\quad y = y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, лежащей по одну сторону от оси $Ox$, вокруг $Ox$ (аналогично выводу формулы для площади петли, см. тему 4) и найти объём тела, образованного вращением петли кривой $x = 2t - t^2$ , $\quad y = 4t - t^3$ вокруг оси $Ox$.

## Т е м а 6. Вычисление длин дуг.

Длина гладкого пути, задаваемого уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ a \leqslant t \leqslant b$, даётся формулой

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,dt\ . \tag{9}$$

В частности, длина кривой $y = f(x)$ на $[a; b]$ вычисляется так: запишем уравнение кривой в виде $x = x,\ y = f(x)$ ($x$ — параметр) и подставим в формулу (9), получим $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx$ . Длина кривой $x = \varphi(y),\ c \leqslant y \leqslant d$ равна

$\int\limits_c^d \sqrt{1+\big(\varphi'(y)\big)^2}\,dy$ (аналогично). Выведем ещё формулу для длины кривой в полярных координатах.

Пусть $r=r(t),\ \varphi=\varphi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$. Тогда

$$x(t)=r(t)\cos\varphi(t)\ ,\quad y(t)=r(t)\sin\varphi(t)\ .$$
$$x'(t)=r'(t)\cos\varphi(t)-r(t)\sin\varphi(t)\varphi'(t)\ ,\quad y'(t)=r'(t)\sin\varphi(t)+r(t)\cos\varphi(t)\varphi'(t)\ .$$

Подставив в формулу (9), получим (после преобразований):

$$l=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\big(r'(t)\big)^2+\big(r(t)\varphi'(t)\big)^2}\,dt\ . \tag{10}$$

**Пример 1.** Найти длину кривой $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y\quad(1\leqslant y\leqslant e)$.
Р е ш е н и е.

$$l=\int\limits_1^e \sqrt{1+\big(\varphi'(y)\big)^2}\,dy=\int\limits_1^e \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\,y-\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy=$$
$$=\int\limits_1^e \sqrt{1+\frac{1}{4}\,y^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}}\,dy=\int\limits_1^e \sqrt{\frac{1}{4}\,y^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}}\,dy=\int\limits_1^e \left(\frac{1}{2}\,y+\frac{1}{2y}\right)\,dy=$$
$$=\left(\frac{1}{4}\,y^2+\frac{1}{2}\ln y\right)\Bigg|_1^e=\frac{e^2+1}{4}\ .$$

**Пример 2.** Найти длину кривой $r=a\,e^{m\varphi}\quad(m>0,\ 0<r\leqslant a)$.
Р е ш е н и е. $0<r\leqslant a\iff 0<e^{m\varphi}\leqslant 1\iff -\infty<\varphi\leqslant 0$.

Параметрические уравнения кривой: $r=a\,e^{m\varphi},\ \varphi=\varphi,\ -\infty<\varphi\leqslant 0$. По формуле (10)

$$l=\int\limits_{-\infty}^0 \sqrt{\big((a\,e^{m\varphi})'\big)^2+\big(a\,e^{m\varphi}\cdot(\varphi)'\big)^2}\,d\varphi=\int\limits_{-\infty}^0 \sqrt{a^2m^2e^{2m\varphi}+a^2e^{2m\varphi}}\,d\varphi=$$
$$=a\sqrt{m^2+1}\int\limits_{-\infty}^0 e^{m\varphi}d\varphi=a\sqrt{m^2+1}\ \frac{e^{m\varphi}}{m}\Bigg|_{-\infty}^0=$$
$$=\frac{a\sqrt{m^2+1}}{m}\,(e^{m\cdot 0}-\lim_{\varphi\to-\infty}e^{m\varphi})=\frac{a\sqrt{m^2+1}}{m}\ .$$

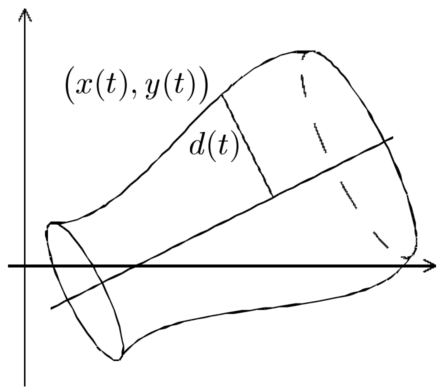
**Задание 6.** 1. Вычислить длины кривых:

а) $y=\ln(\cos x)\quad(0\leqslant x\leqslant a<\pi/2)$ ;
б) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ;  в) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ ;
г) $r=a(1+\cos\varphi)$ ;  д) $\varphi=(r+1/r)/2\quad(1\leqslant r\leqslant 3)$ ;
е) $r=1+\cos t,\ \varphi=t-\operatorname{tg}(t/2)\quad(0\leqslant t\leqslant T<\pi)$ .

## Т е м а 7. Вычисление площадей поверхностей вращения.

Площадь поверхности, полученная вращением кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ вокруг некоторой прямой, равна

$$S = 2\pi \int\limits_a^b d(t)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,dt \qquad (11)$$

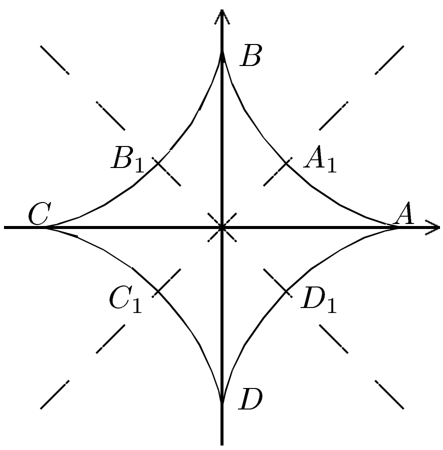



(расстояние от точки кривой $\big(x(t), y(t)\big)$ до оси вращения равно $d(t)$). Если кривая задана в полярных координатах, то аналогично тому, как это было сделано в теме 6, получаем формулу

$$S = 2\pi \int\limits_a^b d(t)\sqrt{\big(r'(t)\big)^2 + \big(r(t)\varphi'(t)\big)^2}\,dt\ . \qquad (12)$$

**Пример 1.** Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг прямой $y = x$.

Р е ш е н и е. Поскольку обе функции $\cos^3 t$, $\sin^3 t$ имеют период $2\pi$, вся кривая получается при изменении $t$ в промежутке $[0; 2\pi]$. Выясним, какими видами симметрии обладает эта кривая (из-за симметрии некоторые части поверхности, образованные при вращении различных частей кривой, совмещаются).




1) $x(\pi - t) = a\cos^3(\pi - t) = -a\cos^3 t = -x(t)$,
$y(\pi - t) = a\sin^3(\pi - t) = a\sin^3 t = y(t)$
(симметрия относительно $Oy$).
2) $x(2\pi - t) = a\cos^3(2\pi - t) = a\cos^3 t = x(t)$,
$y(2\pi - t) = a\sin^3(2\pi - t) = -a\sin^3 t = -y(t)$
(симметрия относительно $Ox$).
3) $x(\pi/2 - t) = a\cos^3(\pi/2 - t) = a\sin^3 t = y(t)$,
$y(\pi/2 - t) = a\sin^3(\pi/2 - t) = a\cos^3 t = x(t)$ (симметрия относительно прямой $y = x$).
4) $x(3\pi/2 - t) = a\cos^3(3\pi/2 - t) = -a\sin^3 t = -y(t)$,
$y(3\pi/2 - t) = a\sin^3(3\pi/2 - t) = -a\cos^3 t = -x(t)$ (симметрия относительно прямой $y = -x$).

В силу симметрии относительно прямой $y = x$ части кривой $A_1BB_1CC_1$ и $C_1DD_1AA_1$ дадут при вращении одну и ту же поверхность, т. е. вся поверхность образована вращением только части $A_1BB_1CC_1$. В силу симметрии относительно прямой $y = -x$ полученная поверхность будет симметрична относительно плоскости, проходящей через эту прямую перпендикулярно оси вращения, т. е. площади поверхностей,образованные частями $A_1BB_1$ и $B_1CC_1$, равны. В итоге находим площадь поверхности, образованной вращением $A_1BB_1$ и умножаем на 2 (заметим, что хотя длины дуг $A_1B$ и $BB_1$ равны в силу симметрии относительно $Oy$, образуемые ими площади поверхностей не равны, так как дуги находятся на разных расстояниях от оси вращения).

Найдём расстояние от точки кривой до оси вращения. Как известно из курса геометрии, если задано "нормальное уравнение прямой" $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ (здесь $\alpha$ — угол между осью $Ox$ и перпендикуляром к прямой из начала координат, $p$ — длина перпендикуляра), то расстояние от точки $(x, y)$ до этой прямой равно:

$$d = |x\cos\alpha + y\sin\alpha - p| \ .$$

Для прямой $y = x:\ p = 0,\ \alpha = 3\pi/4,\ \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ d = \frac{\sqrt{2}}{2}|y-x|$. Так как на участке $A_1BB_1 \quad y(t) \geqslant x(t)$ (кривая выше прямой $y = x$), то окончательно получаем: $d(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}a(\sin^3 t - \cos^3 t)$.

Точка $A_1$ получается при $t = \pi/4$, точка $B_1$ — при $t = 3\pi/4$, поэтому по формуле (11)

$$S = 2S_1 = 2\cdot 2\pi \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d(t)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,dt \ .$$

$$x'(t) = a\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)\ , \quad y'(t) = a\cdot 3\sin^2 t\cos t\ .$$

$$\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 = 9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t) = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t\ ,$$

$$\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} = 3a|\cos t|\sin t \quad (\text{при } \pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/4\ \ \cos t \leqslant 0)\ .$$

$$S = 4\pi\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{2}a(\sin^3 t - \cos^3 t)3a|\cos t|\sin t\,dt =$$

$$= 6\pi a^2\sqrt{2}\left(\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin^3 t - \cos^3 t)\cos t\sin t\,dt + \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/4}(\sin^3 t - \cos^3 t)(-\cos t)\sin t\,dt\right) =$$

$$= 6\pi a^2\sqrt{2}\left(\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^4 t\cos t\,dt - \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^4 t\sin t\,dt - \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/4}\sin^4 t\cos t\,dt + \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/4}\cos^4 t\sin t\,dt\right).$$

В 3-м и 4-м интегралах сделаем замену $y = \pi - t$, тогда:

$$t = \pi/2 \Longleftrightarrow y = \pi/2,\ t = 3\pi/4 \Longleftrightarrow y = \pi/4,\ \cos t = -\cos y,\ \sin t = \sin y,\ dt = -dy$$

$$-\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/4}\sin^4 t\cos t\,dt = -\int\limits_{\pi/2}^{\pi/4}\sin^4 y(-\cos y)\,(-dy) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^4 y\cos y\,dy,$$

$$\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/4}\cos^4 t\sin t\,dt = \int\limits_{\pi/2}^{\pi/4}\cos^4 y\sin y\,(-dy) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^4 y\sin y\,dy$$

Получаем:

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\, dt - \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 t \sin t\, dt + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^4 y \cos y\, dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 y \sin y\, dy =$$

$$= 2 \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\, dt\ , \quad S = 12\pi a^2\sqrt{2} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\, dt\ .$$

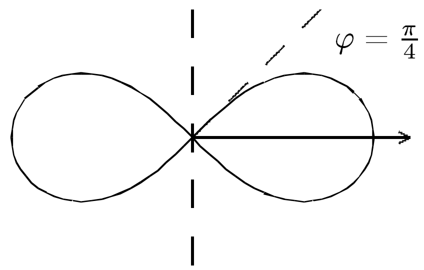
В последнем интеграле сделаем замену $z = \sin t$, $dz = \cos t\, dt$:

$$t = \pi/4 \Longrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t = \pi/2 \Longrightarrow z = 1; \quad S = 12\pi a^2\sqrt{2} \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} z^4\, dz =$$

$$= 12\pi a^2\sqrt{2}\, \frac{z^5}{5}\Big|_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{12\pi a^2\sqrt{2}}{5} \left(1 - \frac{(\sqrt{2})^5}{2^5}\right) =$$

$$= \frac{12\pi a^2\big(2^5\sqrt{2} - (\sqrt{2})^6\big)}{5\cdot 2^5} = \frac{3\pi a^2}{5}\,(4\sqrt{2} - 1)\ .$$

**Пример 2.** Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ вокруг оси $\varphi = \pi/2$.




Р е ш е н и е. Кривая симметрична относительно осей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ (обоснование этого и построение кривой см. в примере 5 темы 4). Поэтому части поверхности, образованные вращением правой и левой частей кривой, совмещаются, а площади поверхностей, образованные вращением верхней и нижней частей кривой, равны. Тогда по формуле (12)

$$S = 2\cdot 2\pi \int\limits_0^{\pi/4} d(\varphi)\sqrt{\big(r'(\varphi)\big)^2 + \big(r(\varphi)\cdot(\varphi)'\big)^2}\, d\varphi\ .$$

В данном случае $d$ — это расстояние до оси $Oy$, т. е. $d = |x| = |r\cos\varphi|$. При $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4 \quad \cos\varphi > 0$, поэтому $d(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi$.

$$r'(\varphi) = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\ , \quad S = 4\pi \int\limits_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\sqrt{\frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} + a^2\cos 2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \cos\varphi\, d\varphi = 4\pi a^2 \sin\varphi\big|_0^{\pi/4} = 2\pi a^2\sqrt{2}\ .$$

**Задание 7.** Найти площади поверхностей,образованных вращением следующих кривых:

а) $y = \operatorname{tg} x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi/4)$ вокруг оси $Ox$ ;

б) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ вокруг оси $y = 2a$ ;

в) $r = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси ;

г) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < b \leqslant a)$ вокруг оси $Oy$ .

### Т е м а 8. Вычисление моментов. Координаты центра масс фигуры.

Статические моменты относительно осей $Ox$ и $Oy$ криволинейной трапеции $\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ (при условии, что масса равномерно распределена по трапеции с плотностью 1, т. е. масса фигуры численно равна её площади) вычисляются по формулам:

$$M_{Ox}^{(1)} = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2 dx \ , \quad M_{Oy}^{(1)} = \int\limits_a^b x \cdot f(x)\, dx \ .$$

Координаты центра масс (центра тяжести) той же трапеции:

$$x_c = \frac{M_{Oy}^{(1)}}{S} \ , \quad y_c = \frac{M_{Ox}^{(1)}}{S} \ , \quad (S \text{ — площадь трапеции}) \ .$$

Аналогично, статические моменты кривой $x = x(t)$ , $\quad y = y(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$ относительно осей $Ox$ и $Oy$ (при условии, что масса равномерно распределена вдоль кривой с плотностью 1, т. е. масса фигуры численно равна её длине) вычисляются по формулам:

$$M_{Ox}^{(1)} = \int\limits_a^b y(t)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt \ , \quad M_{Oy}^{(1)} = \int\limits_a^b x(t)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt \ .$$

Координаты центра масс кривой:

$$x_c = \frac{M_{Oy}^{(1)}}{l} \ , \quad y_c = \frac{M_{Ox}^{(1)}}{l} \ , \quad (l \text{ — длина кривой}) \ .$$

Для моментов инерции относительно осей $Ox$ и $Oy$ имеют место следующие формулы:

а) для криволинейной трапеции: $M_{Ox}^{(2)} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int\limits_a^b \big(f(x)\big)^3 dx,\ M_{Oy}^{(2)} = \int\limits_a^b x^2 \cdot f(x)\, dx;$

б) для кривой: $M_{Ox}^{(2)} = \displaystyle\int\limits_a^b \big(y(t)\big)^2 \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt$ ,

$$M_{Oy}^{(2)} = \int\limits_a^b \big(x(t)\big)^2 \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt \ .$$

З а м е ч а н и я.

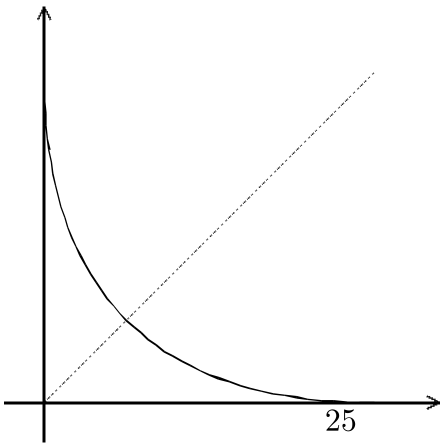
1. Если фигура симметрична относительно некоторой оси, то (при равномерном распределении массы) её центр масс лежит на этой оси.

2. Моменты инерции относительно любой оси положительны.

3. Моменты — аддитивные функции фигуры, т. е. если $E = E_1 \cup E_2, \quad E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то $M(E) = M(E_1) + M(E_2)$.

**Пример 1.** Найти координаты центра масс фигуры $\{(x,y) \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 5\}$.

Р е ш е н и е. Поскольку условие, задающее фигуру, не изменяется при замене $y \to x$, $x \to y$, фигура симметрична относительно оси $x = y$, значит, центр масс лежит на этой оси, т. е. $x_c = y_c$.




$$x_c = \frac{M_{Oy}^{(1)}}{S}\ , \quad M_{Oy}^{(1)} = \int\limits_a^b x \cdot f(x)\, dx\ .$$

$$\sqrt{y} \leqslant 5 - \sqrt{x} \iff 0 \leqslant y \leqslant 25 - 10\sqrt{x} + x.$$

$$y = 0 \iff \sqrt{x} = 5 \iff x = 25.$$

$$M_{Oy}^{(1)} = \int\limits_0^{25} x(25 - 10\sqrt{x} + x)\, dx = \int\limits_0^{25} (25x - 10x^{3/2} + x^2)\, dx =$$

$$= \left(5^2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{5^2} = \frac{5^6}{2} - 4 \cdot 5^5 + \frac{5^6}{3} = \frac{5^5}{6}\ ,$$

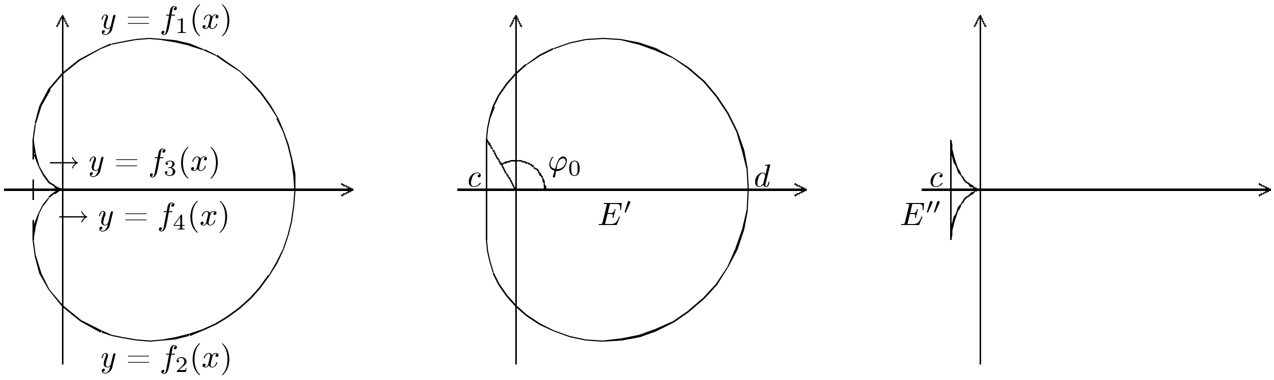
$$S = \int\limits_0^{25} (25 - 10x^{1/2} + x)\, dx = \left(5^2 \cdot x - 2 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{5^2} =$$

$$= 5^4 - 4 \cdot \frac{5^4}{3} + \frac{5^4}{2} = \frac{5^4}{6}\ .$$

Отсюда $x_c = y_c = 5$ .

**Пример 2.** Определить координаты центра масс области, ограниченной кривой $r = a(1 + \cos\varphi) \quad (a > 0)$.

Р е ш е н и е. Поскольку функция имеет период $2\pi$, $r(\varphi + 2\pi) = r(\varphi)$ (в полярных координатах это одна и та же точка), вся кривая получается при изменении $\varphi$, например, от $-\pi$ до $\pi$. Кроме того, $r(\varphi) = r(-\varphi)$, значит, кривая и ограниченная ею область симметричны относительно полярной оси, т. е. центр масс лежит на этой оси: $y_c = 0$, поэтому достаточно вычислить $x_c$.




Поскольку $E$ представляет собой разность множеств $E'$ и $E''$,

$$x_c = \frac{M_{Oy}^{(1)}(E)}{S} \ , \quad M_{Oy}^{(1)}(E) = M_{Oy}^{(1)}(E') - M_{Oy}^{(1)}(E'') \ ,$$

$$M_{Oy}^{(1)}(E') = \int\limits_c^d x\big(f_1(x) - f_2(x)\big)\, dx \ , \quad M_{Oy}^{(1)}(E'') = \int\limits_c^0 x\big(f_3(x) - f_4(x)\big)\, dx \ .$$

В силу симметрии $f_2(x) = -f_1(x)$ , $f_4(x) = -f_3(x)$ , т. е.

$$M_{Oy}^{(1)}(E) = 2\left(\int\limits_c^d x f_1(x)\, dx - \int\limits_c^0 x f_3(x)\, dx\right) \ .$$

Сделаем в интегралах замену переменной: $x = r(\varphi)\cos\varphi = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi$ , $f_1(x) = y = r(\varphi)\sin\varphi = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$ (так же выражается и $f_3(x)$, только значения $\varphi$ из другого промежутка).
В 1-м интеграле: $x = c \longleftrightarrow \varphi = \varphi_0$ , $x = d \longleftrightarrow \varphi = 0$ (см. рис.).
Во 2-м интеграле: $x = c \longleftrightarrow \varphi = \varphi_0$ , $x = 0 \longleftrightarrow \varphi = \pi$ .

$$M_{Oy}^{(1)} = 2\Big(\int\limits_{\varphi_0}^0 a(1+\cos\varphi)\cos\varphi \cdot a(1+\cos\varphi)\sin\varphi \cdot d\big(a(1+\cos\varphi)\cos\varphi\big) -$$

$$-\int\limits_{\varphi_0}^{\pi} a(1+\cos\varphi)\cos\varphi \cdot a(1+\cos\varphi)\sin\varphi \cdot d\big(a(1+\cos\varphi)\cos\varphi\big)\Big) =$$

$$= 2\Big(-\int\limits_0^{\varphi_0} - \int\limits_{\varphi_0}^{\pi}\Big) a^3(1+\cos\varphi)^2 \sin\varphi\cos\varphi\,(1+2\cos\varphi)(-\sin\varphi)\, d\varphi =$$

$$= 2a^3\int\limits_0^{\pi}(\cos\varphi\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 5\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 2\cos^4\varphi\sin^2\varphi)\, d\varphi \ .$$

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^m\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^m\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^m\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi \ .$$

Во 2-м интеграле сделаем замену $\varphi = \pi - t$ :

$$\cos\varphi = \cos(\pi - t) = -\cos t\ , \quad \cos^m\varphi = (-1)^m\cos^m t\ , \quad \sin^2\varphi = \sin^2(\pi - t) = \sin^2 t\ ,$$
$$d\varphi = -dt\ , \quad \varphi = \pi/2 \longleftrightarrow t = \pi/2\ , \quad \varphi = \pi \longleftrightarrow t = 0\ ,$$
$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^m\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \int\limits_{\pi/2}^{0} (-1)^m\cos^m t\sin^2 t(-dt) = (-1)^m\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^m t\sin^2 t\,dt\ .$$

Получаем:

$$\int\limits_0^{\pi}\cos^m\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \begin{cases} 2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^m\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi & \text{при } m \text{ — чётном} \\ 0 & \text{при } m \text{ — нечётном} \end{cases}$$

Тогда

$$M_{Oy}^{(1)} = 4a^3\int\limits_0^{\pi/2}(4\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 2\cos^4\varphi\sin^2\varphi)\,d\varphi =$$
$$= 4a^3\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^2 2\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\sin^2 2\varphi\right)d\varphi = 4a^3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\,d\varphi +$$
$$+4a^3\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = 5a^3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\,d\varphi + a^3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi\,d\varphi\ .$$

В последнем интеграле делаем замену $t = \sin 2\varphi$ , $\quad dt = 2\cos 2\varphi\,d\varphi$ :

$$M_{Oy}^{(1)} = \frac{5a^3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi + \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{0}t^2dt = \frac{5a^3}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{5\pi a^3}{4}\ .$$

Площадь области $E$ вычисляем по формуле для площади сектора в полярных координатах (см. тему 4). Используя симметрию относительно полярной оси, получим:

$$S(E) = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\big(r(\varphi)\big)^2\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi}a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$
$$= a^2\int\limits_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)\,d\varphi = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}\ .$$
$$x_c = \frac{M_{Oy}^{(1)}(E)}{S(E)} = \frac{5\pi a^3/4}{3\pi a^2/2} = \frac{5a}{6}\ , \quad y_c = 0\ .$$

**Задание 8.** Вычислить координаты центров масс и моменты инерции относительно координатных осей следующих фигур:

а) дуги окружности $x = a\cos\varphi$ , $y = a\sin\varphi$ $(|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ ;

б) области $\left\{(x, y) \mid x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0 \ , \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ ;

в) дуги $r = a\,e^{m\varphi}$ $(m > 0)$ при $0 < r \leqslant r_0$ ;

г) области, ограниченной первой аркой циклоиды

$x = a(t - \sin t)$ , $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ и осью $Ox$ .

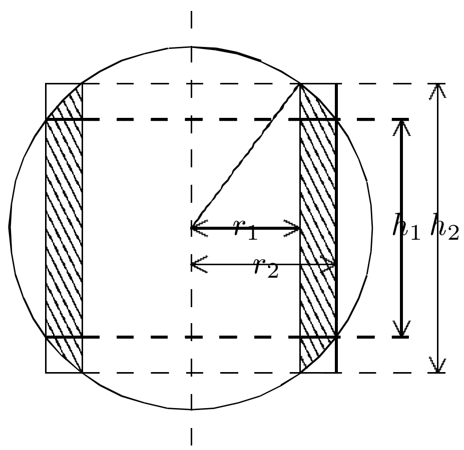
## Т е м а 9. Общая схема применения определённого интеграла. Механические и физические приложения.

Пусть $\Phi$ — аддитивная функция промежутка $(\Phi([p;q]) + \Phi([q;r]) = \Phi([p;r]))$, заданная на множестве промежутков $\{[p;q] \mid [p;q] \subset \langle a;b\rangle\}$, и пусть для любого $x \in \langle a;b\rangle$ существует плотность аддитивной функции $\Phi$ в точке $x$ (т. е. $\lim\limits_{|\Delta|\to 0} \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|}$; здесь $\Delta$ — промежуток, такой, что $x \in \Delta$ , $\Delta \subset \langle a;b\rangle$ , $|\Delta|$ — его длина). Тогда плотность будет функцией точки $x$, заданной на $\langle a;b\rangle$. Если плотность $f$ окажется непрерывной функцией точки, то $\Phi$ представляется в виде интеграла от своей плотности:

$$\text{для любого } [p;q] \subset \langle a;b\rangle \quad \Phi([p;q]) = \int\limits_p^q f(x)\,dx \ .$$

**Пример 1.** Однородный шар плотности $\delta$ с радиусом $R$ вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью $\omega$. Вычислить кинетическую энергию шара.

Р е ш е н и е. Как известно, кинетическая энергия тела с массой $m$, все точки которого движутся со скоростью $v$, равна $mv^2/2$. Различные точки шара движутся с различной линейной скоростью $v = \omega r$, где $r$ — расстояние точки до оси вращения. Поэтому с одинаковой скоростью движутся точки, находящиеся на цилиндрической поверхности, ось которой совпадает с осью вращения. С хорошей точностью можно оценить кинетическую энергию тела, скорости точек которого почти одинаковы. Оценим кинетическую энергию тела, расположенного между цилиндрическими поверхностями с радиусами $r_1$ и $r_2$. Масса тела $m = \delta V$ ($V$ — объём). $V_1 \leqslant V \leqslant V_2$, где $V_1$ — объём цилиндрического кольца с радиусами $r_1$ , $r_2$ и высотой $h_1$, а $V_2$ — объём цилиндрического кольца с радиусами $r_1$ , $r_2$ и высотой $h_2$. Очевидно, $h_2/2 = \sqrt{R^2 - r_1^2}$ , $h_1/2 = \sqrt{R^2 - r_2^2}$ (см. рис.). Тогда




$$V_1 = \pi(r_2^2 - r_1^2)h_1 = \pi(r_2^2 - r_1^2)2\sqrt{R^2 - r_2^2}\ ,$$

$$V_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)h_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)2\sqrt{R^2 - r_1^2}\ .$$

Отсюда получаем оценку для массы:

$$2\pi\delta(r_2^2 - r_1^2)\sqrt{R^2 - r_2^2} \leqslant m \leqslant 2\pi\delta(r_2^2 - r_1^2)\sqrt{R^2 - r_1^2} \tag{13}$$

Так как расстояния точек этого тела до оси вращения удовлетворяют неравенству $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, то скорости $v = \omega r$ удовлетворяют неравенству $\omega r_1 \leqslant v \leqslant \omega r_2$. Из этой оценки для скоростей и оценки (13) для массы получаем, что кинетическая энергия $W = mv^2/2$ удовлетворяет неравенству

$$\pi\delta(r_2^2 - r_1^2)\sqrt{R^2 - r_2^2} \cdot \omega^2 r_1^2 \leqslant W \leqslant \pi\delta(r_2^2 - r_1^2)\sqrt{R^2 - r_1^2} \cdot \omega^2 r_2^2 \,. \tag{14}$$

Если рассматривать кинетическую энергию такого тела как функцию промежутка $[r_1; r_2]$, то она будет аддитивной:

$$W([r_1; r_3]) = W([r_1; r_2]) + W([r_2; r_3])$$

(как известно из курса физики, кинетическая энергия объединения двух непересекающихся тел равна сумме их энергий). Найдём плотность аддитивной функции $W$.

Пусть $\Delta = [r_1; r_2]$, его длина $|\Delta| = r_2 - r_1$ . Из неравенства (14) получаем:

$$\frac{\pi\delta(r_2^2 - r_1^2)\sqrt{R^2 - r_2^2} \cdot \omega^2 r_1^2}{r_2 - r_1} \leqslant \frac{W(\Delta)}{|\Delta|} \leqslant \frac{\pi\delta(r_2^2 - r_1^2)\sqrt{R^2 - r_1^2} \cdot \omega^2 r_2^2}{r_2 - r_1} \,.$$

Сокращаем на $r_2 - r_1$:

$$\pi\delta(r_2 + r_1)\sqrt{R^2 - r_2^2} \cdot \omega^2 r_1^2 \leqslant \frac{W(\Delta)}{|\Delta|} \leqslant \pi\delta(r_2 + r_1)\sqrt{R^2 - r_1^2} \cdot \omega^2 r_2^2 \,. \tag{15}$$

Рассмотрим совокупность промежутков, содержащих фиксированную точку $r$ и перейдём к пределу при условиях $|\Delta| \to 0$, $r \in \Delta$. Очевидно, эти условия равносильны таким: $r_2 - r_1 > 0$, $r_1 \to r$, $r_2 \to r$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. Левая часть неравенства (15) стремится к пределу $\pi\delta \cdot 2r\sqrt{R^2 - r^2} \cdot \omega^2 r^2$, правая часть — к тому же пределу. Отсюда по теореме о зажатой функции ("принцип двух милиционеров"), которая верна для пределов любого вида, существует предел

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \frac{W(\Delta)}{|\Delta|} = 2\pi\delta\omega^2 r^3 \sqrt{R^2 - r^2}$$

(плотность аддитивной функции $W$). Тогда кинетическая энергия всего шара равна:

$$W([0; R]) = \int_0^R 2\pi\delta\omega^2 r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr \,.$$

Сделаем замену переменной: $t = \sqrt{R^2 - r^2} \iff t^2 = R^2 - r^2$. Дифференцируя, получим: $2t\, dt = -2r\, dr$. Концы промежутка интегрирования: $r = 0 \iff t = R$, $r = R \iff t = 0$.

$$W = \pi\delta\omega^2 \int_0^R r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} \cdot 2r\, dr = \pi\delta\omega^2 \int_R^0 (R^2 - t^2) \cdot t \cdot (-2t\, dt) =$$

$$= 2\pi\delta\omega^2 \int_0^R (R^2 t^2 - t^4)\, dt = 2\pi\delta\omega^2 \left( \frac{R^2 t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Bigg|_0^R = \frac{4\pi\delta\omega^2 R^5}{15} \,.$$

**Пример 2.** Найти объём тела, образованного вращением сектора в полярных координатах: $\{(r,\varphi) \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta < \pi/2,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\}$ (вращение вокруг полярной оси; функция $r = r(\varphi)$ непрерывна).

Р е ш е н и е. Пусть $[p;q] \subset [\alpha;\beta]$. Через $V([p;q])$ обозначим объём, образованный вращением сектора, соответствующего $p \leqslant \varphi \leqslant q$.

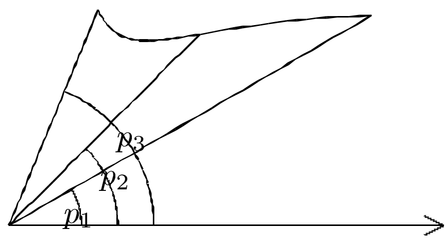



Рис.1

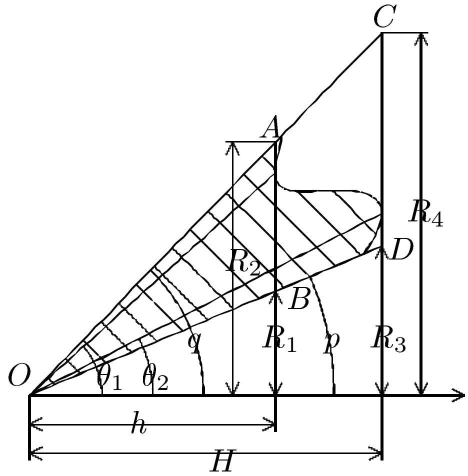



Рис. 2

Объём тела, порождённого объединением секторов, равен сумме объёмов частей этого тела. Поэтому $V([p_1;p_2]) + V([p_2;p_3]) = V([p_1;p_3])$ (см. рис. 1), т. е. имеем аддитивную функцию промежутка. Найдём её плотность, для этого оценим $V([p;q])$. Поскольку

$$\Delta OAB \subset \{(r,\varphi) \mid p \leqslant \varphi \leqslant q,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\} \subset \Delta OCD$$

(см. рис. 2), $V([p;q])$ ограничен снизу и сверху объёмами тел, полученных вращением треугольников $OAB$ и $OCD$. Тело, полученное вращением $\Delta OAB$ — это разность конусов с радиусами $R_2$ и $R_1$ и высотой $h$, соответственно, его объём равен $\frac{1}{3}\pi(R_2^2 - R_1^2)h$. Аналогично, объём тела, полученного вращением $\Delta OCD$, равен $\frac{1}{3}\pi(R_4^2 - R_3^2)H$. Поэтому

$$\frac{1}{3}\pi(R_2^2 - R_1^2)h \leqslant V([p;q]) \leqslant \frac{1}{3}\pi(R_4^2 - R_3^2)H\ .$$

$R_1 = h \cdot \operatorname{tg} p\ ,\quad R_2 = h \cdot \operatorname{tg} q\ ,\quad R_3 = H \cdot \operatorname{tg} p\ ,\quad R_4 = H \cdot \operatorname{tg} q\ ,$ следовательно,

$$\frac{1}{3}\pi h^3(\operatorname{tg}^2 q - \operatorname{tg}^2 p) \leqslant V([p;q]) \leqslant \frac{1}{3}\pi H^3(\operatorname{tg}^2 q - \operatorname{tg}^2 p)\ . \qquad (16)$$

Высота $h$ — это наименьшее значение проекции радиус-вектора $r(\theta)$ на полярную ось (см. рис. 2), т. е. наименьшее значение непрерывной функции $r(\theta)\cos\theta$ на промежутке $[p;q]$. Поэтому по теореме Вейерштрасса $h = r(\theta_1)\cos\theta_1$, где $p \leqslant \theta_1 \leqslant q$. Аналогично, $H = r(\theta_2)\cos\theta_2$, где $p \leqslant \theta_2 \leqslant q$. Подставляя эти значения в (16) и разделив на длину промежутка $|\Delta| = q - p$, получим:

$$\frac{\pi\big(r(\theta_1)\big)^3\cos^3\theta_1(\operatorname{tg}^2 q - \operatorname{tg}^2 p)}{3(q-p)} \leqslant \frac{V(\Delta)}{|\Delta|} \leqslant \frac{\pi\big(r(\theta_2)\big)^3\cos^3\theta_2(\operatorname{tg}^2 q - \operatorname{tg}^2 p)}{3(q-p)}\ . \qquad (17)$$

По теореме Лагранжа $\operatorname{tg}^2 q - \operatorname{tg}^2 p = (\operatorname{tg}^2)'(\theta_3)(q-p) = 2\operatorname{tg}\theta_3 \cdot \frac{1}{\cos^2\theta_3}(q-p)$, где $p < \theta_3 < q$. Подставляя в (17) и сокращая на $q-p$, получим:

$$\frac{\pi\big(r(\theta_1)\big)^3\cos^3\theta_1 \cdot 2\sin\theta_3}{3\cos^3\theta_3} \leqslant \frac{V(\Delta)}{|\Delta|} \leqslant \frac{\pi\big(r(\theta_2)\big)^3\cos^3\theta_2 \cdot 2\sin\theta_3}{3\cos^3\theta_3}\ . \tag{18}$$

Рассмотрим промежутки $\Delta = [p;q]$ , содержащие фиксированную точку $\varphi$, и перейдем в неравенстве (18) к пределу при $|\Delta| \to 0$ . Тогда $p \to \varphi$ и $q \to \varphi$ (см. в примере 1). Далее, поскольку $p \leqslant \theta_1 \leqslant q$ и $p < \theta_3 < q$, то $\theta_1, \theta_3 \to \varphi$. В силу непрерывности функций $r(\theta)$ , $\cos\theta$ , $\sin\theta$ тогда $r(\theta_1) \to r(\varphi)$ , $\cos\theta_1 \to \cos\varphi$ , $\cos\theta_3 \to \cos\varphi$ , $\sin\theta_3 \to \sin\varphi$ . Тогда существует предел левой части неравенства (18) и равен $\frac{1}{3}\pi\big(r(\varphi)\big)^3\cos^3\varphi\frac{2\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{2\pi}{3}\big(r(\varphi)\big)^3\sin\varphi$. Аналогичными рассуждениями (поскольку $p \leqslant \theta_2 \leqslant q$, $\theta_2 \to \varphi \Longrightarrow r(\theta_2) \to r(\varphi)$ и $\cos\theta_2 \to \cos\varphi$) получим, что предел правой части неравенства тоже равен $\frac{2\pi}{3}\big(r(\varphi)\big)^3\sin\varphi$. Тогда существует плотность

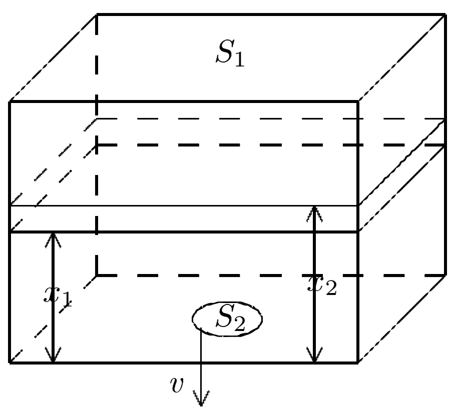
$$\lim_{|\Delta|\to 0}\frac{V(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{2\pi}{3}\big(r(\varphi)\big)^3\sin\varphi \quad \text{и} \quad V([\alpha;\beta]) = \frac{2\pi}{3}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\big(r(\varphi)\big)^3\sin\varphi\, d\varphi\ .$$

З а м е ч а н и е. Эту же формулу (аналогичными рассуждениями) можно получить и для $[\alpha;\beta] \subset (\pi/2;\pi]$, т. е. на самом деле она верна для $[\alpha;\beta] \subset [0;\pi]$.

**Пример 3.** Бассейн площадью $S_1$ и глубиной $H$ доверху наполнен водой. В дне бассейна открывается отверстие площадью $S_2$, через которое вода вытекает, при этом скорость вытекающей струи при глубине $x$ равна $c\sqrt{2gx}$ ($g$ — ускорение силы тяжести, $c$ — коэффициент, зависящий от формы отверстия). Вычислить время, за которое вытечет вся вода.

Р е ш е н и е. Обозначим через $T([x_1;x_2])$ время, за которое уровень воды понизится с $x_2$ до $x_1$. Очевидно, что $T([x_1;x_3]) = T([x_1;x_2]) + T([x_2;x_3])$, т. е. $T$ — аддитивная функция промежутка. Оценим $T([x_1;x_2])$ сверху и снизу.

Объём соответствующего слоя воды равен $S_1(x_2-x_1)$. Оценим объём воды, вытекающей из отверстия за одну секунду. Так как скорость струи удовлетворяет неравенствам $c\sqrt{2gx_1} \leqslant v \leqslant c\sqrt{2gx_2}$ , объём вытекающей за секунду воды (равный произведению площади отверстия на скорость) оценивается так:




$$c\sqrt{2gx_1}\cdot S_2 \leqslant V_{\text{сек}} \leqslant c\sqrt{2gx_2}\cdot S_2\ .$$

Тогда время $T([x_1;x_2])$ оценивается как результат деления объёма слоя воды на величину объёма воды, вытекающей за одну секунду:

$$\frac{S_1(x_2-x_1)}{c\sqrt{2gx_2}\cdot S_2} \leqslant T([x_1;x_2]) \leqslant \frac{S_1(x_2-x_1)}{c\sqrt{2gx_1}\cdot S_2}\ .$$

Поделим на длину промежутка $|\Delta| = x_2 - x_1$:

$$\frac{S_1}{c\sqrt{2gx_2}\cdot S_2} \leqslant \frac{T(\Delta)}{|\Delta|} \leqslant \frac{S_1}{c\sqrt{2gx_1}\cdot S_2}\ .$$

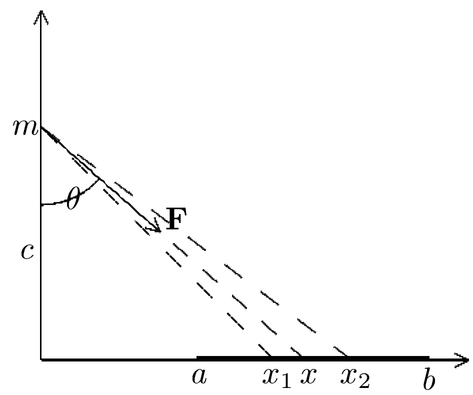
Рассмотрим промежутки, содержащие фиксированную точку $x$. При переходе к пределу $(x \in [x_1; x_2],\ |\Delta| \to 0)$ $\quad x_1 \to x$ и $x_2 \to x$, поэтому пределы правой и левой частей последнего неравенства равны, т. е. существует плотность:

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \frac{T(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{S_1}{c\sqrt{2gx}\cdot S_2}\ .$$

Тогда время полного вытекания воды

$$T = T([0;H]) = \int\limits_0^H \frac{S_1\,dx}{S_2\cdot c\sqrt{2gx}} = \frac{S_1}{S_2\cdot c\sqrt{2g}}\cdot 2x^{1/2}\Big|_0^H = \frac{S_1}{S_2\cdot c}\sqrt{\frac{2H}{g}}\ .$$

**Пример 4.** Вычислить силу притяжения отрезком линейной плотности $\sigma$ материальной точки с массой $m$, расположенной на расстоянии $c$ от прямой, содержащей отрезок. Концы отрезка имеют координаты $a$ и $b$ $\quad (a < b)$, основание перпендикуляра из точки на прямую имеет координату 0.




Р е ш е н и е. По закону Ньютона сила притяжения между двумя точечными массами $m_1$ и $m_2$ равна $G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, где $G$ — гравитационная постоянная, $r$ — расстояние между точками, и направлена по прямой, соединяющей точки. Обозначим силу притяжения массы $m$ к отрезку от $x_1$ до $x_2$ через $\mathbf{F}([x_1; x_2])$. Тогда, по свойствам равнодействующей, $\mathbf{F}([x_1; x_3]) = \mathbf{F}([x_1; x_2]) + \mathbf{F}([x_2; x_3])$. Поскольку векторы складываются покоординатно, возникают две аддитивные скалярные функции промежутка, $F_x$ и $F_y$, которые и будем выражать в виде интегралов (в данном случае величина силы $|\mathbf{F}|$ не будет аддитивной функцией промежутка). Масса отрезка $[x_1; x_2]$ равна $\sigma(x_2 - x_1)$, расстояние от точки $m$ до точек этого отрезка лежит в границах: $\sqrt{c^2 + x_1^2} \leqslant r \leqslant \sqrt{c^2 + x_2^2}$. Отсюда для $|\mathbf{F}|$ получаем следующие границы:

$$G\frac{m\sigma(x_2 - x_1)}{c^2 + x_2^2} \leqslant |\mathbf{F}| \leqslant G\frac{m\sigma(x_2 - x_1)}{c^2 + x_1^2}\ . \tag{19}$$

Проекции $F_x = |\mathbf{F}|\sin\theta$ , $\quad F_y = -|\mathbf{F}|\cos\theta$ , $\quad \sin\theta = x/r$ , $\quad \cos\theta = c/r$ , где $x$ — координата той точки отрезка $[x_1; x_2]$, к которой направлена сила $|\mathbf{F}|$. Тогда

$$\frac{x_1}{\sqrt{c^2 + x_2^2}} \leqslant \sin\theta \leqslant \frac{x_2}{\sqrt{c^2 + x_1^2}}\ , \quad \frac{c}{\sqrt{c^2 + x_2^2}} \leqslant \cos\theta \leqslant \frac{c}{\sqrt{c^2 + x_1^2}}\ . \tag{20}$$

Из оценок (19) и (20) получаем:

$$\frac{Gm\sigma(x_2-x_1)x_1}{(c^2+x_2^2)^{3/2}} \leqslant F_x([x_1;x_2]) \leqslant \frac{Gm\sigma(x_2-x_1)x_2}{(c^2+x_1^2)^{3/2}} ,$$
$$-\frac{Gm\sigma(x_2-x_1)c}{(c^2+x_1^2)^{3/2}} \leqslant F_y([x_1;x_2]) \leqslant -\frac{Gm\sigma(x_2-x_1)c}{(c^2+x_2^2)^{3/2}} .$$

Рассмотрим промежутки $\Delta = [x_1;x_2]$, содержащие фиксированную точку $x$. Длина $|\Delta| = x_2 - x_1$, поэтому

$$\frac{Gm\sigma x_1}{(c^2+x_2^2)^{3/2}} \leqslant \frac{F_x(\Delta)}{|\Delta|} \leqslant \frac{Gm\sigma x_2}{(c^2+x_1^2)^{3/2}} , \quad -\frac{Gm\sigma c}{(c^2+x_1^2)^{3/2}} \leqslant \frac{F_y(\Delta)}{|\Delta|} \leqslant -\frac{Gm\sigma c}{(c^2+x_2^2)^{3/2}} .$$

В пределе при $|\Delta| \to 0$ , $x_1 \to x$ , $x_2 \to x$ получаем:

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \frac{F_x(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{Gm\sigma x}{(c^2+x^2)^{3/2}} , \quad \lim_{|\Delta|\to 0} \frac{F_y(\Delta)}{|\Delta|} = -\frac{Gm\sigma c}{(c^2+x^2)^{3/2}} .$$

Тогда проекции силы притяжения к отрезку $[a;b]$ равны:

$$F_x([a;b]) = \int\limits_a^b \frac{Gm\sigma x}{(c^2+x^2)^{3/2}}\,dx , \quad F_y([a;b]) = -\int\limits_a^b \frac{Gm\sigma c}{(c^2+x^2)^{3/2}}\,dx .$$

Вычисляем эти интегралы с помощью замены $x = c\cdot \operatorname{tg} t$ $(-\pi/2 < t < \pi/2)$:

$$t = \operatorname{arctg}\frac{x}{c} , \quad (c^2+x^2)^{3/2} = \big(c^2(1+\operatorname{tg}^2 t)\big)^{3/2} = \left(\frac{c^2}{\cos^2 t}\right)^{3/2} = \frac{c^3}{\cos^3 t}$$
$$\text{(поскольку } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{ , то } \cos t > 0) ; \quad dx = \frac{c\,dt}{\cos^2 t} ;$$
$$x = a \Longleftrightarrow t = t_1 = \operatorname{arctg}\frac{a}{c} , \quad x = b \Longleftrightarrow t = t_2 = \operatorname{arctg}\frac{b}{c} ;$$
$$F_x([a;b]) = \int\limits_{t_1}^{t_2} Gm\sigma c\cdot \operatorname{tg} t\cdot\frac{\cos^3 t}{c^3}\cdot\frac{c\,dt}{\cos^2 t} = \frac{Gm\sigma}{c}\int\limits_{t_1}^{t_2}\sin t\,dt = \frac{Gm\sigma}{c}(\cos t_1 - \cos t_2) ,$$
$$F_y([a;b]) = -\int\limits_{t_1}^{t_2} Gm\sigma c\cdot\frac{\cos^3 t}{c^3}\cdot\frac{c\,dt}{\cos^2 t} = -\frac{Gm\sigma}{c}\int\limits_{t_1}^{t_2}\cos t\,dt = \frac{Gm\sigma}{c}(\sin t_1 - \sin t_2) .$$
$$\cos t_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+(a/c)^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} , \quad \cos t_2 = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} ;$$
$$\sin t_1 = \frac{\operatorname{tg} t_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t_1}} = \frac{a/c}{\sqrt{1+(a/c)^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} , \quad \sin t_2 = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} .$$

Отсюда

$$F_x = \frac{Gm\sigma}{c}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\right) , \quad F_y = \frac{Gm\sigma}{c}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}\right) .$$

По проекциям находим $|\mathbf{F}| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$ .

**Задание 9.**

1. Вычислить работу, необходимую для подъёма тела массы $m$ на высоту $h$ над поверхностью Земли (с учетом того, что вес тела не постоянен, а обратно пропорционален квадрату расстояния до центра Земли). Радиус Земли равен $R$, ускорение свободного падения на поверхности Земли равно $g$.

2. Определить силу давления жидкости плотности $\delta$ на вертикальную стенку в форме полукруга радиуса $a$ (диаметр полукруга находится на поверхности жидкости). Гидростатическое давление на глубине $x$ равно $p = g\delta x$.

3. Цилиндр с длиной $l$ и площадью основания $S$ заполнен газом под давлением $p_0$. Вычислить работу, которую надо совершить, чтобы уменьшить объём газа в два раза, если температура газа остаётся постоянной (при этих условиях выполняется закон Бойля-Мариотта: $p \cdot V =$const.).

4. Определить, с какой силой притягивает круглая пластинка с радиусом $R$, постоянной поверхностной плотностью $\sigma$ материальную точку массы $m$, находящуюся на перпендикуляре к плоскости пластинки, проходящем через её центр. Расстояние точки от центра пластинки равно $a$.

5. Вычислить координаты центра масс полушара

$$\{(x, y, z) \mid z \geqslant 0 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2\}.$$

У к а з а н и е. $z_c = M^{(1)}_{Oxy}/M$ , где $M^{(1)}_{Oxy}$ — статический момент полушара относительно плоскости $Oxy$, $M$ — масса (в данном случае численно равная объёму).

## О т в е т ы

Задание 1. 1а) $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$ . 1б) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ . 1в) $200\sqrt{2}$ . 1г) $\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}$ , если $\alpha < 0$ ; $\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{3}$, если $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ ; $\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}$ , если $\alpha > 1$ .
Задание 2. а) $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ . б) 1. в) $(-1)^n\left(\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right)$ .
Задание 3. 1а) $\frac{1}{6}$ . 1б) $\frac{\pi^2}{4}$ . 1в) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ .
Задание 4. а) $4\frac{1}{2}$ . б) $\pi a^2$ . в) $\frac{8}{15}$ . г) $11\pi a^2$ . д) $4\frac{4}{15}$ . е) $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$ .
Задание 5. 1а) $\frac{2}{3}abc$ . 1б) $\frac{2}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$ .1в) $\frac{\pi h}{6}\left((2A + a)B + (A + 2a)b\right)$ . 2а) $2\pi^2$ . 2б) $2\pi^2 a^2 b$ . 2в) $7\pi^2 a^3$ . 2г) $\frac{64\pi}{35}$ .
Задание 6. а) $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$ . б) $6a$ . в) $8a$ . г) $8a$ . д) $2 + \frac{1}{2}\ln 3$ . е) $T$ .
Задание 7.

$$\text{а) } \pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right) \ . \quad \text{б) } \frac{32}{3}\pi a^2 \ .$$

$$\text{в) } \frac{32}{5}\pi a^2 \ . \quad \text{г) } 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \ .$$

Задание 8.

а) $x_c = \dfrac{a\sin\alpha}{\alpha}$ , $y_c = 0$ ;  $M_{Ox}^{(2)} = a^3\left(\alpha - \dfrac{\sin 2\alpha}{2}\right)$ , $M_{Oy}^{(2)} = a^3\left(\alpha + \dfrac{\sin 2\alpha}{2}\right)$ .

б) $x_c = \dfrac{4a}{3\pi}$ , $y_c = \dfrac{4b}{3\pi}$ ;  $M_{Ox}^{(2)} = \dfrac{\pi a b^3}{16}$ , $M_{Oy}^{(2)} = \dfrac{\pi a^3 b}{16}$ .

в) $\varphi_c = \varphi_0 - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2m}$ , $r_c = \dfrac{m r_0}{\sqrt{1+4m^2}}$ ;

$M_{Ox}^{(2)} = r_0^3\sqrt{1+m^2}\left(\dfrac{1}{6m} - \dfrac{1}{9m^2+4}\left(\dfrac{3m}{2}\cos\left(\dfrac{2}{m}\ln\dfrac{r_0}{a}\right) + \sin\left(\dfrac{2}{m}\ln\dfrac{r_0}{a}\right)\right)\right)$ .

г) $x_c = \pi a$ , $y_c = \dfrac{5a}{6}$ ;  $M_{Ox}^{(2)} = \dfrac{35\pi a^4}{12}$ .

Задание 9.

1) $A = \dfrac{mgRh}{R+h}$ .  2) $F = \dfrac{2}{3} g\delta a^3$ .  3) $A = p_0 S l \cdot \ln 2$ .

4) $F = 2\pi G m\sigma\left(1 - \dfrac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)$ .  5) $x_c = 0$ , $y_c = 0$ , $z_c = \dfrac{3}{8}a$ .