ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

А.Н. Подкорытов

Определённый интеграл — это способ оценить функцию «в целом»[*)], сопоставив ей число, характеризующее «среднее» значение функции (чем больше функция, тем больше это число). Известны несколько определений интеграла от функции по промежутку. Если функция непрерывна, а промежуток конечный и замкнутый, то все эти определения приводят к одному и тому же.

Здесь будет использовано определение, основанное на геометрических соображениях, связанных с понятием площади плоской фигуры. Преимущество такого подхода в простоте и наглядности. Недостаток — строгое определение понятия «площадь множества» требует немалых усилий. Мы обойдёмся минимальными свойствами площади, которые примем на веру (как и существование площади).

Что же такое площадь? Пусть $\mathcal{E} = \big\{E \,|\, E \subset \mathbb{R}^2\big\}$ — система всех подмножеств плоскости $\mathbb{R}^2$ (всевозможные плоские «фигуры»).

Определение. Площадью называется функция $\sigma : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ со свойствами

$$\begin{cases} \sigma(\langle a,b\rangle \times \langle A,B\rangle) = (b-a)(B-A) & \text{для любого прямоугольника } \langle a,b\rangle \times \langle A,B\rangle; \\ \sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2), & \text{если } E = E_1 \cup E_2 \text{ и } E_1 \cap E_2 = \varnothing. \end{cases}$$

Таким образом, площадь это, с одной стороны, привычный математический объект — функция. Но с другой стороны, она задана на довольно необычном множестве. Аргументом этой функции является не число или вектор, а подмножество плоскости.

Первое свойство площади называется *нормировкой*, а второе — *аддитивностью*. Если $\widetilde{E} \subset E \subset \mathbb{R}^2$, то множество E распадается на непересекающиеся части $\widetilde{E}$ и $E \setminus \widetilde{E}$. Так как все значения площади неотрицательны, то $\sigma(E) = \sigma(\widetilde{E}) + \sigma(E \setminus \widetilde{E}) \geqslant \sigma(\widetilde{E})$. Поэтому площадь *монотонна*:

$$\sigma(\widetilde{E}) \leqslant \sigma(E), \quad \text{если} \quad \widetilde{E} \subset E \subset \mathbb{R}^2.$$

Отсюда сразу следует, что площадь ограниченной фигуры конечна, а множество, содержащееся в горизонтальном или вертикальном отрезке, имеет нулевую площадь.

В школьном курсе используются и другие свойства площади, например, равенство площадей конгруэнтных фигур. Однако, для построения интеграла они не потребуются. Более того, для наших целей достаточны такие три свойства — нормировка, монотонность и *ослабленная аддитивность*: если вертикальная прямая разделяет множество на левую и правую части E_-, E_+, то $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$. На втором курсе будет доказано, что функция σ с такими свойствами существует.

[*)] Латинское слово «integer» означает «целый».

Замечание. Не всё так просто, как кажется на первый взгляд. Оказывается, вопреки интуитивному представлению, площадь не единственна (более того, площадей бесконечно много). К счастью, это может проявиться лишь на очень «плохих» множествах, построить которые непросто. Ни в каких приложениях такие патологические «фигуры» не встречаются. Как мы вскоре убедимся, существует очень широкий класс множеств, каждому из которых все площади (т.е. монотонные функции σ, подчинённые нормировке и ослабленной аддитивности) приписывают одно и то же значение.

Для дальнейшего нам потребуются два простых понятия. Каждой функции f, заданной на каком-то множестве, сопоставим две новые функции $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$ — *положительная* и *отрицательная части функции* f. Отметим их очевидные свойства:

$$f_+, f_- \geqslant 0; \quad f = f_+ - f_-; \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Подграфиком неотрицательной функции f, заданной на множестве X, $X \subset \mathbb{R}$, называется множество

$$P_f = \bigl\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x \in X,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\bigr\}.$$

Подграфик сужения функции f на множество A, $A \subset X$, будем обозначать символом $P_f(A)$. Ясно, что подграфик — некоторая фигура на плоскости, т.е. $P_f(A) \in \mathcal{E}$.

Теперь у нас всё готово для принятия основного определения.

Определение. Пусть $[a, b] \subset X \subset \mathbb{R}$ и функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$. *Интегралом* от f по промежутку $[a, b]$ называется число $\sigma(P_{f_+}([a, b])) - \sigma(P_{f_-}([a, b]))$, которое обозначается символом $\int_a^b f$.

В частности, если $f \geqslant 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f = \sigma(P_f([a, b]))$. Таким образом, интеграл от неотрицательной и непрерывной на промежутке функции имеет простой геометрический смысл — это площадь части подграфика, лежащей над этим промежутком. Следовательно, если $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a, b]$, то $0 \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$. Здесь подразумевается, что $a \leqslant b$. В случае $a = b$, подграфик вырождается в вертикальный отрезок, площадь которого равна нулю. Поэтому $\int_a^a f = 0$. Разумеется, это равенство справедливо не только для неотрицательных, но и для всех непрерывных функций. Отметим ещё, что в случае, когда функция постоянна на $[a, b]$, скажем $f \equiv C$, значение интеграла очевидно: $\int_a^b f = (b - a)C$. Ясно также, что умножение функции f на -1 меняет местами её положительную и отрицательную части, так что $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$.

Принятое экономное обозначение $\int_a^b f$ удобно в теоретических рассуждениях, но может вызвать затруднения при вычислениях. Многие функции задаются формулами, которые естественно было бы использовать под знаком интеграла вместо символа f. Однако в таких формулах зачастую используются параметры, что может привести к путанице. Например, формула $\cos(xy^2)$ может задавать и функцию $x \mapsto \cos(xy^2)$, и функцию $y \mapsto \cos(xy^2)$. Чтобы избежать возникающих затруднений, используют более подробное обозначение интеграла: $\int_a^b f(x)\,dx$. Здесь дополнительный элемент dx указывает, что рассматривается «функция от аргумента x», т.е. функция $x \mapsto f(x)$. В выборе символа, указывающего на аргумент функции, есть большая свобода (но, конечно, не следует брать уже «занятые» символы— a, b, f, d или $\int$). Таким образом,

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(щ)\,dщ$ (это, разумеется, не теорема, а соглашение об обозначении). В то же время для любого $\widetilde{x} \in [a,b]$ интеграл $\int_a^b f(\widetilde{x})\,dx$ равен $(b-a)f(\widetilde{x})$ (здесь интегрируется постоянная функция).

Из ослабленной аддитивности площади сразу вытекает важное свойство интеграла.

Теорема (АДДИТИВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА). *Если функция f непрерывна на промежутке $[a,b]$, то для любого $c \in [a,b]$ справедливо равенство*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

С помощью индукции этот результат можно легко обобщить:

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_n}^b f, \qquad \text{если} \quad a \leqslant c_1 \ldots \leqslant c_n \leqslant b.$$

Теорема (О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ). *Если функция f непрерывна на промежутке $[a,b]$, то найдётся такое число $c \in [a,b]$, что*

$$\int_a^b f = (b-a)f(c).$$

С геометрической точки зрения это утверждение почти очевидно: если функция f неотрицательна, то площадь подграфика равна площади прямоугольника с тем же основанием и некоторой «промежуточной» высотой $f(c)$, т.е. подграфик можно так разрезать горизонтальной прямой, что его часть, лежащая над ней, будет иметь ту же площадь, что и фигура, лежащая под прямой, но выше графика функции.

Для доказательства нам потребуется лемма, представляющая и самостоятельный интерес.

Лемма (ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА). *Если непрерывная на промежутке $[a,b]$ функция f удовлетворяет двойному неравенству $A \leqslant f(x) \leqslant B$* для всех x из $[a,b]$, то

$$(b-a)A \leqslant \int_a^b f \leqslant (b-a)B.$$

Доказательство. Проверим лишь правое неравенство, поскольку левое доказывается аналогично. Сначала рассмотрим случай $B \geqslant 0$. Тогда $f_+ = \max\{f, 0\} \leqslant B$ и, следовательно, подграфик P_{f_+} содержится в прямоугольнике $[a,b] \times [0,B]$. Поэтому $\sigma(P_{f_+}) \leqslant (b-a)B$, а это даёт нужное неравенство:

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) \leqslant \sigma(P_{f_+}) \leqslant (b-a)B.$$

Если же $B < 0$, то $f < 0$, так что $f_+ \equiv 0$ и $f = -f_-$. Тогда $-|B| = B \geqslant f = -f_-$, откуда $f_- \geqslant |B|$. Это неравенство означает, что подграфик P_{f_-} содержит прямоугольник $[a,b] \times [0, |B|\,]$. Поэтому $\sigma(P_{f_-}) \geqslant (b-a)|B|$ и мы вновь получаем нужное неравенство:

$$\int_a^b f = \sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-}) = -\sigma(P_{f_-}) \leqslant -(b-a)|B| = (b-a)B.$$

Доказательство теоремы. Если $a = b$, то нечего доказывать — обе части проверяемого равенства равны нулю. Далее считаем, что $a < b$. Воспользуемся леммой, взяв $A = \min f$ и $B = \max f$ (по теореме Вейерштрасса функция f достигает своих наименьшего и наибольшего на $[a, b]$ значений). Мы получим

$$(b-a)\min f \leqslant \int_a^b f \leqslant (b-a)\max f, \quad \text{то есть} \quad \min f \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant \max f.$$

Следовательно, число $I_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$ принадлежит промежутку $[\min f, \max f] = f([a, b])$ (последнее равенство справедливо по теореме о сохранении промежутка). Поэтому I_f — одно из значений функции f на $[a, b]$, т.е. существует такой аргумент $c \in [a, b]$, что $f(c) = I_f$. Осталось заметить, что это равенство совпадает с утверждением теоремы.

Замечание. Число I_f называют средним значением функции f на промежутке $[a, b]$. Как мы убедились, оно заключено между $\min f$ и $\max f$.

Определение. Пусть функция f непрерывна на промежутке $[a, b]$. Тогда функция $\varPhi : [a, b] \to \mathbb{R}$, действующая по правилу

$$\varPhi(x) = \int_a^x f \quad (x \in [a, b]),$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Следующая теорема устанавливает важный результат: у каждой непрерывной на промежутке функции имеется первообразная.

Теорема (Барроу). *В условиях определения функция $\varPhi$ является первообразной функции f на промежутке $[a, b]$:*

$$\varPhi'(x) = f(x) \quad \textit{для любого } x \textit{ из } [a, b].$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $x \in [a, b]$ и докажем, что $R(y) = \frac{\varPhi(y)-\varPhi(x)}{y-x} \underset{y \to x}{\longrightarrow} f(x)$ (всюду далее $y \in [a, b]$ и $y \neq x$). В силу аддитивности интеграла при $y > x$ дробь $R(y)$ можно записать в виде

$$R(y) = \frac{\varPhi(y) - \varPhi(x)}{y - x} = \frac{1}{y-x}\Big(\int_a^y f - \int_a^x f\Big) = \frac{1}{y-x}\int_x^y f.$$

Справа стоит среднее значение функции f на промежутке $[x, y]$. Поэтому существует такое число $c_y \in [x, y]$, что $R(y) = f(c_y)$. Если же $y < x$, то по тем же соображениям

$$R(y) = \frac{\varPhi(x) - \varPhi(y)}{x - y} = \frac{1}{x-y}\Big(\int_a^x f - \int_a^y f\Big) = \frac{1}{x-y}\int_y^x f = f(c_y),$$

где $c_y \in [y, x]$. В обоих случаях мы получаем равенство $R(y) = f(c_y)$, причём $c_y \in [a, b]$ и $|c_y - x| \leqslant |y - x|$. Ясно, что $c_y \underset{y \to x}{\longrightarrow} x$. Поскольку функция f непрерывна, отсюда следует нужное утверждение: $R(y) = f(c_y) \underset{y \to x}{\longrightarrow} f(x)$. Теорема доказана.

Аналогично определяется интеграл с переменным нижним пределом $\Psi(x) = \int_x^b f$ и доказывается, что $\Psi'(x) = -f(x)$. Впрочем, после того, как теорема Барроу доказана, это сразу следует из тождества $\Phi(x) + \Psi(x) \equiv \int_a^b f$ (см. аддитивность интеграла). Даваемые теоремой Барроу равенства можно записать в разном виде:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\Big(\int_a^x f\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big) = \Big(\int_a^x f\Big)'_x = \Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big)'_x$$

и

$$-f(x) = \frac{d}{dx}\Big(\int_x^b f\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\int_x^b f(t)\,dt\Big) = \Big(\int_x^b f\Big)'_x = \Big(\int_x^b f(t)\,dt\Big)'_x.$$

Теперь нетрудно проверить, что если функция f определена и непрерывна на произвольном промежутке $\langle a, b\rangle$, $-\infty \leqslant a, b \leqslant +\infty$, то и на нём у f есть первообразная. Её можно построить, например, так: зафиксировав произвольную точку $c \in (a, b)$, положим $F(x) = \int_c^x f$ для $x \in [c, b\rangle$ и $F(x) = -\int_x^c f$ для $x \in \langle a, c]$ (по обеим формулам $F(c) = 0$). Из указанных формул сразу следует, что $F'(x) = f(x)$ для всех x из $\langle a, b\rangle$.

Теорема Барроу позволяет установить связь между дифференциальным и интегральным исчислениями. Особенно наглядно эта связь выражается следующей теоремой, называемой иногда основной теоремой интегрального исчисления.

Теорема (ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА). *Пусть F — первообразная непрерывной на промежутке $[a, b]$ функции f. Тогда*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Поскольку $F' = f$, отсюда видно, что теорема о среднем значении, установленная после определения интеграла, совпадает с формулой конечных приращений для функции F. Приращение $F(b) - F(a)$ первообразной обычно записывают в виде $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ или в краткой форме $F\Big|_a^b$. Тогда формула Ньютона – Лейбница принимает вид

$$\int_a^b f = F\Big|_a^b \qquad \text{или подробнее} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Доказательство. Как известно, на промежутке любые две первообразные одной и той же функции различаются лишь на константу. Так как по теореме Барроу интеграл с переменным верхним пределом Φ является первообразной, то существует такое число C, что $F(x) = \Phi(x) + C$ для всех x из $[a, b]$. Учитывая, что $\Phi(a) = 0$, мы легко получаем нужное равенство:

$$F(b) - F(a) = \big(\Phi(b) + C\big) - \big(\Phi(a) + C\big) = \big(\Phi(b) + C\big) - C = \Phi(b) = \int_a^b f.$$

Замечание. Определение первообразной сугубо аналитическое, оно никак не связано с геометрией и, конечно, не связано с понятием площади. В то же время, площадь подграфика непрерывной функции просто выражается через значения первообразной (нужно знать лишь её значения на концах промежутка). Отсюда следует, в частности, что все площади, т.е. функции, заданные на совокупности $\mathcal{E}$ плоских фигур и удовлетворяющие трём аксиомам (нормировка, монотонность и ослабленная аддитивность), одинаково измеряют каждый подграфик непрерывной функции. Поскольку всякая фигура, измеряемая на практике, распадается на конечное число таких криволинейных трапеций, становится ясно, что множества, которые по-разному измеряются разными площадями, устроены очень сложно. Они могут представлять лишь теоретический интерес.

Теорема (линейность интеграла). *Если функции f, g непрерывны на промежутке $[a,b]$, то для любых коэффициентов p, q справедливо равенство*

$$\int_a^b (pf+qg) = p\int_a^b f + q\int_a^b g.$$

В частности, $\int_a^b (f\pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$ и $\int_a^b (pf) = p\int_a^b f$.

Доказательство. Пусть F, G — первообразные функций f, g соответственно. Тогда функция $pF+qG$ является первообразной функции $pf+qg$. Действительно, $(pF+qG)' = pF'+qG' = pf+qg$. Теперь формула Ньютона – Лейбница приводит к нужному равенству:

$$\int_a^b (pf+qg) = (pF+qG)\Big|_a^b = p\,F\Big|_a^b + q\,G\Big|_a^b = p\int_a^b f + q\int_a^b g.$$

Следующая теорема распространяет на произвольные (непрерывные) функции неравенство, которое для неотрицательных функций очевидно из геометрических соображений.

Теорема (монотонность интеграла). *Если функции f, g непрерывны на промежутке $[a,b]$ и $f(x)\leqslant g(x)$ для всех $x\in[a,b]$, то $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*

Доказательство. Так как функция $h = g - f$ неотрицательна, то $\int_a^b h = \sigma(P_h) \geqslant 0$. Поэтому

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) = \int_a^b h \geqslant 0,$$

что доказывает теорему.

Установленный результат делает понятным оборот речи «проинтегрировав неравенство $f\leqslant g$ по промежутку $[a,b]$, получим неравенство $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$».

Пример (неравенство Чебышева для монотонных функций). Если непрерывные функции f, g возрастают на промежутке $[a,b]$ (или обе убывают), то, как легко видеть,

$$\big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x,y\in[a,b].$$

При фиксированном значении x в левой части стоит неотрицательная непрерывная функция от y. Она имеет неотрицательный интеграл:

$$0 \leqslant \int_a^b \big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big)\,dy.$$

Раскрыв скобки под этим интегралом, мы получим

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dy - \int_a^b f(x)g(y)\,dy - \int_a^b f(y)g(x)\,dy + \int_a^b f(y)g(y)\,dy =$$
$$= (b-a)f(x)g(x) - f(x)\int_a^b g(y)\,dy - g(x)\int_a^b f(y)\,dy + \int_a^b f(y)g(y)\,dy.$$

Справа стоит непрерывная функция от x, все значения которой неотрицательны. Поэтому неотрицателен и интеграл от этой функции (далее для краткости уже взятые по y интегралы записываются в сокращённой форме):

$$0 \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\Big(\int_a^b g\Big)dx - \int_a^b g(x)\Big(\int_a^b f\Big)dx + \int_a^b \Big(\int_a^b fg\Big)dx.$$

Стоящие в круглых скобках «внутренние» интегралы являются коэффициентами для «внешних» интегралов. Поэтому

$$0 \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \Big(\int_a^b g\Big)\int_a^b f(x)\,dx - \Big(\int_a^b f\Big)\int_a^b g(x)\,dx + (b-a)\Big(\int_a^b fg\Big)$$

и, следовательно,

$$0 \leqslant (b-a)\int_a^b fg - \int_a^b g \cdot \int_a^b f - \int_a^b f \cdot \int_a^b g + (b-a)\int_a^b fg = 2(b-a)\int_a^b fg - 2\int_a^b f \cdot \int_a^b g.$$

В результате мы приходим к неравенству Чебышева:

$$\int_a^b f \cdot \int_a^b g \leqslant (b-a)\int_a^b fg.$$

Если разделить обе его части на $(b-a)^2$ и использовать обозначение I_f для среднего значения функции f (и, аналогично I_g, I_{fg} для средних значений функций g, fg), то это неравенство принимает совсем простой вид: $I_f \cdot I_g \leqslant I_{fg}$.

Отметим, наконец, что в случае, когда одна из функций возрастает, а другая убывает, все неравенства заменяются на противоположные.

Теорема (оценка абсолютной величины интеграла). *Пусть функция f непрерывна на промежутке $[a,b]$. Тогда*

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Доказательство. Проинтегрировав двойное неравенство $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, мы получим

$$\int_a^b (-|f|) \leqslant \int_a^b |f| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Поскольку $-\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|)$, отсюда следует, что

$$-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|,$$

а это двойное неравенство равносильно утверждению теоремы.

Теорема (*ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ*). *Пусть u, $v \in C^1([a,b])$. Тогда*

$$\int_a^b uv' = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v \quad \text{или подробнее} \quad \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя тождество $uv' = (uv)' - u'v$ по промежутку $[a,b]$, мы с помощью формулы Ньютона – Лейбница получаем доказываемое равенство:

$$\int_a^b uv' = \int_a^b (uv)' - \int_a^b u'v = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v.$$

Формула Ньютона – Лейбница подсказывает соглашение, которое удобно использовать при вычислении интегралов. До сих пор в обозначении определённого интеграла $\int_a^b f$ предполагалось, что $a \leqslant b$. Примем теперь такое соглашение: по определению

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Это придаёт смысл «интегралу от a до b» для любых a, b, лишь бы функция была определена и непрерывна на промежутке между a и b (на промежутке $[\min\{a,b\}, \max\{a,b\}]$). Нетрудно проверить, что при таком понимании символа $\int_a^b f$ сохранется не только формула Ньютона – Лейбница, но другие формулы (аддитивность и линейность интеграла, теорема о среднем значении, интегрирование по частям). Но следует обратить внимание на неравенства, связанные с интегралами — в них условие «верхний предел интегрирования не меньше нижнего» существенно, от него отказаться нельзя. Например, если по каким-то причинам не известно, какое из чисел a и b больше, то абсолютную величину интеграла следует оценивать так: $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$.

Теорема (*ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ИНТЕГРАЛЕ*). *Пусть $f \in C(\langle a,b\rangle)$ и $\varphi \in C^1(\langle \alpha,\beta\rangle)$, причём $\varphi(\langle \alpha,\beta\rangle) \subset \langle a,b\rangle$. Тогда для любых чисел p, q из $\langle \alpha,\beta\rangle$ справедливо равенство*

$$\int_p^q f(\varphi)\,\varphi' = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f \quad \text{или подробнее} \quad \int_p^q f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,dx.$$

Таким образом, при замене переменной в определённом интеграле кроме двух действий (замена функции и пересчёт дифференциала), проводимых при замене переменной в неопределённом интеграле, надо ещё заменить пределы интегрирования.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F — первообразная функции f на $\langle a,b\rangle$. Так как $(F(\varphi))' = F'(\varphi)\,\varphi' = f(\varphi)\,\varphi'$, то $F(\varphi)$ — первообразная функции $f(\varphi)\,\varphi'$ на $\langle \alpha,\beta\rangle$. Дважды используя формулу Ньютона – Лейбница, мы получаем нужное равенство:

$$\int_p^q f(\varphi)\,\varphi' = F(\varphi)\Big|_p^q = F(\varphi(p)) - F(\varphi(q)) = F\Big|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f.$$

Применяя доказанную формулу, говорят, что стоящие в ней интегралы связаны подстановкой $x = \varphi(t)$. Принятое перед теоремой соглашение позволило заметно упростить формулировку. Конечно, не умаляя общности, можно было считать, что $p \leqslant q$. Но без сделанного соглашения пришлось бы формулировать два утверждения — первое для случая $\varphi(p) \leqslant \varphi(q)$ (возрастающая замена переменной) и второе для случая $\varphi(p) \geqslant \varphi(q)$ (убывающаяя замена).

Замену переменной используют, чтобы упростить подынтегральную функцию (точнее, процедуру её интегрирования). Какой из интегралов $\int_a^b f$ и $\int_p^q f(\varphi)\varphi'$ окажется проще, заранее не ясно, это зависит от функций f и φ. Иногда целесообразно применять формулу «напрямую», проведя в данном интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ замену переменной $x = \varphi(t)$ (при этом необходимо подобрать нужный промежуток с концами p и q, на котором будет изменяться новая переменная). В других ситуациях приходится преобразовывать интеграл «в противоположном направлении», выделив у данной подынтегральной функции множитель φ' и затем представвив её в виде $f(\varphi)\,\varphi'$.

Примеры. 1) Вычислим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Основную трудность представляет иррациональное выражение $\sqrt{1+x^2}$. Оно значительно упрощается после замены переменной $x = \operatorname{tg} t$. Ясно, что в качестве промежутка, на котором меняется новая переменная t, можно взять $[0, \frac{\pi}{4}]$. В результате мы получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\,dt = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) Вычислим интеграл $\int_0^b \frac{x}{1+x^4}\,dx$. Здесь надо заметить, что числитель с точностью до коэффициента равен производной от x^2, а знаменатель легко выражается через x^2. Поэтому целесообразно сделать замену переменной $y = \varphi(x) = x^2$:

$$\int_0^b \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int_0^b \frac{\frac{1}{2}\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y\Big|_0^{b^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} b^2.$$

3) Вычисление следующего интеграла проводится сходным образом:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\,dx}{(2\operatorname{tg} x)^2 + 1} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(2\operatorname{tg} x)'dx}{(2\operatorname{tg} x)^2 + 1} = \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}}{2}.$$

В следующих примерах используется интегрирование по частям.

4) Вычислим интеграл $\int_1^e \ln x\,dx$. В качестве $u(x)$ возьмём $\ln x$, а в качестве $v(x)$ — просто x. Тогда

$$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_1^e - \int_1^e u'(x)\,v(x)\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\,x\,dx =$$
$$= e - \int_1^e 1\,dx = e - (e-1) = 1.$$

5) Вычисление интеграла $\int_0^{N\pi} x\cos x\,dx$ (здесь $N \in \mathbb{N}$) показывает, как большие положительные значения функции могут почти полностью погашаться её отрицательными значениями:

$$\int_0^{N\pi} x\cos x\,dx = \int_0^{N\pi} x(\sin x)'dx = x\sin x\Big|_0^{N\pi} - \int_0^{N\pi} \sin x\,dx = 0 + \cos x\Big|_0^{N\pi} = (-1)^N - 1.$$

Ясно, что для нецелых значений параметра N интеграл может быть сколь угодно большим (как положительным, так и отрицательным).

6) Интегрирование по частям позволяет иногда обходиться без применения формулы Ньютона – Лейбница. Например, повторное интегрирование по частям в интеграле $I = \int_0^b \frac{\sin\lambda x}{e^x}\,dx$ приводит к простому уравнению относительно I. Действительно,

$$I = -\int_0^b (e^{-x})'\sin\lambda x\,dx = -\frac{\sin\lambda x}{e^x}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-x}(\sin\lambda x)'dx = -\frac{\sin\lambda b}{e^b} - \lambda\int_0^b (e^{-x})'\cos\lambda x\,dx.$$

Ещё раз проинтегрируем по частям:

$$I = -\frac{\sin\lambda b}{e^b} - \lambda\frac{\cos\lambda x}{e^x}\Big|_0^b + \lambda\int_0^b e^{-x}(\cos\lambda x)'dx = -\frac{\sin\lambda b}{e^b} + \lambda\Big(1 - \frac{\cos\lambda b}{e^b}\Big) - \lambda^2 I.$$

Решив получившееся уравнение относительно I, получим

$$\int_0^b \frac{\sin\lambda x}{e^x}\,dx = \frac{\lambda - (\sin\lambda b + \lambda\cos\lambda b)\,e^{-b}}{1+\lambda^2}.$$

Рассматриваемые в следующем примере интегралы приводят к замечательной *формуле Валлиса*, которая впервые позволила представить число π в виде предела последовательности рациональных чисел.

7) Вычислим интегралы

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отметим, что с ростом показателя степени n подынтегральная функция уменьшается. Поэтому последовательность интегралов W_n убывает. Ясно, что $W_0 = \frac{\pi}{2}$ и $W_1 = 1$. Считая $n \geqslant 2$, мы после интегрирования по частям получим:

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\,(\sin x)'dx = \sin x\cos^{n-1} x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\big(\cos^{n-1} x\big)'dx = \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\cos^{n-2} x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos^{n-2} x - \cos^n x\big)\,dx = \\ &= (n-1)\big(W_{n-2} - W_n\big). \end{aligned}$$

Поэтому интегралы W_n удовлетворяют рекуррентной формуле

$$W_n = \frac{n-1}{n}\,W_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Для чётного n её повторное применение даёт нам

$$W_{2k}=\frac{2k-1}{2k}\,W_{2(k-1)}=\frac{2k-1}{2k}\,\frac{2k-3}{2k-2}W_{2(k-2)}=\ldots=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots3\cdot1}{(2k)(2k-2)\cdots4\cdot2}W_0.$$

Поскольку $W_0=\frac{\pi}{2}$, отсюда следует, что*) $W_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2}$. Аналогично доказывается равенство $W_{2k+1}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$. Итак,

$$W_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\,v_n,\quad\text{где}\quad v_n=\begin{cases}1 & \text{при нечётном }\ n,\\ \frac{\pi}{2} & \text{при чётном }\ n.\end{cases}$$

Теперь нетрудно получить формулу Валлиса. Действительно, так как $v_nv_{n-1}\equiv\frac{\pi}{2}$, то

$$W_nW_{n-1}=\frac{\pi}{2}\,\frac{(n-1)!!}{n!!}\,\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}=\frac{\pi}{2n},\qquad\text{то есть}\qquad W_nW_{n-1}=\frac{\pi}{2n}.$$

Из неравенств $W_n\leqslant W_{n-1}\leqslant W_{n-2}=\frac{n}{n-1}W_n$ следует, что $W_n\sim W_{n-1}$. Поэтому $W_n^2\sim W_nW_{n-1}=\frac{\pi}{2n}$ и, таким образом, $2nW_n^2\to\pi$. Ограничившись нечётными номерами $n=2k+1$, мы получим сокращённую запись формулы Валлиса: $4k\,W_{2k+1}^2\to\pi$. В развёрнутом виде она такова:

$$\pi=\lim_{k\to\infty}4k\left(\frac{2\cdot4\cdots(2k)}{3\cdot5\cdots(2k+1)}\right)^2=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2k}{2k-1}\right)^2.$$

В заключение параграфа применим интеграл для существенного дополнения главного результата дифференциального исчисления — формулы Тейлора. Напомним, всякая функция, имеющая в точке x_0 конечную n-ю производную, может быть представлена в виде

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\rho_n(x),$$

где остаток $\rho_n(x)$ мал с следующем смысле: $\rho_n(x)=o\big((x-x_0)^n\big)$ при $x\to x_0$ (ради упрощения обозначений здесь не отмечена зависимость остатка от функции f и точки x_0). К сожалению, при этом нет никакой возможности гарантировать малость конкретного значения $\rho_n(x)$, даже если известно, что разность $x-x_0$ очень мала. Следующий результат восполняет этот пробел.

Теорема (*формула Тейлора с интегральным представлением остатка*). *Пусть* $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$ *и* $f\in C^{(n+1)}(\langle a,b\rangle)$ *при некотором* $n=0,1,2\ldots.$ *Тогда для всех* x, $x_0\in\langle a,b\rangle$ *справедливо равенство*

$$\rho_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt.$$

*) Напомним, что символ $n!!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и одной с ним чётности.

Доказательство. При $n = 0$ достаточно применить формулу Ньютона – Лейбница (поскольку функция f — первообразная своей производной f'):

$$f(x) = f(x_0) + \big(f(x) - f(x_0)\big) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) + \rho_0(x).$$

При $n = 1$ надо проинтегрировать по частям в получившемся интеграле (интегрируем по t, числа x, x_0 — параметры):

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(t-x) = f(x_0) + (t-x)f'(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^{x}(t-x)\,df'(t) =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x}(x-t)\,f''(t)\,dt = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \rho_1(x).$$

Далее этот процесс повторяется. Для формального доказательства воспользуемся индукцией. База индукции при $n = 0, 1$ у нас уже есть. Допустим, что для функций класса $C^{(n)}$ справедливо интегральное представление $(n-1)$-го остатка:

$$\rho_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Для функции класса $C^{(n+1)}$ с помощью интегрирования по частям этот интеграл можно преобразовать:

$$\rho_{n-1}(x) = -\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\,d(x-t)^n = -\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n df^{(n)}(t) =$$
$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Поэтому, используя для n-го многочлена Тейлора обозначение T_n, мы получаем равенство

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \rho_{n-1}(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =$$
$$= T_n(x) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

из которого следует нужное интегральное представление n-го остатка.

Замечание. Сделав в интеграле, представляющем остаток $\rho_n(x)$, линейную замену переменной $t = x_0 + \theta(x-x_0)$, $\theta \in [0,1]$, мы получим такое полезное равенство

$$\rho_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big)d\theta.$$

С его помощью формуле Тейлора можно придать изящный вид.

Следствие (*формула Тейлора с представлением остатка по Лагранжу*). *В условиях теоремы между x и x_0 существует такое (зависящее от f, x, x_0, n) число $\overline{x}$, что* $\rho_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ и, следовательно,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Пусть m и M — минимальное и максимальное значения производной $f^{(n+1)}$ на промежутке с концами x_0 и x, т.е.

$$m = \min_{0\leqslant\theta\leqslant 1} f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big) \quad \text{и} \quad M = \max_{0\leqslant\theta\leqslant 1} f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big).$$

Тогда для интеграла $I = \int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)d\theta$ справедлива двойная оценка

$$m\int_0^1 (1-\theta)^n d\theta \leqslant I \leqslant M\int_0^1 (1-\theta)^n d\theta.$$

Так как $\int_0^1 (1-\theta)^n d\theta = -\frac{1}{n+1}(1-\theta)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$, то отсюда следует, что $\frac{m}{n+1} \leqslant I \leqslant \frac{M}{n+1}$, т.е. число $(n+1)I$ лежит между минимальным значением m производной $f^{(n+1)}$ и её максимальным значением M. Согласно теореме Больцано – Коши о промежуточном значении отсюда следует, что $(n+1)I = f^{(n+1)}(\overline{x})$ для некоторого $\overline{x}$, лежащего между x_0 и x. Учитывая представление остатка $\rho_n(x)$ с помощью интеграла по промежутку $[0,1]$, мы видим, что

$$\rho_n(x) = \frac{I}{n!}\,(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1},$$

что и требовалось доказать.

В некоторых случаях лагранжева форма остатка оказывается недостаточно информативной, поскольку не ясно, сколь велико значение $f^{(n+1)}(\overline{x})$. Но если $(n+1)$-я производная меняется не слишком быстро, то очень удобно применять формулу Тейлора именно с таким представлением остатка.

Пример. Получим формулу для приближённого вычисления числа e. Для этого применим следствие к функции $f(x) = e^x$ с $x_0 = 0$ и $x = 1$. Поскольку в этом случае $f^{(k)}(0) = 1$ для всех k, мы приходим к равенству

$$e = f(1) = f(0) + f'(0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\overline{x}}}{(n+1)!}.$$

Так как $0 \leqslant \overline{x} \leqslant 1$, то отсюда следует двусторонняя оценка погрешности:

$$0 < e - \Big(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\Big) \leqslant \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

В частности,

$$0 < e - \Big(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}\Big) < \frac{3}{(10)!} < \frac{3}{3\cdot 10^6} = 10^{-6}.$$

Двусторонняя оценка погрешности позволяет также установить иррациональность числа e. Действительно, если $e = \frac{m}{n}$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$, то

$$0 < \frac{m}{n} - \Big(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\Big) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Умножив это неравенство на $n!$, получим

$$0 < m\,(n-1)! - \Big(2 \cdot n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots + \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{n!}\Big) < \frac{3}{n+1}.$$

Поскольку $2 < e < 3$, знаменатель n не меньше двух. Поэтому

$$0 < m\,(n-1)! - \Big(2 \cdot n! + 3 \cdots (n-1)n + 4 \cdots (n-1)n + \ldots + (n-1)n + n + 1\Big) < 1.$$

Но в середине этого неравенства стоит целое число (разность целых), которое не может лежать в интервале $(0, 1)$. Итак, предположение $e = \frac{m}{n}$ ведёт к противоречию.