http://vmk.ucoz.net/

1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ.

Пусть функция $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$. Фиксируя все переменные, кроме одной x_i, получим функцию одной переменной

$z=f\ (x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i^0,x_{i+1}^0\ldots,x_n^0)=\varphi(x_i)$

Обычная производная этой функции в точке x_i^0 называется частной производной функции $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в точке M_0 по пременной x_i и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$.

Заметим, что символ $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ в приведенном определении понимается как единый, т.е. в нем числитель и знаменатель не имеют самостоятельного значения. Для обозначения частной производной в точке M_0 используются также символы $z'_{xi}(M_0)$, $f'_{xi}(M_0)$, $\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и т.д. Вспоминая определение обычной производной, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M_0)=\frac{d\varphi(x_i^0)}{dx_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\varphi(x_i^0+\Delta x_i)-\varphi(x_i^0)}{\Delta x_i}=$$

$$=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i^0+\Delta x_i,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)}{\Delta x_i}$$

Сравнивая начало и конец в приведенной цепочке равенств, получим следующее определение частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(M_9)=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i^0+\Delta x_i,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)}{\Delta x_i}$$

$i=1,2,\ldots,n.$

Из определения частных производных, как обычных производных при условии фиксирования всех переменных кроме одной, по которой и берется искомая производная, вытекает, что для вычисления частных производных можно пользоваться правилами вычисления обычных производных.

для функции одной переменной, будем понимать произвольные приращения Δx и Δy, поэтому можно написать

$$df(x_o,y_o)= f'_x(x_o,y_o)\Delta x + f'_y(x_o,y_o)\Delta y \qquad (1.3)$$

Полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов

$$d_x z=f'_x(x_o,y_o)\Delta x \quad d_y z=f'_y(x_o,y_o)\Delta y.$$

Важно отметить при этом, что если в случае функции одной переменной существование конечной производной $y'=f'(x_o)$ в рассматриваемой точке эквивалентно дифференцируемости функции, то в случае двух и более переменных существование частных производных (частных дифференциалов) в точке M_o еще не обеспечивает представления приращения функции в виде (1.1), т.е. дифференцируемости функции в точке.

Достаточные условия дифференцируемости функции в точке сформулируем следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 1.1 Пусть функция $z=z(x,y)$ определена в некоторой окрестности $U_\delta(M_o)$ точки $M_o(x_o,y_o)$ и во всех точках $M(x,y)\in U_\delta(M_o)$ имеет производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, которые непрерывны в самой точке M_o, тогда функция $z=f(x,y)$ дифференцирума в точке M_o.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Таким образом, существование частных производных в данной точке является необходимым условием дифференцируемости, а непрерывность частных производных в точке достаточным.

Сказанное подтверждается следующим примером.

ПРИМЕР 1.2 Показать , что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\mathrm{Sin}\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0\end{cases}$$

имеет в окрестности точки (0,0) частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, которые разрывны в точке (0,0) и неограничены в любой ее окрестности; тем не менее эта функция дифференцируема в точке (0,0).

Действительно, если $x^2+y^2\neq 0$, то частные производные находим, пользуясь формулами и правилами дифференцирования

$$f'_x(x,y)=2x\ \mathrm{Sin}\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\mathrm{Cos}\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f'_y(x,y)=2y\,\mathrm{Sin}\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\,\mathrm{Cos}\frac{1}{x^2+y^2}.$$

В точке $O(0,0)$ частные производные вычисляем по определению.

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y^2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{\Delta y^2}}{\Delta y}=0.$$

Итак, частные производные существуют на всей плоскости. Покажем, что они разрывны в точке $O(0,0)$ и неограничены в любой ее окрестности. Для этого выберем последовательность (x_n,y_n) такую, что $\mathrm{Cos}\frac{1}{x_n^2+y_n^2}=1$, например

$$\frac{1}{x_n^2+y_n^2}=2\pi n,\quad x_n=\frac{1}{2\sqrt{\pi n}},\quad y_n=\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\quad (n=1,2,\ldots).$$

Так как $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ при $n\to\infty$, то $(x_n,y_n)\to(0,0)$. Найдем

$$f'_x(x_n,y_n)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,\mathrm{Sin}\,2\pi n-2\sqrt{\pi n}\,\mathrm{Cos}2\pi n=-2\sqrt{\pi n}\to-\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Аналогичные выводы справедливы и для $f'_y(x_n,y_n)=-2\sqrt{\pi n}$.

Исследуем на дифференцируемость функцию $f(x,y)$ в точке $(0,0)$. Так как $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, то подставив их значения в равенство (1.2) получим

$$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\cdot\Delta x+0\Delta y+\varepsilon(\rho)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

$$(\Delta x^2+\Delta y^2)\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\varepsilon(\rho)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

или $\varepsilon(\rho)=\rho\,\mathrm{Sin}\,1/\rho^2\to 0$ при $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$.

Функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

ПРИМЕР 1.3. Показать, что в окрестности точки $O(0,0)$ функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\[2ex] 0, & \text{если } x^2+y^2=0\end{cases}$$

непрерывна, имеет ограниченные частные производные, но не дифференцируема в точке $(0,0)$.

Найдем $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, используя полярную систему координат на плоскости. После замены: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим:

$\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cos\varphi\,\sin\varphi=0$ для $\forall\varphi$, $f(0,0)=0$ по условию. Функция непрерывна в точке $(0,0)$. Найдем частные производные

$$f'_x(x,y)=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad \text{если } x^2+y^2\neq 0,\quad f'_x(0,0)=0,$$

$$f'_y(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\quad \text{если } x^2+y^2\neq 0,\quad f'_y(0,0)=0.$$

Однако частные производные разрывны в точке $(0,0)$, действительно вдоль различных направлений $\varphi=c=\text{const}$ имеем:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_x(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\sin^3\varphi}{\rho^3}=\lim_{\rho\to 0}\sin^3\varphi,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_y(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^3\varphi}{\rho^3}=\lim_{\rho\to 0}\cos^3\varphi.$$

Двойные пределы частных производных не существуют. Покажем ограниченность частных производных: в окрестности точки $O(0,0)$

$$|f'_x(x,y)|=\left|\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|\le\left|\frac{y^3}{(y^2)^{3/2}}\right|=1,$$

аналогично $|f'_y(x,y)|\le 1$.

Таким образом, достаточным признаком дифференцируемости воспользоваться нельзя. Будем исследовать функцию на дифференцируемость по определению:

$$\Delta f(0,0)=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\varepsilon(\rho)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Положим $\Delta x=\rho\cos\varphi$, $\Delta y=\rho\sin\varphi$, тогда

$\varepsilon(\rho)=\cos\varphi\cdot\sin\varphi$ не является бесконечно малой при $\rho\to 0$.

Функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

<u>ПРИМЕР 1.4</u> Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0,0)$ функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0\end{cases}$$

Функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $O(0,0)$, найдем частные производные в точке $(0,0)$ по определению $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$. Проверим условие дифференцируемости (1.1):

$\Delta f(0,0)=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+\varepsilon\rho$, $\varepsilon\to 0$ при $\rho\to 0$

Найдем $\varepsilon(\rho)=\frac{\Delta x^2\cdot\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{3/2}}$, однако при $\rho\to 0$ вдоль луча $\{\Delta x=\Delta y\}$, $\varepsilon(\rho)\to\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Функция не дифференцируема в точке $O(0,0)$.

2. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Если функция $z=f(x,y)$ имеет в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ частную производную по одной из переменных, то эта частная производная сама является функцией переменных x, y и может, следовательно, иметь в точке M_0 частные производные по этим переменным. Для исходной функции $z=f(x,y)$ эти последние производные будут частными производными второго порядка. Обозначаются вторые частные производные следующим образом:
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, или $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, или
$z''_{xx}=z''_{x^2}=f''_{x^2}$, $z''_{xy}=f''_{xy}$, $z''_{yx}=f''_{yx}$, $z''_{yy}=f''_{x^2}=f''_{y^2}$. Итак, по определению вторых частных производных, имеем:

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\qquad z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\qquad z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Аналогично определяются производные 3-го, 4-го и более высоких порядков.

Частные производные высшего порядка, взятые по различным переменным, например $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, ..., называются смешанными частными производными.

ПРИМЕР 2.1 Пусть $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, вычислим производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3}\quad \text{и т.д.}$$

В данном примере мы видим, что смешанные производные, взятые по одним и тем же переменным, но в разном порядке равны. Сразу же отметим, что это вовсе не вытекает из определения смешанных производных. Равенства смешанных производных может и не быть.

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2>0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Имеем:

$$f'_x(x,y)=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{\left[x^2+y^2\right]^2}\right],\quad \text{если } x^2+y^2>0,$$

$f'_x(0,0)=0.$

Возьмем $x=0$, будем иметь при любом y (в том числе и при $y=0$) $f'_x(0,y)=-y$. Продифференцируем эту функцию по y, получим $f''_{xy}(0,y)=-1$, отсюда $f''_{xy}(0,0)=-1$. Вычисляем таким же образом $f''_{yx}(0,0)=1$. Итак, для рассматриваемой функции $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

Тем не менее, совпадение смешанных производных, отличающихся лишь порядком дифференцирования в примере 1.1 не случайно. Достаточные условия равенства таких производных сформулируем следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2.1. Предположим, что

1) $f(x,y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$;

2) существуют f'_x и f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} в окрестности точки M_0.

3) f''_{xy} и f''_{yx} как функции x и y непрерывны в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Тогда в этой точке смешанные производные равны, т.е. $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Итак, непрерывные смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} всегда равны.

В приведенном выше примере 2.2 эти производные
$f''_{xy}=f''_{yx}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left[1 + \frac{8x^2y^2}{\left[x^2+y^2\right]^2}\right]$ при $x^2+y^2>0$ не имеют двойного предела при $x\to 0$, $y\to 0$, т.е. в точке $(0,0)$ терпят разрыв и теорема в этом случае неприменима. Выше было показано $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.</u> Аналогичная теорема справедлива и для смешанных производных более высокого порядка.

Перейдем к рассмотрению дифференциалов высших порядков. Пусть в окрестности точки M_0 функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка. Тогда полный дифференциал записывается
$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, где dx и dy - произвольные приращения переменных x и y. Если предположить существование непрерывных частных производных второго порядка для $z(x,y)$, то dz будет иметь непрерывные частные производные первого порядка и можно говорить о полном дифференциале от первого дифференциала $d(dz)$, который называется дифференциалом второго порядка, вторым дифференциалом от функции z и обозначается d^2z, $d^2z=d(dz)$. Важно подчеркнуть, что приращения dx и dy при этом рассматриваются как постоянные величины и остаются ими при переходе от одного дифференциала к следующему.

Таким образом, если воспользоваться правилами дифференцирования, будем иметь

$$d^2z=d(dz) = d\left[\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right]= d\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]dx + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]dy=$$

$$= \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dy\right]dx + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right]dy=$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка $d^3z=d(d^2z)$ и т.д. Используя символический оператор дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy$, дифференциал n-го порядка можно записать так:

$$d^nz=\left[\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right]^n z.$$

Смысл последней формулы: сначала двучлен, стоящий в скобках формально возводится в n-ю степень, затем к операторам $\frac{\partial^n}{\partial x^k \cdot \partial y^m}$, $k+m=n$, дописывается множитель z, что возвращает всем символам и слагаемым их значения как производных и дифференциалов.

3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ.

ТЕОРЕМА 3.1. . Пусть

1) функция $z=f(x,y)$ - дифференцируема в точке (x_0,y_0);

2) функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ - определены в окрестности точки t_0 $x_0=x(t_0)$ $y_0=y(t_0)$, имеют конечные производные в точке t_0,

тогда сложная функция $z=f(x(t),y(t))$ определена в окрестности точки t_0, непрерывна в точке t_0 и имеет в ней производную, которая вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt}(t_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\frac{dy}{dt}(t_0) \qquad (3.1)$$

ТЕОРЕМА 3.2. . Если

1) $z=f(u,v)$ - дифференцируема в точке (u_0,v_0);

2) $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ - определены в окрестности точки (x_0,y_0), $u_0=u((x_0,y_0)$ $v_0=v(x_0,y_0)$, дифференцируемы в точке (x_0,y_0) , то сложная функция $z=f(u(x,y),v(x,y))$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ обе частные производные, которые вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3.2)$$

ПРИМЕР 3.1. $u=f(x,y)$, $x=\mathrm{Sin}t$, $y=\mathrm{Cos}t$.

Найти $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, если функция $f(x,y)$ - дважды дифференцируемая функция.

РЕШЕНИЕ.

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\circ\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\circ\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos t-\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{Sin}t,$$

Полученные при этом функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))$ сами являются сложными функциями. Используя условие существования вторых частных производных имеем:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{du}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos t - \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{Sin} t\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\operatorname{Cos} t +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d}{dt}(\cos t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\operatorname{Sin} t - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d}{dt}(\operatorname{Sin} t),$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\operatorname{Cos} t - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\operatorname{Sin} t,$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\operatorname{Cos} t - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\operatorname{Sin} t.$$

Предполагая теперь, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, окончательно получим:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f''_{x^2}\operatorname{Cos}^2 t - 2f''_{xy}\operatorname{Cos} t\operatorname{Sin} t + f''_{y^2}\operatorname{Sin}^2 t - f'_x\operatorname{Sin} t - f'_y\operatorname{Cost}.$$

ПРИМЕР 3.2. $u=f(x^2+y^2+z^2)$. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $t=x^2+y^2+z^2$, тогда $u=f(t)$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = f'(t)2x = f'(x^2+y^2+z^2)2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(x^2+y^2+z^2)2y,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = f'(x^2+y^2+z^2)2z.$$

При нахождении второй производной учитываем, что $f'(t)$ зависит от $(x^2+y^2+z^2)$, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{du}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right] = \frac{d^2u}{dt^2}\left[\frac{\partial t}{\partial x}\right]^2 + \frac{du}{dt}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} =$$

$$= f''(t)4x^2 + f'(t)2 = 4x^2 f''(x^2+y^2+z^2) + 2f'(x^2+y^2+z^2);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{d^2u}{dt^2}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{du}{dt}\cdot\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}$$

$$= f''(t)4xy + f'(t)\cdot 0 = 4xy\, f''(x^2+y^2+z^2)$$

ПРИМЕР 3.3. $z=f(xy, x^2+y^2)$. Найти f'_x, f'_y, f''_{xy}.

Обозначим $u=xy$, $v=x^2+y^2$, тогда дифференцируя $z=f(u,v)$ по формулам (3.2), получим:

$$f'_x = f'_u y + f'_v 2x,\qquad f'_y = f'_u x + f'_v 2y;$$

Заметим, что полученные при этом производные зависят от xy и x^2+y^2, то есть

$$f'_u = f'_u(xy, x^2+y^2),\quad f'_v = f'_v(xy, x^2+y^2),$$

тогда

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u y + f'_v 2x) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u)y +$$

$+f'_u\cdot 1 + \frac{\partial}{\partial y}(f'_v)\cdot 2x + f'_v\cdot 0 = f''_{u^2}\cdot yx + 2(y^2+x^2)f''_{uv} + f''_{v^2}4xy + f'_u$.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.</u> Таким же образом можно найти производные более высоких порядков, вычисляя их как первые производные от предыдущих.

<u>ПРИМЕР 3.4.</u> Пусть $U=f(x,y,z)$, $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$. Найти dU и d^2U.

По определению $dU= f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$, где
$dx=dt$, $dy=2t dt$, $dz=3t^2 dt$,
тогда $dU = (f'_x + f'_y 2t + f'_z 3t^2)dt$
Так как $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, то
$d^2x= x''(t)dt^2$, $d^2y=y''(t)dt^2$, $d^2z= z''(t)dt^2$;
$d^2x=0$, $d^2y=2dt^2$, $d^2z= 6t dt^2$.

Важно отметить, что в отличие от случая, когда x, y, z – независимые переменные здесь d^2x, d^2y, d^2z не обязательно равны нулю.

Учитывая равенство смешанных производных, получим

$$d^2u= f''_{x^2}dx^2+ 2f''_{xy}dxdy + 2 f''_{xz}dxdz + f'_x d^2x+ f''_{yy}dy^2 + 2f''_{yz}dydz + f'_y d^2y + f''_{z^2}dz^2+ f'_z d^2z=$$

$$=(f''_{x^2} + f''_{y^2}4t^2+ f''_{z^2}9t^4 + 2f''_{xy}2t + 2f''_{xz}3t^2+ + 2 f''_{yz}6t^3+ f'_y\cdot 2 + f'_z 6t)\, dt^2.$$

<u>ПРИМЕР 3.5.</u> $U= f(\xi,\eta,\zeta)$, $\xi=x^2+y^2$; $\eta=x^2-y^2$, $\zeta=2xy$. Найти dU и d^2U.

Действительно, $dU = \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta$ (3.3)

Так как ξ, η, ζ зависят от x, y, то дифференциалы $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ также зависят от x, y и находятся по формуле (1.3)

$$d\xi= \xi'_x dx + \xi'_y dy, \quad d\eta= \eta'_x dx + \eta'_y dy,$$
$$d\zeta= \zeta'_x dz + \zeta'_y dy; \qquad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3), имеем:

$dU = f'_\xi (2xdx +2ydy) + f'_\eta(2xdx - 2ydy) + f'_\zeta(2ydx +2xdy)$.

Чтобы найти второй дифференциал, нужно, (как и в примере 3.3) помнить, что f'_ξ, f'_η, f'_ζ – сложные функции, а $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ вычисляются по формулам (3.4).

$d^2U= d(dU) = d(f'_\xi)d\xi + f'_\xi d(d\xi) + d(f'_\eta)d\eta + f'_\eta d(d\eta)+$

$+ d(f'_\zeta)d\zeta + f'_\zeta d(d\zeta)$.

Применяя формулу (1.3) к функциям f'_ξ, f'_η, f'_ζ, получим:

$d(f'_\xi)= f''_{\xi\xi}d\xi + f''_{\xi\eta}d\eta + f''_{\xi\zeta}d\zeta$ и т.д.

$$d^2U= f''_{\xi^2}d\xi^2+ f''_{\eta^2}d\eta^2 + f''_{\zeta^2}d\zeta^2+ f'_\xi d^2\xi + 2df''_{\xi\eta}d\xi d\eta + 2f''_{\xi\zeta}d\xi d\zeta +$$

$$+2f''_{\eta\zeta}d\eta d\zeta + f'_\eta d^2\eta +f'_\zeta d^2\zeta.$$

Окончательно имеем:

$$d^2U= 4f''_{\xi^2}(xdx +ydy)^2+ 4 f''_{\eta^2}(xdx -ydy)^2+ 4 f''_{\zeta^2}(ydx+xdy)^2+$$

$$+ 8 f''_{\xi\eta}(x^2dx^2-y^2dy^2) + 8 f''_{\xi\zeta}(xdx+ydy)(ydx+xdy) +$$

$$+ 8f''_{\eta\zeta}(xdx-ydy)(ydx+xdy) + 2f'_\xi(dx^2+dy^2) +2f'_\eta(dx^2-dy^2)+$$
$$+4f'_\zeta dydx.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. При нахождении n-го дифференциала берутся все дифференциалы, начиная с первого, по правилам дифференцирования. Если при этом подмечается закономерность, то сразу записывают общую формулу дифференциала.

ПРИМЕР 3.6. Найти d^nU, если $U=f(ax,by)$.

Обозначим $\xi=ax$, $\eta=by$, так как зависимость ξ и η от x и y линейная, то $d\xi=adx$, $d\eta=bdy$, $d^2\xi=d^2\eta=d^3\xi=d^3\eta=...=d^n\xi=d^n\eta=0$. Это упрощает вычисления.

$$dU=(f'_\xi d\xi+ f'_\eta d\eta) =af'_\xi dx + bf'_\eta dy.$$

dU можно символически записать

$$dU= (adx \frac{\partial}{\partial\xi} + bdy \frac{\partial}{\partial\eta})\cdot f(\xi,\eta),$$

т.е. выражение в скобках можно считать оператором, действующим на функцию $f(\xi,\eta)$

$$d^2U= f''_{\xi^2}(adx)^2+2ab f''_{\xi\eta}dxd\eta + f''_{\eta^2}(bdy)^2,$$

Если вспомнить формулу $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, то видно сходство операции возведения в степень с операцией нахождения d^2U,

$$d^2U= \left[adx \frac{\partial}{\partial\xi} + bdy \frac{\partial}{\partial\eta} \right]^2 f(\xi,\eta), \qquad \text{и т.д.}$$

$$d^nU= \left[adx \frac{\partial}{\partial\xi} + bdy \frac{\partial}{\partial\eta} \right]^n f(\xi,\eta) \qquad (n=1,2,...),$$

где $\xi=ax$, $\eta=by$.

4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть 1) $F(x,y,z)$, F'_x, F'_y, F'_z - определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$;
2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$;
3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$
Тогда уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет в некоторой окрестности точки M_0 единственную и дифференцируемую функцию $z=z(x,y)$, удовлетворяющую условию $z_0=z(x_0,y_0)$, а ее производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ могут быть найдены из уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (4.1)$$

ПРИМЕР 4.1. Пусть функция $z=z(x,y)$ задана уравнением:

$$x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0 \qquad (4.2)$$

Найти z''_{xy} в точке $M_0(1,-2,1)$.

$F(x,y,z)$ - многочлен, следовательно условие 1) теоремы выполнено; 2) $F(1,-2,1)=0$;
3) $F'_z=6z-1$, $F'_z(1,-2,1)=5\neq 0$;
тогда в силу теоремы 4.1 существуют $z=z(x,y)$, $z(1,-2)=1$.

Подставим решение $z=z(x,y)$ в (4.2) и продифференцируем полученное тождество $F(x,y,z(x,y))\equiv 0$ по x, считая x и y независимыми переменными,

$$2x+6z\cdot z'_x+y-z'_x=0 \qquad (4.3)$$

Решая последнее уравнение относительно z'_x, найдем:

$$z'_x=\frac{2x+y}{1-6z}, \quad z'_x(1,-2)=0.$$

Продифференцируем (4.3) еще раз, но теперь уже по y

$$6z'_y\cdot z'_x+6z\cdot z''_{xy}+1-z''_{xy}=0,$$

$$z''_{xy}=\frac{1+6z'_x\cdot z'_y}{1-6z}.$$

Дифференцируя (4.2) по y найдем

$$z'_y=\frac{4y+x}{1-6z}, \qquad z'_y(1,-2)=\frac{7}{5}.$$

Окончательно имеем:

$$z''_{xy}(1,-2)=-\frac{1}{5}.$$

Пусть выполняются все условия теоремы 4.1, тогда неявно заданная уравнением $F(x,y,z)=0$ функция $z=z(x,y)$ имеет дифференциал. По определению $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Подставляя частные производные, найденные из уравнений (4.1), получим:

$$dz= - \frac{F'_x}{F'_z}dx - \frac{F'_y}{F'_z}dy.$$

Очевидно, тот же результат получится, если продифференцировать тождество $F(x,y,z(x,y))\equiv0$. Действительно,

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz\equiv0 \qquad (4.4)$$

Аналогично, дифференцируя тождество (4.4) еще раз, найдем второй дифференциал.

$$(F''_{xx}dx + F''_{xy}dy + F''_{xz}dz)dx + (F''_{yx}dx + F''_{yy}dy + F''_{yz}dz)dy +$$
$$+ (F''_{zx}dx + F''_{zy}dy + F''_{zz}dz)dz + F'_z d^2z\equiv0 \text{ и т.д.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1 Если предположить существование у функции $F(x,y,z)$ вторых непрерывных частных производных, то дифференцируя равенства (4.1), по x и y соответственно, найдем все вторые частные производные неявно заданной функции $z=z(x,y)$ и т.д.

ПРИМЕР 4.2. Функция $z=z(x,y)$ задана уравнением:

$$F(x^2+z,y^2+z)=0$$

Найти dz и d^2z.

Обозначим F'_1 - производную функции F по первому аргументу, F'_2 - по второму. Тогда дифференцируя исходное уравнение, получим

$$F'_1\cdot d(x^2+z) + F'_2\cdot d(y^2+z)=0 \quad \text{или}$$
$$F'_1\cdot(2xdx+dz) + F'_2\cdot(2ydy+dz)=0 \qquad (4.5)$$

$$dz= - \frac{F'_1 2xdx + F'_2 2ydy}{F'_1+F'_2} \qquad (4.6)$$

Продифференцируем (4.5) еще раз, учитывая, что

$d(dx)=0$, $d(dy)=0$, $d(dz)=0$,

$F'_1= F'_1(x^2+z,y^2+z)$, $F'_2=F'_2(x^2+z,y^2+z)$

$$F''_{11}\cdot(2xdx+dz)^2+ 2F''_{12}\cdot(2xdx+dz)(2ydy+dz)+ F''_{22}(2ydy+dz)^2+$$
$$F'_1(2dx^2+d^2z)+ F'_2(2dy^2+d^2z)=0$$

Остается подставить в последнее равенство dz из формулы (4.6) и выразить из него d^2z.

ПРИМЕР 4.3. Найти z''_{xy}, если функция $z=z(x,y)$ задается равенствами $x=u+v^2$ $y=u^2-v^3$, $z=uv$ (4.7)

Имеем $z=z(u,v)$, где $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ заданы неявно системой двух уравнений. Дифференцируя последнее уравнение системы (4.7), найдем $z'_x=vu'_x+uv'_x$. Производные u'_x, v'_x, u'_y, v'_y найдутся, если продифференцируем по x и по y первые два уравнения системы (4.7), считая при этом x и y независимыми переменными:

$$u'_x+2vv'_x=1, \qquad u'_y+2vv'_y=0,$$

$$2uu'_x-3v^2v'_x=0; \quad 2uu'_y-3v^2v'_y=1.$$

Отсюда, обозначив за $\Delta=3v^2+4vu$, получим:

$$u'_x=\frac{3v^2}{\Delta}, \quad v'_x=\frac{2u}{\Delta}; \quad u'_y=\frac{2v}{\Delta}, \quad v'_y=\frac{-1}{\Delta},$$

тогда

$$z'_x=\frac{3v^3+2u^2}{3v^2+4uv}.$$

Продифференцируем z'_x еще раз по y

$$z''_{xy}=\frac{(9v^2v'_y+4uu'_y)(3v^2+4uv)}{(3v^2+4uv)^2}-\frac{(3v^3+2u^2)(6vv'_y+4vv'_y+4uv'_y)}{}.$$

Далее вместо u'_y и v'_y нужно подставить найденные выражения для этих производных.

5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ.

5.1 Замена переменных в выражении, содержащем обыкновенные производные.

Пусть задано дифференциальное выражение:

$$A=f(x,y,y',y'',y''',\ldots), \qquad (5.1)$$

где x - независимая переменная, y - функция. Требуется перейти к новой, независимой переменной t и новой функции $u=u(t)$, с помощью замены переменных:

$$x=\varphi(t,u), \quad y=\psi(t,u). \qquad (5.2)$$

Для этого нужно выразить через t и u производные, входящие в выражение (5.1). Известно, $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, $y''_{xx}=(y'_x)'_t/x'_t$, тогда

$$y'_x=\frac{\psi'_t+\psi'_u\cdot u'_t}{\varphi'_t+\varphi'_u\cdot u'_t}, \qquad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{\varphi'_t+\varphi'_u\cdot u'_t} \quad \text{и т.д.}$$

Подставляя теперь найденные производные в (5.1), получим выражение относительно новых переменных.

ПРИМЕР 5.1 Преобразовать дифференциальное уравнение $(1+x^2)^2y''=y$, если $x=t$, $y=u/\text{Cos}t$, $u=u(t)$.

РЕШЕНИЕ: $y'_x=(u'_t\text{Cos}t+u\text{Sin}t)\cdot\cos^{-2}t$

$$y''_{x^2}=\frac{u''_{t^2}\text{Cos}t-u'_t\text{Sin}t+u'_t\text{Sin}t+u\text{Cos}t}{\text{Cos}^{-2}t}=\text{Cos}^3t(u''_{t^2}+u).$$

Подставляя полученные производные в уравнение, будем иметь: $u''_{t^2}=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1 Из примера видно, что подходящей заменой переменных дифференциальное уравнение может быть сведено к более простому виду.

5.2. Замена независимых переменных в выражении, содержащем частные производные.

В дифференциальном выражении

$$B=F(x,y,z,z'_x,z'_y,z''_{xx},z''_{yy},\ldots)$$

перейти к новым независимым переменным u, v, если новые и старые переменные связаны соотношениями: $u=\varphi(x,y)$, $v=\Psi(x,y)$ или $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$.

Способы решения рассмотрим на примерах.

ПРИМЕР 5.2. Преобразовать уравнение $x^2z''_{xx}-y^2z''_{yy}=0$, приняв u и v за новые независимые переменные, где $u=xy$, $v=x/y$.

Рассмотрим z как сложную функцию переменных x, y, то есть $z=z(u(x,y),v(x,y))$. Дифференцируем ее по x и по y

$$\begin{aligned} z'_x&=z'_uu'_x+z'_vv'_x=z'_uy+\frac{z'_v}{y},\\ z'_y&=z'_uu'_y+z'_vv'_y=z'_ux-z'_v\frac{x}{y^2}. \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Находим вторые производные, учитывая, что

$z'_u=z'_u\left[u(x,y),v(x,y)\right]$, $z'_v=z'_v(u(x,y),v(x,y))$,

$$z''_{xx}=(z''_{uu}u'_x+z''_{uv}v'_x)u'_x+z'_u u''_{xx}+z'_v v''_{xx}+$$
$$+(z''_{vu}u'_x+z''_{vv}v'_x)v'_x=z''_{uu}y^2+2z''_{uv}+z''_{vv}\frac{1}{y^2},$$

Аналогично получаем

$$z''_{yy}=z''_{uu}x^2-2z''_{uv}\frac{x^2}{y^2}+z''_{vv}\frac{x^4}{y^4}+z'_v\frac{2x}{y^3}$$

Подставляя найденные производные в исходное уравнение, после несложных преобразований, имеем:

$$z''_{uv}=z'_v\cdot\frac{1}{2u}.$$

ПРИМЕР 5.3. Преобразовать выражение $\Delta z=z''_{xx}+z''_{yy}$, если $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (5.4)

РЕШЕНИЕ. Запишем функцию z в виде $z(x,y)=z(r(x,y),\varphi(x,y))$ и продифференцируем по x и y:

$$z'_x=z'_r r'_x+z'_\varphi\varphi'_x,\quad z'_y=z'_r r'_y+z'_\varphi\varphi'_y \qquad (5.5)$$

Частные производные r'_x, φ'_x, r'_y и φ'_y находим, дифференцируя систему (5.4) по x и y:

$$\cos\varphi\cdot r'_x-r\sin\varphi\cdot\varphi'_x=1,\qquad \cos\varphi\cdot r'_y-r\cdot\sin\varphi\cdot\varphi'_y=0$$
$$\sin\varphi\cdot r'_x+r\cdot\cos\varphi\cdot\varphi'_x=0;\qquad \sin\varphi\cdot r'_y+r\cdot\cos\varphi'_y=1.$$

Отсюда

$$r'_x=\cos\varphi,\quad \varphi'_x=-\frac{\sin\varphi}{r},\quad r'_y=\sin\varphi,\quad \varphi'_y=\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Подставим найденные производные в систему (5.5):

$$z'_x=z'_r\cos\varphi-z'_\varphi\frac{\sin\varphi}{r},\quad z'_y=z'_r\sin\varphi+z'_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Найдем вторые производные, применяя правило (5.5) к функциям z'_x и z'_y,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\cos\varphi+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)=$$
$$=z''_{rr}\cos^2\varphi-z''_{\varphi r}\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r}+z'_\varphi\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r}-z''_{r\varphi}\frac{\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r}+$$
$$z'_r\frac{\sin^2\varphi}{r}+z''_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}+z'_\varphi\frac{\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r^2}=$$
$$z''_{rr}\cdot\cos^2\varphi-2z''_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r}+z'_r\frac{\sin^2\varphi}{r}+z''_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2},$$

аналогично получим

$$z''_{yy}=z''_{rr}\sin^2\varphi+2z''_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{r}+z'_r\frac{\cos^2\varphi}{r}-2z'_\varphi\frac{\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r^2}+$$
$$+z''_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}.$$

Окончательно имеем:

$$\Delta z=z''_{rr} + \frac{1}{r}z'_r + \frac{1}{r^2}z''_{\varphi\varphi}.$$

5.3. Замена независимых переменных и функции в выражении, содержащем частные производные.

ПРИМЕР 5.4. Произвести замену переменных в выражении $\Delta z=z''_{xx}+z''_{yy}$, если

$$x=u+w, \quad y=v-w, \quad z=w \qquad (5.6)$$

Учитывая (5.6), представим функцию $z=z(x,y)$ в виде:

$$z(x,y)=z(x(u,v),y(u,v))$$

и продифференцируем ее по независимым переменным u и v:

$$z'_u=z'_x\cdot x'_u+z'_y\cdot y'_u,$$
$$z'_v=z'_x\cdot x'_v+z'_y\cdot y'_v. \qquad (5.7)$$

Производные x'_u, y'_u, x'_v, y'_v, z'_u и z'_v найдем из системы (5.6), учитывая, что $w=w(u,v)$, и подставим в (5.7)

$$w'_u= z'_x(1+w'_u) + z'_y(-w'_u),$$
$$w'_v= z'_x(w'_v) + z'_y(1-w'_v), \qquad (5.8)$$

Решая систему (5.8), найдем производные:

$$z'_x=\frac{w'_u}{1+w'_u-w'_v}, \qquad z'_y=\frac{w'_v}{1+w'_u-w'_v}.$$

Для нахождения вторых производных дифференцируем систему (5.8) еще раз, учитывая что z'_x и z'_y, как и z, зависят от $x(u,v)$, $y(u,v)$:

$$w''_{uu}=z''_{xx}(1+w'_u)^2 + 2z''_{xy}(1+w'_u)(-w'_u) + z''_{yy}(w'_u)^2+ z'_x w''_{uu} - z''_{xx} w''_{uu},$$
$$w''_{uv}= z''_{xx}(1+w'_u)w'_v + z''_{xy}\left[(1-w'_v)(1+w'_u) +(-w'_u)(w'_v)\right]+$$
$$z''_{yy}(-w'_u)(1-w'_v) + (z'_x- z'_y)w''_{uv}, \qquad (5.9)$$
$$w''_{vv}=z''_{xx}(w'_v)^2+2z''_{xy}(1-w'_v)\cdot w'_v+ z''_{yy}(1-w'_v)^2+(z'_x-z'_y)w''_{vv}.$$

Решив систему (5.9), найдем нужные производные и подставим в исходное выражение.

ПРИМЕР 5.5. В выражении: $\Delta z=z''_{xx}+z''_{yy}$ произвести замену переменных:

$$u=x+y, \quad v=y-z, \quad w=x-z \qquad (5.10)$$

Пусть $w=w(u,v)$. Учитывая (5.10), получим $w=w(u(x,y),v(x,y))$.

Дифференцируя последнее выражение по независимым переменным x и y, имеем:

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x,$$
$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y. \qquad (5.11)$$

Производные u'_x, v'_x, w'_x, u'_y, v'_y, w'_y находим из (5.10) и подставляем в (5.11)

$$1 - z'_x = (1 + z'_x) w'_u - z'_x \cdot w'_v,$$
$$-z'_y = z'_y \cdot w'_u + (1 - z'_y) w'_v.$$

Решая относительно производных, получим

$$z'_x = \frac{1 - w'_u}{1 + w'_u - w'_v}, \qquad z'_y = \frac{w'_v}{1 + w'_u - w'_v}. \qquad (5.12)$$

Для нахождения производных второго порядка нужно продифференцировать соотношение (5.12) еще раз, учитывая, что w'_u и w'_v зависят от $u(x,y)$, $v(x,y)$:

$$z''_{xx} = \frac{(w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} v'_x) \cdot (w'_v - w'_u - 1)}{(w' - w' - 1)^2} - \frac{(w'_u - 1)(-w''_{uu} u'_x + w''_{uv}(u'_x - v'_x) + w''_{vv} v'_x)}{(w'_v - w'_u - 1)^2}.$$

Аналогично находятся и остальные производные.

Производные u'_x, v'_x, w'_x, u'_y, v'_y, w'_y находим из (5.10) и подставляем в (5.11)

$$1 - z'_x = (1 + z'_x) w'_u - z'_x \cdot w'_v,$$
$$-z'_y = z'_y \cdot w'_u + (1 - z'_y) w'_v.$$

Решая относительно производных, получим

$$z'_x = \frac{1 - w'_u}{1 + w'_u - w'_v}, \qquad z'_y = \frac{w'_v}{1 + w'_u - w'_v}. \qquad (5.12)$$

Для нахождения производных второго порядка нужно продифференцировать соотношение (5.12) еще раз, учитывая, что w'_u и w'_v зависят от $u(x,y)$, $v(x,y)$:

$$z''_{xx} = \frac{(w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} v'_x) \cdot (w'_v - w'_u - 1)}{(w' - w' - 1)^2} - \frac{(w'_u - 1)(-w''_{uu} u'_x + w''_{uv}(u'_x - v'_x) + w''_{vv} v'_x)}{(w'_v - w'_u - 1)^2}.$$

Аналогично находятся и остальные производные.

6.2. Достаточные условия строгого экстремума.

Пусть функция $z=f(x_1,\dots,x_n)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности $U_\delta(M_0)$ своей стационарной точки M_0. Тогда второй дифференциал функции f в рассматриваемой точке M_0 представляет собой квадратичную форму относительно переменных $dx_1, dx_2,\dots,dx_n$:

$$d^2f=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\cdot\partial x_j}(M_0)dx_i dx_j \qquad (6.2)$$

От свойств этой квадратичной формы, а вернее от знака d^2f, и зависит решение рассматриваемого вопроса о достаточных условиях экстремума. Введем обозначения:

$$a_{ij}=f''_{x_i x_j}(M_0),\quad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,n. \qquad (6.3)$$

По критерию Сильвестра, для того, чтобы квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}dx_i dx_j, \qquad (6.4)$$

где $dx_1^2+dx_2^2+\dots+dx_n^2>0$, была

1) положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась цепь неравенств:

$a_{11}>0$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\dots,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}>0,$$

2) отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы -

$a_{11}<0$,

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}<0,\dots,$$

n+1

$$(-1)^n\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}<0$$

Теперь можно сформулировать достаточное условие

существования экстремума функции в точке M_0:
если квадратичная форма d^2f знакоопределена, то в точке M_0 есть экстремум. При этом, если
$d^2f>0$ - положительно определена, то в точке M_0 - минимум;
$d^2f<0$ - отрицательно определена, - в точке M_0 максимум.

Условие отсутствия экстремума.

Если квадратичная форма (6.4) будет знаконеопределенной (то есть она способна принимать значения разных знаков в зависимости от dx_1, $dx_2, \dots, dx_n$, то в испытываемой точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ экстремума нет (практически это означает, что не выполняется одна из цепочек неравенств 1) или 2)).

Особенно просты и понятны достаточные условия экстремума для случая функции двух переменных, $z=f(x,y)$.

Скажем, что в стационарной точке $M_0(x^0, y^0)$

1) будет экстремум, если $f''_{xx}f''_{yy}-(f''_{xy})^2>0$. При этом, в точке M_0 мимимум, если $f''_{xx}>0$ $(f''_{yy}>0)$, максимум, если $f''_{xx}<0$ $(f''_{yy}<0)$;

2) экстремума нет, если
$f''_{xx}f''_{yy}-(f''_{xy})^2<0$;

3) Если $f''_{xx}f''_{yy}-(f''_{xy})^2=0$, то для исследования экстремума функции должны быть привлечены производные высших порядков. В частности, это должно быть сделано, если все частные производные второго порядка в стационарной точке равны нулю. Для выяснения вопроса о существовании экстремума в этом случае можно непосредственно рассмотреть приращение функции в стационарной точке.

Например, при исследовании на экстремум функции

$$z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$$

оказывается, что в стационарной точке $O(0,0)$

$$a_{11}a_{22}-(a_{12})^2=0, \qquad a_{11}=-2.$$

Составим приращение этой функции в точке $(0,0)$ и исследуем знак этого приращения в некоторой окрестности точки $O(0,0)$:
$\Delta z(0,0)= z(h,k)-z(0,0)=h^4+k^4-h^2-2kh-k^2= k^4+h^4-(k+h)^2$.

Если $k=-h$, то $\Delta z>0$, если же $k=h$ и $|k|<\sqrt{2}$, то $\Delta z=2h^2(h^2-2)<0$. Следовательно, приращение функции в окрестности точки (0,0) принимает значение разных знаков, а потому в этой точке экстремума нет.

6.3 Экстремум неявно заданной функции.

Пусть функция $z=z(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1,\dots,x_n)\in D\subset R^n$ задана неявно уравнением: $F(x_1,\dots,x_n,z)=0$, (то есть $F(x_1,\dots,x_n,z(x_1,\dots,x_n))\equiv 0$, $\forall(x_1,\dots,x_n)\in D$) и является дважды непрерывно дифференцируемой в D. Стационарные точки такой функции могут быть найдены из системы

$$\begin{aligned}&F'_{x_i}=0,\\ &i=1,\dots,n\\ &F=0\end{aligned} \tag{6.5}$$

В стационарной точке M_0, как было показано выше, $dz=0$. Учитывая это, имеем:

$$d^2z=-\frac{1}{F'_z}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2F}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i dx_j \tag{6.6}$$

Определяем знак d^2z с помощью исследования знака квадратичной формы $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}dx_i dx_j$, где $a_{ij}=-\frac{1}{F'_z(M_0)}\frac{\partial^2F}{\partial x_i\,\partial x_j}(M_0)$.

ПРИМЕР 6.1 Исследовать на экстремум функцию:

$$u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$$

Из системы уравнений:

$$\begin{aligned}&u'_x=3x^2+12y=0 &\qquad& x^2-24x=0\\ &u'_y=2y+12x=0 && y=-6x\\ &u'_z=2z+2=0 && z=-1\end{aligned}$$

получаем две стационарные точки: $M_1(0,0,-1)$, $M_2(24,-144,-1)$.

Найдем вторые частные производные функции:

$u''_{xx}=6x$, $u''_{xy}=12$, $u''_{xz}=0$, $u''_{yy}=2$, $u''_{yz}=0$, $u''_{zz}=2$.

Исследуем стационарную точку $M_1(0,0,-1)$:

$a_{11}=0$, $\begin{vmatrix}0&12\\12&2\end{vmatrix}<0$,

$$\begin{vmatrix}0&12&0\\12&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}<0,$$

то есть квадратичная форма не является знакоопределенной (не выполняется цепочка неравенств 1) или 2) в критерии Сильвестра). В стационарной точке M_1 экстремума нет.

Теперь исследуем точку M_2:

$a_{11}=144>0,$

$$\begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}>0,\ldots,$$

$$\begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}>0,$$

т.е. в точке M_2 - минимум, $u_{mim}(M_2)=-6913$.

<u>ПРИМЕР</u> <u>6.2.</u> Исследовать на экстремум функцию, заданную уравнением:

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0, \quad z=z(x,y)$$

Составим систему (6.5) для нашей функции:

$$F'_x=2x-2=0 \qquad x=1$$
$$F'_y=2y+2=0 \qquad y=-1$$
$$F=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0 \qquad z_1=-2, \quad z_2=6$$

Итак, имеем две стационарные точки:

$$M_1(1,-1,-2), \quad M_2(1,-1,6).$$

Для проверки достаточных условий находим

$$F'_z=2z-4, \quad F''_{xx}=2, \quad F''_{xy}=0, \quad F''_{yy}=2$$

Вычисляем второй дифференциал в стационарных точках по формуле (6.6):

$d^2z(1,-1,-2)=\frac{1}{12}(2dx^2+2dy^2)>0$, т.е. в точке M_1 - min и $z_{min}=z(1,-1)=-2$.

$d^2z(1,-1,6)=-\frac{1}{8}(2dx^2+2dy^2)<0$ - в точке M_2 - max., $z_{max}=z(1,-1)=6$.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u> <u>6.1.</u> Нужно понимать, что исходное уравнение, вообще говоря, задает не одну функцию $z=z(x,y)$, поэтому в приведенном примере найдены экстремумы разных функций.

<u>6.4.</u> <u>Условный экстремум функции.</u>

Пусть функция $u=f(x_1,\ldots,x_n)=f(x)$ определена в области

$D\subset\mathbb{R}^n$. На переменные $x_1,\dots,x_n$ наложено m ограничений $(m<n)$ с помощью уравнений:

$$\varphi_i(x_1,\dots,x_n)=0, \quad x=(x_1,\dots,x_n)\in D, \quad i=1,\dots,m. \qquad (6.7)$$

Последние называются уравнениями связи. Множество точек из области ЗD, удовлетворяющих условиям (6.7) обозначим E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Точка $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)\in E$ называется точкой условного max (min) функции $f(x_1,\dots,x_n)$ при выполнении условий связи (6.7), если неравенство $f(x^0)\geq f(x)$ $(f(x^0)\leq f(x))$ выполняется для всех $x\in U_\delta(x^0)\cap E$, где $U_\delta(x^0)$ - некоторая δ-окрестность точки M_0 в $\mathbb{R}^n$.

Обычно, для исследования точек условного экстремума применяется метод неопределенных множителей Лагранжа, суть которого состоит в том, что вместо условного экстремума ищется обычный экстремум другой функции при определенных условиях на $dx_1,\dots,dx_n$.

Введем в рассмотрение функцию

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=f(x_1,\dots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi(x_1,\dots x_n),$$

которую будем называть функцией Лагранжа, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ - множителями Лагранжа. Для нахождения стационарной точки функции Лагранжа нужно решить систему:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=0, & i=1,\dots,n\\ \varphi_j(x_1,\dots,x_n)=0, & j=1,\dots,m,\end{cases} \qquad (6.8)$$

из которой находятся $x_1^0,\dots,x_n^0,\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0$.

Если второй дифференциал функции Лагранжа с учетом продифференцированных уравнений связи (т.е. выражений

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\,dx_j=0, \qquad i=1,\dots,m) \qquad (6.9)$$

в точке $M_0\in E$ есть положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма, то в точке M_0 есть условный минимум (максимум) функции $u=f(x)$. Если же квадратичная форма не является знакоопределенной, то условного экстремума в точке M_0 нет.

ПРИМЕР 6.3. Исследовать на условный экстремум функцию $u=xy+yz$, если $x^2+y^2=2$, $y+z=2$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$

Рассмотрим функцию Лагранжа:

$L(x,y,z,\lambda,\mu)=xy+yz+\lambda(x^2+y^2-2)+\mu(y+z-2)$.

Составим систему для нахождения стационарных точек и чисел λ, μ:

$$\begin{cases} L'_x=y+2\lambda x=0 \\ L'_y=x+z+2\lambda y+\mu=0 \\ L'_z=y+\mu=0 \\ \varphi_1=x^2+y^2-2=0 \\ \varphi_2=y+z-2=0, \end{cases}$$

откуда найдем

$\lambda=-\frac{1}{2}$, $\mu=-1$, $x_0=y_0=z_0=1$.

Запишем второй дифференциал d^2L в найденной точке $M_0(1,1,1)$;
$d^2L=-dx^2-dy^2+2dxdy+2dydz$. Необходимо помнить, что dx, dy, dz изменяются не произвольным образом, а с учетом равенств (6.9). Из продифференцированных уравнений связи имеем:

$dy=-dx$, $dy=-dz$, поэтому $d^2L=-dx^2-3dy^2-2dz^2<0$.

Следовательно, в точке $M_0(1,1,1)$ функция $u=xy+yz$ имеет условный максимум, $u_{max}=u(1,1,1)=2$

ПРИМЕР 6.4. Исследовать на условный экстремум $z=e^{xy}$, если $x+y=1$.

Исследуем эту функцию без применения метода неопределенных множителей Лагранжа. Из уравнения связи найдем $y=1-x$, тогда подставляя y в формулу, задающую функцию, получим $z=e^{x(1-x)}$
Исследуем на локальный экстремум функцию одного переменного.

$$z'_x=e^{x(1-x)}(1-2x)=0$$

Функция имеет единственную стационарную точку $x_0=\frac{1}{2}$, а значит исходная функция имеет одну точку подозрительную на условный экстремум $M_0(x_0,y_0)$, где $y_0=1-x_0=\frac{1}{2}$, т.е. $M_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Так как при переходе через $x_0=\frac{1}{2}$ производная z'_x меняет свой знак с "+" на "-", то в точке $M_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ функция $z=e^{xy}$ имеет условный максимум, $z_{max}=z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\sqrt[4]{e}$.